

UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Robuste Parameterschätzung für Elektrofahrzeuge

Simon Beyer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und
Informationstechnik der Universität der Bundeswehr München
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Gutachter/Gutachterin:

1. Prof. Dr.-Ing. Christian Endisch
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Weyh

Die Dissertation wurde am 10. August 2018 bei der
Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für
Elektrotechnik und Informationstechnik am 21. Januar 2019 angenommen.

Die mündliche Prüfung fand am 12. April 2019 statt.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Forschungsgruppe Elektromobilität und lernfähige Systeme an der Technischen Hochschule in enger Kooperation mit der Abteilung für Bewegungs- und Effizienzmanagement der AUDI AG in Ingolstadt.

Mein erster Dank gilt meinem Doktorvater Professor Christian Endisch, Leiter der Forschungsgruppe Elektromobilität und lernfähige Systeme der Technischen Hochschule Ingolstadt, für die wissenschaftliche Betreuung und die fachliche Diskussion. Weiterhin möchte ich mich bei Professor Thomas Weyh vom Lehrstuhl für Elektrische Energieversorgung der Universität der Bundeswehr München für die wertvolle fachliche Unterstützung und das mir entgegengebrachte Vertrauen für die wissenschaftliche Freiheit bedanken.

Mein besonderer Dank gilt den Mitarbeitern der Abteilung für Bewegungs- und Effizienzmanagement der AUDI AG in Ingolstadt, durch deren Unterstützung diese Arbeit erst möglich wurde. Besonders bedanke ich mich bei Reimund Limbacher, der den Anstoß für diese Arbeit gegeben hat sowie bei Jan Martin, Max Adamek, Manfred Holzmann und Marc Finkbohner für die fachlichen und kritischen Diskussionen.

Des weiteren bedanke ich mich bei allen Kollegen der Forschungsgruppe Elektromobilität und lernfähige Systeme für die fortwährende Hilfsbereitschaft und das überaus gute Arbeitsklima. Insbesondere gilt mein Dank Tino Müller, Lukas Leitner, Ulrich Vögele, Patrick Herrmann, Johannes Ziegmann und Martin Gerngroß, die mich mit wertvollen Ratschlägen bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Außerdem danke ich Jieqing Shi, Khanh Duy Trieu und Thomas Hoffmann für deren Mitarbeit bei meinem Forschungsprojekt in Form von Studienarbeiten.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Mutter und Caro für die jahrelange Unterstützung bedanken, welche die Grundlage für die vorliegende Arbeit bilden.

Kurzfassung

Die Adaption von Parametern des Fahrzeugs und seines Antriebsstrangs während der Fahrt können das Verhalten von Elektrofahrzeugen verbessern. Diese Arbeit stellt robuste Algorithmen für die Schätzung der Kennwerte von Fahrzeuglängsdynamik, von Asynchronmaschinen und von Lithium-Ionen-Zellen vor. Auf Basis von Fahrzeug- und Prüfstandsmessungen erfolgt die Problemanalyse, Herleitung und Validierung der robusten Algorithmen.

Bei der Schätzung der Fahrzeuglängsdynamikparameter, zu denen die Masse und die Fahrwiderstände gehören, kommt es durch Messausreißer zu Abweichungen in den Schätzgrößen. Weiterhin ist in Phasen mit mangelnder Anregung, z. B. bei Konstantfahrt, die Systemanregung zu gering für eine geeignete Parameteradaption. Durch diese beiden Probleme kann es zu Schätzungen kommen, die physikalisch nicht sinnvoll sind, wie etwa negative Fahrwiderstände. Der vorgestellte Algorithmus minimiert den Einfluss von Messausreißern und mangelnder Systemanregung und hält vorgegebene Wertebereiche für die Parameter ein. Zudem stellt diese Arbeit eine Möglichkeit vor, den Bremsenparameter, der den Zusammenhang zwischen Bremsdruck und Bremsmoment darstellt, zu adaptieren.

Bei der Schätzung der elektrischen Parameter einer Asynchronmaschine ergeben sich andere Herausforderungen. Zum einen ist das Problem überbestimmt, da die Schätzgleichung weniger unabhängige Größen besitzt als das physikalische Modell. Zum anderen benötigt die Asynchronmaschine ein zusätzliches Anregungssignal, damit eine ausreichende Systemanregung für die Parameterschätzung vorhanden ist. Zudem ist eine zusätzliche robuste Ableitungsberechnung für die Schätzung notwendig.

Bei der Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen kommt das gleiche robuste Schätzverfahren wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung zum Einsatz, da die beiden Anwendungen ähnliche Probleme besitzen.

Abstract

The adaption of parameters of the vehicle and its powertrain during the trip can improve the performance of electrical vehicles. This work presents robust algorithms for the estimation of characteristic values for the vehicle longitudinal dynamics, for induction machines and for Lithium-ion cells. The problem analysis, derivation and validation of the robust algorithms is performed on the basis of measurement data from vehicles and test benches.

Measurement outliers occur for the estimation of parameters of the vehicle longitudinal dynamics, which consist of mass and driving resistances. This can lead to deviations in the results. Furthermore, during phases of low excitation, e. g. when driving with constant velocity, the system excitation is insufficient for an appropriate estimation. Due to these two problems, the estimates can assume values beyond a physically meaningful range, e. g. negative driving resistances. The presented algorithm minimizes the influence of measurement outliers as well as insufficient excitation and yields estimates inside a predefined range.

The estimation of the electrical parameters of an induction machine shows different challenges. On the one hand, the problem is over-determined as the estimation equation has fewer independent parameters as the physical model. On the other hand the induction machine requires an additional excitation signal that guarantees sufficient system excitation for the parameter adaption. In addition the estimation needs a robust calculation for the signal differentiation.

The estimation of Lithium-ion cell parameters uses the robust algorithm developed for the estimation of vehicle mass and driving resistances as both applications have similar problems.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Kurzfassung	v
Abstract	vii
Inhaltsverzeichnis	ix
Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xvii
Abkürzungen	xix
Symbole	xxiii
1 Einleitung und Zielsetzung	1
1.1 Einführung	1
1.2 Ausgangspunkt und Zielsetzung	4
1.3 Aufbau der Arbeit	6
2 Grundlagen der Parameterschätzung	9
2.1 Modelle	9
2.1.1 Experimentelle Modellierung	10
2.1.2 Physikalische Modellierung	11
2.2 Least-Squares-Schätzung	12
2.2.1 Kovarianz der Parameterschätzung	14
2.2.2 Gewichteter Least Squares Algorithmus	15
2.3 Recursive Least Squares Schätzung	16
2.3.1 Initialisierung des Recursive Least Squares Schätzers	21
2.3.2 Recursive Least Squares Schätzung mit exponentiellem Vergessen	23
3 Robuste Parameterschätzung für die Fahrzeuglängsdynamik	27
3.1 Stand der Technik zur Parameterschätzung der Fahrzeuglängsdynamik	27
3.2 Modellierung der Fahrzeuglängsdynamik	32
3.2.1 Fahrzeugkoordinatensysteme	34
3.2.2 Fahrwiderstände	35
3.2.2.1 Steigungskraft	35
3.2.2.2 Strömungswiderstand	36

3.2.2.3	Radwiderstand	37
3.2.2.4	Kurvenwiderstand	38
3.2.2.5	Bremskraft	41
3.2.3	Antriebsstrang	42
3.2.4	Fahrzeuglängsdynamik	46
3.2.5	Parameterschätzung für die Fahrzeuglängsdynamik	46
3.3	Versuchsbeschreibung	48
3.4	Problemanalyse	50
3.4.1	Wahl der Modellgröße	50
3.4.1.1	Das Bias-Varianz-Dilemma	50
3.4.1.2	Verfahren zur Wahl der Modellgröße	55
3.4.1.3	Ideale Modellgröße für die Fahrzeuglängsdynamik	57
3.4.2	Messausreißer und stochastische Verteilung der Messfehler	61
3.4.2.1	Messausreißer	64
3.4.2.2	Maximum-Likelihood-Schätzung	68
3.4.2.3	Verteilungsfunktion der Messfehler	70
3.4.3	Systemanregung und Windup-Effekt	73
3.4.4	Statistische Bedingungen an die Signale	76
3.4.4.1	Statistische Bedingungen an das Residuum	76
3.4.4.2	Stochastische Bedingungen an den Regressorvektor	79
3.4.5	Sensitivitätsanalyse der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung	86
3.5	Robuste Parameterschätzung	94
3.5.1	Robustheit gegenüber Messfehlern durch M-Schätzer	95
3.5.1.1	Detektion von Messausreißern	95
3.5.1.2	Robustheit durch Anpassen der Kostenfunktion	98
3.5.1.3	Robuster M-Schätzer mit Vergessen	108
3.5.1.4	Vergleich der suboptimalen Lösung von Recursive Least M-Schätzer und der optimalen Lösung von Iteratively Reweighted Least Squares	111
3.5.2	Robustheit bei geringer Anregung	118
3.5.2.1	Variation des Vergessensfaktors	118
3.5.2.2	Anpassung anhand der Spur der skalierten Kovarianz- matrix \mathbf{P}	120
3.5.2.3	Beeinflussung der skalierten Kovarianzmatrix	121
3.5.2.4	Regularisierung des Least Squares Problems	124
3.5.3	Berücksichtigung von physikalischen Parametergrenzen	133
3.5.3.1	Einfache Parameterbeschränkung durch Projektion	133
3.5.3.2	Optimale Parameterbeschränkung durch Transformation und Projektion	135
3.5.3.3	Optimale Parameterbeschränkung über die Lagrange-Funktion	136
3.5.3.4	Parameterbeschränkung durch weiche Grenzen	138
3.5.4	Zusammenfassung der robusten Parameterschätzung	140
3.5.5	Wahl der initialen Parameter und der initialen Kovarianzmatrix	141
3.6	Ergebnisse der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung	143
3.6.1	Ergebnis der Masseschätzung	145
3.6.2	Prädiktion der Ausrollkurven	147

3.6.3	Schätzung des Bremskoeffizienten	150
4	Robuste Parameterschätzung für die Asynchronmaschine	153
4.1	Stand der Technik zur Parameterschätzung bei Asynchronmaschinen . . .	153
4.2	Modellierung einer Asynchronmaschine	156
4.3	Versuchsbeschreibung	159
4.4	Problemanalyse und robuste Parameterschätzung	160
4.4.1	Strukturelle Identifizierbarkeit	160
4.4.2	Mangelnde Anregung der Eingangssignale	162
4.4.3	Robuste Signalglättung und Signaldifferentiation	164
4.5	Ergebnisse der Parameterschätzung für die Asynchronmaschine	166
5	Robuste Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen	169
5.1	Stand der Technik zur Parameterschätzung bei Akkumulatorzellen	169
5.2	Modellierung einer Lithium-Ionen-Zelle	170
5.3	Versuchsbeschreibung	172
5.4	Problemanalyse und robuste Parameterschätzung	174
5.5	Ergebnisse der Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen	176
6	Zusammenfassung und Ausblick	181
6.1	Fahrzeuglängsdynamik	181
6.2	Asynchronmaschine	183
6.3	Lithium-Ionen-Zelle	183
6.4	Ausblick	184
A	Anhang	185
A.1	Sensitivitätsanalyse	185
A.1.1	Vergleich von infinitesimaler Änderung und Simulation	185
A.1.2	Sensitivität für konstante Signal- und Parameterfehler	187
A.1.3	Sensitivität für multiplikative Signal- und Parameterfehler	191
A.2	Zusammenhang von studentscher t -Verteilung und Cauchy-Verteilung . .	195
A.3	Analytische Berechnung der Ausrollkurven	196
	Literatur	199

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung der Hauptkomponenten eines Elektrofahrzeugs	1
2.1	Blockschaltbild des RLS-Algorithmus	21
3.1	Fahrzeugkoordinatensysteme nach ISO 8855 bzw. DIN 70000 [51, S. 21]	34
3.2	Fahrzeug in der Steigung. Die Anteile der Erdbeschleunigung g sind rechts vergrößert dargestellt.	35
3.3	Erklärung des Rollwiderstands [52, S. 148]	37
3.4	Kräfte am Rad in Kurven für die Herleitung des Kurvenwiderstands	39
3.5	Reifenkennlinie: Zusammenhang von Seitenkraft und Schräglaufwinkel nach [54, S. 144]	40
3.6	Entstehung der Bremskraft nach [54, S. 244]	41
3.7	Schematischer Antriebsstrang eines Hybridfahrzeugs mit P2-Konfiguration	42
3.8	Schematisches Blockschaltbild der Parameterschätzung für die Fahrzeuglängsdynamik	47
3.9	Schematischer Messaufbau und Datenverarbeitung	48
3.10	Überblick der ausgewerteten Testfahrten	49
3.11	Zielkonflikt zwischen Bias- und Varianzfehler [26, S.502]	52
3.12	Beispiel für das Bias-Varianz-Dilemma mit drei Modellen	53
3.13	Wert des normierten Gütemaßes J/N für die Modelle \mathcal{M}_1 bis \mathcal{M}_6	58
3.14	Parameterschätzung einer+6+ Messfahrt für die Modelle \mathcal{M}_1 bis \mathcal{M}_6	60
3.15	Ausreißer in der Schätzung von Fahrzeugmasse \hat{m} , Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_r$ und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fgz}$	62
3.16	Ausreißer in der Schätzung von Fahrzeugmasse \hat{m} , Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_r$ und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fgz}$ (Ausschnitt aus Abbildung 3.16)	63
3.17	Streudiagramm der Schätzungen des Ausgangs \hat{y} gegenüber den Messungen y für die Testfahrt aus Abbildung 3.15	64
3.18	Streudiagramm der Schätzungen des Ausgangs \hat{y} über den Messungen y mit 95%-Konfidenzellipse	65
3.19	Synthetisches Regressionsbeispiel mit regulären Datenpunkten, vertikalen Ausreißern, guten Hebelpunkten und schlechten Hebelpunkten [65]	65
3.20	Standardisiertes Residuum über das MD-Maß	66
3.21	Herleitung des LS-Verfahrens durch spezielle Annahmen an den Bayeschätzer [26, S. 321]	69
3.22	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{e} \hat{\boldsymbol{\theta}})$ der realen Residuen im Vergleich zu angepasster studentscher t -Verteilung und Gaußverteilung	71

3.23	Verhalten der Parameterschätzung und der \mathbf{P} -Matrix für RLS mit und ohne Vergessen bei Fahrten mit mangelnder Anregung	75
3.24	Berechnete Autokorrelation einer Messfahrt im Vergleich zu optimalem weißen Rauschen	78
3.25	Kreuzkorrelation des Regressorvektors ϕ und des Modellfehlers e einer Messung	79
3.26	Gemessene und gefilterte Signale von Längsbeschleunigung a_x und Geschwindigkeit v_x mit zugehörigen SNR-Werten	80
3.27	Blockschaltbild eines allgemeinen EIV-Modells [72]	81
3.28	Synthetisches Beispiel zum gewöhnlichen LS-Verfahren und TLS-Verfahren	81
3.29	LS-Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} mit unterschiedlich starkem Rauschen der Längsbeschleunigung	84
3.30	Abhängigkeit des berechneten Bias \mathbf{b}_{EIV} und der Abweichung der Schätzung $\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ vom SNR-Wert der Längsbeschleunigung	85
3.31	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δr_R im Radradius	89
3.32	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δ_{M_A} im Antriebsmoment	91
3.33	Übersicht der Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δu_i	92
3.34	Übersicht der Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δu_i	92
3.35	Abweichung der LS-Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ und der Median-Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{med}$ für unterschiedliche Anzahl an Messausreißern [66]	99
3.36	(Pseudo)-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(e \boldsymbol{\theta})$, Gütefunktion $\rho(e)$, Einflussfunktion $\psi(e)$ und Gewichtungsfunktion $w(e)$ für LS-Schätzer, Huber-, Hampel- und studentschen M-Schätzer	106
3.37	Zusammenhang zwischen gewöhnlichem LSeV-Verfahren und robustem M-Schätzer mit exponentiellem Vergessen für Offline-Berechnung und rekursiver Berechnung	114
3.38	Masseschätzung \hat{m} für verschiedene rekursive und nichtrekursive Schätzverfahren	115
3.39	Anzahl der notwendigen Iterationen bis zur Konvergenz für das IRLS-Verfahren und das RIRLS-Verfahren	116
3.40	Vergleich von RLSeV mit und ohne SG-Anti-Windup	123
3.41	Vergleich von RLSeV-Verfahren mit und ohne LM-Regularisierung	132
3.42	Anschauliche Darstellung von unbeschränkter Parameterschätzung (links), externer (Mitte) und interner (rechts) Parameterbeschränkung	134
3.43	Abweichungen der beschränkten Schätzung durch einfache Projektion $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj}$ zur optimalen, begrenzten Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{b,opt}$	134
3.44	Prinzip der optimalen Projektion nach Goodwin und Sin [110, S. 93]	136
3.45	Vergleich unterschiedlicher Verfahren zur Parameterbeschränkung bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung	139
3.46	Wahrscheinlichkeiten für die Normalverteilung innerhalb von Vielfachen der Standardabweichung σ_x um den Mittelwert μ_x	142
3.47	Vergleich der Ergebnisse von gewöhnlichem RLSeV-Algorithmus und robustem RLS-Algorithmus für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung	144

3.48	Boxplot zur Beschreibung der Verteilung des NMSE-Werts der Masse-schätzung \hat{m} für gewöhnlichen und robusten RLS-Algorithmus	146
3.49	Prädizierte Geschwindigkeit \hat{v}_x der Ausrollkurven im Vergleich zur tatsächlichen Geschwindigkeit v_x und Fahrbahnneigung Δz	148
3.50	Boxplot zur Beschreibung der Verteilung des Fehlers $\Delta\hat{v}_x$ in der Geschwindigkeitsprädiktion	149
3.51	Schätzung des Bremskoeffizienten \hat{c}_p	150
4.1	Stationäres elektrisches Ersatzschaltbild der ASM mit Kurzschlussläufer, ohne Sättigungseffekte, ohne Eisenverluste [128, S. 455]	156
4.2	Schematischer Aufbau der Versuchsanlage für die Parameterschätzung der ASM	160
4.3	Messung von i_S^α sowie Berechnung der erste und zweiten Ableitung durch numerische Differentiation und Savitzky-Golay-Glättung	166
4.4	Einfluss des Anregungssignals im i_S^d -Strom auf die Schätzung von elektrischen Parametern der ASM	167
5.1	Elektrisches Ersatzschaltbild der Lithium-Ionen-Zelle	171
5.2	Anordnung der Antriebsstrangkomponenten eines Mitsubishi i-MiEV nach [133]	173
5.3	Einbeilage der Stromsensoren	173
5.4	Schematische Darstellung der Datenerfassung am i-MiEV	174
5.5	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{e} \hat{\boldsymbol{\theta}})$ der realen Residuen im Vergleich zu angepasster studentscher t -Verteilung und Gaußverteilung	175
5.6	Schätzparameter von gewöhnlichem RLSeV-Verfahren und robustem RLS sowie zugehörige Diagonaleinträge der Kovarianzmatrix für die Schätzung der Parameter von Lithium-Ionen-Zellen	177
5.7	Gemessene Ausgangsspannung des Akkumulators und geschätzte Parameter	179
A.1	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler ΔM_A im Antriebsmoment	188
A.2	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δa_x in der Längsbeschleunigung	188
A.3	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler $\Delta \rho_L$ in der Luftdichte	189
A.4	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δv_x in der Geschwindigkeit	190
A.5	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δr_{Rad} im Radradius	191
A.6	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δa_x in der Längsbeschleunigung	192
A.7	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler $\Delta \rho_L$ in der Luftdichte	193
A.8	Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δv_x in der Geschwindigkeit	194

Tabellenverzeichnis

2.1	Gewichtungsfaktoren nach Gleichung (2.57) für $N = 50$	23
3.1	Übersicht über den Stand der Technik zur Fahrzeugmasse- und Fahrwi- derstandsschätzung	33
3.2	Übersicht über die Bewertung des Beispiels zum Bias-Varianz-Dilemma . .	54
3.3	Parameter der Normal- und der studentschen t -Verteilung für das Beispiel aus Abbildung 3.22	72
3.4	Übersicht der Sensitivitätsanalyse	93
3.5	Parameter der verschiedenen M-Schätzer für das Beispiel in Abbildung 3.36	107
3.6	Wahrscheinlichkeiten für die Normalverteilung innerhalb eines Bereichs um den Mittelwert herum zu liegen	143
4.1	Konditionszahl κ , kleinster Eigenwert $\lambda_{EW,min}$ und korrespondierender Eigenvektor \mathbf{v}_{min} von \mathbf{R} für das ASM-Modell vierter und fünfter Ordnung	162
4.2	Konditionszahl κ , kleinster Eigenwert $\lambda_{EW,min}$ und zugehöriger Eigenvek- tor von \mathbf{R} ohne und mit eingespeistem Signal in i_S^d	164
4.3	Geschätzte und nominelle Parameter der ASM	167
5.1	Parameter der Normal- und der studentschen t -Verteilung für das Beispiel aus Abbildung 5.5	174

Abkürzungen

ACC	Adaptive Cruise Control
ADTF	Automotive Data and Time-Triggered Framework
AIC	Akaike Information Criterion
ASM	Asynchronmaschine
BMS	Batteriemanagementsystem
CAN	Controller Area Network
CF	Compact Flash
CLF	Compact Log Format
DC	Direct Current
EIV	Errors-in-Variables
EKF	Extended Kalman Filter
EoL	End of Line
ESP	Electronic Stability Control
FAS	Fahrerassistenzsysteme
FIR	Finite Impulse Response
FPE	Final Prediction Error
GM	Gleichstrommaschine
GPS	Global Positioning System
GTLS	Generalized Total Least Squares

IIR	Infinite Impulse Response
IMU	Inertial Measurement Unit
INS	Inertial Navigation System
IRLS	Iteratively Reweighted Least Squares
KNN	Künstliche Neuronale Netze
LCP	Linear Complementarity Problem
LKW	Lastkraftwagen
LM	Levenberg-Marquardt
LMS	Least Median Square
LS	Least Squares
LSeV	Least Squares mit exponentiellem Vergessen
MD	Mahalanobisdistanz
MISO	Multiple Inputs Single Output
MLE	Maximum Likelihood Estimator
MSG	Motorsteuergerät
NMSE	Normalized Mean Squared Error
PE	Persistent Excitation
RIRLS	Recursive Iteratively Reweighted Least Squares
RLM	Recursive Least M-Schätzer
RLS	Recursive Least Squares
RLSeV	Recursive Least Squares mit exponentiellem Vergessen
RLSmV	Recursive Least Squares mit mehrfachem Vergessen
RMS	Root Mean Square
SG	Stenlund-Gustafsson
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SoC	State of Charge

SoH	State of Health
SUV	Sport Utility Vehicle
SVM	Support Vector Machine
TLS	Total Least Squares

Symbole

Symbol Einheit Beschreibung

Allgemein

a Skalar: kleines, normales Symbol

\mathbf{a} Vektor: kleines, fettgedrucktes Symbol; $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

\mathbf{A} Matrix: großes, fettgedrucktes Symbol; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Index

A Antrieb

Akk Akkumulator

Anr Anregung

B Bremse

D Differential, Verteilergetriebe

EM Elektrische Maschine

b Beschränkte Parameterschätzung

f Freie, unbeschränkte Parameterschätzung

Fil Filterung, Glättung

Fzg Fahrzeug

Ge Getriebe

Ha Hampel-M-Schätzer

HBZ Hauptbremszylinder

Hu Huber-M-Schätzer

ii Bezeichnung der vier Räder VL, VR, HL, HR (V=vorne, H=hinten, L=links, R=rechts)

Symbol	Einheit	Beschreibung
K		Kurve
Kp		Kupplung
L		Luft
M		Myriad-M-Schätzer
N		Normalverteilung
P		Am Rotorfluss orientiertes Koordinatensystem, Park-Transformation
R		Rotor
Rad		Rad
Reg		Regularisierung
S		Stator
Sim		Simulation
St		Steigung
t		t -Verteilung
Tay		Taylorreihenentwicklung
VM		Verbrennungsmotor
α, β		Statorfeste Raumzeigerkoordinaten der Asynchronmaschine
d, q		Am Rotorfluss ausgerichtete Raumzeigerkoordinaten der Asynchronmaschine
λ		(Recursive-) Least Squares mit exponentiellem Vergessen
x, y, z		Kartesische Raumkoordinaten
$(\dot{\cdot}), (\ddot{\cdot})$		erste, zweite zeitliche Ableitung einer Größe
$(\hat{\cdot})$		Schätzwert einer Größe
$(\tilde{\cdot})$		Signale, welches mit Fehlern behaftet ist, $\tilde{y} = y + \Delta y$

Modellierung

A	[m ²]	Fläche
a	[m/s ²]	Beschleunigung (als Messwert)
C	[F]	Elektrische Kapazität
$c_{\gamma Rad}$	[N/rad]	Schräglaufsteifigkeit
c_p	[Nm/bar]	Gesamtbremskoeffizient
c_{ri}	[-]	Rollwiderstandskoeffizient für die i -te Potenz der Geschwindigkeit
c_w	[-]	Strömungswiderstandskoeffizient

Symbol	Einheit	Beschreibung
F	[N]	Kraft
f	[Hz]	Frequenz
g	[m/s ²]	Erdbeschleunigung, $g = 9,81\text{m/s}^2$
I, i	[A]	Elektrischer Strom; groß: Gleichstrom; klein: Wechselstrom
i	[-]	Übersetzungsverhältnis
L	[H]	Induktivität
M	[Nm]	Drehmoment
m	[kg]	Masse
p	[Pa]	Druck
R	[Ω]	Elektrischer Widerstand
r	[m]	Radius
R_L	[$\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$]	Spezifische Gaskonstante von Luft, $R_L = 287,058 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
T	[K]	Temperatur
t	[s]	Zeit
U, u	[V]	Elektrische Spannung; groß: Gleichspannung; klein: Wechselspannung
v	[m/s]	Geschwindigkeit
α	[rad]	Wank-/Rollwinkel
β	[rad]	Nick-/Steigungswinkel
γ	[rad]	Gier-/Schräglaufwinkel
η	[-]	Wirkungsgrad
Θ	[kg · m ²]	Massenträgheitsmoment
π	[-]	Kreiszahl; $\pi = 3,1415926\dots$
ρ	[kg/m ³]	Dichte
ψ	[Wb]	Magnetischer Fluss
ω	[rad/s]	Rotationsgeschwindigkeit
Parameterschätzung		
\mathbf{b}	[-]	Bias/Abweichung der Parameterschätzung
bp	[-]	Bruchpunkt
c	[-]	Gewichtung für die weiche Parameterbeschränkung
e	[-]	Residuum/Modellfehler
\mathbf{I}	[-]	Einheitsmatrix
\mathbf{i}	[-]	Kanonischer Einheitsvektor, z. B. $\mathbf{i}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$

Symbol	Einheit	Beschreibung
J	[-]	Gütemaß, Kostenfunktion
k	[-]	Laufvariable für Zeitschritte, $k \in [1, N]$
N	[-]	Länge der Messung in Zeitschritten
n	[-]	Dimension des Modells, Anzahl der Parameter
$p(\cdot)$	[-]	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
\mathbf{P}	[-]	Skalierte Kovarianzmatrix der Parameterschätzung
$Q_{X\%}$	[-]	X %-Quantil
\mathbf{R}	[-]	Informationsmatrix
s	[-]	Schlupfvariable
u	[-]	Eingangssignal
\mathbf{v}	[-]	Eigenvektor
$w(\cdot)$	[-]	Gewichtungsfunktion
\mathbf{W}	[-]	Gewichtungsmatrix des gewichteten Least Squares Verfahrens
y	[-]	Messung des Systemausgangs
γ	[-]	Korrekturvektor
$\Delta(\cdot)$	[-]	Fehler, Abweichung
ε	[-]	Grenzwert
ζ	[-]	Parameter der robusten M-Schätzer
$\boldsymbol{\theta}$	[-]	Parametervektor, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T$
$\kappa(\cdot)$	[-]	Konditionszahl einer Matrix
$\boldsymbol{\Lambda}$	[-]	Gewichtungsmatrix für die Least Squares Lösung mit exponentiellem Vergessen
λ	[-]	Vergessenheitsfaktor, Eigenwert
$\mu(\cdot)$	[-]	Arithmetischer Mittelwert
ν	[-]	Anzahl der Freiheitsgrade der studentschen t -Verteilung
$\boldsymbol{\xi}$	[-]	Transformierte Parameterschätzung, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^{-1/2}\hat{\boldsymbol{\theta}}$
$\rho(\cdot)$	[-]	Kostenfunktion des M-Schätzers
$\boldsymbol{\Sigma}_{Reg}$	[-]	Regularisierungsmatrix
σ	[-]	Standardabweichung
$\boldsymbol{\tau}$	[-]	Lagrange-Multiplikatoren
$\boldsymbol{\phi}$	[-]	Regressorvektor, $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]^T$
χ	[-]	Symbol der χ^2 -Verteilung
$\psi(\cdot)$	[-]	Einflussfunktion

1 Einleitung und Zielsetzung

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung zur vorliegenden Arbeit. Außerdem geht es kurz auf bekannte Verfahren ein und beschreibt in einer Übersicht die Beiträge zum Stand der Technik. Eine Beschreibung zum Aufbau der Arbeit schließt dieses Kapitel ab.

1.1 Einführung

Elektrofahrzeuge stellen einen wichtigen Baustein für eine emissionsfreie und nachhaltige Mobilität dar. Die Hauptkomponenten eines Elektrofahrzeugs sind schematisch in Abbildung 1.1 dargestellt und bestehen aus Karosserie (—), den elektrischen Antriebsmaschinen mit Wechselrichtern (—) und dem Akkumulatorpaket (—). Der Erfolg von

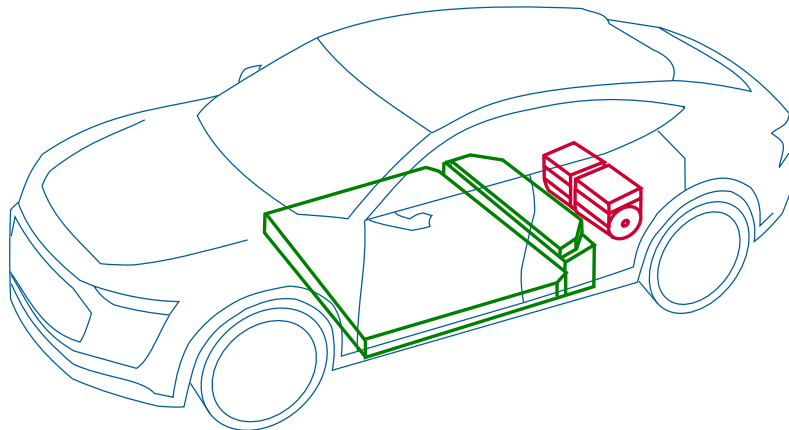


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Hauptkomponenten eines Elektrofahrzeugs

Elektrofahrzeugen hängt von der Kundenakzeptanz, Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit des neuen Antriebskonzepts ab. Die Ermittlung von physikalischen Parametern des Gesamtfahrzeugs und seines Antriebsstrangs während der Fahrt ist ein wichtiger Beitrag für effizienzsteigernde Fahrerassistenzsysteme (FAS), Systemüberwachung, effiziente Regelung und Sensoreinsparung. Die Parameterschätzung muss dabei möglichst

robust ausgelegt sein, damit mögliche Fehlerfälle während eines Fahrzeuglebens kaum eine Auswirkung auf die Schätzergebnisse besitzen.

Moderne FAS bieten das Potenzial, den Fahrer bei einer sicheren, effizienten und komfortablen Fahrweise zu unterstützen und können sowohl in Fahrzeugen mit elektrischem als auch mit konventionellem Antriebsstrang eingesetzt werden. Notbremsassistentensysteme können dem Fahrer Hinweise geben, wenn eine Kollision droht, die Bremse auf eine Notbremsung vorkonditionieren und sogar das Auto bis zum Stillstand verzögern, wenn der Fahrer die Bremsung nicht mehr rechtzeitig einleitet. Prädiktive Effizienzassistenten unterstützen den Fahrer bei einer energiesparenden Fahrweise, indem sie lange vor einem Tempolimit den Hinweis geben, das Fahrzeug ausrollen zu lassen, anstatt kurz vor dem Tempolimit zu bremsen. Der Abstandstempomat (engl.: Adaptive Cruise Control (ACC)) hält eine gewünschte Geschwindigkeit, die der Fahrer einstellt oder die von Kartendaten und von der Verkehrszeichenerkennung bereitgestellt werden. Dabei kann das ACC selbständig beschleunigen und sogar bis zum Stillstand bremsen. Ein Stauassistentensystem kann zusätzlich zum ACC selbständig anfahren und dem Vorderfahrzeug auch in Kurven folgen. Die neueste Ausprägung des ACC kann anhand von Kartendaten das Fahrzeug energie- oder zeitoptimal führen, indem es den Geschwindigkeitsverlauf und Nebenverbraucher optimiert.

All diese FAS greifen in die Längsdynamik des Fahrzeugs ein und benötigen deshalb Information über die Fahrzeugdynamik. Die Längsdynamik wird neben der Antriebskraft, die vom Motormoment bereitgestellt wird, durch mehrere Parameter beeinflusst. Um ein Fahrzeug zu bewegen, müssen Trägheitswiderstand (Fahrzeugmasse), Steigungswiderstand (Fahrbahnsteigung, Fahrzeugmasse), Rollwiderstand und Luftwiderstand überwunden werden. Zusätzliche Fahrwiderstände ergeben sich in Kurven durch die Seitenkraft auf die Räder sowie beim Bremsen.

Für eine optimale Fahrzeugführung ist eine möglichst exakte Kenntnis dieser Fahrzeugparameter wünschenswert. Genaue Werte für die Fahrwiderstände sind im Allgemeinen unbekannt, da sie sich durch Fahrzeugbeladung, unterschiedliche Bereifung, Anhänger, Fahrzeuganbauten wie Dachboxen und Fahrradträger sowie Fertigungstoleranzen ändern. Umwelteinflüsse, wie wechselnde Fahrbahnoberflächen, Wind und Wetterbedingungen, können die Fahrwiderstände ebenfalls beeinflussen.

Eine messtechnische Erfassung der Fahrwiderstände ist schwierig, da es zum einen nicht für alle gesuchten Parameter Sensoren gibt, wie z. B. für den Rollwiderstand. Zum anderen ist der Verbau zusätzlicher Sensoren mit Kosten verbunden, die nach Möglichkeit gering gehalten werden sollen. Als Alternative zu realen Sensoren bieten sich sogenannte Softsensoren an, zusammengesetzt aus den Wörtern „Software“ und „Sensor“. Dabei

werden Signale gemessen, die anhand eines Modells mit der gesuchten Größe in Beziehung stehen und somit auf Basis dieses Modells berechnet werden können. Synonyme für Softsensoren sind die Begriffe virtuelle Sensoren, Sensordatenfusion, Schätzalgorithmen oder Beobachter.

Für den Antrieb von Elektrofahrzeugen eignen sich Asynchronmaschinen (ASM), die sich durch ihren robusten und zugleich einfachen Aufbau auszeichnen. Die feldorientierte Regelung ist das Standardverfahren zum Betrieb von ASM und benötigt die elektrischen Maschinenparameter zur Auslegung. Zu den elektrischen Parametern gehören jeweils die Widerstände und Induktivitäten von Stator und Rotor. Diese können durch Produktions- und Werkstoffungenauigkeiten von den nominellen Werten abweichen, genauso wie durch veränderliche Bedingungen, wie z. B. erhöhte Temperatur im Dauerbetrieb. Für eine optimale Regelung ist das Anpassen der Regelparameter an die geänderten Streckenparameter notwendig. Eine Schätzung der Streckenparameter während des Betriebs kann dies ermöglichen. Anhand der Parameterschätzung und einer entsprechenden Kennlinie lässt sich die Temperatur im Rotor schätzen und die Leistung zum Schutz vor Überhitzung drosseln. Durch die Schätzung entfällt der Temperatursensor und dessen aufwändiger Einbau im Rotor. Außerdem kann anhand der Parameterschätzung ein Maschinenschaden, wie etwa gebrochene Rotorstäbe oder ein Windungsschluss, erkannt werden. Letzteres Problem tritt bei der Alterung oder thermischen Überlastung des Isolationsmaterials auf, wodurch verschiedene Windungen der Maschine elektrisch verbunden werden und es von Leistungseinbußen bis zum Ausfall kommen kann. Die Qualitätskontrolle am Bandende (End of Line (EoL)) kann zusätzlich die Parameterschätzung nutzen, um z. B. Wicklungsfehler zu erkennen.

Der Energiespeicher bzw. das Akkumulatorpaket eines Elektrofahrzeugs besteht standardmäßig aus Lithium-Ionen-Zellen. Mithilfe der Parameterschätzung lässt sich aus den Messungen von Strom und Spannung am Akkumulatorausgang die Ruhespannung bzw. Leerlaufspannung der Lithium-Ionen-Zelle bestimmen. Für diese Zelle kann anhand einer Kennlinie von der geschätzten Leerlaufspannung auf den Ladezustand (engl.: State of Charge (SoC)) geschlossen werden. Daraus lässt sich die verbleibende Reichweite berechnen und anzeigen, um damit dem Fahrer die Reichweitenangst zu nehmen. Der elektrische Innenwiderstand der Lithium-Ionen-Zelle beschreibt den Alterungszustand bzw. Gesundheitszustand (engl.: State of Health (SoH)) der einzelnen Zelle. Bei zu großen Schäden an einer Zelle, kann das Batteriemanagementsystem (BMS) einen weiteren Betrieb unterbinden, um die vollständige Zerstörung des Akkumulatormoduls zu verhindern. Alternativ kann bei entsprechendem Aufbau des Energiespeichers die fehlerhafte Zelle vom gesamten Akkumulatormodul elektrisch entkoppelt werden, um eine Ausbreitung des Schadens zu verhindern. Damit gewährleistet die Parameterschätzung mit dem BMS einen fortlaufenden Betrieb.

1.2 Ausgangspunkt und Zielsetzung

Ein Teil der bisherigen Verfahren zur Schätzung der Parameter der Fahrzeuglängsdynamik beinhaltet nur die Adaption von Fahrzeugmasse und Fahrbahnsteigung [1], [2], [3], [4], [5]. Dabei basiert das Schätzverfahren meist auf der Methode Recursive Least Squares (RLS). Die Schätzalgorithmen, welche die Masse- und Fahrwiderstände ermitteln, benötigen zusätzliche Sensoren [6] oder schätzen nur den Rollwiderstand [7], [8], [9]. Die Arbeiten von Rhode et al. [10], [11] verwenden einen Algorithmus auf Basis von Total Least Squares (TLS) zur Schätzung von Masse, Roll- und Luftwiderstand. Allerdings sind die Ergebnisse des aufwändigen TLS-Verfahrens schlechter als beim gewöhnlichen RLS-Algorithmus. Um eine Verbesserung gegenüber dem gewöhnlichen RLS-Schätzer zu erzielen, verwenden Rhode et al. [12], [13] Schätzverfahren, welche robust gegenüber Messausreißern und mangelnder Systemanregung sind. Allerdings sind diese Verfahren abhängig von einer aufwändigen Parametrisierung und benötigen zusätzliche Rechenleistung im Vergleich zum RLS. Ricciardi et al. [14] [15], [16], [17] stellen verschiedene Verfahren vor, um den Gesamtbremskoeffizienten zu schätzen, welcher den Zusammenhang zwischen Bremsdruck und Bremsmoment beschreibt. Bei den vorgestellten Algorithmen werden allerdings die Fahrzeugmasse und die Fahrwiderstände als bekannt vorausgesetzt.

Die Schätzung der ASM-Parameter im Betrieb basiert ebenfalls auf dem RLS-Algorithmus [18]. Stephan et al. [19] beschreiben, dass aufgrund von Überbestimmtheit nur vier der fünf unbekanntenen Maschinenparameter schätzbar sind. Ein weiteres Problem bei der Parameterschätzung an der ASM ist die mangelnde Anregung des konstanten flussbildenden Stroms, was de Souza Ribeiro et al. [20] anhand von Sensitivitätsfunktionen beschreiben. Zusätzliche Ungenauigkeiten bei der Schätzung ergeben sich durch die notwendige zweite zeitliche Ableitung des gemessenen Stromsignals. Durch eine gewöhnliche numerische Differentiation führt das Messrauschen zu erheblichen Abweichungen in den berechneten Ableitungen. Die Arbeit von Kertzschner [21] versucht dieses Problem durch Modulationsfunktionen zu lösen.

Die Schätzung der Parameter für Lithium-Ionen-Zellen basiert auch auf dem RLS-Algorithmus [22], [23], [24], [25]. Als Modell der Zelle dient ein elektrisches Ersatzschaltbild, welches aus einem oder mehreren RC-Gliedern besteht. Die vorgestellten Verfahren zur Schätzung der Parameter des elektrischen Ersatzschaltbildes berücksichtigen keine Messausreißer oder Phasen mit geringer Systemanregung.

Die vorliegende Arbeit leistet die folgenden Beiträge zum Stand des Wissens:

- Schätzung des Bremsenparameters, welcher den Zusammenhang zwischen Bremsdruck und Bremsmoment beschreibt, auf Basis der geschätzten Fahrzeugmasse und den Fahrwiderständen - Abschnitt 3.2.5
- Wahl einer sinnvollen Anzahl an Parametern für die Beschreibung und Schätzung der Fahrzeuglängsdynamik - Abschnitt 3.4.1
- Vorstellung, Vergleich und Durchführung von unterschiedlichen Verfahren zur Sensitivitätsanalyse, um den Einfluss von Fehlern in den Eingangssignalen auf die Ergebnisse der Parameterschätzung zu bewerten - Abschnitt 3.4.5
- Ableitung eines rekursiven M-Schätzers mit Robustheit gegenüber Messausreißern, auf Basis der tatsächlichen Residuenverteilung - Abschnitt 3.5.1
- Vergleich von suboptimalen Recursive Least M-Schätzer (RLM) und optimalen Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS) auf Basis der Ergebnisse der Parameterschätzung - Abschnitt 3.5.1.4
- Verwendung einer recheneffizienten Berechnung der Regularisierung nach Levenberg-Marquardt (LM) für robuste Schätzungen bei mangelnder Systemanregung - Abschnitt 3.5.2.4
- Vorstellung eines Verfahrens zur Beschränkung der Schätzparameter über ein recheneffizientes Verfahren mit weichen Grenzen - Abschnitt 3.5.3.4
- Auf die vorliegende Anwendung hin entwickelter Schätzalgorithmus mit Robustheit gegenüber Messausreißern, Phasen mangelnder Systemanregung und Berücksichtigung von Parametergrenzen; Entwicklung des Algorithmus für eingebettete Systeme, wie Fahrzeugsteuergeräte, mit geringem Rechen- und Speicherbedarf - Abschnitt 3.5.4
- Vorschlag zur Wahl der initialen Parameter für die Kovarianzmatrix - Abschnitt 3.5.5
- Validierung der Schätzung von Roll- und Luftwiderstand über die Prädiktion der Ausrollkurven - Abschnitt 3.6.2
- Untersuchung der Parameterschätzung für die ASM anhand der Bedingung an fortdauernde Anregung und experimentellen Untersuchungen - Abschnitt 4.4
- Adaption der Parameter einer Lithium-Ionen-Zelle mit dem vorgestellten Schätzverfahren, welches robust gegenüber Messausreißern und Phasen mangelnder Anregung ist sowie Parametergrenzen einhält - Abschnitt 5.4

1.3 Aufbau der Arbeit

Das **Kapitel 2** stellt die Grundlagen der linearen Parameterschätzung vor. Nach einer kurzen Einführung der Modellbildung folgt die Herleitung der Offline-Berechnung der geschätzten Parameter. Hierbei wird auch auf die Bedeutung der Kovarianzmatrix eingegangen. Dieses Kapitel erweitert das gewöhnliche Verfahren der Least Squares (LS) um Gewichtungen für jeden einzelnen Messpunkt. Basierend auf der Offline-Berechnung erfolgt die Herleitung der rekursiven Schätzverfahren mit Vergessensfaktor.

Das Ziel von **Kapitel 3** ist die Entwicklung eines robusten Schätzverfahrens für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung. Nach der Vorstellung aktueller Arbeiten auf diesem Gebiet erfolgt die Modellierung der Fahrzeuglängsdynamik und die Beschreibung der Versuchsdurchführung. Basierend auf den Fahrzeugmessungen folgt eine Problemanalyse der vorliegenden Anwendung. Die Untersuchungen beinhalten die Wahl einer geeigneten Modellgröße und die Interpretation von Messausreißern als studentsche t -Verteilung. Weiterhin werden Phasen identifiziert, die eine zu geringe Systemanregung besitzen, um eine sinnvolle Parameterschätzung durchzuführen. Ein weiterer Abschnitt befasst sich mit den statistischen Eigenschaften der Eingangssignale, welche erfüllt sein müssen, um die Schätzalgorithmen zu verwenden. Eine anschließende Sensitivitätsanalyse beschreibt die Auswirkung von Fehlern in den Eingangssignalen auf die Ergebnisse der Parameterschätzung. Auf Basis der Problemanalyse erfolgt die Herleitung eines robusten Schätzverfahrens, welches die aufgezeigten Probleme berücksichtigt. Um den negativen Einfluss von großen Messfehlern zu minimieren, werden verschiedene Verfahren zur Ausreißerdetektion und eine Anpassung der Kostenfunktion vorgestellt und miteinander verglichen. Aus der angepassten Kostenfunktion entsteht der robuste M-Schätzer, dessen rekursive Form ein suboptimales Ergebnis liefert. Im Anschluss erfolgt ein Vergleich der Ergebnisse von optimaler und suboptimaler Lösung. Zur Minimierung des Windup-Effekts in Phasen mit mangelnder Anregung stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung, die vorgestellt und bewertet werden. Für die Regularisierung, welche den Einfluss des Windup-Effekts verringert, wird eine Erweiterung zur recheneffizienten Berechnung vorgestellt. Um Vorwissen über die Parametergrenzen in der Schätzung zu verwenden, stellt dieses Kapitel verschiedene Verfahren zur Parameterbeschränkung vor. Zum einen gibt es Methoden, welche die Grenzen exakt einhalten, aber aufwändig zu berechnen sind. Zum anderen stellt diese Arbeit ein Verfahren mit weichen Grenzen vor, welches die Beschränkungen geringfügig verletzt. Aus den vorgestellten Lösungsvorschlägen entsteht ein robustes Schätzverfahren, welches speziell auf die vorliegende Anwendung der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung zugeschnitten ist. Ein Verfahren zur Wahl der initialen Kovarianzmatrix schließt die Algorithmenentwicklung ab. Die Validierung des

robusten Schätzverfahrens basiert auf umfangreichen Testfahrten. Als Bewertung dienen dabei die richtige Masseschätzung und die Prädiktion der Ausrollkurven.

Kapitel 4 beschreibt die Parameterschätzung für die ASM. Analog zur Masse- und Fahrwiderstandsschätzung erfolgt zunächst eine Übersicht über den aktuellen Stand der Technik. Danach folgt die Modellierung der ASM sowie die Beschreibung des Versuchsaufbaus. Anhand realer Messdaten erfolgt die Problemanalyse, welche auf der Bedingung der fortdauernden Anregung basiert. Für die vorliegenden Probleme werden Lösungsvorschläge vorgestellt und am realen Versuchsstand validiert.

Ein robustes Schätzverfahren ist auch bei der Parameteradaption für Lithium-Ionen-Zellen notwendig. Dazu stellt das **Kapitel 5** bereits bestehende Ansätze vor. Anschließend erfolgt die Modellierung der Lithium-Ionen-Zelle als elektrisches Ersatzschaltbild und die Beschreibung der Versuchsdurchführung am Fahrzeug. Die auftretenden Probleme bei der Parameterschätzung für die Lithium-Ionen-Zelle sind ähnlich wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung. Deshalb kommt bei der Lithium-Ionen-Zelle auch das robuste Schätzverfahren aus Kapitel 3 zum Einsatz. Anhand von realen Messdaten aus einem Elektrofahrzeug erfolgt die Bewertung des Schätzalgorithmus.

Zum Abschluss fasst das **Kapitel 6** die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen. Außerdem werden Möglichkeiten für zukünftige Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der robusten Parameterschätzung für Fahrzeuge aufgezeigt.

2 Grundlagen der Parameterschätzung

Dieses Kapitel stellt die grundlegenden Algorithmen zur Parameterschätzung vor. Zunächst wird die Schätzung für ein lineares Modell im Offline-Verfahren mit der LS-Methode erläutert. Darauf basierend wird die rekursive Form des LS-Algorithmus für die Online-Anwendung im laufenden Betrieb hergeleitet. Das Einführen eines Vergesslichkeitsfaktors ermöglicht die schnellere Anpassung von veränderlichen Parametern. Die Herleitungen in diesem Kapitel basieren zum Großteil auf der Arbeit von Isermann und Münchhof [26, S. 223-285].

2.1 Modelle

Das Modell eines Systems ist die Beschreibung seiner Eigenschaften, zugeschnitten auf einen speziellen Zweck. In der Systemidentifikation wird, ausgehend von den messbaren Ein- und Ausgängen des Systems, ein Modell gesucht, welches den Zusammenhang des Ein-/Ausgangsverhaltens mathematisch wiedergibt.

Wenn die internen Zusammenhänge des Modells für den Anwender nicht notwendig sind, eignet sich die experimentelle Modellierung, welche kein Wissen über die physikalischen Zusammenhänge im System voraussetzt. Bei bekannten Eingangssignalen gibt das identifizierte Modell die Ausgangssignale möglichst gut wieder. Bei der experimentellen Modellierung haben die identifizierten Parameter des Systems keine physikalische Bedeutung.

Wenn physikalische Parameter eines System geschätzt werden sollen, muss der grundsätzliche physikalische Zusammenhang zwischen den Systemeingängen und -ausgängen bekannt sein. Basierend auf diesem physikalischen Modell können die unbekannt Parameter geschätzt werden. Da dieses Modell auf Physikgesetzen basieren, wird diese Art als physikalische Modellierung bezeichnet.

Zudem kann die Abhängigkeit des Systemausgangs von den Modellparametern linear oder nichtlinear sein. Ein lineares Modell mit einem Eingang und mehreren Ausgängen

(engl.: Multiple Inputs Single Output (MISO)) mit n Dimensionen kann mit

$$y = \phi_1\theta_1 + \dots + \phi_n\theta_n \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Dabei ist y der bekannte Systemausgang, ϕ_i sind bekannte Systemeingänge und θ_i sind die unbekanntes und gesuchten Parameter. Die Gleichung (2.1) lässt sich auch in Vektorschreibweise als System mit mehreren Eingängen und einem Ausgang darstellen.

$$y = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Hierbei ist $\boldsymbol{\phi}$ der der Eingangs- oder Regressorvektor, y der Ausgang und $\boldsymbol{\theta}$ der Parametervektor.

2.1.1 Experimentelle Modellierung

Bei einem experimentellen Modell sind nach Isermann und Münchhof [26, S. 6] nur die gemessenen Ein- und Ausgangssignale gegeben. Die interne Modellstruktur ist unbekannt. Es wird allerdings eine Modellannahme über den internen Aufbau getroffen, z. B. eine Impulsantwort. Ein allgemeines, lineares, zeitinvariantes Modell eines Systems kann nach Ljung [27, S. 8] durch die Übertragungsfunktion eines Filters mit unendlicher Impulsantwort (engl.: Infinite Impulse Response (IIR)) beschrieben werden. Die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $G[z]$ lautet

$$G[z] = \frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{\sum_{j=0}^{n_b} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i z^{-i}}, \quad (2.3)$$

mit z^{-i} -Operatoren, welche ein Signal um i Zeitschritte verzögern. Der z -transformierte Eingang ist $U[z]$ und der Ausgang $Y[z]$. Die unbekanntes Filterkoeffizienten, die zu bestimmen sind, werden mit a_i, b_j bezeichnet. Um dieses Modell auf die Form (2.2) zu bringen, wird es zuerst umgestellt.

$$\sum_{i=0}^{n_a} a_i z^{-i} Y[z] = \sum_{j=0}^{n_b} b_j z^{-j} U[z] \quad (2.4)$$

Im nächsten Schritt wird diese Gleichung aus dem z -Bereich in den zeitdiskreten Bereich transformiert.

$$\sum_{i=0}^{n_a} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{n_b} b_j u[k-j] \quad (2.5)$$

Diese Gleichung wird nach $y[k]$ aufgelöst, da sich in der Gleichung (2.2) der Systemausgang y der MISO-Darstellung auf den aktuellen Zeitschritt k bezieht.

$$\begin{aligned}
 y[k] &= \frac{1}{a_0} \left(\sum_{j=0}^{n_b} b_j u[k-j] - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y[k-i] \right) \\
 &= \frac{1}{a_0} \left(b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_{n_b} u[k-n_b] \right. \\
 &\quad \left. - a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \dots - a_{n_a} y[k-n_a] \right) \\
 &= \phi^T \theta
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei wird der Regressionsvektor

$$\phi^T = \left[u[k] \quad u[k-1] \quad \dots \quad u[k-n_b] \quad -y[k-1] \quad -y[k-2] \quad \dots \quad -y[k-n_a] \right] \tag{2.7}$$

und der Parametervektor

$$\theta = \left[\frac{b_0}{a_0} \quad \frac{b_1}{a_0} \quad \dots \quad \frac{b_{n_b}}{a_0} \quad \frac{a_1}{a_0} \quad \frac{a_2}{a_0} \quad \dots \quad \frac{a_{n_a}}{a_0} \right]^T \tag{2.8}$$

gewählt.

2.1.2 Physikalische Modellierung

Ein physikalisches Modell wird nach Isermann und Münchhof [26, S. 6] auf Basis von Gesetzen der Physik modelliert. Z. B. über Differentialgleichungen ist damit die Struktur des Modells bekannt. Die unbekanntenen Modellparameter können anhand von messbaren Signalen geschätzt werden. Zur Darstellung der physikalischen Modellierung wird als Beispiel die Parameterschätzung an einer permanenterregten Gleichstrommaschine (GM) herangezogen. Nach Schröder [28, S. 157] sowie Isermann und Münchhof [26, S. 606-609] lässt sich der elektrische Teil der GM beschreiben als

$$U_R[k] = R_R I_R[k] + L_R \frac{d}{dt} I_R[k] + \psi \omega_R[k] \tag{2.9}$$

mit den Größen Rotorspannung U_R , Rotorwiderstand R_R , Rotorstrom I_R und Rotorinduktivität L_R . Der Erregerfluss ψ und die Rotordrehzahl ω_R beschreiben die induzierte Gegenspannung $U_{ind} = \psi \omega_R$. Die drei unbekanntenen Größen R_R , L_R und ψ sind durch Messung von U_R , I_R und ω_R zu schätzen. Um die Modelldarstellung (2.2) zu erhalten, werden folgende Zuordnungen gewählt.

$$y = U_R[k] \tag{2.10}$$

$$\phi[k] = \left[I_R[k] \quad \frac{d}{dt} I_R[k] \quad \omega_R[k] \right]^T \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} R_R \\ L_R \\ \psi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.2 Least-Squares-Schätzung

Die n unbekanntes Größen θ_1 bis θ_n lassen sich nicht aus einer Gleichung wie in (2.1) bestimmen, da es sich hierbei um ein unterbestimmtes Gleichungssystem handelt. Für eine Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ benötigt das LS-Verfahren mindestens n linear unabhängige Gleichungen. Es werden N Messung mit $N \geq n$ zu unterschiedlichen Zeitpunkten $k \in [1, N]$ und Arbeitspunkten des Systems durchgeführt. Bei der Aufzeichnung von Messungen treten stets Fehler durch Messrauschen Δy auf, so dass für die Parameterschätzung ein veräuschter Systemausgang zur Verfügung steht und die Modellannahme von Gleichung (2.2) nicht exakt erfüllt ist. Stattdessen geht die Parameterschätzung von folgendem Gleichungssystem mit Messfehlern Δy aus.

$$\begin{aligned} y[1] &= \boldsymbol{\phi}^T[1]\boldsymbol{\theta} + \Delta y[1] \\ &\vdots \\ y[N] &= \boldsymbol{\phi}^T[N]\boldsymbol{\theta} + \Delta y[N] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dieses überbestimmte Gleichungssysteme mit $N > n$ Gleichungen lässt sich auch in Matrixdarstellung schreiben.

$$\mathbf{y}[N] = \mathbf{\Phi}[N]\boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{y}[N] \quad (2.14)$$

Hierbei wird der Vektor aller Messungen \mathbf{y} , die Regressionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ und der Vektor aller Messstörungen $\Delta \mathbf{y}$ verwendet.

$$\mathbf{y}[N] = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}[N] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T[1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[2] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^T[N] \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{y}[N] = \begin{bmatrix} \Delta y[1] \\ \Delta y[2] \\ \vdots \\ \Delta y[N] \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Ziel der Parameterschätzung ist es, eine Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ der unbekanntes Parameter $\boldsymbol{\theta}$ zu erhalten. Dazu wird der Vektor der Residuen \mathbf{e} als Differenz zwischen den Messungen \mathbf{y}

und den geschätzten Messung $\hat{\mathbf{y}}$ eingeführt.

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.16)$$

Nach Gauß [29, S. 1-27] ist die wahrscheinlichste Schätzung diejenige, welche die Summe der Fehlerquadrate minimiert. Im Englischen wird dies als Least-Squares (LS) bezeichnet. Die Berechnung der Schätzung lässt sich somit auf die Minimierung eines Gütemaßes J zurückführen.

$$J = \frac{1}{2}e^2[1] + \dots + \frac{1}{2}e^2[N] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2[k] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e[1] \\ \vdots \\ e[N] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e[1] & \dots & e[N] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (2.17)$$

Aus Gründen der Lesbarkeit und zur Vereinfachung wird im weiteren Verlauf die explizite Nennung von N Messungen weggelassen ($e[N] = e$).

Da das Gütemaß bezüglich $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ minimiert werden soll, wird zunächst die Gleichung (2.16) in das Gütemaß (2.17) eingesetzt.

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.18)$$

Am Minimum der Kostenfunktion (2.17) ist der Gradient nach den gesuchten Parametern gleich Null.

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J = \left[\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}_1} \dots \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}_n} \right]^T = -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Normalform der LS-Schätzung ableiten.

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} \quad (2.20)$$

Aus der Normalform ergibt sich schließlich die LS-Schätzung des Parametervektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^+ \mathbf{y} \quad (2.21)$$

mit der Pseudoinversen der Regressormatrix $\mathbf{\Phi}^+$. [30, S. 81]

Die zweite Ableitung des Gütemaßes (2.17) nach dem gesuchten Parametervektor ist die Hessematrix

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta}_i \partial \hat{\theta}_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^2 J = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \quad (2.22)$$

und kann auf Basis des Gradienten (2.19) berechnet werden. Damit das Gütemaß (2.17) bei $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tatsächlich ein Minimum aufweist, muss die Hessematrix (2.22) positiv definit sein. Dies ist der Fall, wenn n Gleichungen des zugrundeliegenden Gleichungssystems (2.13) linear unabhängig sind.

2.2.1 Kovarianz der Parameterschätzung

Da das Messrauschen Δy eine stochastische Größe ist, kann auch das Ergebnis der Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ als stochastische Größe aufgefasst werden. Somit ist neben der tatsächlichen Schätzung auch die Sicherheit/Konfidenz der Schätzung von Interesse. Diese Sicherheit kann als Kovarianzmatrix des Parameterfehlers $\Delta\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ berechnet werden.

$$\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) = E \left\{ (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \right\} \quad (2.23)$$

Da der tatsächliche Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ nicht bekannt ist, muss dieser Wert ersetzt werden. Dazu wird zunächst der Erwartungswert der Schätzung $E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}$ ermittelt, indem die Modellgleichung (2.16) $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$ in die Gleichung der LS-Schätzung (2.21) eingesetzt wird. [26, S. 230]

$$\begin{aligned} E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\} &= E \left\{ (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}) \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta} + (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{e} \right\} \\ &= E \left\{ \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{e} \right\} \\ &= E\{\boldsymbol{\theta}\} + E \left\{ (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{e} \right\} \\ &= \boldsymbol{\theta} + \underbrace{E \left\{ (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{e} \right\}}_{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Diese Gleichung drückt aus, dass sich die Parameterschätzung aus den tatsächlichen Parametern und einem Bias \mathbf{b} zusammensetzt. Der Bias verschwindet, wenn die Regressionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ und der Residuenvektor \mathbf{e} unkorreliert sind oder der Erwartungswert der Residuen verschwindet ($E\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}$). Der Ausdruck (2.24) wird in die Gleichung für die

Kovarianz der Parameterschätzung (2.23) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) &= E \left\{ \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right) \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right)^T \right\} \\
&= E \left\{ \left[\boldsymbol{\theta} + \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{e} - \boldsymbol{\theta} \right] \left[\boldsymbol{\theta} + \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{e} - \boldsymbol{\theta} \right]^T \right\} \\
&= E \left\{ \left[\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{e} \right] \left[\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{e} \right]^T \right\} \\
&= E \left\{ \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{e} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{\Phi} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \right\}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Damit der Bias in Gleichung (2.24) verschwindet, müssen $\boldsymbol{\Phi}$ und \boldsymbol{e} unkorreliert sein. Damit lässt sich (2.25) weiter umformen.

$$\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) = E \left\{ \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \right\} E \left\{ \boldsymbol{e} \boldsymbol{e}^T \right\} E \left\{ \boldsymbol{\Phi} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \right\} \tag{2.26}$$

Unter der Voraussetzung, dass das Residuum unkorreliert ist, gilt $E \left\{ \boldsymbol{e} \boldsymbol{e}^T \right\} = \sigma_e^2 \boldsymbol{I}$, mit der Standardabweichung des Residuums σ_e . Dadurch ergibt sich aus der Gleichung (2.26) der Zusammenhang für die Kovarianzmatrix.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) &= \sigma_e^2 \boldsymbol{I} E \left\{ \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \right\} E \left\{ \boldsymbol{\Phi} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \right\} \\
&= \sigma_e^2 E \left\{ \underbrace{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1}}_{\boldsymbol{I}} \right\} \\
&= \sigma_e^2 E \left\{ \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \right\} \\
&= \sigma_e^2 E \left\{ \boldsymbol{P} \right\} \approx \sigma_e^2 \boldsymbol{P}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Hierbei ist \boldsymbol{P} der skalierte Schätzwert für die Kovarianzmatrix des Parameterschätzfehlers. Die Unsicherheit der Parameterschätzung, die durch $\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta})$ beschrieben wird, lässt sich zum einen verringern, indem das Messrauschen σ_e verringert wird. Zum anderen wird die Parameterunsicherheit durch mehr Messungen reduziert, da hierdurch $\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1}$ größer und \boldsymbol{P} somit kleiner wird. Aus Gründen der Einfachheit wird im weiteren Verlauf \boldsymbol{P} als Kovarianzmatrix bezeichnet.

2.2.2 Gewichteter Least Squares Algorithmus

Bisher wurde angenommen, dass im LS-Gütemaß (2.17) jedes Residuum $e[k]$ mit der gleichen Gewichtung in die Kostenfunktion eingeht. Es kann von Vorteil sein, die einzelnen Terme des Gütemaßes unterschiedlich stark zu gewichten. Dies lässt sich über eine

erweiterte Kostenfunktion beschreiben. [26, S. 279]

$$J = \frac{1}{2}w[1]e^2[1] + \frac{1}{2}w[2]e^2[2] + \dots + \frac{1}{2}w[N]e^2[N] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w[k]e^2[k] = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (2.28)$$

\mathbf{W} ist hierbei eine positiv definite Diagonalmatrix, welche die positiven Gewichte $w[k]$ enthält. Die positive Definitheit sichert eine eindeutige Lösung des Optimierungsproblems. Die Gewichtungsmatrix \mathbf{W} in Gleichung (2.28) lässt sich als Diagonalmatrix schreiben.

$$\mathbf{W} = \text{diag}(w[1], w[2], \dots, w[N]) = \begin{bmatrix} w[1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w[2] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w[N] \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ausgehend vom Gütemaß (2.28) kann analog zu Gleichung (2.21) die Lösung für die gewichtete LS-Schätzung ermittelt werden.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (2.30)$$

2.3 Recursive Least Squares Schätzung

Die Methode der kleinsten Quadrate (LS) basiert darauf, dass die Messungen bereits alle aufgenommen wurden und anhand einer Offline-Berechnung im Nachgang die Schätzung ermittelt wird. Dies bedeutet, dass die gesuchten Parameter erst am Ende der Messung zur Verfügung stehen. Außerdem müssen alle Messdaten gespeichert werden und die Berechnung des Parametervektors anhand (2.21) kann bei vielen Messpunkten sehr aufwändig werden. Somit ist das LS-Verfahren ungeeignet für eingebettete Systeme, wie Fahrzeugsteuergeräte, welche Algorithmen mit geringem Speicher- und Rechenaufwand benötigen.

Soll das System während des Betriebs (online) und in Echtzeit identifiziert werden, so muss eine neue Parameterschätzung nach jeder Abtastung verfügbar sein. Anstatt die Messungen vom Beginn bis zum aktuellen Zeitpunkt zu speichern, um damit die Parameterschätzung zu berechnen, ist es sinnvoller, ein rekursives Verfahren zu verwenden. Dabei aktualisiert der Algorithmus mit jeder neuen Messung die bestehende Parameterschätzung. Zum einen entfällt dadurch die Speicherung aller vorherigen Daten und zum anderen ist der rekursive Algorithmus einfacher zu berechnen als die Offline-Lösung. Damit ist ein rekursives Verfahren für die Anwendung in Fahrzeugsteuergeräten und

anderen eingebetteten Systemen geeignet. Die rekursive Form des LS-Verfahrens (RLS) wurde bereits von Gauß im Jahr 1809 beschrieben und wird im Folgenden hergeleitet. [26, S. 270]

Die Parameterschätzung mit dem LS-Verfahren kann zum Zeitschritt k als

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[k] = \mathbf{P}[k] \boldsymbol{\Phi}^T[k] \mathbf{y}[k] \quad (2.31)$$

geschrieben werden. Dabei ist die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}[k] = \left(\boldsymbol{\Phi}^T[k] \boldsymbol{\Phi}[k] \right)^{-1} \quad (2.32)$$

und

$$\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[k] \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\Phi}[k] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T[1] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Der erste Schritt der Herleitung des rekursiven Verfahrens spaltet die Gleichung (2.31) auf.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \mathbf{P}[k] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{y}[k-1] \\ y[k] \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}[k] \left(\boldsymbol{\Phi}^T[k-1] \mathbf{y}[k-1] + \boldsymbol{\phi}^T[k] y[k] \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Das Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen der aktuellen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ und der vorherigen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$ herzustellen. Dazu wird die Gleichung (2.31) für den Zeitschritt $k-1$ betrachtet.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] &= \mathbf{P}[k-1] \boldsymbol{\Phi}^T[k-1] \mathbf{y}[k-1] \\ &\Downarrow \\ \boldsymbol{\Phi}^T[k-1] \mathbf{y}[k-1] &= \mathbf{P}^{-1}[k-1] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Im nächsten Schritt wird dieser Ausdruck in Gleichung (2.35) ersetzt.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \mathbf{P}[k] \left(\mathbf{P}^{-1}[k-1] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \right) \\
&= \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \\
&= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \\
&= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \left(\mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] - \mathbf{I} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Durch das Einfügen von $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] = 0$ konnte ein Zusammenhang zwischen der aktuellen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ und der vorherigen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$ hergestellt werden. Der nächste Schritt ersetzt die aufwändige Matrixinversion $\mathbf{P}^{-1}[k-1]$. Dazu wird die Kovarianzmatrix (2.32) ebenfalls aufgespalten.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[k] &= \left(\boldsymbol{\Phi}^T[k] \boldsymbol{\Phi}[k] \right)^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \left(\boldsymbol{\Phi}^T[k-1] \boldsymbol{\Phi}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{P}^{-1}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Diese Gleichung wird nach $\mathbf{P}^{-1}[k-1]$ aufgelöst.

$$\mathbf{P}^{-1}[k-1] = \mathbf{P}^{-1}[k] - \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \tag{2.39}$$

Einsetzen dieser Gleichung in den Ausdruck (2.37) liefert die gewünschte, rekursive Form für die Parameterschätzung.

$$\begin{array}{cccccc}
\underbrace{\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]} & = & \underbrace{\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]} & + & \underbrace{\mathbf{P}[k] \boldsymbol{\phi}[k]} & \left(\underbrace{y[k]} - \underbrace{\boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]} \right) \\
\text{Neue} & & \text{Alte} & & \text{Korrektur-} & \text{Neue} \quad \text{Prädizierte} \\
\text{Schätzung} & & \text{Schätzung} & & \text{vektor} & \text{Messung} \quad \text{Messung}
\end{array} \tag{2.40}$$

Die rekursive Parameterschätzung nach der Gleichung (2.40) kann folgendermaßen interpretiert werden. Die neue Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ basiert zum einen auf dem vorherigen Wert $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$. Zum anderen wird die alte Parameterschätzung um den skalaren Modellfehler/Residuum

$$e[k] = y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] \tag{2.41}$$

korrigiert. Dazu wird der Fehler mit dem Korrekturvektor $\mathbf{P}[k] \boldsymbol{\phi}[k]$ multipliziert.

Die alte Parameterschätzung wird immer dann aktualisiert, wenn mit der alten Schätzung das Modell nicht exakt prädiziert wird. Sobald mit der aktuellen Schätzung das Modell genaue Vorhersagen über das Systemverhalten liefert, gilt $e[k] = 0$ und es erfolgt keine Korrektur der Schätzung.

Die Kovarianzmatrix wird analog zur Parameterschätzung rekursiv nach Formel (2.38) ermittelt. Dabei benötigt die Berechnung in jedem Abtastschritt zwei Matrixinversionen der Dimension n . Deshalb eliminiert der nächste Schritt der Herleitung die Matrixinversion in der Rekursion der Kovarianzmatrix. Hierfür wird das Matrixinversions-Lemma (Woodbury-Matrix-Identität) benötigt, welches folgenden Zusammenhang zwischen Matrizen beschreibt.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \quad (2.42)$$

Die Anwendung des Matrixinversions-Lemmas auf (2.38) verwendet folgende Zuordnung.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}^{-1}[k-1] \\ \mathbf{B} &= \boldsymbol{\phi}[k] \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}^{-1} = 1 \\ \mathbf{D} &= \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Damit ergibt sich aus der Gleichung (2.38) die Rekursion der Kovarianzmatrix.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[k] &= \left(\mathbf{P}^{-1}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1} \\ &= \mathbf{P}[k-1] - \mathbf{P}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] \left(\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] + 1 \right)^{-1} \boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}[k-1] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Da $\left(\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] + 1 \right)$ eine skalare Größe ist, ergibt sich:

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}[k-1] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] + 1} \quad (2.45)$$

Diese Gleichung wird von rechts mit $\phi[k]$ multipliziert, da in Gleichung (2.40) der Verstärkungsfaktor $\mathbf{P}[k]\phi[k]$ lautet.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[k]\phi[k] &= \mathbf{P}[k-1]\phi[k] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k]\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}{\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1} \\
&= \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k] \left(\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1 \right) - \mathbf{P}[k-1]\phi[k]\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}{\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1} \\
&= \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k] \left(\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1 - \phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] \right)}{\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1} \\
&= \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}{\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Das Symbol $\gamma[k]$ kürzt den Ausdruck für diesen Korrekturvektor ab.

$$\gamma[k] = \mathbf{P}[k]\phi[k] = \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}{\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k] + 1} \tag{2.47}$$

Mit dem Korrekturvektor $\gamma[k]$ kann die Rekursionsformel (2.45) für die Kovarianzmatrix vereinfacht werden.

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}[k-1] - \gamma[k]\phi^T[k]\mathbf{P}[k-1] = \left(\mathbf{I} - \gamma[k]\phi^T[k] \right) \mathbf{P}[k-1] \tag{2.48}$$

Die einzelnen Gleichungen (2.41), (2.47), (2.40) und (2.48) ergeben zusammen das RLS-Verfahren in Algorithmus 2.1. [26, S. 271-272]

Algorithmus 2.1 Recursive Least Squares (RLS)

Eingang: $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\theta}[k-1]$, $\mathbf{P}[k-1]$

- 1: $e[k] = y[k] - \phi^T[k]\hat{\theta}[k-1]$
- 2: $\gamma[k] = \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}{1 + \phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}$
- 3: $\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \gamma[k]e[k]$
- 4: $\mathbf{P}[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma[k]\phi^T[k] \right) \mathbf{P}[k-1]$

Ausgang: $\hat{\theta}[k]$, $\mathbf{P}[k]$

Zum anschaulichen Verständnis zeigt Abbildung 2.1 das Grundprinzip des RLS-Algorithmus. Ziel ist es, ein reales System mit Eingängen ϕ und Ausgang y möglichst gut zu modellieren. Das Modell des realen Systems wird durch die Größen $\hat{\theta}$ parametrisiert. Die Parameter werden durch den RLS-Schätzer so eingestellt, dass der Fehler e zwischen tatsächlich gemessenem Ausgang y und modelliertem Ausgang \hat{y} zu Null wird.

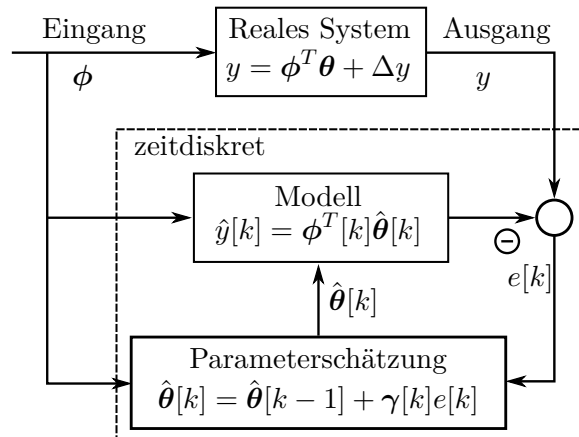


Abbildung 2.1: Blockschaltbild des RLS-Algorithmus

2.3.1 Initialisierung des Recursive Least Squares Schätzers

Im Gegensatz zum LS-Verfahren benötigt der RLS-Algorithmus Startwerte für die Parameterschätzung $\hat{\theta}[0]$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[0]$. Für die Wahl dieser Werte können folgende Vorgehensweisen verwendet werden. [26, S. 272]

Start mit LS-Verfahren Der LS-Algorithmus (2.21) wird auf mindestens $2n$ Datenpunkte angewendet. Z. B. werden die Messpunkte von $k = 1$ bis $k = 2n$ verwendet, um mit dem LS-Verfahren die Werte $\hat{\theta}[2n]$ und $\mathbf{P}[2n]$ zu berechnen. Anschließend wird zum Zeitschritt $k = 2n$ das RLS-Verfahren gestartet.

Verwendung von A-priori-Wissen Bei der Schätzung physikalischer Größen ist ein näherungsweise Wert der Parameter bekannt und kann als Start für $\hat{\theta}[0]$ verwendet werden. Oft ist auch die maximale Abweichung vom Startwert zum tatsächlichen Parameter bekannt, sodass über Formel (2.27) auf die initiale Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[0]$ geschlossen werden kann.

Annahme über Startwerte Wenn kein Vorwissen über das System bekannt ist, kann der Parametervektor mit Null initialisiert werden ($\hat{\theta}[0] = \mathbf{0}$). Für die Initialisierung der Kovarianzmatrix bietet sich ein Vielfaches der Einheitsmatrix ($\mathbf{P}[0] = \alpha \mathbf{I}$) an, mit großen Werten für α ($\alpha = 100, \dots, 10.000$).

Der folgende Teil untersucht die Abhängigkeit der rekursiven Parameterschätzung von der initialen Kovarianzmatrix. Die Rekursion der inversen Kovarianzmatrix nach Gleichung (2.39) lautet

$$\mathbf{P}^{-1}[k] = \mathbf{P}^{-1}[k-1] + \phi[k] \phi^T[k]. \quad (2.49)$$

Diese Gleichung lässt sich für die einzelnen Zeitschritte $k = 1, 2, \dots, N$ schreiben.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}[1] &= \mathbf{P}^{-1}[0] + \phi[1]\phi^T[1] \\
\mathbf{P}^{-1}[2] &= \mathbf{P}^{-1}[1] + \phi[2]\phi^T[2] \\
&= \mathbf{P}^{-1}[0] + \phi[1]\phi^T[1] + \phi[2]\phi^T[2] \\
&\vdots \\
\mathbf{P}^{-1}[N] &= \mathbf{P}^{-1}[0] + \mathbf{\Phi}^T[N]\mathbf{\Phi}[N]
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Für die Wahl $\mathbf{P}[0] = \alpha\mathbf{I}$ mit großem Wert für α erhält man

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{-1}[0] = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \mathbf{I} = \mathbf{0}. \tag{2.51}$$

Dadurch wird aus Gleichung (2.50)

$$\mathbf{P}^{-1}[N] = \mathbf{\Phi}^T[N]\mathbf{\Phi}[N] \Leftrightarrow \mathbf{P}[N] = \left(\mathbf{\Phi}^T[N]\mathbf{\Phi}[N]\right)^{-1}, \tag{2.52}$$

was genau der Definition von $\mathbf{P}[k]$ für den nichtrekursiven LS-Algorithmus in Gleichung (2.32) entspricht. Für sehr große Werte α hat $\mathbf{P}[0]$ nur eine geringe Auswirkung auf die Rekursion von $\mathbf{P}[k]$. Gleiches gilt auch für die Berechnung der Parameterschätzung selbst. Um dies zu zeigen, wird Gleichung (2.40) für die einzelnen Zeitschritte dargestellt, beginnend mit $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}[1] &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[0] + \mathbf{P}[1]\phi[1] \left(y[1] - \phi^T[1]\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right) \\
&= \underbrace{\mathbf{P}[1]\mathbf{P}^{-1}[1]}_{\mathbf{I}} \hat{\boldsymbol{\theta}}[0] + \mathbf{P}[1]\phi[1] \left(y[1] - \phi^T[1]\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right) \\
&= \mathbf{P}[1] \left[\phi[1]y[1] + \left(\mathbf{P}^{-1}[1] - \phi[1]\phi^T[1] \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right]
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Mit $\mathbf{P}^{-1}[1] = \mathbf{P}^{-1}[0] + \phi[1]\phi^T[1]$ aus (2.50) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}[1] &= \mathbf{P}[1] \left[\phi[1]y[1] + \left(\mathbf{P}^{-1}[0] - \phi[1]\phi^T[1] + \phi[1]\phi^T[1] \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right] \\
&= \mathbf{P}[1] \left(\phi[1]y[1] + \mathbf{P}^{-1}[0]\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Entsprechend kann für den Zeitschritt $k = 2$ geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}[2] &= \mathbf{P}[2] \left(\phi[2]y[2] + \mathbf{P}^{-1}[1]\hat{\boldsymbol{\theta}}[1] \right) \\
&= \mathbf{P}[2] \left(\phi[2]y[2] + \phi[1]y[1] + \mathbf{P}^{-1}[0]\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Schließlich erhält man für den Zeitschritt N

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[N] = \mathbf{P}[N] \left(\mathbf{\Phi}^T[N]\mathbf{y}[N] + \mathbf{P}^{-1}[0]\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] \right). \tag{2.56}$$

Mit großem α und beliebiger initialer Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0]$ wird aus dieser Gleichung aufgrund von (2.51) $\hat{\boldsymbol{\theta}}[N] = \mathbf{P}[N]\boldsymbol{\Phi}^T[N]\mathbf{y}[N]$, was der LS-Lösung (2.31) entspricht. Ein großer Wert von α entspricht einer großen Unsicherheit des initialen Parametervektors, dem der RLS-Algorithmus weniger vertraut als den neuen Messungen. Bei der Wahl eines großen initialen $\mathbf{P}[0]$ hat der Wert des initialen Parametervektors nur geringe Bedeutung und kann aus Gründen der Einfachheit $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] = \mathbf{0}$ gewählt werden.

2.3.2 Recursive Least Squares Schätzung mit exponentiellem Vergessen

Wenn sich Parameter zeitlich langsam verändern, so soll der Schätzer aktuelle Messungen stärker berücksichtigen als lang zurückliegende Messpunkte. Dies bedeutet, dass der Messdatenspeicher des Schätzalgorithmus mit der Zeit vergessen werden soll. Der gewichtete LS-Algorithmus aus Kapitel 2.2.2 kann dies realisieren, indem er ältere Messungen geringer gewichtet als die aktuellen. Für das Vergessen erfolgt die Gewichtung der Quadrate der Residuen $e^2[k]$ im Gütemaße nach Isermann und Münchhof [26, S. 281] über

$$w[k] = \lambda^{N-k}, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (2.57)$$

Dies führt dazu, dass das aktuelle Residuum mit $w[N] = \lambda^{N-N} = 1$ gewichtet wird und die vorherigen Residuen exponentiell geringer gewichtet werden. Deshalb wird dieses Verfahren als LS-Schätzung mit exponentiellem Vergessen bezeichnet und λ als *Vergessenheitsfaktor*.

Die Gewichtungen für zwei unterschiedliche Werte des Vergessenheitsfaktors sind in Tabelle 2.1 gezeigt. Die Lösung des Least Squares mit exponentiellem Vergessen (LSeV)-

k	N-49	N-40	N-30	N-20	N-10	N-3	N-2	N-1	N
$\lambda = 0,99$	0,61	0,67	0,73	0,82	0,90	0,97	0,98	0,99	1
$\lambda = 0,95$	0,08	0,13	0,21	0,35	0,60	0,85	0,90	0,95	1

Tabelle 2.1: Gewichtungsfaktoren nach Gleichung (2.57) für $N = 50$

Verfahrens erfolgt über den gewichteten LS-Algorithmus (2.30) mit der diagonalförmigen

Gewichtungsmatrix

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^N & & & & & \\ & \lambda^{N-1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda^2 & & \\ & & & & \lambda & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Da es sich um eine spezielle Gewichtungsmatrix handelt, wird sie mit $\mathbf{\Lambda}$ bezeichnet.

Für die Anwendungen auf eingebetteten Systemen ist die Offline-Lösung aus Gleichung (2.30) mit $\mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}$ ungeeignet. Deshalb wird im Folgenden die Herleitung des Recursive Least Squares mit exponentiellem Vergessen (RLSeV)-Algorithmus gezeigt. Dafür wird zunächst die Gewichtungsmatrix aufgespalten.

$$\mathbf{\Lambda}[k] = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{\Lambda}[k-1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Aufgrund der gewichteten Parameterschätzung (2.30) lautet die Aktualisierung der Schätzung für das LSeV-Verfahren

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \mathbf{P}_\lambda[k] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{\Lambda}[k-1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}[k-1] \\ y[k] \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_\lambda[k] \left(\lambda\boldsymbol{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{y}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k]y[k] \right) \\ &= \mathbf{P}_\lambda[k] \left(\lambda\mathbf{P}^{-1}[k-1]\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k]y[k] \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

wobei $\boldsymbol{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{y}[k-1] = \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1]\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$ verwendet wird. Zusätzlich wird die Kovarianzmatrix durch $\mathbf{P}_\lambda[k] = \left(\boldsymbol{\Phi}^T[k]\mathbf{\Lambda}[k]\boldsymbol{\Phi}[k] \right)^{-1}$ ersetzt. Dieser Ausdruck wird ebenfalls aufgespalten.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda[k] &= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{\Lambda}[k-1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left(\lambda\boldsymbol{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\boldsymbol{\Phi}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1} \\ &= \left(\lambda\mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Diese Formel wird umgeformt zu

$$\lambda \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1] = \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k] - \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k]. \quad (2.62)$$

Durch Einfügen von $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] = \mathbf{0}$ in Gleichung (2.60) erhält man einen Zusammenhang zwischen der aktuellen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ und der vorherigen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}_\lambda[k] \left(\lambda \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \right) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \left(\lambda \mathbf{P}_\lambda[k] \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1] - \mathbf{I} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Das Einsetzen von Gleichung (2.62) in diesen Ausdruck ersetzt die aufwändige Matrixinversion $\mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1]$.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \left[\mathbf{P}_\lambda[k] \left(\mathbf{P}_\lambda^{-1}[k] - \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \right) - \mathbf{I} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \underbrace{\left[\mathbf{P}_\lambda[k] \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k] - \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] - \mathbf{I} \right]}_{\mathbf{I}} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] \left(y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Um die Matrixinversion bei der rekursiven Berechnung von $\mathbf{P}_\lambda[k]$ in (2.61) zu ersetzen wird wie bei (2.44) das Matrixinversions-Lemma (2.42) angewendet.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda[k] &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_\lambda[k-1] \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_\lambda[k-1] \boldsymbol{\phi}[k] \left(\boldsymbol{\phi}^T[k] \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_\lambda[k-1] \boldsymbol{\phi}[k] + 1 \right)^{-1} \boldsymbol{\phi}^T[k] \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_\lambda[k-1] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Der Vorteil des Matrixinversions-Lemmas besteht darin, dass anstatt der Inversion einer $n \times n$ -Matrix in (2.61) nur durch den skalaren Term in $(\cdot)^{-1}$ geteilt werden muss. Dieser Ausdruck für $\mathbf{P}_\lambda[k]$ wird von rechts mit $\boldsymbol{\phi}[k]$ multipliziert, um den Korrekturvektor $\boldsymbol{\gamma}[k] = \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k]$ in (2.64) zu erhalten.

$$\boldsymbol{\gamma}[k] = \mathbf{P}_\lambda[k] \boldsymbol{\phi}[k] = \frac{\mathbf{P}_\lambda[k-1] \boldsymbol{\phi}[k]}{\lambda + \boldsymbol{\phi}^T[k] \mathbf{P}_\lambda[k-1] \boldsymbol{\phi}[k]} \quad (2.66)$$

Schließlich ergibt sich aus den Gleichungen (2.64), (2.65) und (2.66) das RLSeV-Verfahren in Algorithmus 2.2.

Der Einfluss des Vergessenheitsfaktors λ ist in der umgestellten Gleichung (2.61) sichtbar.

$$\mathbf{P}_\lambda^{-1}[k] = \lambda \mathbf{P}_\lambda^{-1}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \quad (2.67)$$

Algorithmus 2.2 Recursive Least Squares mit exponentiellem Vergessen (RLSeV)

Eingang: $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\theta}[k-1]$, $\mathbf{P}_\lambda[k-1]$, λ

1: $e[k] = y[k] - \phi^T[k]\hat{\theta}[k-1]$

2: $\gamma[k] = \frac{\mathbf{P}_\lambda[k-1]\phi[k]}{\lambda + \phi^T[k]\mathbf{P}_\lambda[k-1]\phi[k]}$

3: $\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \gamma[k]e[k]$

4: $\mathbf{P}_\lambda[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma[k]\phi^T[k]\right)\mathbf{P}_\lambda[k-1]\frac{1}{\lambda}$

Ausgang: $\hat{\theta}[k]$, $\mathbf{P}_\lambda[k]$

Für den Fall $\lambda = 1$ ist $\mathbf{P}_\lambda[k] = \mathbf{P}[k] \approx \frac{1}{\sigma_e^2} \text{cov}\Delta\theta$ proportional zur Kovarianzmatrix des Parameterfehlers. Für $\lambda < 1$ werden die neuen Daten $\phi[k]\phi^T[k]$ mit Eins gewichtet und die alten Daten werden mit λ multipliziert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Varianz/Unsicherheit der alten Schätzung erhöht wird.

Durch die Wahl von λ kann der Anwender einstellen, ob Störungen stärker unterdrückt werden ($\lambda \rightarrow 1$) oder ob auf Parameteränderungen schneller reagiert werden soll ($\lambda < 1$). In Anwendungen wird oft $0,9 < \lambda < 0,995$ gewählt. Es gibt auch die Möglichkeit λ variabel zu wählen. [26, S. 283]

3 Robuste Parameterschätzung für die Fahrzeuglängsdynamik

Dieses Kapitel stellt die Herleitung eines robusten Schätzverfahrens zur Ermittlung von Parametern der Fahrzeuglängsdynamik vor. Zu diesen Parametern gehören die Fahrzeugmasse, der Roll- und der Luftwiderstand sowie der Bremsenkoeffizient. Nach der Vorstellung von verschiedenen bestehenden Verfahren erfolgt die Modellierung und Versuchsbeschreibung. Anschließend werden die Herausforderungen bei der vorliegenden Anwendung analysiert und dazu passende Lösungsvorschläge erarbeitet. Zum Abschluss erfolgt die Validierung des Schätzverfahrens anhand realer Daten aus Messfahrten.

3.1 Stand der Technik zur Parameterschätzung der Fahrzeuglängsdynamik

Es gibt unterschiedliche Ansätze, um die Masse und Fahrwiderstände eines Fahrzeugs zu schätzen. Diese unterscheiden sich hinsichtlich der verwendeten Algorithmen als auch der geschätzten Längsdynamikparameter.

Eine der ersten Arbeiten stammt von Bae et al. [6]. Darin werden die Fahrzeugmasse, der Roll- und Luftwiderstand sowie die Fahrbahnsteigung geschätzt. Als zusätzliche Sensorik werden zwei Antennen zum Empfang von Signalen des Global Positioning System (GPS) anstatt eines Längsbeschleunigungssensors verwendet, um die Fahrbahnsteigung zu bestimmen. In einem zweistufigen Verfahren wird zunächst die Steigung berechnet und in einem zweiten Schritt die anderen drei Parameter mit einem RLS-Verfahren geschätzt. In Fahrversuchen mit einem Mercedes-Benz E320 wird das Fahrzeug möglichst gleichmäßig beschleunigt, damit das System ausreichend angeregt ist. Damit werden Schätzergebnisse für die Fahrzeugmasse mit einem maximalen Fehler von $\pm 5\%$ und schneller Konvergenz erzielt. Die Fahrwiderstände konvergieren langsamer als die Masse und weisen einen Drift bei zu geringem Geschwindigkeitsband auf. Ein Nachteil dieses Verfahrens sind die zusätzlichen Kosten für die zwei GPS-Antennen. Außerdem werden

die Ergebnisse nur bei ständigem Beschleunigen und Bremsen erzielt, jedoch nicht bei konstanter Fahrt.

Lingman und Schmidtbauer [1] verwenden mehrere Verfahren, um Fahrzeugmasse und Fahrbahnsteigung zu schätzen. Im ersten Fall wird die Steigung bei bekannter Masse geschätzt. Die Arbeit stellt zwei Verfahren auf Basis des Kalman-Filters vor, die zum einen eine Geschwindigkeitsmessung und zum anderen einen zusätzlichen Längsbeschleunigungssensor verwenden. Zunächst wird nur die Fahrbahnsteigung und die Störung in der Antriebskraft geschätzt, die als PT1-Glieder modelliert sind. Anschließend stellt die Arbeit ein Verfahren vor, welches neben der Steigung auch die Fahrzeugmasse ermittelt. Für dieses Verfahren, welches die Geschwindigkeitsmessung verwendet, kommt ein Extended Kalman Filter (EKF) zum Einsatz. Bei der Verwendung eines zusätzlichen Längsbeschleunigungssensors vereinfacht sich die Masse- und Steigungsschätzung zu einem gewöhnlichen Kalman-Filter. Die vorgestellte Methode kann nicht die Fahrwiderstände ermitteln. Neben Simulationen dient ein Volvo FH12 Lastkraftwagen (LKW) mit einem Gesamtgewicht von ca. 47 Tonnen als Anwendung für die Algorithmen.

Vahidi et al. [31], [32], [2] stellen in einer Reihe von Arbeiten eine Erweiterung des RLS-Algorithmus vor, welcher Recursive Least Squares mit mehrfachem Vergessen (RLSmV) genannt wird. Das vorgestellte Verfahren berechnet die Fahrzeugmasse und den Steigungswinkel basierend auf Motormoment und Fahrzeuggeschwindigkeit. Allerdings kann dieser Algorithmus nicht die Fahrwiderstände adaptieren. Das gewöhnliche RLS-Verfahren verwendet einen Vergessenheitsfaktor, welcher für alle geschätzten Parameter gleich ist. Bei der Schätzung einer konstanten Größe (Masse) und einer variablen Größe (Steigung) führt das gewöhnliche RLS-Verfahren mit einem Vergessenheitsfaktor zu unerwünschten Änderungen in der Masseschätzung. Um dieses Problem zu lösen, wird beim RLSmV-Verfahren für jeden Parameter ein eigener Vergessenheitsfaktor eingeführt. Vergleiche des RLSmV-Algorithmus mit dem Kalman-Filter und der RLS-Methode in Simulationen und Versuchen mit einem LKW der Marke Freightliner zeigen die Leistungsfähigkeit des neuentwickelten Verfahrens.

McIntyre et al. [3] verwenden ein ähnliches Modell wie Vahidi et al. [2] zur Masse- und Steigungsschätzung. Auch bei diesem Verfahren können die Fahrwiderstände nicht geschätzt werden. Im ersten Teil des Algorithmus berechnet ein adaptiver LS-Schätzer die Masse und die Fahrbahnsteigung, ähnlich zu einem RLS-Algorithmus. In einem zweiten Teil wird die Steigungsschätzung durch einen nichtlinearen Lyapunov-Beobachter verbessert. Das neu vorgestellte Verfahren wird in einer Simulation und anhand von Messungen mit einem LKW in Zusammenarbeit mit der Firma Eaton untersucht.

Winstead und Kolmanovsky [4] stellen einen EKF vor, der neben der Masse und der Fahrbahnsteigung auch die Geschwindigkeit des Fahrzeugs schätzt. Hierfür stehen die

Signale von Antriebsmoment und der Fahrzeugbeschleunigung zur Verfügung, welche durch Ableiten der Geschwindigkeit berechnet wird. Neben dem EKF-Algorithmus wird auch noch eine modellprädiktive Regelung vorgestellt, welche die Eingangssignale so berechnet, dass für die Schätzung möglichst gute Ergebnisse erzielt werden. Allerdings ist dieses Verfahren nicht in der Lage die Fahrwiderstände zu ermitteln.

Die Arbeit von Fathy et al. [5] gibt einen Überblick über bestehende Algorithmen zur Masseschätzung, basierend auf Vertikal-, Quer- und Längsdynamik. Außerdem werden die bestehenden Verfahren hinsichtlich mittelnder (z. B. RLS) und ereignisbasierender Arbeitsweise unterschieden. Die Autoren entwickeln einen Algorithmus zur Masseschätzung, der auf dem gewöhnlichen RLS-Algorithmus aufbaut und lediglich ausgewählte Situationen zur Berechnung verwendet. Durch die Auswahl gezielter Beschleunigungssituationen können die konstanten Terme der Fahrwiderstände bei der Masseschätzung vernachlässigt werden. Allerdings ist somit auch keine Schätzung von Roll- und Luftwiderstand möglich. Das vorgestellte Verfahren, welches das Verhalten eines Hochpassfilters aufweist, wurde anhand von Fahrzeugmessungen an einem Sport Utility Vehicle (SUV) von Chrysler validiert.

Yu et al. [8] stellen einen Algorithmus zur Masse- und Rollwiderstandsschätzung vor, der auf dem RLSmV-Verfahren von Vahidi et al. [2] basiert und somit nicht in der Lage ist die Fahrwiderstände zu adaptieren. Als Testfahrzeug dient ein Prototyp mit vier elektrischen Radnabenmotoren mit einer Gesamtleistung von 10 kW. In Versuchen werden Ergebnisse in der Masseschätzung mit einem Fehler von weniger als 3 % und einer maximalen Konvergenzzeit von 0,6 s gezeigt.

Mahyuddin et al. [9], [33] stellen in Zusammenarbeit mit Jaguar/Land Rover einen adaptiven Beobachter mit Sliding-Mode-Anteil vor. Stabilität und Konvergenz werden analytisch anhand der Lyapunov-Theorie bewiesen. Für die Schätzung von Fahrzeugmasse, Steigung und Fahrwiderstand sind die Signale von Antriebsmoment und Fahrzeuggeschwindigkeit notwendig. Der Fahrwiderstand wird als viskoser, d. h. linear von der Geschwindigkeit abhängiger Widerstand modelliert. Eine Unterscheidung zwischen konstantem Roll- und quadratischem Luftwiderstand findet nicht statt. Neben den analytischen Untersuchungen wird der Algorithmus bei der Parameterschätzung an einem Modellfahrzeug analysiert.

Wragge-Morley et al. [34], [35] erweitern das Verfahren von Mahyuddin et al. [33] um einen zusätzlichen Algorithmus zur Datenfusion, der zusätzlich das Signal eines Längsbeschleunigungssensors für die Masse- und Steigungsschätzung verwendet. Eine Adaption der Fahrwiderstände wird nicht berücksichtigt. Die Daten für die Simulation des neuen Verfahrens stammen von realen Messfahrten.

Das Verfahren von Kim et al. [36] unter Mithilfe von Hyundai kombiniert Längs- und Querdynamik, um auf Geraden und in Kurven die Fahrzeugmasse zu schätzen. Als Schätzalgorithmus kommt in beiden Fällen das gewöhnliche RLS-Verfahren zum Einsatz. Bei Kurvenfahrten (Querdynamik) wird das Verhalten des Fahrzeugs beim Rollen (seitliches Kippen des Aufbaus) betrachtet. Der Rollwinkel wird verwendet, um aus den zwei Schätzungen aus Längs- und Rolldynamik durch lineare Interpolation einen Schätzwert für die Masse zu erhalten. Simulationsergebnisse beschreiben das Verhalten des neu entwickelten Algorithmus. Diese Methode kann die Fahrwiderstände nicht ermitteln.

Die Arbeiten von Rhode befassen sich mit der Schätzung von Fahrzeugmasse, Roll- und Luftwiderstand, wobei der Rollwiderstand als konstanter und linear von der Geschwindigkeit abhängiger Wert modelliert wird. Als Schätzverfahren kommt dabei das TLS-Verfahren [10] zum Einsatz, welches Messfehler nicht nur in den Ausgangsgrößen, sondern auch in den Eingangssignalen berücksichtigt. Zusätzlich werden Messausreißer über ein nichtrekursives Verfahren detektiert, was zu einem hohen Rechen- und Speicheraufwand führt. Rhode und Gauterin [11] erweitern das TLS-Verfahren zum Generalized Total Least Squares (GTLS). Damit können unterschiedliche Varianzen der Messfehler in den Ein- und Ausgangssignalen berücksichtigt werden. Allerdings erzielt das aufwändige GTLS-Verfahren keine Verbesserung gegenüber dem gewöhnlichen RLS-Algorithmus. Die Berechnung der unterschiedlichen Varianzen in den Signalen wird in [37] vorgestellt. Eine weitere Arbeit von Rhode et al. [12] stellt ein Verfahren vor, welches auf einem Kalman-Filter basiert und robust gegenüber Messausreißern ist. Allerdings hängt die Leistung des robusten Verfahrens von den Anwendereinstellungen ab. Außerdem wird dieses Verfahren um eine Methode erweitert, welche das Verhalten bei geringer Anregung verbessert. Zusätzlich werden mehrere Modelle mit unterschiedlichen Einstellparametern für die Schätzung verwendet, wobei das Schätzergebnis durch Kombination der Schätzungen aus den einzelnen Modellen erzielt wird. Eine Übersicht über die Arbeiten von Rhode bietet die Dissertation [13], in der wie in allen Arbeiten von Rhode ein Porsche Panamera als Versuchsfahrzeug zum Einsatz kommt.

Der Ansatz von Chu et al. [38] basiert wie das Verfahren von Fathy et al. [5] auf einer Hochpassfilterung und dem gewöhnlichen RLS-Algorithmus, womit die Fahrwiderstände nicht geschätzt werden. Als Versuchsfahrzeug dient ein elektrifizierter Geländewagen, für den Masse und Steigung, basierend auf Antriebsmoment und Längsbeschleunigung, berechnet wird. Mit dem vorgestellten Verfahren werden Genauigkeiten in der Masse-schätzung von 2,5 % nach einer Konvergenzzeit von 1,8 s erreicht.

Kedar-Dongarkar und Das [7] entwickeln einen Algorithmus, der zuerst Fahrzeugmasse und Rollwiderstand mit dem RLS-Verfahren schätzt. Ein zweiter RLS-Algorithmus

ermittelt zusätzlich die Windgeschwindigkeit, jedoch nicht den Luftwiderstandskoeffizienten. Als Anwendung für den zweistufigen Algorithmus dient eine Simulation mit einem seriellen Hybridfahrzeug, bei der es in der Schätzung der Windgeschwindigkeit teilweise zu großen Abweichungen kommt.

Für die Masse- und Steigungsschätzung eines leichten Nutzfahrzeugs verwendet Raffone [39] einen zweistufigen Algorithmus. Im ersten Schritt berechnet ein linearer Kalman-Filter die Fahrbahnsteigung, basierend auf den Messsignalen von Geschwindigkeit und Längsbeschleunigungssensor. In einem zweiten Schritt werden Fahrzeuglängsbeschleunigung und Antriebskraft verwendet, um anhand eines RLS-Verfahrens die Fahrzeugmasse zu bestimmen. Dabei wird für jeden Gang eine eigene Masseschätzung berechnet, welche anschließend zu einer Gesamtmasse kombiniert wird. Diese Methode ermittelt nicht die Fahrwiderstände. Fahrzeugversuche mit einem leichten Nutzfahrzeug finden auf einem FIAT-Testgelände statt.

Das Verfahren von Liu et al. [40] verwendet in einem ersten Schritt einen Kalman-Filter, um mit der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Antriebskraft die Fahrbahnsteigung zu berechnen. Mit der Schätzung für die Steigung und der Fahrzeuglängsbeschleunigung wird in einem zweiten Schritt die Masse anhand eines RLS-Verfahrens geschätzt. Eine Schätzung der Fahrwiderstände ist mit diesem Verfahren nicht möglich. Der vorgeschlagene Algorithmus wird mit Simulationen und mit realen Experimenten an einem LKW vom Typ J5 der Marke FAW getestet.

Zhang et al. [41] schätzen Fahrzeugmasse und Steigung für ein experimentelles Elektrofahrzeug mit Radnabenmotoren. Die Fahrbahnsteigung wird aus Längs- und Vertikalgeschwindigkeit berechnet, welche von GPS und Inertial Navigation System (INS) stammt. Ein RLS-Algorithmus schätzt die Fahrzeugmasse, jedoch nicht die Fahrwiderstände. Die einzelnen Geschwindigkeitsanteile in den drei Raumrichtungen werden über eine Rotationsmatrix berechnet. Für eine genauere Berechnung werden die Fehler von Position und Geschwindigkeit über ein Kalman-Filter berechnet. Bei genügend großer Anzahl an sichtbaren Satelliten werden die Signale aus dem GPS und dem INS verwendet. Falls zu wenige GPS-Satelliten zur Verfügung stehen, wird die Geschwindigkeit aus den Raddrehzahlsensoren verwendet. Als Test für den Algorithmus dient eine Simulation mit realen Messdaten, in der die Masseschätzung einen Schätzfehler von 5% besitzt.

Wilhelm et al. verwenden ihren Algorithmus zur Masseschätzung für einen elektrisch angetriebenen Ford Transit Connect [42] bzw. für einen Mitsubishi i-MiEV [43]. Die Masseschätzung basiert auf der einfachen Gleichung $m = F/\dot{v}$, wobei diese Berechnung nur in ausgewählten Situationen ausgeführt wird, was dem Verhalten eines Hochpassfilters ähnelt. Aufgrund der einfachen Modellierung kann das Verfahren die Fahrwiderstände

nicht adaptieren. Da die Berechnung durch Messfehler verrauscht ist, wird das Ergebnis der Masseberechnung anschließend gefiltert.

Die Arbeit von Kidambi et al. [44] untersucht verschiedene Verfahren zur Masse- und Steigungsschätzung. Es kommt das RLSmV-Verfahren von [2], das EKF-Verfahren von [4] und der Beobachterentwurf von [3] zum Einsatz. Zusätzlich zu den bereits bekannten Verfahren stellen Kidambi et al. einen Schätzalgorithmus vor, der Masse und Steigung unabhängig voneinander bestimmt, wofür jedoch ein zusätzlicher Sensor zur Längsbeschleunigungsmessung notwendig ist. Die Schätzung der Fahrwiderstände ist nicht möglich. Als Anwendungsbeispiel dienen Messdaten eines Ford Taurus, die für die Simulation der vier verschiedenen Schätzalgorithmen verwendet werden.

Für einen elektrisch angetriebenen LKW verwenden Maalej et al. [45] einen RLSmV-Algorithmus, um Masse und Fahrbahnsteigung zu schätzen. Dabei wird das Verfahren von Vahidi et al. [2] erweitert, indem die Vergessenheitsfaktoren an die aktuelle Fahrsituation angepasst werden. So wird die Masse überwiegend in Beschleunigungsphasen und die Steigung bei Konstantfahrten geschätzt. Allerdings kann das Verfahren nicht die Fahrwiderstände ermitteln.

Eine Übersicht über den Stand der Technik zur Fahrzeugmasse- und Fahrwiderstandsschätzung enthält die Tabelle 3.1. Die Tabelle listet die geschätzten Parameter, die dafür notwendigen Sensorsignale, die verwendeten Algorithmen sowie die Anwendung auf. Die Auflistung erfolgt chronologisch mit der frühesten Literaturquelle am Anfang.

Für die Schätzung des Bremsenparameters, der den Zusammenhang zwischen Bremsdruck und Bremsmoment beschreibt, stellen Ricciardi et al. [14] [15], [16], [17] verschiedene Verfahren vor. Zum einen stellen die Autoren verschiedene Modelle mit unterschiedlichem Detaillierungsgrad vor. Zum anderen kommen unterschiedliche Verfahren zur Schätzung der Parameter zum Einsatz, wie z. B. der lineare Kalman-Filter. Das Problem bei den vorgestellten Verfahren ist die Voraussetzung, dass die Masse und die Fahrwiderstände bekannt sind.

Teile der vorliegenden Arbeit wurden bereits in [46], [47], [48], [49] und [50] vorgestellt.

3.2 Modellierung der Fahrzeuglängsdynamik

Aufbauend auf den bekannten Modellen aus der Fachliteratur, welche der Abschnitt 3.1 vorstellt, zeigt dieser Teil die Modellierung der Fahrzeuglängsdynamik. Die darin enthaltenen, unbekannt Parameter sind Fahrzeugmasse, Roll- und Luftwiderstand sowie Gesamtbremskoeffizient. Die Längsdynamik lässt sich dabei als Gleichgewicht zwischen

Literatur	Parameter	Sensorsignale	Algorithmus	Anwendung
	Masse Rollwiderstand Luftwiderstand Steigung Kurvenwiderstand	Antriebsmoment Längsgeschwindigkeit Längsbeschleunigung GPS-Signal Umgebungsdruck Umgebungstemperatur Bremsdruck	RLS RLSmV TLS Hochpassfilter Sliding-Mode-Beobachter Lyapunov-Beobachter Kalman-Filter EKF	
[6]	• • • •	• • • •	•	Mercedes E320T
[1]	• • • •	• • • •		Volvo FH12
[31]	• • • •	• • • •	• •	LKW Simulation
[32]	• • • •	• • • •	• •	Freightliner LKW
[2]	• • • •	• • • •	• •	Freightliner LKW
[4]	• • • •	• • • •		PKW Simulation
[5]	• • • •	• • • •	• •	Chrysler SUV
[3]	• • • •	• • • •	• •	LKW
[8]	• • • •	• • • •	• •	El. Prototyp
[9]	• • • •	• • • •		Modell-Fzg.
[36]	• • • •	• • • •	• •	PKW Simulation
[10]	• • • •	• • • •	• •	Porsche Panamera
[38]	• • • •	• • • •	• •	Elektrifiz. PKW
[7]	• • • •	• • • •	• •	PKW Simulation
[39]	• • • •	• • • •	• •	Leichtnutzfahrzeug
[11]	• • • •	• • • •	• • • •	Porsche Panamera
[40]	• • • •	• • • •	• •	FAW J5 LKW
[41]	• • • •	• • • •	• •	4WD E-Fzg.
[42]	• • • •	• • • •	• •	El. Ford Transit
[43]	• • • •	• • • •	• •	Mitsubishi iMiEV
[44]	• • • •	• • • •	• •	Ford Taurus
[33]	• • • •	• • • •	• •	Modell-Fzg.
[45]	• • • •	• • • •	• •	E-Klein-LKW
[34]	• • • •	• • • •	• •	El. Prototyp
[35]	• • • •	• • • •	• •	Land Rover
[12]	• • • •	• • • •	• •	Porsche Panamera
[13]	• • • •	• • • •	• •	Porsche Panamera

Tabelle 3.1: Übersicht über den Stand der Technik zur Fahrzeugmasse- und Fahrwiderstandsschätzung

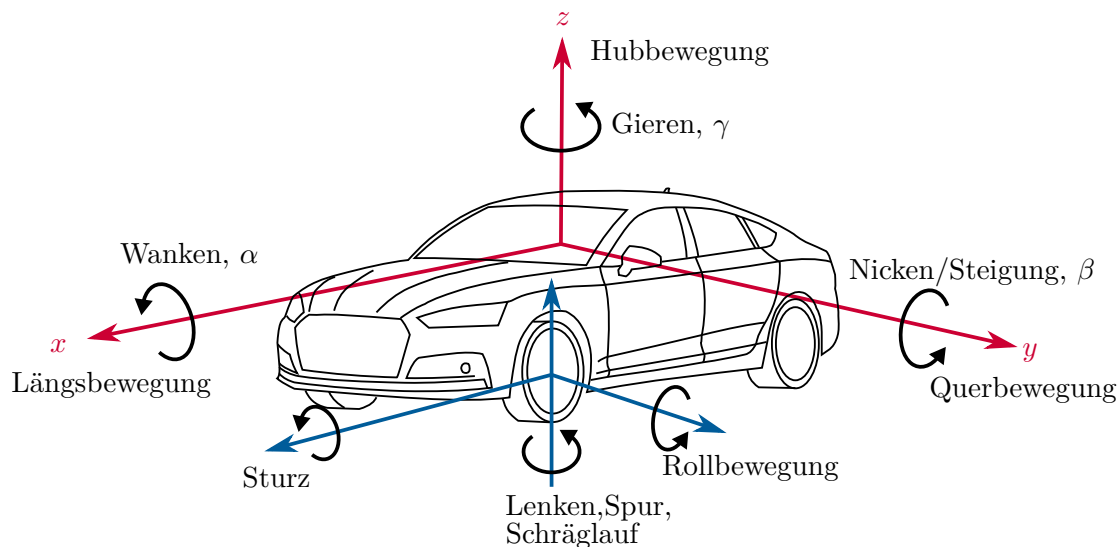


Abbildung 3.1: Fahrzeugkoordinatensysteme nach ISO 8855 bzw. DIN 70000 [51, S. 21]

antreibenden Kräften und Widerstandskräften beschreiben und wird schließlich in ein MISO-Modell nach Gleichung (2.2) umgewandelt. Im Anschluss erfolgt mit diesem Modell die Parameterschätzung.

3.2.1 Fahrzeugkoordinatensysteme

Zur Beschreibung von Fahrzeuggrößen und -verhalten werden Koordinatensysteme nach ISO 8855 bzw. DIN 70000 verwendet, die in Abbildung 3.1 dargestellt sind. Im rechtshändigen, fahrzeugfesten Koordinatensystem (—) zeigt die x -Achse nach vorne, die y -Achse nach links und die z -Achse nach oben. Neben den drei translatorischen Freiheitsgraden besitzt der Aufbau auch drei rotatorische Freiheitsgrade, welche das Wank-, Nick- und Gierverhalten des Fahrzeugs beschreiben. Anhand des Koordinatensystems kann das Fahrzeugverhalten in Längs-, Quer- und Vertikaldynamik unterteilt werden.

Die Lage des Rades, welche über die Kinematik der Radaufhängung von Einfederung und Lenkwinkel abhängig ist, kann durch ein zusätzliches Koordinatensystem (—) beschrieben werden. Die Hauptbewegung ist dabei die Rollbewegung um die y -Achse. Die Rotation um die x -Achse des Radkoordinatensystems wird als Sturz bezeichnet. Die Lenkung bewirkt zum einen eine Drehung um die z -Achse und zum anderen stellt sich durch die Radkinematik eine Vor- oder Nachspur ein. [51, S. 21]

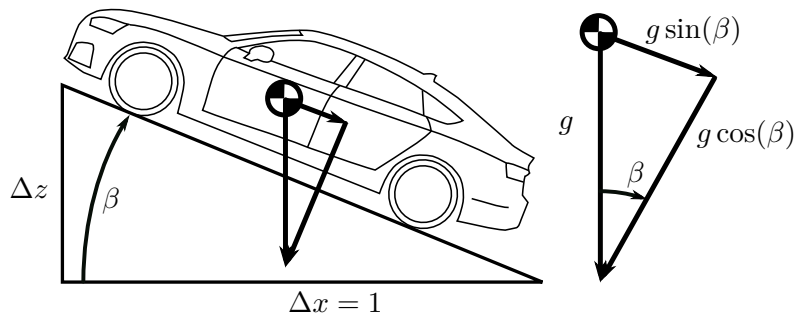


Abbildung 3.2: Fahrzeug in der Steigung. Die Anteile der Erdbeschleunigung g sind rechts vergrößert dargestellt.

3.2.2 Fahrwiderstände

Im Fahrzeugbetrieb müssen verschiedene Kräfte und Widerstände überwunden werden, um das Fahrzeug zu bewegen. Die folgenden Abschnitte beschreiben diese Einflussgrößen.

3.2.2.1 Steigungskraft

An Steigungen wirkt ein Teil der Schwerkraft des Fahrzeugs ($m \cdot g$) in Fahrzeuginnenrichtung, was in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Die Steigungskraft ergibt sich zu

$$F_{St} = mg \sin(\beta). \quad (3.1)$$

Die Gravitationsbeschleunigung ist $g \approx 9,81 \text{ N/kg}$ und die Fahrzeugmasse wird mit m bezeichnet. Hierbei wird die Steigung der Fahrbahn als Winkel in Radian angegeben ($[\beta] = \text{rad}$). Die Umrechnung in die im Alltag übliche Angabe der Steigung in Prozent ist ebenfalls aus Abbildung 3.2 ersichtlich.

$$\Delta z = \tan(\beta) \frac{100\%}{1} \quad (3.2)$$

Für die Gleichung (3.1) kann die Kleinwinkelnäherung $\sin(\beta) \approx \beta$ für kleine Steigungswinkel β verwendet werden.

$$F_{St} = mg \sin(\beta) \approx mg\beta \quad (3.3)$$

Bei einer Steigung von $\beta = 35\% = 19,3^\circ$ führt die Kleinwinkelnäherung zu einem relativen Fehler von ca. 2%. Da bei geringeren Steigungen der Näherungsfehler kleiner ausfällt, ist die Annahme der Kleinwinkelnäherung gerechtfertigt.

Im Gegensatz zu den Fahrwiderständen wird an Steigungen keine Energie dissipiert, sondern die Energie in potentielle Energie umgewandelt. Bei einer Fahrt bergab wird die

potentielle Energie wieder in kinetische Energie umgewandelt, was am Vorzeichenwechsel des Sinustermes in Gleichung (3.3) für eine negative Steigung β erkennbar ist.

Die Steigung lässt sich mit der fahrzeugeigenen Sensorik berechnen. Ein Längsbeschleunigungssensor, welcher fest an der Fahrzeugkarosserie montiert ist, misst zum einen die Fahrzeuglängsbeschleunigung über Grund \dot{v}_x als auch nach Abbildung 3.2 den Anteil der Erdbeschleunigung parallel zur Fahrbahn $g \sin(\beta)$.

$$a_x = \dot{v}_x + g \sin(\beta) \approx \dot{v}_x + g\beta \quad (3.4)$$

Daraus lässt sich die Fahrbahnsteigung

$$\beta = \frac{a_x - \dot{v}_x}{g} \quad (3.5)$$

berechnen.

3.2.2.2 Strömungswiderstand

Damit das Fahrzeug seine Geschwindigkeit beibehält, müssen Strömungswiderstände der umgebenden Luft überwunden werden. Diese setzen sich aus der Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite des Fahrzeugs sowie den Reibungswiderständen an der Karosserie und der Durchströmung im Motorraum zusammen. Die Widerstandskraft aufgrund der Luftströmung lässt sich nach Heißing et al. [51, S. 47] als

$$F_{L,\infty} = \frac{1}{2} \rho_L v_\infty^2 c_w A_{Fzg} \quad (3.6)$$

modellieren. Hierbei ist ρ_L die Luftdichte

$$\rho_L = \frac{p_L}{R_L T_L} \quad (3.7)$$

mit dem Luftdruck p_L , der Lufttemperatur T_L und der spezifischen Gaskonstante von Luft $R_L = 287,058 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$. Die Anströmgeschwindigkeit

$$v_\infty = v_x + v_L \quad (3.8)$$

setzt sich aus der Fahrzeuglängsgeschwindigkeit v_x und dem Anteil der Windgeschwindigkeit in Längsrichtung v_L zusammen. c_w stellt den im Windkanal experimentell bestimmten Strömungswiderstandskoeffizienten dar, der die „Windschlüpfigkeit“ der geometrischen Form eines umströmten Körpers beschreibt. Die Querschnittsfläche A_{Fzg} ist die auf die y - z -Ebene projizierte Fläche des Fahrzeugs. Der Einfluss der Windrichtung und somit des Seitenwinds auf den gesamten Strömungswiderstand wird hier vernachlässigt,

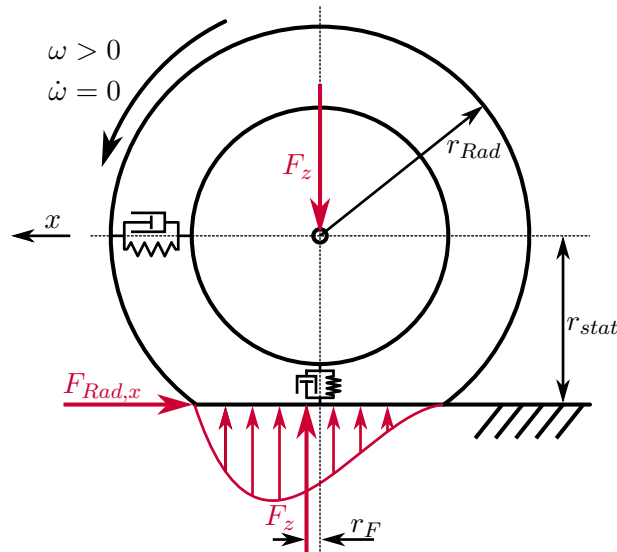


Abbildung 3.3: Erklärung des Rollwiderstands [52, S. 148]

da sich die Windrichtung nur sehr aufwändig ermitteln lässt. Die Windgeschwindigkeit v_L lässt sich ebenfalls schwierig ermitteln. Ein Vernachlässigen der konstant angenommenen Windgeschwindigkeit ($v_L = \text{const.}$) führt zu einem Fehler mit konstantem und linearem Anteil in v_x .

$$\begin{aligned}
 F_{L,\infty} &= \frac{1}{2} \rho_L v_\infty^2 c_w A_{Fzg} = \frac{1}{2} \rho_L (v_x + v_L)^2 c_w A_{Fzg} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \rho_L v_x^2 c_w A_{Fzg}}_{\sim v_x^2} + \underbrace{\rho_L v_x v_L c_w A_{Fzg}}_{\sim v_x^1} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho_L v_L^2 c_w A_{Fzg}}_{\sim v_x^0}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Da die Windgeschwindigkeit nicht messbar ist, wird eine verschwindende Windgeschwindigkeit ($v_L = 0$) angenommen und (3.9) vereinfacht sich zum Luftwiderstand

$$F_L = \frac{1}{2} \rho_L v_x^2 c_w A_{Fzg}. \tag{3.10}$$

3.2.2.3 Radwiderstand

Der Gesamtradwiderstand fasst die an den vier Rädern auftretenden Fahrwiderstände zusammen. Den größten Anteil am Radwiderstand hat der Rollwiderstand, dessen Wirkweise in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Die Gewichtskraft F_z des Fahrzeugs erzeugt eine vertikale Verformung des Reifens. Dadurch bildet sich die Reifenaufstandsfläche bzw. der Reifenlatsch. Beim Abrollen des Reifens wird der Reifenlatsch viskoelastisch verformt. Zur anschaulichen Erklärung wird der Reifen durch elementare Feder-Dämpfer-Elemente modelliert. Beim Zusammendrücken des Reifens am Latschanfang wirken Feder- und

Dämpferkräfte gemeinsam entgegen der Deformation. Beim Wiederausdehnen am Lat-schende wird die Federkraft von der Dämpferkraft verringert. Die resultierende Auf-standskraft als Integral über die einzelnen Feder-Dämpfer-Kräfte ist deshalb von der Radmittelebene um r_F in Fahrtrichtung verschoben. Durch diesen Versatz entsteht ein Widerstandsmoment, welches der Drehrichtung des Rades entgegenwirkt. Das Momen- tengleichgewicht um den Radmittelpunkt, lautet

$$F_{Rad,x,ii} r_{stat} - F_{z,ii} r_F = 0. \quad (3.11)$$

Der Index ii beschreibt die vier Räder. Aus Gleichung (3.11) ergibt sich der gesamte Rollwiderstand für das Fahrzeug. [52, S. 148-149]

$$F_{Rad,x} = \sum_{ii} F_{Rad,x,ii} = \frac{r_F}{r_{stat}} F_z = c_r mg \cos(\beta) \quad (3.12)$$

Die Normalkraft $F_z = mg \cos(\beta)$, welche das Fahrzeug auf den Untergrund auswirkt, ist nach Abbildung 3.2 abhängig vom Steigungswinkel β . Für kleine Steigungen β kann die Kleinwinkelnäherung $\cos(\beta) \approx 1$ verwendet werden. c_r stellt den Rollwiderstands- koeffizienten dar. Dieses einfache Modell der Rollreibung verhält sich wie coulombsche bzw. trockene Reibung. Mitschke und Wallentowitz stellen [53, S. 14] einen komplexeren, geschwindigkeitsabhängigen Rollwiderstandskoeffizienten vor.

$$c_r(v_x) = c_{r0} + c_{r1}v_x + c_{r4}v_x^4 \quad (3.13)$$

Damit ergibt sich für den Rollwiderstand

$$F_{Rad,x} = (c_{r0} + c_{r1}v_x + c_{r4}v_x^4)mg. \quad (3.14)$$

3.2.2.4 Kurvenwiderstand

In Kurven müssen die Reifen neben den Kräften in Fahrzeuglängsrichtung auch Quer- kräfte $F_{Rad,y}$ übertragen, um das Fahrzeug mit einer Zentripetalbeschleunigung a_y auf einer Kreisbahn mit Radius r_K zu halten.

$$F_{Rad,y} = ma_y = m \frac{v_x^2}{r_K} \quad (3.15)$$

Durch die zusätzliche Querkraft und den daraus resultierenden Schräglaufwinkel der Reifen nimmt zwar der Anteil des Rollwiderstandes ab, es kommt dafür eine zusätzliche Widerstandskraft durch die Seitenkraft zustande.

Dieser weitere Widerstand lässt sich unter folgenden Annahmen annähern:

- Das Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit ($\dot{v}_x = 0$).
- Jedes Rad überträgt den gleichen Anteil der gesamten Querkraft.

Die Herleitung des Kurvenwiderstands erfolgt anhand der Abbildung 3.4, in der die angreifenden Längs- und Querkräfte an einem Rad aufgezeichnet sind, welches mit dem Schräglaufwinkel γ_{Rad} zur tatsächlichen Bewegungsrichtung \vec{v} läuft.

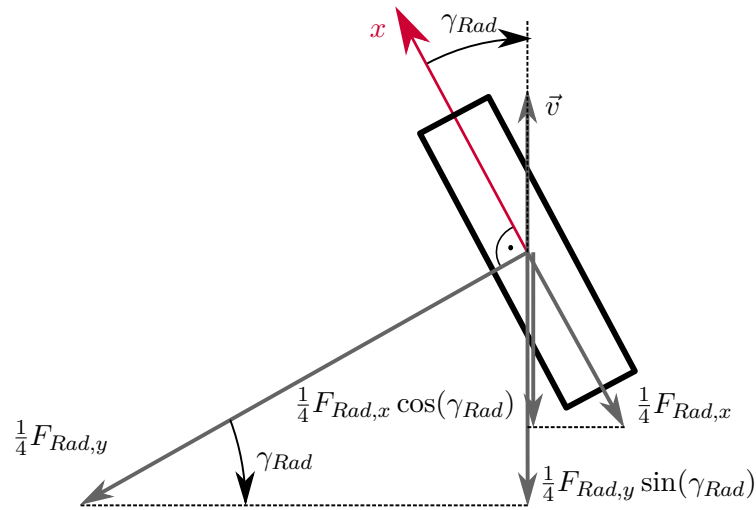


Abbildung 3.4: Kräfte am Rad in Kurven für die Herleitung des Kurvenwiderstands

Der gesamte Fahrwiderstand am Reifen in x -Richtung ergibt sich aus der Summe der vier Einzelradkräfte.

$$\begin{aligned} F_{Rad} &= 4 \left(\frac{1}{4} F_{Rad,x} \cos(\gamma_{Rad}) + \frac{1}{4} F_{Rad,y} \sin(\gamma_{Rad}) \right) \\ &= F_{Rad,x} \cos(\gamma_{Rad}) + F_{Rad,y} \sin(\gamma_{Rad}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nach Heißing et al. [51, S. 30] erreicht der Schräglaufwinkel γ_{Rad} maximal 12° , wodurch die Bedingung für die Kleinwinkelnäherung ($\cos(\gamma_{Rad}) = 1$, $\sin(\gamma_{Rad}) = \gamma_{Rad}$) erfüllt ist. Mit dieser Näherung vereinfacht sich Gleichung (3.16).

$$F_{Rad} = F_{Rad,x} + \underbrace{F_{Rad,y} \gamma_{Rad}}_{F_K} \quad (3.17)$$

Der Anteil des Rollwiderstands nimmt durch den Schräglaufwinkel kaum ab, ein Anteil der Seitenkraft wirkt jedoch zusätzlich als Kurvenwiderstandskraft F_K in Längsrichtung. Für die Berechnung von γ_{Rad} kann der Zusammenhang zwischen dem Schräglaufwinkel

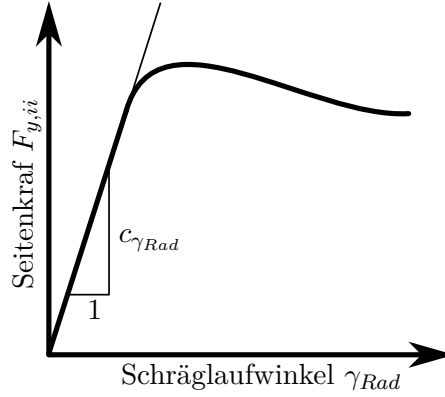


Abbildung 3.5: Reifenkennlinie: Zusammenhang von Seitenkraft und Schräglaufwinkel nach [54, S. 144]

und der Seitenkraft als linear angenommen werden. Der lineare Zusammenhang

$$F_{Rad,y,ii} = c_{\gamma_{Rad}} \gamma_{Rad,ii} \quad (3.18)$$

mit der Schräglaufsteifigkeit $c_{\gamma_{Rad}}$ gilt laut Abbildung 3.5 für kleine Schräglaufwinkel.

Die Seitenkräfte an den vier Rädern müssen die Querkraft aufgrund der Zentripetalbeschleunigung aufnehmen, woraus sich schließlich der Schräglaufwinkel berechnen lässt.

$$\begin{aligned} F_{Rad,y} &= \sum_{ii} F_{Rad,y,ii} = \sum_{ii} c_{\gamma_{Rad}} \gamma_{Rad,ii} = 4c_{\gamma_{Rad}} \gamma_{Rad} \\ &\Updownarrow \\ \gamma_{Rad} &= \frac{F_{Rad,y}}{4c_{\gamma_{Rad}}} \stackrel{(3.15)}{=} \frac{mv_x^2}{4r_K c_{\gamma_{Rad}}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Damit ergibt sich der Kurvenwiderstand als

$$F_K = F_{Rad,y} \gamma_{Rad} = \frac{m^2 v_x^4}{4r_K^2 c_{\gamma_{Rad}}}, \quad (3.20)$$

der in [54, S. 145-147] über das Zweispurmodell hergeleitet wird. Der unbekannte Kurvenradius r_K kann anhand der Querbeschleunigung $a_y = v_x^2/r_K$ ermittelt werden, die ein Beschleunigungssensor des Electronic Stability Control (ESP)-Systems oder einer inertialen Messeinheit (engl.: Inertial Measurement Unit (IMU)) misst. Damit ergibt sich der Kurvenwiderstand zu

$$F_K = \frac{m^2 a_y^2}{4c_{\gamma_{Rad}}}. \quad (3.21)$$

Ein zusätzlicher Widerstand in Kurven kann durch den Sturzwinkel des Rades beim Lenken entstehen. Vor allem bei großen Lenkwinkeln, die zu einem kleinen Kurvenradius führen, etwa beim Abbiegen, kann der Radsturz abhängig von der Fahrwerksgeometrie große Werte aufweisen. Durch Radsturz rollt das Rad nicht mehr eben auf der Fahrbahn

ab und es kommt zu einem zusätzlichem Kurvenwiderstand, der aufgrund der aufwändigen Fahrwerkskinematik nur schwer zu berechnen ist. [54, S. 145]

3.2.2.5 Bremskraft

Abbildung 3.6 dient zur Herleitung der Bremskraft. Die Kraft, welche der Fahrer mit dem

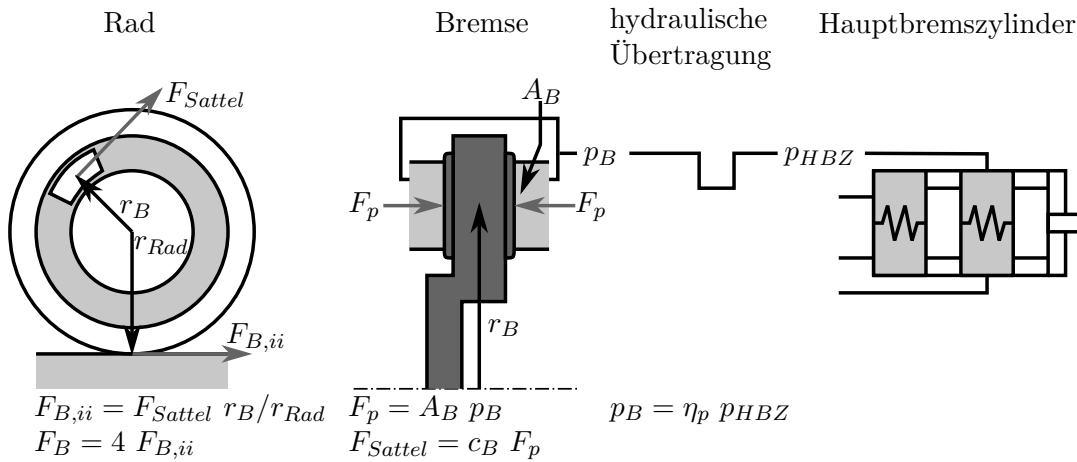


Abbildung 3.6: Entstehung der Bremskraft nach [54, S. 244]

Fuß auf das Bremspedal aufbringt wird durch einen Bremskraftverstärker erhöht und hydraulisch an die Radbremzen übertragen. Fahrzeuge mit ESP besitzen einen Sensor, der den Druck im Hauptbremszylinder p_{HBZ} misst. Durch einen hydraulischen Wirkungsgrad $\eta_p < 1$ wirkt ein geringerer Druck an der Bremse $p_B = \eta_p p_{HBZ}$. Über die Oberfläche der Bremszylinder A_B wirkt der Bremsdruck p_B eine Kraft $F_p = A_B p_B$ auf die Bremsbeläge aus. Über den Bremskennwert c_B , der die Reibung zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe beschreibt, kann die Bremskraft am Bremssattel $F_{Sattel} = c_B F_p$ errechnet werden. Die Kraft am Sattel greift tangential am Rad mit dem Radius r_B an, wodurch sich die Bremskraft zwischen einem einzelnen Rad und dem Untergrund zu $F_{B,ii} = F_{Sattel} r_B / r_{Rad}$ ergibt. Auf das gesamte Fahrzeug wirkt die Bremskraft $F_B = 4 F_{B,ii}$, bestehend aus den vier einzelnen Kräften. Ausgehend vom Druck des Hauptbremszylinders p_{HBZ} ergibt sich die Bremskraft F_B für das gesamte Fahrzeug. [51, S. 172], [54, S. 243-245]

$$F_B = 4 \frac{r_B}{r_{Rad}} c_B A_B \eta_p p_{HBZ} = \frac{c_p}{r_{Rad}} p_{HBZ} \quad (3.22)$$

Für das Bremsmoment gilt

$$M_B = F_B r_{Rad} = c_p p_{HBZ} \cdot \quad (3.23)$$

Die für die Berechnung notwendigen Werte für Radbremsenzylinderkolbenfläche A_B , Bremsenwirkungsgrad η_B , Bremsenkennwert c_B , mittlerer Reibradius des Bremsenbelags r_B unterliegen Ungenauigkeiten und werden zu einem gesamten Bremskoeffizienten c_p zusammengefasst. Schramm et al. [52, S. 208-210] schlagen eine komplexere Berechnung der Gesamtbremskraft vor, in der Bremsbelagtemperatur und Bremsdruck einen nichtlinearen Einfluss besitzen.

3.2.3 Antriebsstrang

Im Gegensatz zu den Fahrwiderständen wirkt zum Betreiben des Fahrzeugs das Radantriebsmoment M_A . Die messtechnische Ermittlung des Radmoments ist technisch und wirtschaftlich sehr aufwändig. Alternativ lässt sich das Moment an den Rädern aus dem Motormoment und den Kennwerten des Antriebsstrangs herleiten. Für die Herleitung des Radmoments wird anstelle eines reinen Elektrofahrzeugs die Antriebstopologie eines Parallelhybridfahrzeugs verwendet, welche in Abbildung 3.7 schematisch dargestellt ist. Es handelt sich dabei nach Reif et al. [55, S. 32] um einen P2-Hybrid, bei dem eine Trennkupplung zwischen Verbrennungsmotor und Elektromaschine angebracht ist, um rein elektrisches Fahren zu ermöglichen. Das aufwändigere Antriebsstrangmodell des Hy-

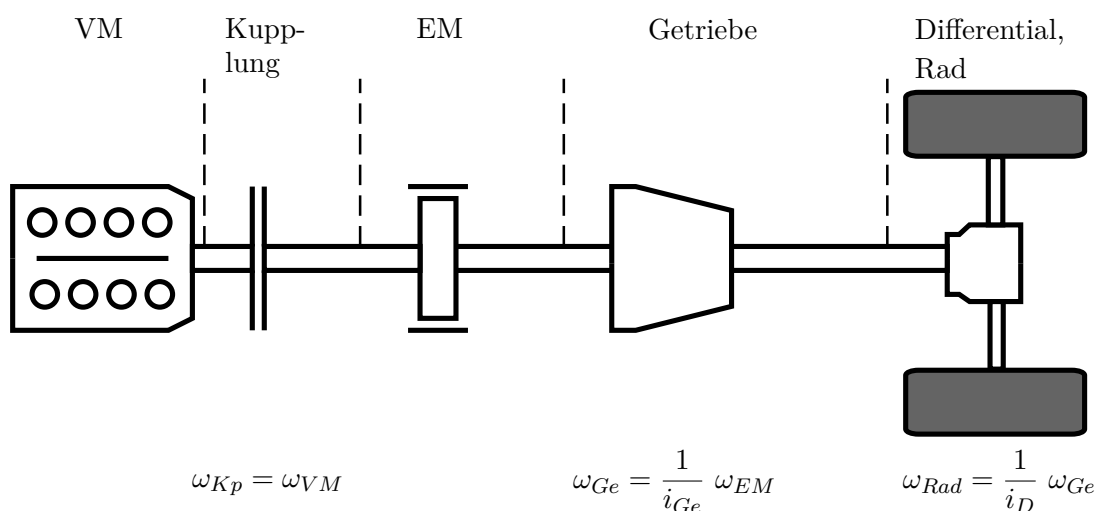


Abbildung 3.7: Schematischer Antriebsstrang eines Hybridfahrzeugs mit P2-Konfiguration

brids enthält als Spezialfall einen reinen Elektroantrieb, bei dem der Verbrennungsmotor und die Kupplung entfallen.

Verbrennungsmotor Das Moment, welches der Verbrennungsmotor (Index VM) abgibt, setzt sich zusammen aus dem Moment M_V welches durch die Verbrennung entsteht, abzüglich den Verlustreibmomenten im Motor $M_{Ver,VM}$. Das vom Motor

abgegebene Moment M_{VM} ergibt sich aus dem zweiten newtonschen Gesetz

$$\Theta_{VM}\dot{\omega}_{VM} = M_V - M_{Ver,VM} - M_{VM} \quad (3.24)$$

mit dem Trägheitsmoment des Motors Θ_{VM} und der Drehzahl $\omega_{VM} = \frac{2\pi}{60\text{s/min}} n_{VM}$, welche üblicherweise als n_{VM} in Umdrehungen pro Minute angegeben wird.

Kupplung Die Kupplung (Index Kp) überträgt im vollständig geschlossenen Zustand exakt das anliegende Moment und die Drehzahl. Wenn die Kupplung vollständig offen ist, wird weder Moment noch Drehzahl übertragen. Da sich das Verhalten bei schlupfender Kupplung schwierig abbilden lässt, beschränkt sich die Modellierung auf vollständig geschlossene oder offene Kupplungen. Somit erhält man für das Kupplungsmoment M_{Kp} und für die Drehzahl ω_{Kp} folgende Zusammenhänge:

$$M_{Kp} = \begin{cases} M_{VM} & \text{falls Kupplung geschlossen} \\ 0 & \text{falls Kupplung offen} \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$\omega_{Kp} = \begin{cases} \omega_{VM} & \text{falls Kupplung geschlossen} \\ f(v_x) & \text{falls Kupplung offen} \end{cases} \quad (3.25b)$$

Der Ausdruck $\omega_{Kp} = f(v_x)$ gibt an, dass die Drehzahl der Kupplung durch die Fahrzeuggeschwindigkeit vorgegeben ist. Beim rein elektrischen Fahren, beim Freilauf mit abgestelltem Motor oder beim Starten des Verbrennungsmotors ist die Kupplung geöffnet.

Elektrische Maschine Hybridfahrzeuge besitzen neben dem Verbrennungsmotor eine zusätzliche elektrische Maschine (Index EM), die den Verbrennungsmotor beim Beschleunigen unterstützt (Boosten) und in Brems- und Ausrollphase die kinetische Energie in elektrische umwandelt (Rekuperation). Bei Konstantfahrt kann die elektrische Maschine ein zusätzliches negatives Moment stellen, um den Verbrennungsmotor in einem effizienteren Betriebspunkt zu betreiben und dadurch den Akkumulator zu laden (Lastpunktanhebung). Mit der elektromagnetischen Kraft der E-Maschine M_{EK} , welche positive (Boosten) und negative Werte (Rekuperation, Lastpunktanhebung) annehmen kann, ergibt sich das Gesamtmoment am Abtrieb der E-Maschine M_{EM} aus dem zweiten newtonschen Gesetz.

$$\Theta_{EM}\dot{\omega}_{EM} = M_{Kp} + M_{EK} - M_{EM} \quad (3.26a)$$

$$\omega_{EM} = \omega_{Kp} \quad (3.26b)$$

Θ_{EM} ist das Massenträgheitsmoment der E-Maschine und ω_{EM} die Drehzahl.

Getriebe Das Getriebe (Index Ge) dient als Momentenwandler, um das geringe Moment von Verbrennungsmotor und E-Maschine zu erhöhen, wobei die Drehzahl geringer wird. Die Leistung bleibt dabei annähernd konstant, bis auf ein geringes Verlustmoment $M_{Ver,Ge}$. Für die Variation von Moment und Drehzahl stehen verschiedene Gänge mit einem Übersetzungsverhältnis i_{Ge} zu Verfügung. Die rotierenden Bauteile des Getriebes mit der Massenträgheit Θ_{Ge} müssen beim Beschleunigen berücksichtigt werden. Das Getriebeausgangsmoment M_{Ge} ergibt sich aus dem zweiten newtonschen Gesetz.

$$\Theta_{Ge}\dot{\omega}_{Ge} = i_{Ge}M_{EM} - M_{Ver,Ge} - M_{Ge} \quad (3.27a)$$

$$\omega_{Ge} = \frac{1}{i_{Ge}}\omega_{EM} \quad (3.27b)$$

Bei Schaltungen und beim Anfahren mit schlupfender Kupplung müssen zusätzliche Phänomene bei der Modellierung berücksichtigt werden. Das Getriebemodell zur Momentenübertragung (3.27a) gilt für geschlossene Kupplung und eingelegetem Gang. Da bei den herkömmlichen Getriebevarianten die Momentenübertragung durch Verzahnungen erfolgt, weisen Massenträgheitsmoment $\Theta_{Ge}(i_{Ge})$ und Verlustmoment $M_{Ver,Ge}(i_{Ge})$ eine Abhängigkeit vom aktuell eingelegten Gang i_{Ge} auf.

Differential Das Differentialgetriebe (Index D) teilt das Antriebsmoment auf zwei Räder auf, ermöglicht bei Kurvenfahrten unterschiedliche Drehzahlen zwischen Kurveninnenrad und -außenrad und besitzt eine Übersetzung i_D . Damit ergibt sich das Ausgangsmoment M_D und die Ausgangswinkelgeschwindigkeit ω_D des Differentials.

$$M_D = i_D M_{Ge} \quad (3.28a)$$

$$\omega_D = \frac{1}{i_D}\omega_{Ge} \quad (3.28b)$$

Rad Die Räder (Index Rad) setzen die rotatorische Bewegung des Antriebsstrangs mit Raddrehzahl ω_{Rad} und Gesamtantriebsmoment M_A in eine translatorische Bewegung des Fahrzeugs mit Längsgeschwindigkeit v_x und Antriebskraft F_A um. Dabei muss die Trägheit $\Theta_{Rad,ii}$ der vier Räder beschleunigt werden.

$$\sum_{ii} \Theta_{Rad,ii}\dot{\omega}_{Rad} = M_D - M_A \quad (3.29a)$$

$$F_A = \frac{M_A}{r_{Rad}} \quad (3.29b)$$

$$\omega_{Rad} = \omega_D \quad (3.29c)$$

$$v_x = \omega_{Rad}r_{Rad} \quad (3.29d)$$

Die gesamte Antriebskraft F_A des Fahrzeugs am Rad bei geschlossener Kupplung ergibt sich aus (3.24) - (3.29). [56, S. 193-199]

$$F_A = \frac{1}{r_{Rad}} \left\{ i_D \left[i_{Ge} (M_V + M_{EM} - M_{Ver,VM} - \Theta_{VM} \dot{\omega}_{VM} - \Theta_{EM} \dot{\omega}_{EM}) - \right. \right. \\ \left. \left. - M_{Ver,Ge} - \Theta_{Ge} \dot{\omega}_{Ge} \right] - \sum_{ii} \Theta_{Rad,ii} \dot{\omega}_{Rad} \right\} \quad (3.30)$$

Bei offener Kupplung werden alle Momente des Verbrennungsmotors (Index VM) zu Null. Die Gleichung (3.30) kann vereinfacht werden, indem die Trägheitsmomente auf Radebene betrachtet werden. Die Drehzahlen lassen sich in Abhängigkeit der Fahrzeuggeschwindigkeit darstellen.

$$\omega_{Rad} = \frac{1}{r_{Rad}} v_x \quad \omega_{Ge} = i_D \frac{1}{r_{Rad}} v_x \quad \omega_{EM} = \omega_{VM} = i_D i_{Ge} \frac{1}{r_{Rad}} v_x \quad (3.31)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung (3.30) zu

$$F_A = \frac{1}{r_{Rad}} i_D \left[i_{Ge} (M_V + M_{EK} - M_{Ver,VM}) - M_{Ver,Ge} \right] - \\ - \frac{1}{r_{Rad}^2} \underbrace{\left[i_D^2 i_{Ge}^2 (\Theta_{VM} + \Theta_{EM}) + i_D^2 \Theta_{Ge} + \sum_{ii} \Theta_{Rad,ii} \right]}_{\Theta_{red,Rad}} \dot{v}_x \quad (3.32)$$

mit dem reduzierten Massenträgheitsmoment $\Theta_{red,Rad}$, welches den Einfluss aller rotatorischen Trägheiten, bezogen auf die Raddrehzahl, beschreibt. Die gesamten Massenträgheitsmomente können anstatt der Rotation auf Radebene auch als Trägheit in Längsrichtung aufgefasst werden. Dazu wird über den Radradius r_{Rad} eine virtuelle, rotatorische Masse $m_{rot} = \Theta_{red,Rad}/r_{Rad}^2$ berechnet, die den Einfluss der Rotationsträgheit in eine längsdynamische Massenträgheit umrechnet. Diese Umrechnung verdeutlicht, dass neben der Fahrzeugmasse m alle rotatorischen Teile des Antriebsstrangs zusätzlich beschleunigt werden müssen.

3.2.4 Fahrzeuglängsdynamik

Anhand der vorher beschriebenen Kräfte am Fahrzeug kann die Fahrzeuglängsdynamik mithilfe des zweiten newtonschen Gesetzes hergeleitet werden.

$$\begin{aligned}
m\dot{v}_x &= \sum_i F_i = F_A - F_{St} - F_{Rad} - F_L - F_K - F_B \\
&\Downarrow \\
m\dot{v}_x &= F_A - mg\beta - (c_{r0} + c_{r1}v_x + c_{r4}v_x^4)mg - \frac{1}{2}c_w A_{Fzg} \rho L v_x^2 - \\
&\quad - \frac{m^2 a_y^2}{4c_{\gamma Rad}} - c_p p_{HBZ}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Anstatt die Signale der Fahrzeugbeschleunigung \dot{v}_x und der Beschleunigung aus der Erdgravitation einzeln zu verwenden, kommt das Signal des Längsbeschleunigungssensors a_x zum Einsatz.

$$a_x = \dot{v}_x + g\beta \tag{3.34}$$

Mit diesem Ausdruck und der Sortierung nach bekannten und unbekanntem Größen (Unterstrich) verändert sich (3.33) zu

$$F_A = a_x \underline{m} + g \underline{m} c_{r0} + g v_x \underline{m} c_{r1} + g v_x^4 \underline{m} c_{r4} + \frac{1}{2} \rho L v_x^2 \underline{c_w} A_{Fzg} + a_y^2 \frac{m^2}{4 \underline{c_{\gamma Rad}}} + p_{HBZ} \underline{c_p}. \tag{3.35}$$

Die Längsdynamikgleichung (3.35) lässt sich für die RLS-Schätzung als lineares MISO-System wie in Gleichung (2.2) darstellen.

$$\underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & g & g v_x & g v_x^4 & \frac{1}{2} \rho L v_x^2 & a_y^2 & p_{HBZ} \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ m c_{r0} \\ m c_{r1} \\ m c_{r4} \\ c_w A_{Fzg} \\ \frac{m^2}{4 c_{\gamma Rad}} \\ c_p \end{bmatrix}}_{\theta} \tag{3.36}$$

3.2.5 Parameterschätzung für die Fahrzeuglängsdynamik

Die unbekanntem Parameter θ in (3.36) lassen sich mit dem RLS-Verfahren nach Algorithmus 2.1 schätzen. Da Bremsungen, bei denen sich der Bremskoeffizient c_p schätzen

lässt, nur einen geringen Anteil an der gesamten Fahrzeit ausmachen, wird dieser Koeffizient gesondert von den anderen Parametern ermittelt. Das Blockschaltbild in Abbildung 3.8 verdeutlicht dieses Vorgehen.

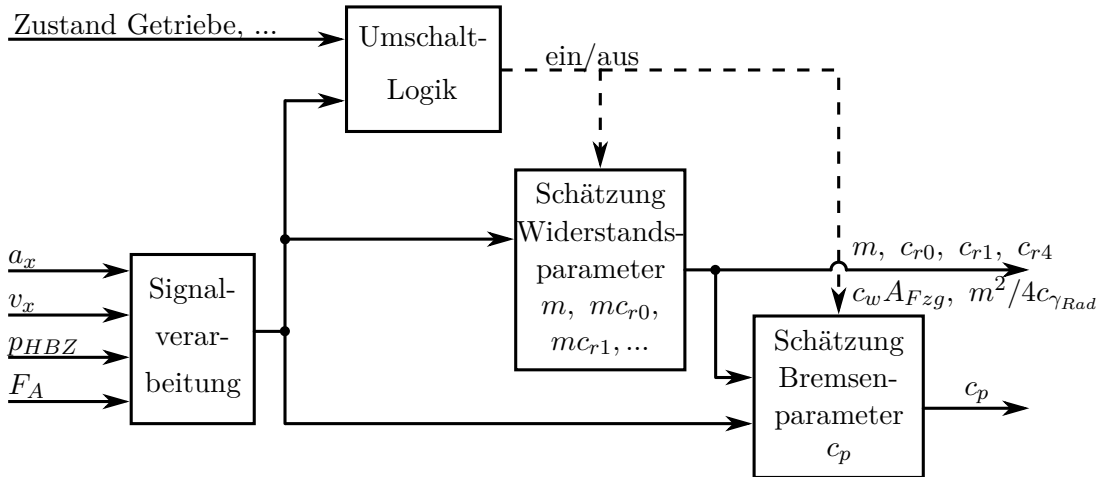


Abbildung 3.8: Schematisches Blockschaltbild der Parameterschätzung für die Fahrzeuglängsdynamik

Im Block **Signalverarbeitung** werden die notwendigen Ein- und Ausgangssignale verarbeitet, z. B. durch eine Filterung geglättet. Die **Umschaltlogik** dient dazu, die beiden Parameterschätzungen ein- und auszuschalten, je nachdem in welchem Zustand sich das Fahrzeug befindet. Außerdem werden die Schätzer deaktiviert, wenn die Antriebskraft nicht bestimmt werden kann, z. B. während eines Schalteingriffs des Getriebes. Die Schätzung der Masse m , der Rollwiderstandskoeffizienten c_{r0} , c_{r1} , c_{r4} , des Luftwiderstandskoeffizienten $c_w A_{Fzg}$ und des Kurvenwiderstandskoeffizienten $m^2/4c_{\gamma Rad}$ erfolgt, wenn keine Bremsung aktiv ist und keine Getriebeschaltungen erfolgen. Andererseits wird der Bremsenkoeffizient c_p nur dann geschätzt, wenn tatsächlich die Bremse aktiviert wird oder ein Assistenzsystem eine Bremsung einleitet. Der Block **Schätzung Widerstandsparameter** ermittelt mit einem RLS-Verfahren die Parameter m , c_{r0} , c_{r1} , c_{r4} , $c_w A_{Fzg}$ und $m^2/4c_{\gamma Rad}$. Dafür wird das Modell

$$\underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & g & gv_x & gv_x^4 & \frac{1}{2}\rho L v_x^2 & a_y^2 \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ mc_{r0} \\ mc_{r1} \\ mc_{r4} \\ c_w A_{Fzg} \\ \frac{m^2}{4c_{\gamma Rad}} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.37)$$

verwendet. Die geschätzten Parameter in θ werden im Block **Schätzung Bremsparameter** verwendet, um den Bremskoeffizienten anhand des Modells

$$\underbrace{F_A - a_x \theta_1 - g \theta_2 - g v_x \theta_3 - g v_x^4 \theta_4 - \frac{1}{2} \rho L v_x^2 \theta_5 - a_y^2 \theta_6}_{y_B} = \underbrace{p_{HBZ}}_{\phi_B} \underbrace{c_p}_{\theta_B} \quad (3.38)$$

zu bestimmen.

3.3 Versuchsbeschreibung

Dieser Abschnitt beschreibt die Versuchsdurchführung für die Schätzung der Längsdynamikparameter am Fahrzeug. Mit den daraus gewonnenen Messungen erfolgt anhand des MISO-Modells aus Abschnitt 3.2 und dem RLS-Verfahren aus Kapitel 2 eine Problemanalyse.

Die Bewertung der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung erfolgt anhand eines offenen Wirkungskreises, analog zu einem offenen Regelkreis. Das bedeutet, dass das Fahrzeug die Ergebnisse der Parameterschätzung nicht verwendet, sondern auf Ersatzwerte zurückgreift. Damit müssen die Schätzwerte nicht die Spezifikationen der Signalabnehmer erfüllen und es ist eine einfachere Versuchsdurchführung möglich. Durch den offenen Wirkungskreis können die aufgezeichneten Messungen auch am Arbeitsplatz für Simulationen verwendet werden. Somit kann der Algorithmus mit minimalen Erprobungszeiten im Fahrzeug entwickelt und bewertet werden.

Abbildung 3.9 zeigt zum Verständnis die verwendeten Messkonfigurationen. Das Motor-

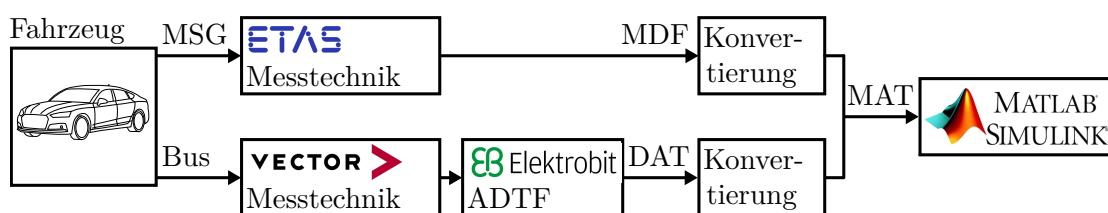


Abbildung 3.9: Schematischer Messaufbau und Datenverarbeitung

steuergerät (MSG) oder ein Fahrzeugbus stellen die notwendigen Fahrzeugsignale bereit. Die Messtechnik von ETAS [57] zeichnet mit einem speziellen Entwicklungs-MSG die Fahrzeuggrößen auf. Außerdem kann der Benutzer mit den Produkten von ETAS den Algorithmus entwickeln und direkt im Fahrzeug bewerten, da die berechneten Schätzgrößen auch wieder in das MSG geschrieben werden. Die ETAS-Messtechnik speichert die aufgezeichneten Daten im MDF-Format ab. Eine Alternative zur Aufzeichnung der Signale im MSG stellt die Messung der Fahrzeugbussignale mit den Produkten von Vector [58] dar. Mit dieser Lösung lassen sich die Bussignale nur mitmessen, jedoch ist keine

direkte Parameterschätzung im Fahrzeug möglich. Das Programm Automotive Data and Time-Triggered Framework (ADTF) ermöglicht auch eine Auswertung der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung im Fahrzeug. Die in ADTF aufgezeichneten Messungen werden als DAT-Datei abgespeichert. Für die Verarbeitung der Messdaten am Arbeitsplatz wandelt eine Konvertierung die Messungen von MDF- bzw. DAT-Format in eine einheitliche MAT-Datei um. Auf Basis dieser MAT-Daten erfolgt die Algorithmusentwicklung und -bewertung außerhalb des Fahrzeugs in MATLAB/Simulink von Mathworks [59].

Die Kreisdiagramme in Abbildung 3.10 geben einen Überblick über die durchgeführten Fahrten, die für die Entwicklung und Bewertung der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung verwendet werden. Der Schätzalgorithmus muss für unterschiedliche Fahrzeugkon-

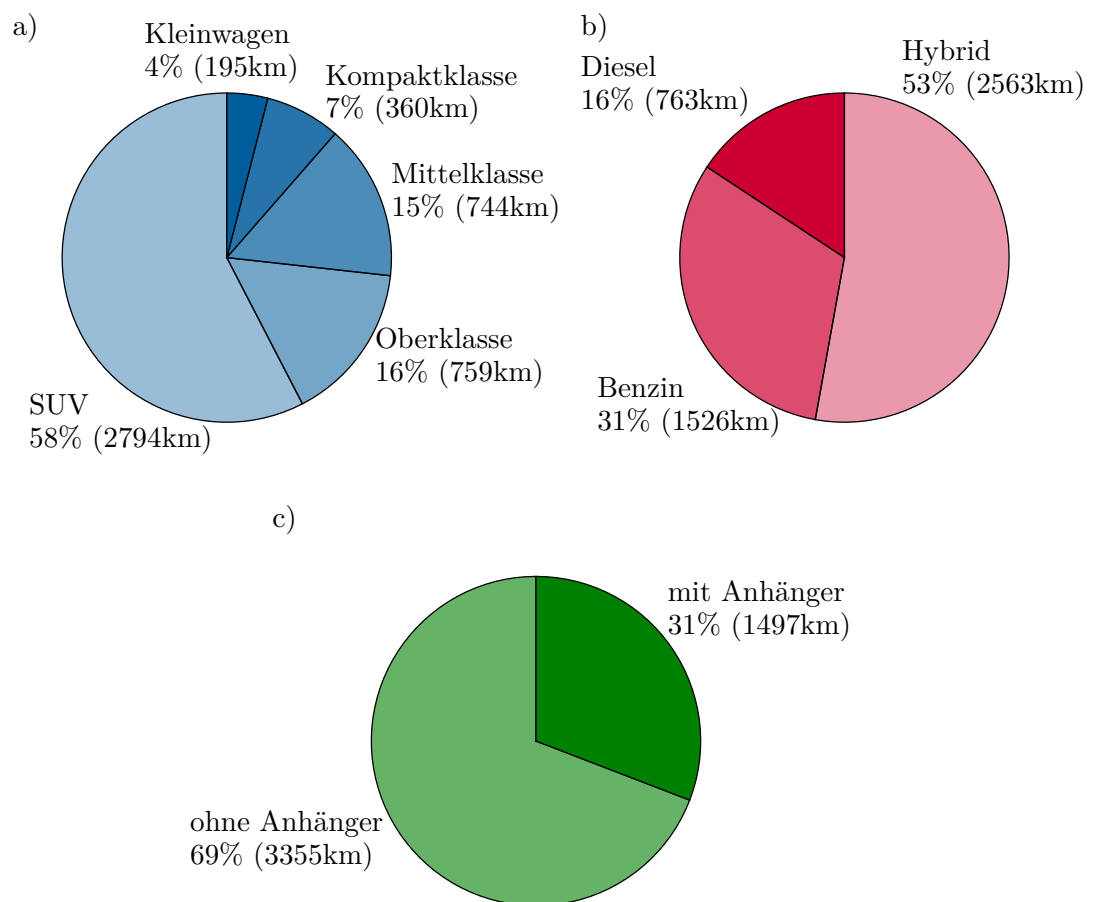


Abbildung 3.10: Überblick der ausgewerteten Testfahrten

zepte gute Ergebnisse liefern. Deshalb enthält die Datenbasis für die Auswertung unterschiedliche Fahrzeugklassen wie Kleinwagen, Kompakt-, Mittel- und Oberklasse sowie SUV, dargestellt in Abbildung 3.10 a). Die gesammelten Fahrzeugdaten enthalten auch unterschiedliche Antriebsarten. Da reine Elektrofahrzeuge für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung nicht zur Verfügung stehen, bilden Messungen von Hybridfahrzeugen

den Großteil der Datenbasis. Daneben enthält der Datenpool auch konventionelle Antriebskonzepte wie Benzin- und Dieselmotoren, dargestellt in dem Kreisdiagramm aus Abbildung 3.10 b). Um den Einfluss von großen Parameteränderungen zu validieren enthält die Datenbasis auch Testfahrten mit verschiedenen Anhängern. Abbildung 3.10 c) zeigt den Anteil der Strecke mit einem zusätzlichen Anhänger. Die Datenbasis für die Auswertung der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung enthält 132 Messungen mit einer Gesamtlänge von 4852 km.

3.4 Problemanalyse

Damit das gewöhnliche RLS-Verfahren aus Kapitel 2 eine konsistente Schätzung liefert, müssen bestimmte Voraussetzungen an das Modell und an die Ein-/Ausgangssignale erfüllt sein. Anhand der Modellierung von Abschnitt 3.2 und den Messungen aus den Testfahrten, welche in Abschnitt 3.3 beschrieben sind, erfolgt in diesem Teil eine Problemanalyse. Für eine sinnvolle Parameterschätzung muss das Modell eine optimale Modellgröße besitzen. Die Messsignale werden analysiert, um festzustellen ob Messausreißer vorhanden sind, ob das System ausreichend angeregt ist und ob die statistischen Eigenschaften für eine Schätzung erfüllt sind. Zusätzlich wird die Sensitivität der Parameterschätzung auf Fehler in den Eingangssignalen untersucht.

3.4.1 Wahl der Modellgröße

Die Wahl der optimalen Modellordnung spielt vor allem bei der experimentellen Modellierung eine Rolle, wie z. B. bei Übertragungsfunktionen eines IIR-Filters nach Gleichung (2.3). Auch bei physikalischen Modellen ist die richtige Wahl der Modellierungstiefe entscheidend für eine sinnvolle Parameterschätzung.

3.4.1.1 Das Bias-Varianz-Dilemma

Die Gleichung der Längsdynamik (ohne Bremskräfte) nach Gleichung (3.37) leitet sich anhand einer physikalischen Modellierung her. Das eigentliche Ziel in der Schätzung der Fahrzeuglängsdynamik ist nicht die physikalisch exakte Bestimmung der Parameter $\theta = [m, mc_{r0}, mc_{r1}, mc_{r4}, c_w A_{Fzg}, m^2/(4c_{\gamma Rad})]^T$, sondern eine möglichst einfache und genaue Vorhersage des Längsverhaltens eines Fahrzeugs. Dabei stellt sich die Frage, wie groß der Einfluss der einzelnen Parameter auf das Fahrzeugverhalten ist. Bei einem vernachlässigbaren Einfluss eines Parameters kann die Schätzung dieser Einflussgröße zur Vereinfachung des Algorithmus entfallen.

Es gibt verschiedene Verfahren für die Wahl des optimalen Modells, welches den Zielkonflikt zwischen folgenden Kriterien am besten erfüllt: [27, S. 491-493], [60, S. 438-440], [26, S. 501-502]

Flexibilität Das Modell soll die Realität möglichst gut abbilden. Eine höhere Flexibilität wird durch zusätzliche Freiheitsgrade bzw. Parameter erreicht. Wird ein Modell anhand von *Trainingsdaten* gelernt, so beschreibt die Flexibilität, wie gut das Ein-/Ausgangsverhalten abgebildet wird. Wenn das Modell sehr viele freie Parameter besitzt, kann zwar das Verhalten der Trainingsdaten sehr gut abgebildet werden, die Vorhersage des Verhaltens eines anderen Datensatzes kann dann aber stark abweichen, da z. B. Messungenauigkeiten und Rauschen mitgelernt wurden. Diesen ungewollten Effekt bezeichnet man als *Überanpassung* bzw. den daraus entstehenden Fehler als Varianzfehler.

Einfachheit Das Modell soll nicht unnötig viele freie Parameter besitzen, sondern eine „sparsame“ Parametrierung verwenden. Es wird ein *generalisierendes* Modell der Realität gesucht, welches sowohl das Verhalten der Trainingsdaten als auch die Prädiktion bei unbekanntem Daten möglichst gut nachbildet. Bei zu wenigen Freiheitsgraden, kann bei der Modellierung *Unteranpassung* auftreten. Dabei wird das Verhalten der Realität durch das Modell nicht ausreichend genau wiedergegeben, was zu einem Biasfehler führt.

Dieses sogenannte *Bias-Varianz-Dilemma* wird anhand des Erwartungswerts des LS-Gütemaßes (2.17) verdeutlicht. [26, S. 501]

$$E[J] = E[\mathbf{e}^T \mathbf{e}] = E[\mathbf{e}^2] = E[(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^2] = E[\mathbf{y}^2] + E[\hat{\mathbf{y}}^2] - E[2\mathbf{y}\hat{\mathbf{y}}] \quad (3.39)$$

Der Erwartungswert der Quadrate $E[\mathbf{y}^2]$ und $E[\hat{\mathbf{y}}^2]$ kann anhand des Verschiebungssatzes

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{y}) &= E[(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])^2] = E[\mathbf{y}^2] - E[\mathbf{y}]^2 \\ &\quad \updownarrow \\ E[\mathbf{y}^2] &= \text{Var}(\mathbf{y}) + E[\mathbf{y}]^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

umgewandelt werden [61, S. 14]. Der Zusammenhang des Verschiebungssatzes wandelt Gleichung (3.39) um zu [62, S. 223], [63, S. 34]

$$\begin{aligned}
 E[J] &= E[\mathbf{y}^2] + E[\hat{\mathbf{y}}^2] - E[2\mathbf{y}\hat{\mathbf{y}}] \\
 &= \text{Var}(\mathbf{y}) + \underbrace{E[\mathbf{y}]^2}_{=\mathbf{y}^2} + \text{Var}(\hat{\mathbf{y}}) + E[\hat{\mathbf{y}}]^2 - 2\mathbf{y}E[\hat{\mathbf{y}}] \\
 &= \text{Var}(\mathbf{y}) + \text{Var}(\hat{\mathbf{y}}) + (\mathbf{y} - E[\hat{\mathbf{y}}])^2 \\
 \underbrace{E[J]}_{(\text{Modellfehler})^2} &= \underbrace{\sigma_e^2}_{(\text{konstanter Fehler})} + \underbrace{\text{Var}(\hat{\mathbf{y}})}_{(\text{Varianzfehler})} + \underbrace{\text{Bias}(\hat{\mathbf{y}})^2}_{(\text{Biasfehler})^2}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

mit $\text{Bias}(\hat{\mathbf{y}}) = E[\hat{\mathbf{y}}] - \mathbf{y}$. Shakhnarovich [64] beschreibt diese Herleitung. Der gesamte Modellfehler besteht aus drei Teilen:

- Der **konstante Fehler** kann durch die Wahl der Modellordnung nicht reduziert werden und stellt die untere Schranke des gesamten Modellfehlers dar.
- Der **Varianzfehler** wächst mit höherer Modellordnung, wenn es zur Überanpassung kommt.
- Der **Biasfehler** überwiegt bei kleiner Modellordnung, wenn das Modell nicht genügend Flexibilität aufweist, um die Realität abzubilden.

Die Abhängigkeit des konstanten Fehlers, des Varianz- und Biasfehlers von der Modellordnung ist anschaulich in Abbildung 3.11 gezeigt.

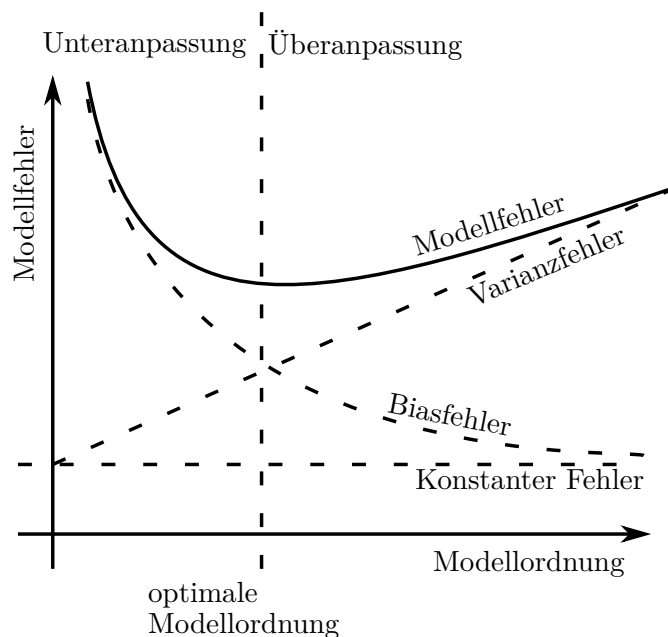


Abbildung 3.11: Zielkonflikt zwischen Bias- und Varianzfehler [26, S.502]

Je komplexer das Modell $y = \phi^T \hat{\theta}$ ist, umso mehr Messpunkte wird sie richtig nachbilden und umso kleiner wird ihr Biasfehler ausfallen. Allerdings werden dadurch auch Messfehler der Datenpunkte gelernt, was somit den Varianzfehler vergrößert.

Abbildung 3.12 verdeutlicht das Bias-Varianz-Dilemma an einem einfachen Beispiel mit einer quadratischen Funktion als tatsächlichen (realen) Zusammenhang.

$$y = p_2 x^2 = 1x^2, \quad (3.42)$$

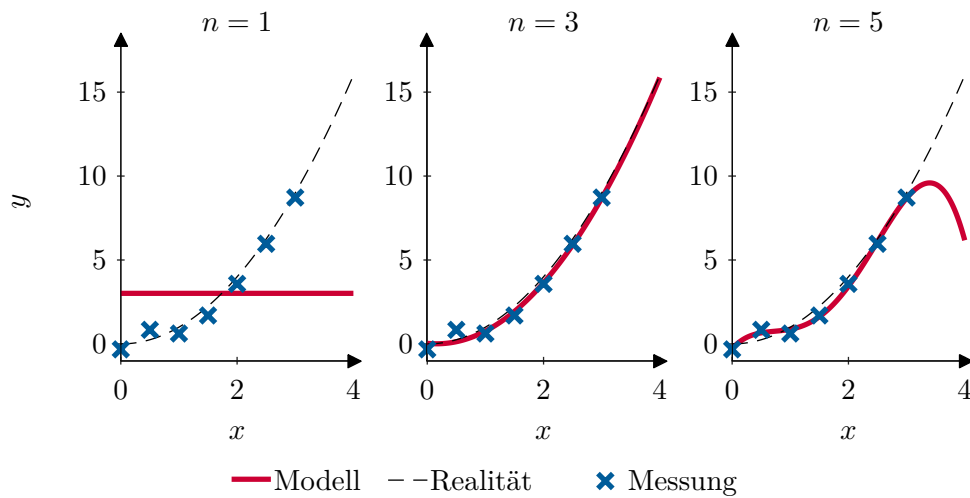


Abbildung 3.12: Beispiel für das Bias-Varianz-Dilemma mit drei Modellen

Es stehen drei Modelle \mathcal{M}_i mit Polynomen in x mit unterschiedlicher Modellordnung i zur Auswahl.

$$\mathcal{M}_1 : y = \phi_1 \theta_1 = x^0 p_0 \quad (3.43a)$$

$$\mathcal{M}_3 : y = \phi_3^T \theta_3 = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (3.43b)$$

$$\mathcal{M}_5 : y = \phi_5^T \theta_5 = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (3.43c)$$

Das Training der Modelle erfolgt über den LS-Algorithmus mit jeweils sieben Messungen $y_{Mess,i}$ (\times), die aufgrund von Ungenauigkeiten von der tatsächlichen Funktion abweichen. Die Auswertung erfolgt zum einen anhand des LS-Gütemaßes im Training

$$J_{Train} = \sum_{k=1}^7 (y_{Mess,i} - \hat{y}_i)^2, \quad (3.44)$$

welches aussagt, wie gut das Modell zu den *Trainingsdaten* passt. Zum anderen wird die quadratische Abweichung vom Modell zur Realität über den gesamten Wertebereich $x \in \{0; 0,5; \dots 3,5; 4\}$ bewertet.

$$J_{real} = \sum_{k=1}^9 (y_{real,i} - \hat{y}_i) \quad (3.45)$$

Dieses Gütemaß beurteilt die Qualität des Modells, die Realität wiederzugeben.

Eine Übersicht über die geschätzten Parameter und die Auswertekriterien ist in Tabelle 3.2 zusammengefasst. Um die tatsächliche Funktion $y = x^2$ mit einem Polynommodell

	\hat{p}_0	\hat{p}_1	\hat{p}_2	\hat{p}_3	\hat{p}_4	J_{Train}	J_{real}
\mathcal{M}_1	3,01	-	-	-	-	64,92	322,61
\mathcal{M}_3	0,04	-0,35	1,08	-	-	0,72	0,60
\mathcal{M}_5	-0,28	3,82	-5,32	3,15	-0,49	0,12	105,15

Tabelle 3.2: Übersicht über die Bewertung des Beispiels zum Bias-Varianz-Dilemma

nachzubilden, muss die Schätzung $\hat{p}_2 = 1$ ergeben und alle andere Parameter in $\hat{p}_i = 0$ resultieren. Das Modell mit einem konstanten Term \mathcal{M}_1 kann den richtigen Zusammenhang nicht wiedergeben, was in Abbildung 3.12 a) zu sehen ist. Der Grund dafür ist, dass der quadratische Term x^2 nicht im Regressorvektor vorhanden ist. Das Modell besitzt eine zu geringe *Flexibilität*, wodurch es zu einem großen Biasfehler kommt, was die hohen Werte der Gütemaße im Training und des gesamten Datensatzes widerspiegeln.

Das Modell \mathcal{M}_3 mit einem quadratischen Polynom kann die tatsächliche Funktion relativ gut nachbilden, indem die Schätzung $\hat{p}_2 = 1,08$ nah am tatsächlichen Wert $p_2 = 1$ liegt. Das gute Ergebnis zeigt sich in Abbildung 3.12 b), bei dem das Modell (—) nahezu die reale Kurve (- -) abbildet.

\mathcal{M}_5 bildet die Messungen (\times) in Abbildung 3.12 c) am besten ab. Allerdings wird damit nicht nur die tatsächliche Kurve (- -) gelernt, sondern auch das Messrauschen. Vor allem die Messpunkte bei $x = 0,5$ und $x = 1,5$ verzerren die geschätzte Funktion (—) im Vergleich zum tatsächlichen Verlauf (- -). Dies wird außerhalb des Lernbereichs ($x \in [3,4]$) deutlich, in dem das Extrapolationsverhalten des Modells \mathcal{M}_5 die zugrunde liegende Funktion sehr schlecht nachbildet. Die Werte der Gütemaße in Tabelle 3.2 geben

dieses Verhalten wieder. Im Trainingsbereich ($x \in [0,3]$) weist \mathcal{M}_5 den geringsten Wert für das Trainingsgütemaß J_{Train} auf. Im Vergleich mit der tatsächlichen Funktion über den gesamten Wertebereich $x \in [0,4]$ schneidet das komplexe Modell schlechter ab als das einfachere Modell \mathcal{M}_3 . Der hohe Wert des Gütemaßes kommt hauptsächlich durch den Varianzfehler des Modells zustande. Der Grund dafür ist die mangelnde *Einfachheit* des Modells \mathcal{M}_5 . Anstatt der fünf Parameter, die relativ große Werte in Tabelle 3.2 aufweisen, würde ein Parameter reichen, um die tatsächliche Funktion abzubilden.

Als ideale Lösung ergibt sich das Modell \mathcal{M}_3 , welches den besten Kompromiss zwischen Bias- und Varianzfehler liefert. Die geringe Verbesserung im Trainingsgütemaß von \mathcal{M}_3 auf \mathcal{M}_5 ist zu klein, um die höhere Komplexität des Modells zu rechtfertigen. Außerdem ist die größere Anzahl an Parametern nachteilig bei der Generalisierung auf einen erweiterten Auswertebereich, da damit nicht nur der reale Zusammenhang, sondern auch das Messrauschen nachgebildet wird.

3.4.1.2 Verfahren zur Wahl der Modellgröße

Es gibt verschiedene Verfahren, um die richtige Modellgröße zu bestimmen. Diese Methoden wurden entwickelt, um bei einer experimentellen Modellierung mit linearen Übertragungsfunktionen die optimale Ordnung der Übertragungsfunktion zu ermitteln. Bei diesen Verfahren wird zum einen die Abweichung der Modelle von den Messungen, als auch die dafür verwendete Modellordnung bewertet.

Eine Möglichkeit, die Güte gegen die Komplexität eines Modells zu vergleichen, wenn die Modellordnung von n_i auf n_{i+1} erhöht wird, ist der **F-Test**. [26, S. 574], [60, S. 441-442], [27, S. 508-509]

$$F_{Test} = \frac{J(n_i) - J(n_{i+1})}{J(n_{i+1})} \frac{N - n_{i+1}}{n_{i+1} - n_i} \quad (3.46)$$

Für lange Messungen mit großem N folgt die Variable F_{Test} einer F -Verteilung. Anhand eines Grenzwertes F_{Test}^* wird für $F_{Test} < F_{Test}^*$ das Modell der Ordnung n_i bevorzugt.

In Verbindung mit dem Maximum Likelihood Estimator (MLE) entwickelte Akaike einige Testverfahren zur Wahl der Modellgröße. Das als **Final Prediction Error (FPE)** bezeichnete Verfahren ist durch

$$\text{FPE} = J(\hat{\theta}) \frac{1 + n/N}{1 - n/N} \quad (3.47)$$

gegeben [60, S. 443-444], [26, S. 574], [27, S. 503-504]. In diesem Kriterium fließt das Gütemaß $J(\hat{\theta})$ sowie die Anzahl der Modellparameter n ein. Gesucht wird das Modell mit dem geringsten FPE-Wert.

Ein weiteres Verfahren ist das **Akaike Information Criterion (AIC)** [60, S. 442], [26, S. 574], [27, S. 219-221]

$$\text{AIC} = N \ln \left(\frac{1}{N} J(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) + 2n. \quad (3.48)$$

Auch beim AIC-Test wird das Modell mit dem geringsten AIC-Wert ausgewählt.

Söderström und Stoica [60, S. 444-449] zeigen, dass für große N der F -Test, die FPE-Methode und das AIC-Verfahren äquivalent sind.

Die Anwendung der Verfahren zur Wahl der Modellgröße lassen sich nur bedingt auf die vorliegende Aufgabe zur Parameterschätzung der Längsdynamik anwenden:

- Die drei genannten Kriterien sind abhängig von der Messlänge N . Dadurch wird z. B. das AIC-Verfahren zugunsten eines komplexeren Modells mit geringem Modellfehler entscheiden, da der zweite Term, welcher die Modellgröße bewertet, unabhängig von N ist, im Gegensatz zum ersten Term, der die Modellgüte bewertet.
- Die vorgestellten Verfahren basieren darauf, dass mit einem Teil der Messdaten das Modell trainiert wird und die Auswertung auf einem weiteren Datensatz basiert. Bei der vorliegenden Anwendung ist diese Art der Bewertung schwierig, da z. B. die Parameter der Fahrwiderstände von der Straßenbeschaffenheit abhängig sind und ständig adaptiert werden. Dadurch ist eine längerfristige Prädiktion des Modellverhaltens nicht aussagekräftig.

Eine einfache Möglichkeit, die geeignete Modellgröße zu bestimmen, ist das Auftragen des Gütemaßes über die Anzahl der Modellparameter. Wenn der gleiche Datensatz für das Training und die Auswertung verwendet wird, sinkt das Gütemaß mit einer größeren Anzahl an Parametern, da das Modell die Messungen immer besser nachbilden kann. Dies zeigt sich an dem einfachen Beispiel aus Gleichung (3.42) bei dem das Gütemaß J_{Train} in Tabelle 3.2 mit zunehmender Modellordnung sinkt. Falls man ein Polynom sechster Ordnung mit sieben Freiheitsgraden bei einem Trainingsdatensatz mit sieben Messpunkten verwendet, kann das Modell jeden Messpunkt exakt abbilden. Das Gütemaße wird dann zu Null. Allerdings ist der Unterschied im Trainingsgütemaß von \mathcal{M}_3 zu \mathcal{M}_5 sehr gering, sodass \mathcal{M}_3 für die Modellierung ausreichend ist. [27, S. 501-502]

3.4.1.3 Ideale Modellgröße für die Fahrzeuglängsdynamik

Die Modelle unterschiedlicher Ordnung für die Parameterschätzung der Längsdynamik leiten sich aus Gleichung (3.37) ab.

$$\mathcal{M}_1 : \underbrace{F_A}_y = \underbrace{a_x}_\phi \underbrace{m}_\theta \quad (3.49a)$$

$$\mathcal{M}_2 : \underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & \frac{1}{2}\rho_L v_x^2 \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ c_w A_{Fzg} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.49b)$$

$$\mathcal{M}_3 : \underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & \frac{1}{2}\rho_L v_x^2 & g \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ c_w A_{Fzg} \\ mc_{r0} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.49c)$$

$$\mathcal{M}_4 : \underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & \frac{1}{2}\rho_L v_x^2 & g & v_x \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ c_w A_{Fzg} \\ mc_{r0} \\ mc_{r1} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.49d)$$

$$\mathcal{M}_5 : \underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & \frac{1}{2}\rho_L v_x^2 & g & v_x & v_x^4 \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ c_w A_{Fzg} \\ mc_{r0} \\ mc_{r1} \\ mc_{r4} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.49e)$$

$$\mathcal{M}_6 : \underbrace{F_A}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & \frac{1}{2}\rho_L v_x^2 & g & v_x & v_x^4 & a_y^2 \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ c_w A_{Fzg} \\ mc_{r0} \\ mc_{r1} \\ mc_{r4} \\ \frac{m^2}{4c_{\gamma Rad}} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.49f)$$

Das einfachste Modell \mathcal{M}_1 schätzt nur die Masse m ohne Berücksichtigung zusätzlicher Kräfte. Ausgehend davon wird das Modell zuerst um den Luftwiderstand, dann um den konstanten, den linearen und den quartischen (Abhängigkeit von v_x^4) Rollwiderstand sowie den Kurvenwiderstand erweitert.

Analog zu Tabelle 3.2 wird das normierte Gütemaß J/N aus dem RLSeV-Algorithmus über die Modellordnung für \mathcal{M}_1 bis \mathcal{M}_6 in Abbildung 3.13 aufgetragen. Der Vergessen-

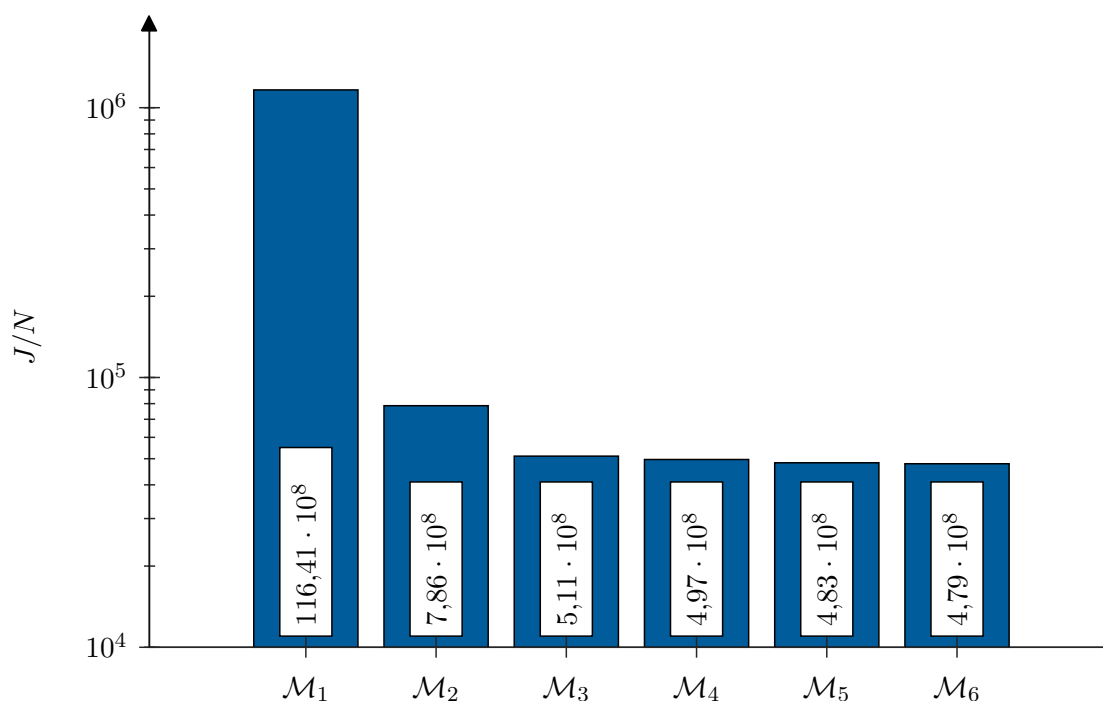


Abbildung 3.13: Wert des normierten Gütemaßes J/N für die Modelle \mathcal{M}_1 bis \mathcal{M}_6

heitsfaktor des RLSeV-Verfahrens beträgt $\lambda = 0,9999$. Damit die Startwerte der Schätzungen keinen Einfluss besitzen, wird nach Abschnitt 2.3.1 $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$ gewählt. Die Einheitsmatrix \mathbf{I} besitzt je nach Modell die entsprechende Größe. Als Grundlage für diese Auswertung dienen alle Messungen, welche in Kapitel 3.3 beschrieben sind.

Die Verwendung des normierten Gütemaßes ermöglicht eine anschaulichere Darstellung, da die Zahlenwerte unabhängig von der Länge der Messungen sind. Als Darstellung des normierten Gütemaßes dient eine logarithmische Achse, um Werte mit unterschiedlichen Dimensionen passender darzustellen. Um das transiente Schätzverhalten zu Beginn der Messfahrt auszublenden, werden die Gütemaße für jedes Modell erst nach 1000 Zeitschritten mit gültiger Schätzung ausgewertet.

Abschnitt 3.4.1.2 beschreibt, wie der Wert des Gütemaßes mit zunehmender Modellordnung kontinuierlich abnimmt, da die Auswertung des Gütemaßes den gleichen Datensatz

wie das Training verwendet. Von Modell \mathcal{M}_1 auf Modell \mathcal{M}_2 wird der Strömungswiderstand hinzugefügt, was zu einer signifikanten Reduzierung des normierten Gütemaßes führt. Auch das Hinzufügen des konstanten Rollwiderstands in \mathcal{M}_3 verringert das Gütemaß deutlich. Die höhere Ordnung der Modelle \mathcal{M}_4 (linearer Rollwiderstand), \mathcal{M}_5 (quartischer Rollwiderstand) und \mathcal{M}_6 (Kurvenwiderstand) führt hingegen zu keiner signifikanten Reduzierung des Gütemaßes.

Anhand des grafischen Vergleichs in Abbildung 3.13 ist das Modell

$$\mathcal{M}_3 : \underbrace{F_A}_y = \begin{bmatrix} a_x & \frac{1}{2}\rho L v_x^2 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c_w A_{Fzg} \\ mc_{r0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & g & \frac{1}{2}\rho L v_x^2 \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ mc_{r0} \\ c_w A_{Fzg} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (3.50)$$

der bestmögliche Kompromiss zwischen Flexibilität (Genauigkeit) und Einfachheit (Modellgröße). Im weiteren Verlauf wird dieses Modell für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung, verwendet. Die Fahrwiderstände setzen sich aus konstantem Rollwiderstandskoeffizienten mc_{r0} und quadratischem Luftwiderstandskoeffizienten $c_w A_{Fzg}$ zusammen.

Das repräsentative Beispiel in Abbildung 3.14 dient zum Verständnis der Modellwahl. Die Graphen zeigen die geschätzten Parameter für die Modelle \mathcal{M}_1 bis \mathcal{M}_6 . Wie für die gesamte Auswertung aus Abbildung 3.13 kommt hier der RLSeV-Algorithmus mit den Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\hat{\theta}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$ zum Einsatz. Die Auswertung der Gütemaße in Abbildung 3.13 erfolgt erst, wenn jeder Algorithmus Schätzungen über 1000 gültige Messpunkte durchgeführt hat. Dieser Zeitpunkt ist in jedem Graphen von Abbildung 3.14 durch eine schwarze vertikale Linie (|) bei ca. $t = 250$ s gekennzeichnet. Zum Verständnis der durchgeführten Messfahrt zeigen die Graphen g) und h) in Abbildung 3.14 die Fahrzeuggeschwindigkeit v_x .

Bei der Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} (Abbildung 3.14 a)) sind die Modelle \mathcal{M}_1 (⋯) und \mathcal{M}_2 (- -) ungenau, da sie die Fahrwiderstände nicht oder unpräzise modellieren. Die Modelle höherer Ordnung schätzen die Masse hingegen sehr gut, da sie die Fahrwiderstände ausreichend gut darstellen.

Bei der Schätzung des zweiten Parameters $\hat{c}_w \hat{A}_{Fzg}$ (Abbildung 3.14 b)) berechnet der RLS-Algorithmus für das Modell \mathcal{M}_2 (- -) etwas zu große Werte, da der nicht modellierte, konstante Fahrwiderstand $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ kompensiert wird. Das Modell \mathcal{M}_3 (—) errechnet für den gesamten Messzeitraum einen konstanten Wert, was der Realität entspricht. Die Modelle höherer Ordnung konvergieren nicht und liefern teilweise deutlich zu hohe Werte.

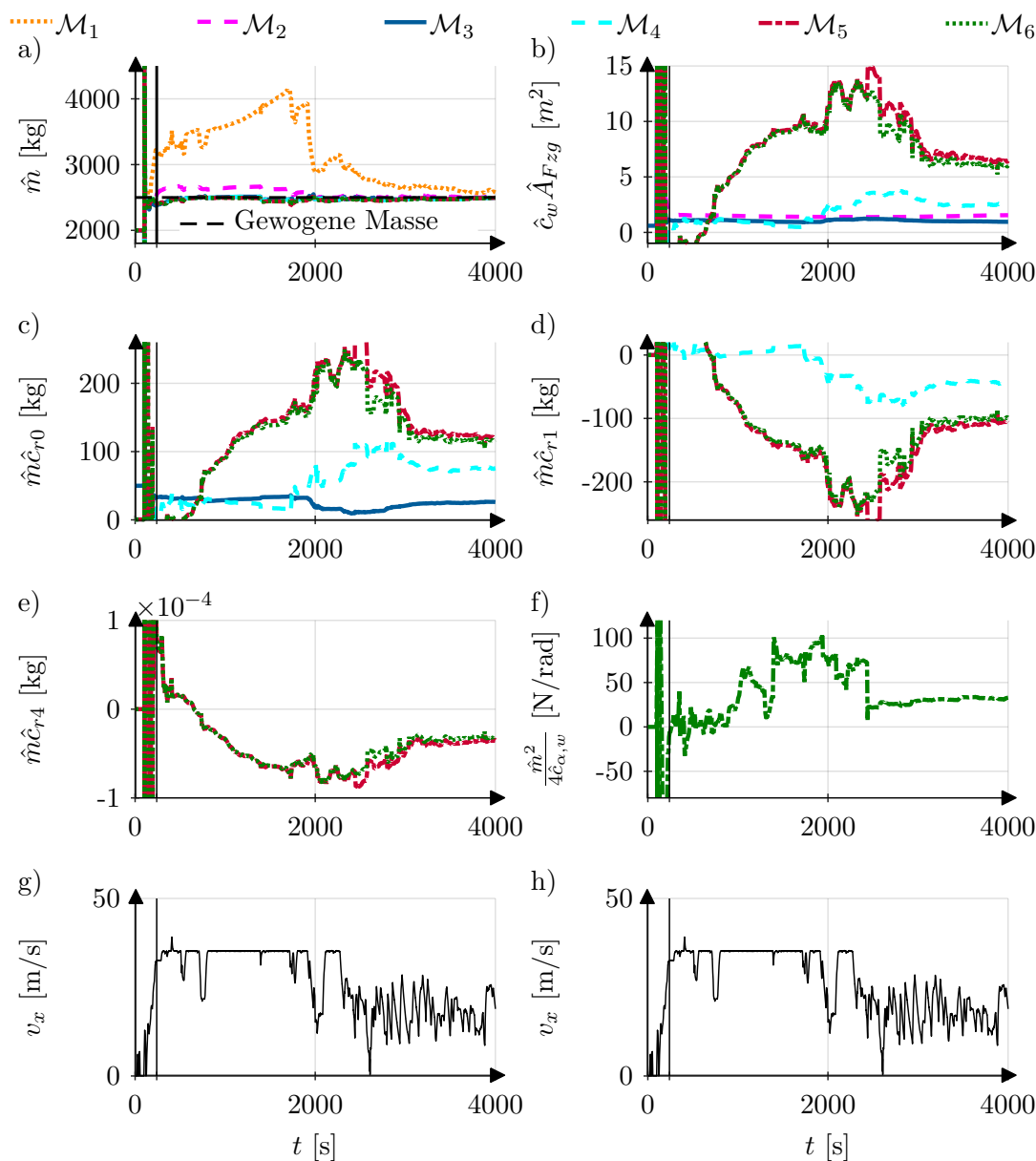


Abbildung 3.14: Parameterschätzung einer+6+ Messfahrt für die Modelle \mathcal{M}_1 bis \mathcal{M}_6

Bei der Schätzung des konstanten Fahrwiderstands $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ (Abbildung 3.14 c)) konvergiert nur der Wert des Modells \mathcal{M}_3 (—). Die Werte der Modelle höherer Ordnung konvergieren nicht.

Die Ergebnisse für den linearen Fahrwiderstand $\hat{m}\hat{c}_{r1}$ (Abbildung 3.14 d)) konvergieren nicht für die Modelle \mathcal{M}_4 (---), \mathcal{M}_5 (-.-) und \mathcal{M}_6 (····). Die Werte sind den Großteil der Messung über negativ, was physikalisch unplausibel ist. Von $t = 500$ s bis ca. 2500 s sinken die mit \mathcal{M}_5 und \mathcal{M}_6 geschätzten Werte, während im gleichen Zeitraum die Werte für die Schätzungen der Fahrwiderstände $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ und $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ steigen, wodurch die Summe der Fahrwiderstände gleich bleibt. Der Fehler in der negativen Schätzung von $\hat{m}\hat{c}_{r1}$ wird

also durch einen Fehler in zwei anderen Parametern kompensiert. Das Modell \mathcal{M}_4 zeigt einen vergleichbaren Verlauf.

Die Schätzung des quartischen Fahrwiderstands mc_{r4} (Abbildung 3.14 e)) konvergiert nicht für die Modelle \mathcal{M}_5 und \mathcal{M}_6 . Die beiden Schätzwerte sind zudem stets negativ, was physikalisch nicht plausibel ist.

Für das Modell \mathcal{M}_6 konvergiert der Koeffizient des Kurvenwiderstandes $\frac{m^2}{4c_{\gamma Rad}}$ (Abbildung 3.14 f)) ebenfalls nicht und ist zeitweise negativ.

Als Fazit lässt sich zusammenfassen, dass die Modelle \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 durch die fehlenden Parameter, welche die Fahrwiderstände modellieren, eine zu geringe Flexibilität aufweisen. Dadurch kann die Realität mit der gewünschten Genauigkeit nicht modelliert werden. Die Modelle \mathcal{M}_4 bis \mathcal{M}_6 besitzen hingegen zu viele freie Parameter, die durch den RLSeV-Algorithmus nicht eindeutig bestimmt werden können und somit nicht konvergieren. Das Modell \mathcal{M}_3 hingegen erzeugt physikalisch richtige, konvergierende Schätzergebnisse. Aus diesem Grund wird für die weitere Arbeit das Modell \mathcal{M}_3 bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung verwendet.

3.4.2 Messausreißer und stochastische Verteilung der Messfehler

Messausreißer treten durch fehlerhafte Messungen oder durch Störungen bei der Übertragung auf. Eine weitere Fehlerquelle ist die nicht modellierte Systemdynamik, z. B. Schaltvorgänge, die keine exakte Berechnung des Antriebsmoments zulassen. Durch Messausreißer kann die Parameterschätzung kurzzeitig abweichende Ergebnisse liefern.

Die Auswirkung von Messausreißern ist exemplarisch in Abbildung 3.15 dargestellt. Die Ergebnisse stammen vom RLSeV-Verfahren mit den Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\hat{\theta}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$.

Die Masseschätzung (Abbildung 3.15 a)) weist kurz vor $t = 600$ s einen größeren Sprung auf, wodurch die Schätzung deutlich von der tatsächlichen Fahrzeugmasse abweicht. Im Normalfall kann zu diesem Zeitpunkt davon ausgegangen werden, dass die Schätzung konvergiert ist und nur noch geringe Änderungen auftreten. Nach einigen Sekunden, wenn die Messpunkte nicht mehr von Messausreißern verfälscht sind, lernt der Algorithmus die Masse wieder in Richtung des ursprünglichen Werts. Ein ähnliches Verhalten ergibt sich für den Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ (Abbildung 3.15 b)) und Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ (Abbildung 3.15 d)). Hierbei fällt der Sprung kurz vor 600 s noch größer aus als bei der Masseschätzung. Der Fehler im Luftwiderstandskoeffizienten fällt so stark aus, dass der Parameter für einen längeren Zeitpunkt einen

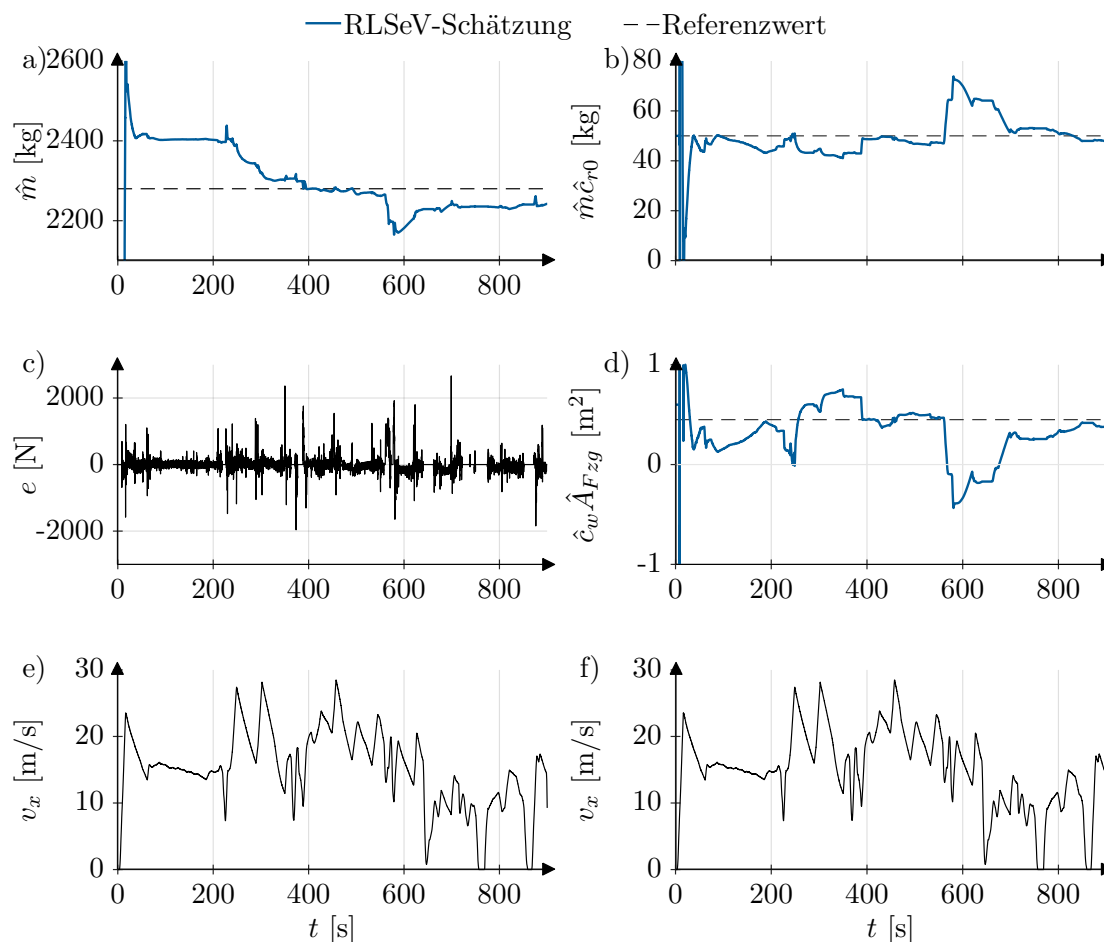


Abbildung 3.15: Ausreißer in der Schätzung von Fahrzeugmasse \hat{m} , Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_r$ und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$

negativen Wert annimmt, was physikalisch nicht möglich ist. Erst nach einiger Zeit ohne Messausreißer ermittelt das RLS-eV-Verfahren wieder einen sinnvollen Wert für die Schätzung von $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$. Abbildung 3.15 c) stellt die Werte des Residuums e dar. Laut der 3. Zeile in Algorithmus 2.2 erfolgt eine Parameteradaption immer, wenn der Modellfehler e ungleich Null ist. In dem Bereich, in dem der Schätzfehler auftritt, ist das Residuum e nicht um Null verteilt sondern stets positiv. Dadurch kommt es zu der Änderung in der Parameterschätzung. Die Graphen in Abbildung 3.15 e) und f) zeigen die Fahrzeuggeschwindigkeit v_x .

Um dieses Phänomen genauer zu analysieren, zeigt Abbildung 3.16 den Zeitausschnitt für $t = 550 \dots 650$ s aus Abbildung 3.15. Im Zeitbereich $t = 560 \dots 580$ s, gekennzeichnet durch vertikale, gepunktete Linien (·) treten die Abweichungen in den Schätzgrößen (Abbildung 3.16 a), b), d)) auf. Das Residuum (Abbildung 3.16 e)) besitzt in diesem Zeitbereich meist sehr große, positive Werte, welche die Parameteränderung verursachen. Nach $t = 580$ s treten die Messausreißer nicht mehr auf. Da die Schätzwerte deutlich von den tatsächlichen Werten abweichen ist das Residuum ebenfalls nicht um Null zentriert,

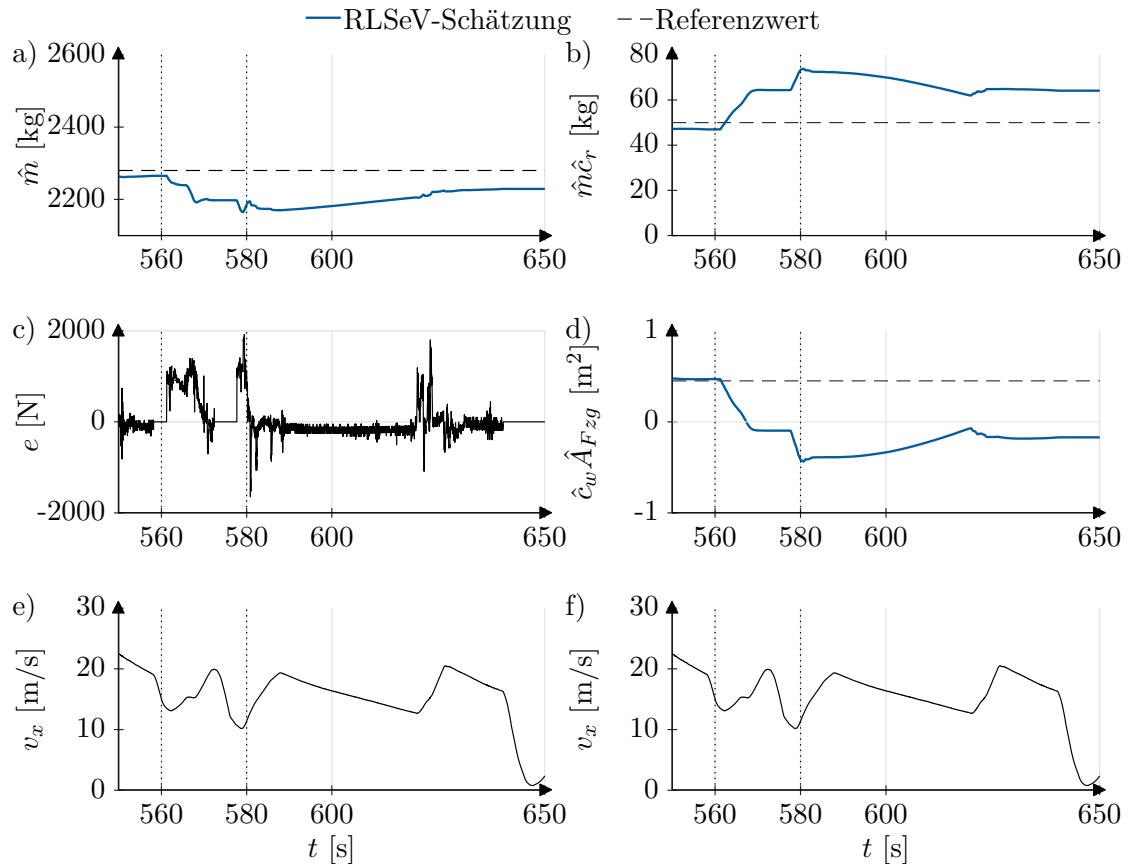


Abbildung 3.16: Ausreißer in der Schätzung von Fahrzeugmasse \hat{m} , Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_r$ und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fgz}$ (Ausschnitt aus Abbildung 3.16)

sondern leicht im negativen Wertebereich. Dadurch kommt es zu einer Parameteradaptation in die richtige Richtung.

Das Streudiagramm in Abbildung 3.17 zeigt das Auftreten der Messausreißer in der Messung von Abbildung 3.15 bzw. Abbildung 3.16. Das Diagramm trägt die Schätzungen des Systemausgangs \hat{y} über die Messungen y auf. Die Definition des Residuums nach Gleichung (2.16) lautet $e = y - \hat{y}$. Demnach entspricht die Einheitsgeraden mit $\hat{y} = y$ und $e = 0$ dem idealen Modell (—). Je weiter die Messpaare von dieser Geraden entfernt sind, umso größer ist das Residuum. Die Messungen im Zeitraum $t = 560\dots580$ s sind als rote Punkte (○) gegenüber den restlichen Messungen (○) gekennzeichnet. Der Großteil der Messungen (○) im betrachteten Zeitraum liegt deutlich vom idealen Modell entfernt und kann als Messausreißer betrachtet werden. Die einseitige Verteilung der Messausreißer unterhalb der Geraden führt durch $e = y - \hat{y} > 0$ zu positiven Residuen. Auch Abbildung 3.16 c) zeigt im Zeitraum $t = 560\dots580$ s zumeist positive Modellfehler e , was schließlich zu den Schätzabweichungen führt. Über den gesamten Fahrversuch sind die Messpaare (○) gleichmäßig um das ideale Modell verteilt, so dass zum Ende der Messung die Schätzungen in der Nähe der Referenzwerte liegen (Abbildung 3.15 a), b), d)).

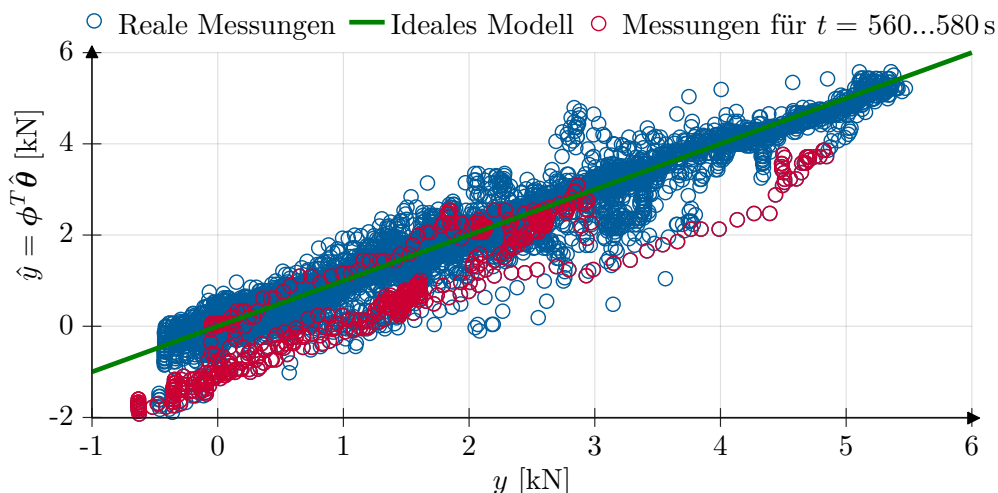


Abbildung 3.17: Streudiagramm der Schätzungen des Ausgangs \hat{y} gegenüber den Messungen y für die Testfahrt aus Abbildung 3.15

Da Parameterabweichungen durch Messausreißer nicht gewünscht sind, wird im Folgenden auf die Analyse und das Erkennen von Messausreißern eingegangen. Ziel ist ein robustes Schätzverfahren, bei dem Situationen mit Messausreißern keinen Einfluss mehr auf die Parameteradaption haben.

3.4.2.1 Messausreißer

Um Ausreißer zu erkennen, gibt es verschiedene analytische und grafische Verfahren. Analytische Verfahren eignen sich nach Isermann und Münchhof [26, S. 592] zum automatisierten Erfassen von Ausreißern und bei Anwendungsfällen mit mehreren Dimensionen, die sich nicht bildlich darstellen lassen. Grafische Verfahren besitzen den Vorteil, dass sie intuitiv genutzt werden können und es werden keine Einstellparameter für die Berechnungen benötigt. Um zu überprüfen, ob Messausreißer grundsätzlich vorhanden sind, reichen grafische Verfahren aus.

In Abbildung 3.18 ist beispielhaft ein Streudiagramm der geschätzten Ausgänge \hat{y} über die Messungen y aufgetragen. Bei idealen Schätzungen und fehlerfreier Messung liegen alle Punkte auf einer Ursprungsgeraden mit Steigung Eins (---). Aufgrund von Messfehlern weichen die Wertepaare vom idealen Modell ab und haben je nach Abstand und Lage zur Ursprungsgeraden einen erheblichen Einfluss auf die Schätzung. Als Messausreißer werden Punkte bezeichnet, die einen sehr großen Abstand vom Modell aufweisen. In Abbildung 3.18 ist zudem die Konfidenzellipse der Datenpunkte eingezeichnet, innerhalb derer 95% aller Punkte liegen sollten. Es zeigt sich, dass Ausreißer sowohl in y -Richtung vorhanden sind (rechter Rand) als auch in \hat{y} -Richtung (Markierung durch \diamond).

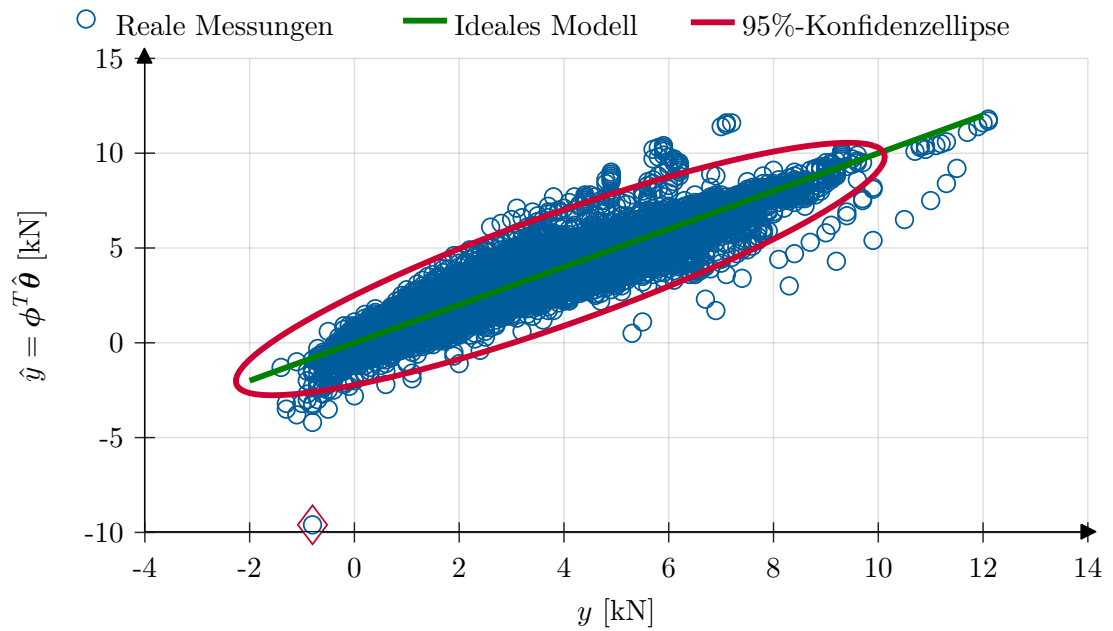


Abbildung 3.18: Streudiagramm der Schätzungen des Ausgangs \hat{y} über den Messungen y mit 95%-Konfidenzellipse

Messausreißer lassen sich in verschiedene Kategorien unterteilen. Die Beschreibung der Kategorien bezieht sich dabei auf das y - ϕ -Diagramm anstatt der \hat{y} - y -Grafik von Abbildung 3.18. Da sich das y - ϕ -Diagramm für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung mit drei freien Parametern (\hat{m} , $\hat{m}\hat{c}_{r0}$, $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzq}$) nicht darstellen lässt, wird ein synthetisches Beispiel in Abbildung 3.19 zur Beschreibung unterschiedlicher Messausreißer herangezogen.

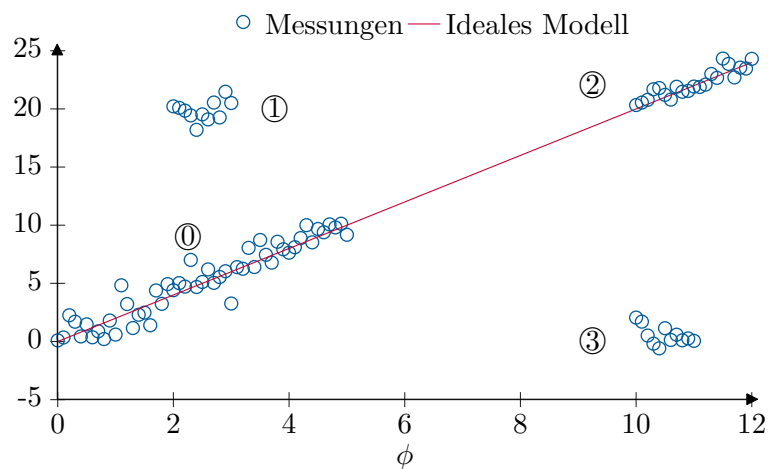


Abbildung 3.19: Synthetisches Regressionsbeispiel mit regulären Datenpunkten, vertikalen Ausreißern, guten Hebelpunkten und schlechten Hebelpunkten [65]

Die Art der Ausreißer lässt sich in drei Kategorien unterteilen, welche durch ① - ③ in Abbildung 3.19 gekennzeichnet sind: [65], [66]

Reguläre Datenpunkte ① Diese Datenpunkte enthalten keine Messfehler und beeinflussen somit die Parameterschätzung nicht negativ.

Vertikale Ausreißer ② Dies sind Datenpunkte, welche reguläre Werte für den Datenvektor ϕ aufweisen und große Abweichungen in der abhängigen Variablen y besitzen. Diese Punkte haben einen geringen negativen Einfluss auf die Schätzung.

Gute Hebelpunkte ② Hebelpunkte (engl.: Leverage Point) sind Datenpunkte, welche eine große Abweichung in ϕ im Vergleich zum Großteil der anderen Punkte aufweisen. Gute Hebelpunkte erfüllen dabei die Modellannahme und besitzen somit keine Abweichung in y -Richtung. Aufgrund des langen „Hebels“ dieser Daten haben sie einen positiven Einfluss auf die Schätzung. Bei großen Werten des Regressorvektors ϕ wird die Kovarianzmatrix $\mathbf{P} = (\Phi^T \Phi)^{-1}$ nach (2.27) kleiner, wodurch sich die Konfidenz der geschätzten Größen erhöht.

Schlechte Hebelpunkte ③ Schlechte Hebelpunkte haben durch den langen „Hebel“ ebenfalls einen großen Einfluss auf die Schätzung. Durch die große Abweichung in y -Richtung wirkt sich der Einfluss dieser Datenpunkte negativ auf die Schätzung aus. Da ein großer Fehler nicht nur in y , sondern auch in ϕ auftritt, ist die Auswirkung der schlechten Hebelpunkte auf die Schätzung deutlich größer als bei vertikalen Ausreißern.

Um Messausreißer bei mehrdimensionaler Regression systematisch in die drei genannten Gruppen einzuordnen, eignet sich eine grafische Darstellung der standardisierten Residuen über die Mahalanobisdistanz (MD) wie in Abbildung 3.20. [65]

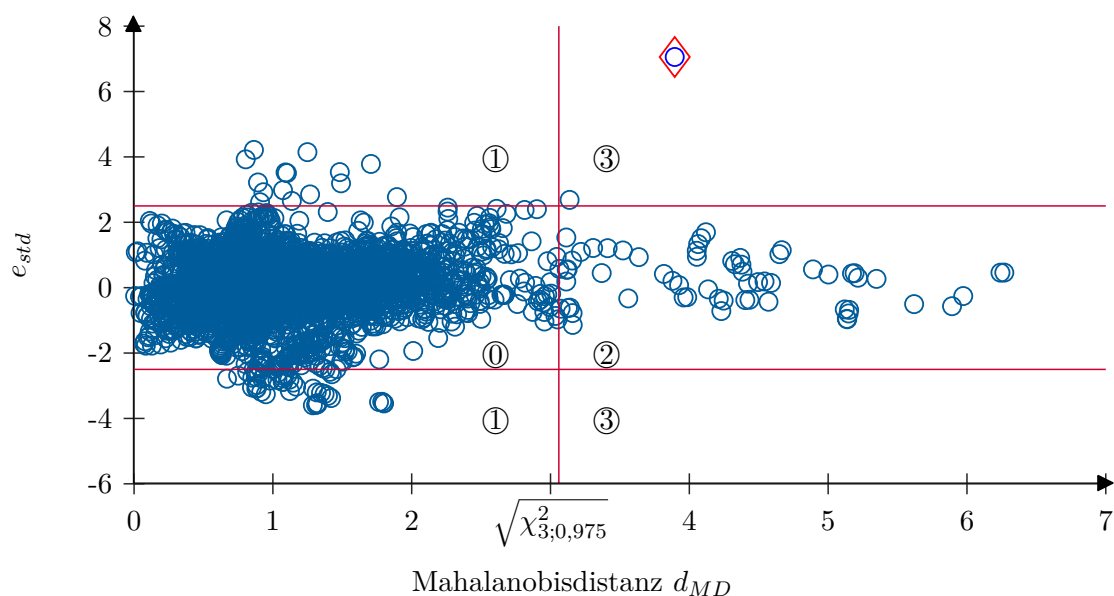


Abbildung 3.20: Standardisiertes Residuum über das MD-Maß

Das standardisierte Residuum leitet sich aus dem Quotienten des normalen Residuums und dessen Standardabweichung ab.

$$e_{std}[k] = \frac{e[k]}{\sigma_e} = \frac{e[k]}{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (e[k] - \mu(e))^2}} \quad (3.51)$$

Der Mittelwert der Residuen $\mu(e)$ ist normalerweise Null.

Die MD beschreibt den Abstand eines Datenpunktes zum Zentrum bzw. Mittelwert aller Datenpunkte.

$$d_{MD}[k] = \sqrt{(\boldsymbol{\phi}[k] - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Phi}))^T \mathbf{P}^{-1} (\boldsymbol{\phi}[k] - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Phi}))} \quad (3.52)$$

Dabei stellt $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Phi})$ den arithmetischen Mittelwert der Daten $\boldsymbol{\Phi}$ dar und $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1}$ ist die Kovarianzmatrix der Daten. Da beim Modell der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung nach Gleichung (3.50) das zweite Element des Regressorvektors $\phi_2 = g$ keine Streuung aufweist und somit keinen Beitrag zum Maß d_{MD} liefert, wird die Berechnung von Gleichung (3.52) nur mit $\phi_1 = a_x$ und $\phi_3 = \frac{1}{2} \rho_L v_x^2$ ausgeführt. Die MD beschreibt für jeden Datenpunkt den Abstand in $\boldsymbol{\phi}$ -Richtung zum Mittelpunkt aller Daten. Je größer die Distanz ist, umso weiter liegt ein Punkt vom Zentrum der Datenwolke weg und ist damit tendenziell ein Hebelpunkt.

Zusätzlich sind die Linien eingezeichnet, welche das Diagramm in unterschiedliche Bereiche einteilen. Punkte, welche rechts der waagrechten Linie bei $\sqrt{\chi_{3;0,975}^2} = 3,06$ liegen, werden als Hebelpunkte bezeichnet. $\sqrt{\chi_{3;0,975}^2}$ stellt die Grenze dar, innerhalb derer 97,5 % aller Punkte laut einer χ^2 -Verteilung mit drei Freiheitsgraden (\hat{m} , $\hat{m}\hat{c}_{r0}$, $\hat{c}_w \hat{A}_{Fzg}$) liegen. Die Verteilung von d_{MD} in Gleichung (3.52) folgt einer χ^2 -Verteilung unter der Annahme, dass $\boldsymbol{\phi}$ normalverteilt ist. Eine Summe von Quadraten von n unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen besitzt eine χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden. [26, S. 237]

Ausreißer sind Datenpunkte, welche außerhalb des Bereichs liegen, der durch die beiden waagrechten Linien bei $|e_{std}| = 2,5$ gekennzeichnet ist. Die Trennlinien unterteilen die Daten in reguläre Datenpunkte sowie in die drei Arten von Ausreißern, welche bereits in Abbildung 3.19 beispielhaft dargestellt sind. [65]

Reguläre Daten ① Diese Datenpunkte liegen um das Zentrum der Datenwolke und besitzen ein kleines Residuum. Es sind also Messpunkte, für welche die Modellannahme möglichst gut erfüllt ist. Sie bilden den Großteil aller Messpunkte.

Vertikale Ausreißer ① Diese Ausreißer fallen durch hohe Residuen auf und besitzen eine geringe Abweichung in $\boldsymbol{\phi}$ -Richtung bzw. eine kleine MD. Die Schätzung wird durch die relativ hohe Anzahl an Ausreißern negativ beeinflusst.

Gute Hebelpunkte ② Diese Messpunkte weisen ein geringes Residuum auf und erfüllen somit die Modellgleichung. Durch den hohen d_{MD} -Wert und die damit verbundene hohe Anregung haben diese relativ häufig vorkommenden Punkte einen positiven Einfluss auf die Parameterschätzung.

Schlechte Hebelpunkten ③ Durch die große MD beeinflussen schlechte Hebelpunkten die Schätzung stark. Der große Wert des Residuums hat dabei einen negativen Einfluss. Diese Punkte kommen nur sehr selten vor. Der mit \diamond gekennzeichnete schlechte Hebelpunkt korrespondiert mit dem Datenpunkt aus Abbildung 3.18, der ebenfalls mit \diamond markiert ist.

Abbildung 3.20 soll nicht dazu dienen, Ausreißer zu erkennen und für die Schätzung auszublenden. Für eine Echtzeitanwendung ist dieses grafische Verfahren nicht geeignet. Mit dieser Abbildung lässt sich aber zeigen, dass Ausreißer vorkommen und ein Schätzverfahren diese für die vorliegende Anwendung berücksichtigen muss.

3.4.2.2 Maximum-Likelihood-Schätzung

Das LS-Verfahren kann auch als stochastisches MLE-Verfahren betrachtet werden. Dabei werden die Residuen \mathbf{e} als Zufallsvariable mit zugehöriger Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert. Anstatt die hohe Häufigkeit von großen Fehlern \mathbf{e} als Ausreißer zu betrachten, kann dieses Phänomen auch als Teil einer Dichtefunktion verstanden werden, welche von der Normalverteilung abweicht.

Für lineare Modelle und normalverteilte Modellfehler $e[k]$ ist das LS-Verfahren identisch zur MLE-Schätzung. Dieser Zusammenhang wird deutlich, wenn von allgemeineren Schätzverfahren ausgegangen wird und bestimmte Bedingungen an die statistischen Eigenschaften gestellt werden. Der Zusammenhang der verschiedenen Schätzverfahren sowie deren zugrunde liegenden Annahmen verdeutlicht Abbildung 3.21.

Unter der Annahme gleichverteilter Parameter, z. B. $p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \text{konst.}$, vereinfacht sich der Bayesschätzer zum MLE-Verfahren. [26, S. 319-322]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} p(\mathbf{e}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.53)$$

Die weiteren Annahmen an das Residuum \mathbf{e} sind statistische Unabhängigkeit und Gauß-/Normalverteilung für $p(\mathbf{e}|\hat{\boldsymbol{\theta}})$ mit einem Mittelwert $E\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}$ und einer Kovarianzmatrix $\mathbf{W} = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\}$.

$$p(\mathbf{e}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \mathbf{W})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{e}\right) \quad (3.54)$$

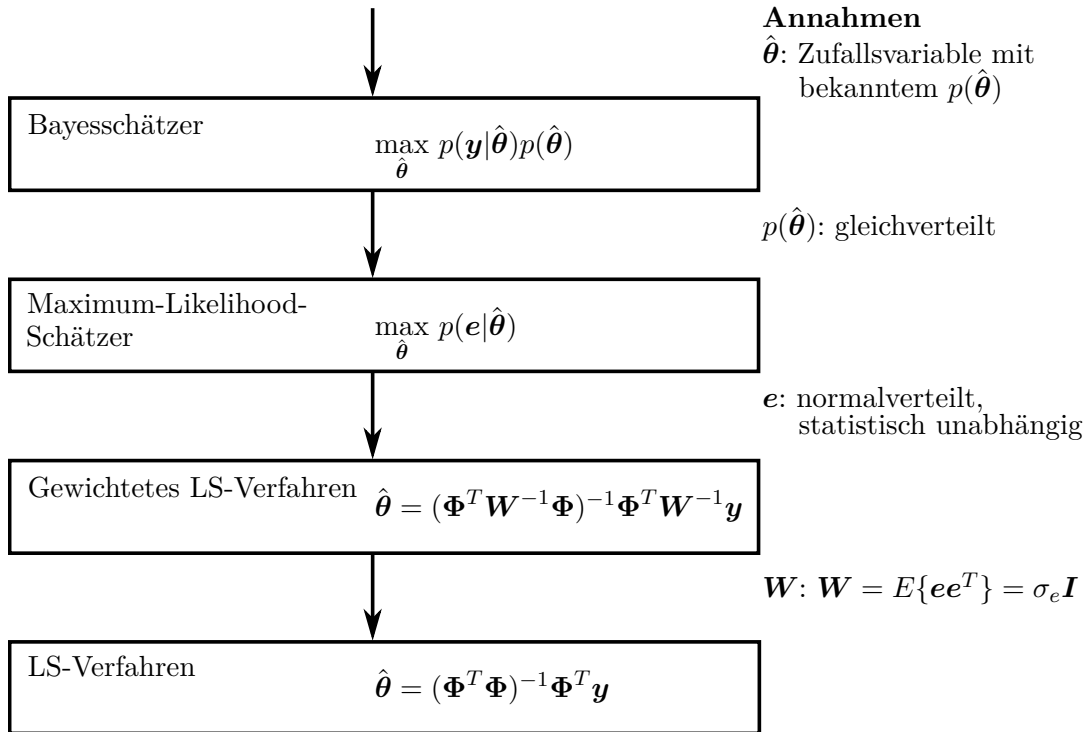


Abbildung 3.21: Herleitung des LS-Verfahrens durch spezielle Annahmen an den Bayesschätzer [26, S. 321]

Die Abhängigkeit der Normalverteilung von den Parametern steckt im Residuum, z. B. $\mathbf{e}(\hat{\theta}) = \mathbf{y} - \Phi \hat{\theta}$ für lineare Modelle. Die Exponentialfunktion $\exp(\cdot)$ beschreibt eine Glockenkurve mit dem Maximum bei $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Der Quotient vor der Exponentialfunktion normiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{e}|\hat{\theta}) d\mathbf{e} = 1$ auf den Wert Eins, wodurch Gleichung (3.54) eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschreibt.

Anstatt die Maximierung in Gleichung (3.53) über die Normalverteilung von Ausdruck (3.54) auszuführen, kann auch das Optimierungsproblem über den Logarithmus des Gütemaßes der Likelihood-Funktion gelöst werden. Dies ist möglich, da für die Funktion $p(\mathbf{e}|\hat{\theta}) > 0$ gilt und die logarithmische Funktion im Wertebereich größer Null definiert ist und streng monoton ansteigt. Das Optimierungsproblem für die Berechnung der Schätzung $\hat{\theta}$ lautet wie folgt.

$$\begin{aligned}
\max_{\hat{\theta}} \ln p(\mathbf{e}|\hat{\theta}) &\Leftrightarrow \max_{\hat{\theta}} \ln \left[\frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \mathbf{W})^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{e} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow \max_{\hat{\theta}} \left[\ln \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \mathbf{W})^{1/2}} \right) + \ln \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{e} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow \max_{\hat{\theta}} \left(\text{konst.} - \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{e} \right) \\
&\Leftrightarrow \max_{\hat{\theta}} \underbrace{-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{e}}_{J(\mathbf{e})}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Um das Optimum von $J(\mathbf{e})$ zu berechnen, muss der Gradient bzgl. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ verschwinden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} J(\mathbf{e}) &= \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{e} \right) = \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] = \\ &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die gesuchte Schätzgröße $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ergibt sich aus der Lösung von (3.56)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}, \quad (3.57)$$

was dem gewichteten LS-Verfahren nach Abbildung 3.21 bzw. Gleichung (2.30) entspricht.

Mit der Bedingung, dass die Messfehler alle die gleiche Varianz besitzen, erhält man $\mathbf{W} = \sigma_e^2 \mathbf{I}$ und aus dem gewichteten LS-Verfahren wird analog zu Abbildung 3.21 das gewöhnliche LS-Verfahren, wie in Gleichung (2.21). [26, S. 319-322]

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \left(\boldsymbol{\Phi}^T (\sigma_e^2)^{-1} \mathbf{I} \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T (\sigma_e^2)^{-1} \mathbf{I} \mathbf{y} = \sigma_e^2 (\sigma_e^2)^{-1} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} = \\ &= \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Somit liefert das LS-Verfahren optimale Schätzungen im Sinne der MLE-Methode unter der Voraussetzung normalverteilter Messfehler bzw. Residuen.

3.4.2.3 Verteilungsfunktion der Messfehler

Dieser Abschnitt untersucht, ob die Messfehler einer Gaußverteilung folgen, was notwendig ist, damit die LS-Schätzung optimale Ergebnisse liefert. Die Bedingung der Normalverteilung bezieht sich auf die Verteilung der Messfehler $\Delta y[k]$ in Gleichung (2.14).

$$\Delta y[k] = y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \boldsymbol{\theta} \quad (3.59)$$

Da der Messfehler und der tatsächliche Parametervektor nicht bekannt sind, wird für die Analyse der Messfehlerverteilung das Residuum aus Gleichung (2.16) herangezogen, welches auf der Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ basiert.

$$e[k] = y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.60)$$

Abbildung 3.22 stellt die Verteilung des Residuums für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung aus allen gesammelten Messfahrten dar, deren Aufzeichnung in Abschnitt 3.3

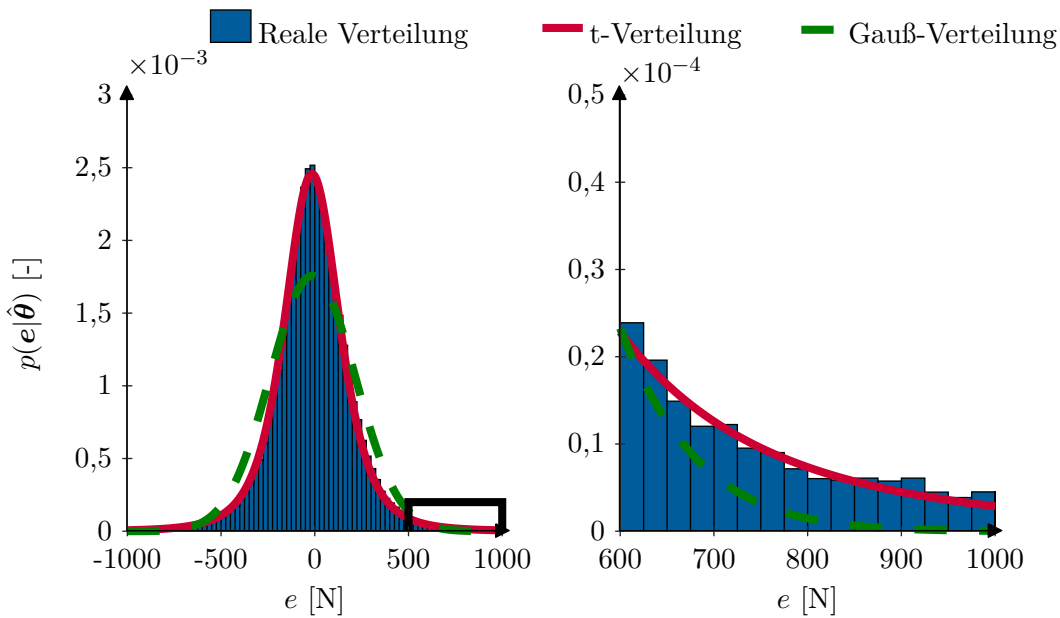


Abbildung 3.22: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(e|\hat{\theta})$ der realen Residuen im Vergleich zu angepasster studentscher t -Verteilung und Gaußverteilung

beschrieben ist. Für die Auswertung kommt das RLSeV-Verfahren mit den Parametern $\lambda = 0,9999$, $\hat{\theta}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$ zum Einsatz.

In Teilgrafik a) ist die Verteilung der Residuen als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dargestellt. Das schwarze Rechteck markiert den Bereich, der in Abbildung 3.22 b) vergrößert dargestellt ist. Neben der tatsächlichen Verteilung ist auch die Normalverteilung als grüne Linie (--) eingezeichnet. Ein MLE-Verfahren bestimmt die Parameter der Gaußverteilung, bestehend aus Mittelwert und Standardabweichung.

Bei der gesamten Verteilung der Residuen in Abbildung 3.22 a) fällt auf, dass die Normalverteilung die tatsächliche Streuung nicht nachbildet. Vor allem für $e = 0$ ergibt sich eine erhebliche Abweichung und die Gaußkurve ist in Richtung großer Residuen verzerrt. Im vergrößerten Ausschnitt der Verteilung (Abbildung 3.22 b)) ist ersichtlich, dass Abweichungen mit einem hohen Wert von e deutlich häufiger auftreten, als es die Normalverteilung annimmt. Die hohe Anzahl von großen Residuen kann als Auftreten von Messausreißern aufgefasst werden. Um Messausreißer besser abzubilden, wird die eingepasste Gaußverteilung weiter nach außen gezogen, wodurch sich die Abweichungen um $e = 0$ ergeben.

Die Abweichungen bei der RLSeV-Schätzung in Abbildung 3.15 treten aufgrund der Verletzung mehrerer Voraussetzungen auf. Durch das quadratische Gütemaße des LS-Verfahrens in Gleichung (2.17) besitzen große Residuen e einen überproportional hohen Einfluss auf die Schätzung. Nach Abbildung 3.20 und 3.22 treten hohe Residuen in der Realität deutlich häufiger auf, als es die Voraussetzung einer Normalverteilung für

optimale Schätzungen annimmt. Treten hohe Residuen konzentriert auf, so versucht das RLSeV-Verfahren die Parameter anzupassen, da es davon ausgeht, dass die Schätzung und nicht die Messung fehlerhaft ist. Dies führt z. B. zu den großen Parameterfehlern im Bereich um $t = 600$ s in Abbildung 3.15.

Die hohe Anzahl an großen Residuen e kann nicht nur als Auftreten von Messausreißern interpretiert werden, sondern alternativ als eine andere Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Die studentsche t -Verteilung $p_t(e|\boldsymbol{\theta})$, dargestellt in Abbildung 3.22 als rote Linie (—), nähert die tatsächliche Verteilung deutlich besser an als die Normalverteilung. [67, S. 102-105]

$$p_t(e|\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_t+1}{2}\right)}{\sigma_t\sqrt{\nu_t\pi}\Gamma\left(\frac{\nu_t}{2}\right)} \left[\frac{\nu_t + \left(\frac{e-\mu_t}{\sigma_t}\right)^2}{\nu_t} \right]^{-\frac{\nu_t+1}{2}} \quad (3.61)$$

Die studentsche t -Verteilung aus Gleichung (3.61) wird beschrieben durch die Gamma-Funktion [67, S. 62]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du, \quad (3.62)$$

den Skalierungsparameter σ_t , die Anzahl der Freiheitsgrade ν_t und dem Mittelwert μ_t . Der Mittelwert beträgt $\mu_t = 0$, da die tatsächliche Verteilung $e[k]$ um die Null zentriert ist. Die Normalverteilung $p_N(e|\boldsymbol{\theta})$ ist ein Spezialfall der t -Verteilung $p_t(e|\boldsymbol{\theta})$ für $\nu_t \rightarrow \infty$.

Die t -Verteilung ist das Resultat einer Addition mehrerer Gaußverteilungen mit gleichem Mittelwert und unterschiedlichen Varianzen. Das Ergebnis ist eine Verteilung, die längere Ausläufer besitzt und somit die höhere Anzahl an großen Residuen nicht als Ausreißer interpretiert, sondern als Teil der Verteilung. Die längeren Ausläufer verbessern die Robustheit der t -Verteilung gegenüber dem Auftreten von Messausreißern und die tatsächliche Streuung der Residuen wird besser wiedergegeben. Im Gegensatz dazu besitzt die Normalverteilung nicht die Möglichkeit, die Ausreißer als Teil der Verteilung darzustellen, wodurch beim Einpassen der Gaußverteilung die Kurve gestreckt wird. Diese Verzerrung bedeutet eine höhere Standardabweichung im Gegensatz zur t -Verteilung, dargestellt in Tabelle 3.3. Die Mittelwerte beider Verteilungen sind leicht ins Negative

	Mittelwert	Standardabweichung/ Skalierungsparameter	Anzahl der Freiheitsgrade
Normalverteilung	$\mu_N = -12$ N	$\sigma_N = 235$ N	-
Studentsche t-Verteilung	$\mu_t = -15$ N	$\sigma_t = 151$ N	$\nu_t = 3,64$

Tabelle 3.3: Parameter der Normal- und der studentschen t -Verteilung für das Beispiel aus Abbildung 3.22

verschoben. Der zusätzliche Parameter der Freiheitsgrade ν_t für die t -Verteilung sorgt dafür, dass die tatsächliche Streuung besser nachgebildet wird.

3.4.3 Systemanregung und Windup-Effekt

Damit der LS-Algorithmus (2.21) eine Schätzung der Parameter

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1}}_{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} \quad (3.63)$$

berechnen kann, muss die Informationsmatrix $\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}$ invertierbar sein. Diese Bedingung an \mathbf{R} bzw. deren Eingangssignale im Regressorvektor $\boldsymbol{\phi}$ wird als *fortdauernde Anregung* (engl.: Persistent Excitation (PE)) bezeichnet. Die Bedingung an fortdauernde Anregung der Eingangssignale wird mit den positiven Konstanten c_1 und c_2 definiert. [68, S. 64], [69]

$$c_1 \mathbf{I} < \underbrace{\sum_{k=j}^{j+N} \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k]}_{\mathbf{R}} < c_2 \mathbf{I} \quad (3.64)$$

Diese Anforderung muss für jeden beliebigen Zeitschritt j erfüllt sein. Die linke Ungleichung in (3.64) bedeutet, dass die Informationsmatrix \mathbf{R} positiv definit und somit invertierbar sein muss. Die Summe muss mindestens über die Anzahl n der freien Parameter gebildet werden, da die Matrix \mathbf{R} ansonsten einen Rangabfall aufweist. Außerdem müssen n der $N - j$ aufsummierten Regressorvektoren $\boldsymbol{\phi}[k]$ linear unabhängig sein.

Für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung ergibt sich der Regressorvektor entsprechend (3.50) zu

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} a_x & g & \frac{1}{2} \rho_L v_x^2 \end{bmatrix}^T. \quad (3.65)$$

Situationen, in denen die Bedingung an fortdauernde Anregung nicht erfüllt ist, sind längere Phasen mit konstanter Geschwindigkeit und verschwindender Beschleunigung, z. B. bei Fahrten auf Autobahnen mit aktivem Tempomaten. Dabei lautet der Regressorvektor

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & g & \frac{1}{2} \rho_L v_x^2 \end{bmatrix}^T \quad (3.66)$$

über einen längeren Zeitraum und erfüllt nicht mehr die Bedingung (3.64), da die Matrix \mathbf{R} nur noch Rang Eins besitzt.

Da im Fahrzeugbetrieb stets unterschiedliche Geschwindigkeiten und somit Beschleunigungen vorhanden sind, sollte über die gesamte Fahrt hinweg die Bedingung der fort dauernden Anregung erfüllt sein. Zu einem Problem kommt es beim RLSeV-Verfahren nach Algorithmus 2.2, wenn in Phasen mit geringer Anregung keine neue Information im

Regressorvektor enthalten ist und die alten Werte mit guter Anregung vergessen werden. Am einfachsten lässt sich dieses Verhalten beschreiben, wenn von keiner Anregung, also $\phi = \mathbf{0}$ ausgegangen wird. Dann wird aus den Zeilen 3 und 4 des RLSeV-Algorithmus 2.2

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[k] = \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] \quad (3.67a)$$

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}[k-1] \frac{1}{\lambda}. \quad (3.67b)$$

Bei verschwindender Anregung gilt für die Informationsmatrix

$$\mathbf{R}[k] = \mathbf{P}^{-1}[k] = \lambda \mathbf{R}[k-1] + \phi[k] \phi^T[k] \stackrel{\phi=0}{=} \lambda \mathbf{R}[k-1] \quad (3.68)$$

und somit konvergiert $\mathbf{R}[k] \rightarrow \mathbf{0}$ für $k \rightarrow \infty$. Dadurch ist die Bedingung an fortdauernde Anregung aus Gleichung (3.64) nicht mehr erfüllt.

Die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ verändert sich nicht bzw. die Gleichung (3.67a) ist grenzstabil mit Eigenwerten bei Eins. Die Gleichung für die \mathbf{P} -Matrix ist sogar instabil mit Eigenwerten bei $1/\lambda > 1$ und wird mit zunehmender Zeit immer größer. Dadurch erhöht sich auch die Verstärkung $\gamma[k] = \mathbf{P}[k] \phi[k]$ in Gleichung (2.66), weshalb dieses Phänomen als Schätzwindup bezeichnet wird, analog zum Integrator-Windup bei PI-Reglern. Zum einen führt das Windup dazu, dass sich bei wiederkehrender Anregung ($\phi \neq \mathbf{0}$) die Parameterschätzung stark ändern kann. Zum anderen wird bei geringer Anregung ($\phi \approx \mathbf{0}$) das Signal-Rausch-Verhältnis (engl.: Signal-to-Noise Ratio (SNR)) sehr klein, da das Signal gegen Null geht, das Niveau des Signalrauschens aber gleich bleibt. Da der Schätzalgorithmus durch den Windup-Effekt sehr sensitiv gegenüber Änderungen ist, beeinflusst das Signalrauschen die Schätzgrößen erheblich. Ein ähnliches Verhalten tritt auf, wenn der Regressorvektor ungleich Null ist, aber konstant bleibt. [68, S. 473-477]

Der Windup-Effekt bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung wird anhand eines Beispiels in Abbildung 3.23 verdeutlicht. Die Messung stammt von einem Gespann aus SUV und Anhänger mit einem Gesamtgewicht von ca. 4700 kg. Auf einem Großteil der Strecke hält ein Tempomat eine Geschwindigkeit von $v_x = 100 \text{ km/h} \approx 28 \text{ m/s}$, dargestellt in den drei Graphen der untersten Zeile. Die Ergebnisse stammen vom RLSeV-Verfahren mit $\lambda = 0,9999$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$.

Die linke Spalte zeigt die Schätzparameter $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\gamma} \quad \hat{m} \hat{c}_{r0} \quad \hat{c}_w \hat{A}_{Fzg}]^T$. Die mittlere Spalte zeigt die Werte der Hauptdiagonalen der \mathbf{P} -Matrix, für die jeweiligen Parameter. Die rechte Spalte stellt die Verläufe des Verstärkungsfaktors γ zu den korrespondierenden Schätzwerten dar.

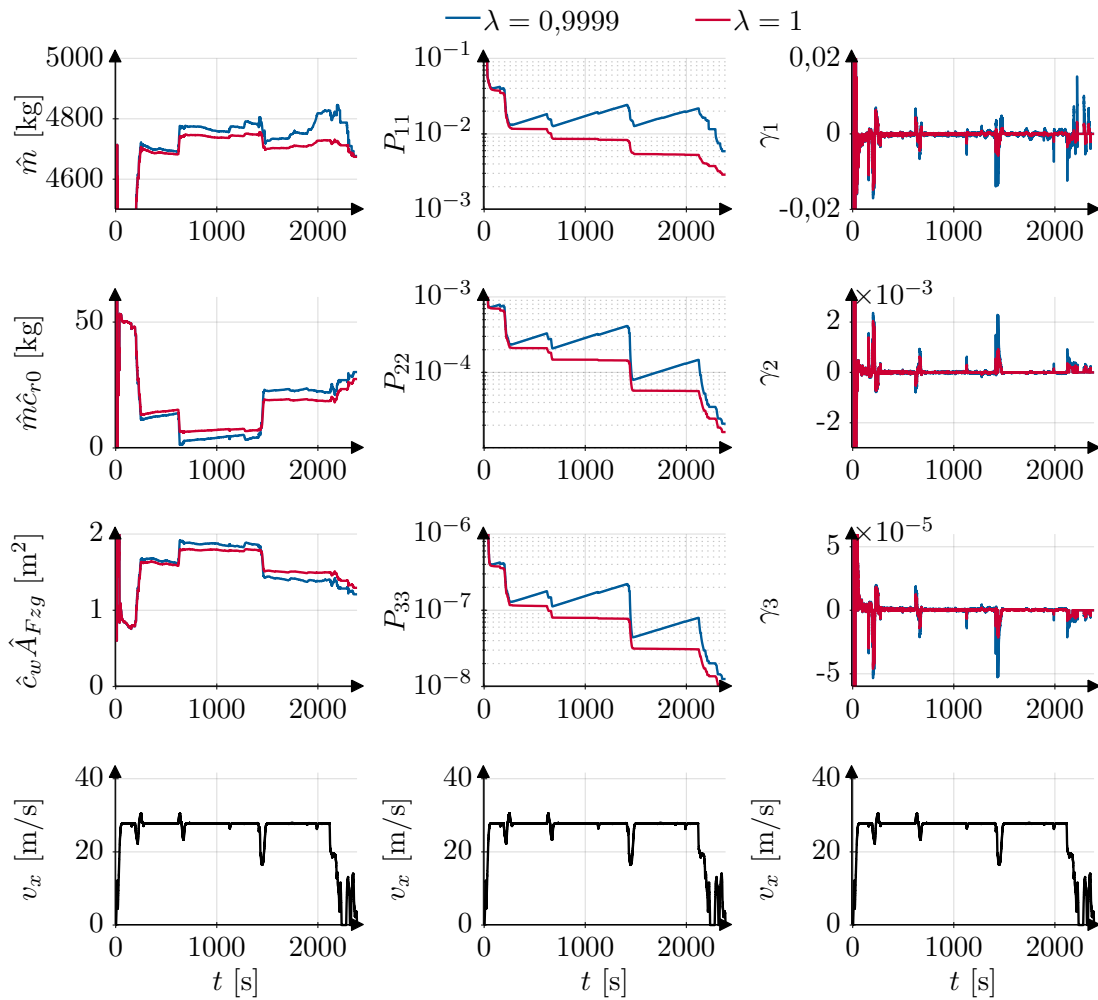


Abbildung 3.23: Verhalten der Parameterschätzung und der \mathbf{P} -Matrix für RLS mit und ohne Vergessen bei Fahrten mit mangelnder Anregung

Zu Beginn der Messung beschleunigt das Fahrzeug auf $v_x = 100 \text{ km/h} \approx 28 \text{ m/s}$, was einer guten Anregung entspricht und wodurch die Parameter entsprechend genau geschätzt werden. Dies spiegelt sich auch in den Einträgen der \mathbf{P} -Matrix wider, die zu Beginn stark abfallen. Da der Erwartungswert der \mathbf{P} -Matrix laut Gleichung (2.27) proportional zur Kovarianzmatrix des Parameterfehlers $\text{cov} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \sigma_e^2 \mathbf{E} \{ \mathbf{P} \}$ ist, nimmt die Unsicherheit der Schätzung ab. In den langen Phasen mit konstanter Geschwindigkeit und somit geringer Anregung, etwa im Bereich um $t = 1000 \text{ s}$, wachsen die Einträge der \mathbf{P} -Matrix für den RLS-Algorithmus mit Vergessensfaktor $\lambda = 0,9999$ (—) an. Wenn die Anregung anschließend durch Geschwindigkeitsänderungen wieder vorhanden ist, z. B. bei $t \approx 1500 \text{ s}$, dann erhöht sich die Sicherheit der Schätzung und die Elemente der \mathbf{P} -Matrix sinken. Da in der Zwischenzeit die \mathbf{P} -Matrix angewachsen ist, führt dies bei wiederkehrender Anregung zu großen Werten in der Verstärkung $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{P}[k] \boldsymbol{\phi}[k]$ (rechte Spalte) und wiederum zu Änderungen in den Schätzgrößen (linke Spalte). Dieses Verhalten ist nicht gewünscht, da je nach Situation die Parameterschätzung stark vom

bisherigen Wert abweicht und erst wieder einige Zeit benötigt wird, bis der ursprüngliche Wert gelernt ist. Eine Konvergenz der Parameterschätzung wird nicht erreicht.

Beim gewöhnlichen RLS-Verfahren mit $\lambda = 1$ (—) tritt der Windup-Effekt nicht auf. Bei mangelnder Anregung behält die \mathbf{P} -Matrix ihren Wert bei und wird bei guter Anregung stets kleiner. Die kontinuierliche Abnahme der \mathbf{P} -Matrix führt allerdings dazu, dass die Verstärkung γ ebenfalls immer kleiner wird und somit die Anpassung der Parameter immer geringer ausfällt, selbst wenn sich durch die Straßenbeschaffenheit eine Änderung in den Fahrwiderständen ergibt. Da die mangelnde Anpassungsfähigkeit des gewöhnlichen RLS-Verfahrens an wechselnde Umweltbedingungen Nachteile besitzt, ist es vorteilhafter, den RLSeV-Algorithmus zu erweitern, um Phasen mangelnder Anregung zu bewältigen.

3.4.4 Statistische Bedingungen an die Signale

Neben den Bedingungen an die Systemanregung aus Abschnitt 3.4.3 und die Verteilung der Messfehler in Abschnitt 3.4.2 untersucht der folgende Teil weitere statistische Bedingungen an die Signale.

3.4.4.1 Statistische Bedingungen an das Residuum

Damit der Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ eines Modells identifizierbar ist, müssen laut Isermann und Münchhof [26, S. 249] folgende Bedingungen erfüllt sein.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\boldsymbol{\theta}}[N] \} = \boldsymbol{\theta} \quad (3.69a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}[N] = \mathbf{0} \quad (3.69b)$$

Die erste Bedingung (3.69a) sagt aus, dass die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ zum tatsächlichen Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ konvergiert. Die zweite Bedingung (3.69b) drückt aus, dass die Kovarianz des Schätzfehlers $\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ für $N \rightarrow \infty$ verschwindet. Dies bedeutet, dass die Unsicherheit in der Schätzung vollständig verschwindet.

Zunächst wird die Bedingung (3.69a) untersucht. Einsetzen von $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$ aus (2.16) in (2.21) ergibt die Gleichung (2.24).

$$E \{ \hat{\boldsymbol{\theta}} \} = \boldsymbol{\theta} + E \left\{ \underbrace{(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{e}}_b \right\} \quad (3.70)$$

Der Erwartungswert der Schätzung $E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}$ weicht um einen Bias \mathbf{b} vom tatsächlichen Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ ab. Damit der Bias verschwindet, wird zunächst angenommen, dass $\boldsymbol{\Phi}^T$ und \mathbf{e} unkorreliert sind. Dadurch gilt

$$\mathbf{b} = E\left\{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{e}\right\} = E\left\{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T\right\} E\{\mathbf{e}\} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

Laut der Bedingung an die fortdauernde Anregung in Gleichung (3.64) ist der erste Faktor ungleich Null. Deshalb muss für den zweiten Faktor $E\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}$ gelten. Die Bedingungen, dass $\boldsymbol{\Phi}^T$ und \mathbf{e} unkorreliert sind und dass $E\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}$ gilt sind in [26, S. 230] zusammengefasst.

Als weitere Bedingung muss der Modellfehler $e[k]$ unkorreliert sein. Nach Isermann und Münchhof [26, S. 233] bedeutet dies, dass die Autokorrelation des Residuums $R_{ee}[\tau]$ folgende Bedingung erfüllen muss.

$$R_{ee}[\tau] \stackrel{!}{=} \sigma_e^2 \delta[\tau] \quad \text{mit} \quad \delta[\tau] = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{für } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Die Impulsfunktion $\delta[\cdot]$ ist zu jedem Zeitschritt τ gleich Null, außer an der Stelle $\tau = 0$, wo sie den Wert Eins annimmt.

Die Berechnung der Autokorrelation des Residuums ergibt sich wie folgt. [26, S. 55]

$$R_{ee}[\tau] = E\{e[k]e[k+\tau]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e[k]e[k+\tau] \quad (3.73)$$

Bei der Berechnung (3.73) wird die Folge der Residuen um τ Zeitschritte verschoben und mit sich selbst multipliziert, ähnlich einer Faltung. Ist das Ergebnis immer Null außer bei $\tau = 0$, wie in Bedingung (3.72) gefordert, so kann man daraus erkennen, dass $e[k]$ nicht durch vorherige Werte beeinflusst wird und somit unkorreliert ist. Würde der aktuelle Modellfehler vom vorherigen abhängen, so besitzt das Residuum noch eine Dynamik, die modelliert werden sollte. Zum Beispiel wird bei einem Sinussignal nach jeder Periodendauer die Autokorrelation einen gleichen Wert ungleich Null liefern, wodurch die Bedingung (3.72) nicht erfüllt ist. Wenn diese Bedingung hingegen erfüllt ist, so handelt es sich bei $e[k]$ um weißes Rauschen. [26, S. 56]

Ob es sich bei dem Residuum $e[k]$ um weißes Rauschen handelt, lässt sich anhand der Gleichung (3.73) überprüfen. Die Autokorrelation des Modellfehlers für eine Messfahrt ist in Abbildung 3.24 dargestellt.

Die Messung besitzt $N \approx 60.000$ Datenpunkte, womit für die x -Achse $\tau \in [-N, N]$ gilt. Die berechnete Autokorrelation (—) besitzt das Maximum bei $\tau = 0$ mit dem Wert

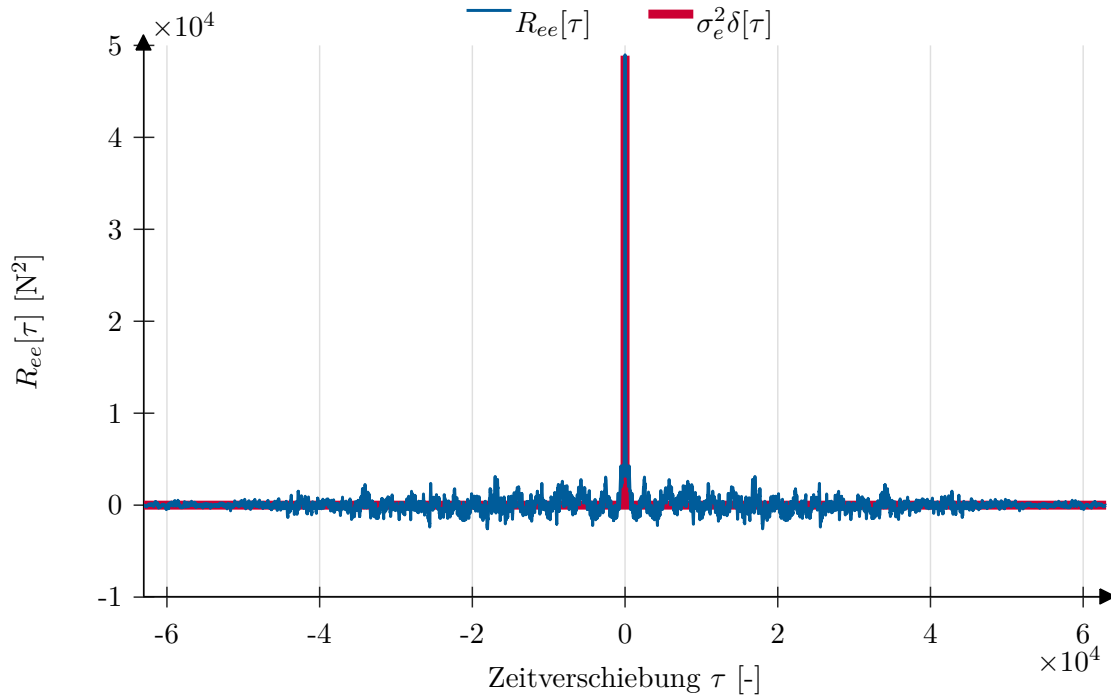


Abbildung 3.24: Berechnete Autokorrelation einer Messfahrt im Vergleich zu optimalem weißem Rauschen

$R_{ee}[\tau = 0] \approx \sigma_e^2 \approx 5 \cdot 10^4$. Für $\tau \neq 0$ ist die Autokorrelation nahe Null. Damit erfüllt die Berechnung mit realen Daten nahezu die ideale Autokorrelation (—) mit dem Dirac-Impuls $\sigma_e^2 \delta[\tau]$. Somit kann davon ausgegangen werden, dass der Modellfehler $e[k]$ nahezu die Eigenschaften von weißem Rauschen besitzt und die Bedingung (3.72) erfüllt ist.

Als Nächstes folgt die Überprüfung der Bedingung, dass der Regressor Φ^T und der Modellfehler e unkorreliert sind. Diese Bedingung ist notwendig, damit der Bias (3.71) Null wird. Dazu wird die Kreuzkorrelation aus den einzelnen Elementen von Φ mit e berechnet. [26, S. 55]

$$R_{\phi_i e}[\tau] = E\{\phi_i[k]e[k + \tau]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_i[k]e[k + \tau] \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_i[k]e[k + \tau] \quad (3.74)$$

Falls eine Komponente ϕ_i mit e korreliert, so ergibt die Kreuzkorrelation ähnliche Ergebnisse wie in Diagramm 3.24. Als Beispiel ist das Resultat der Kreuzkorrelation mit $\phi = [a_x \ g \ \frac{1}{2}\rho_L v_x^2]^T$ für eine beliebige Messfahrt in Abbildung 3.25 dargestellt. Andere Messungen liefern ähnliche Ergebnisse. Es ergibt sich kein ausgeprägtes Maximum bei $\tau = 0$ für jedes Element der Kreuzkorrelation $R_{\phi_i e}$. Somit kann davon ausgegangen werden, dass Φ und e unkorreliert sind und der Bias \mathbf{b} in (3.71) verschwindet.

Die zweite Bedingung, damit der Bias \mathbf{b} Null wird, ist $E\{e\} = 0$. Dass der Mittel- bzw. Erwartungswert des Modellfehlers Null ist, lässt sich anhand der Abbildung 3.22

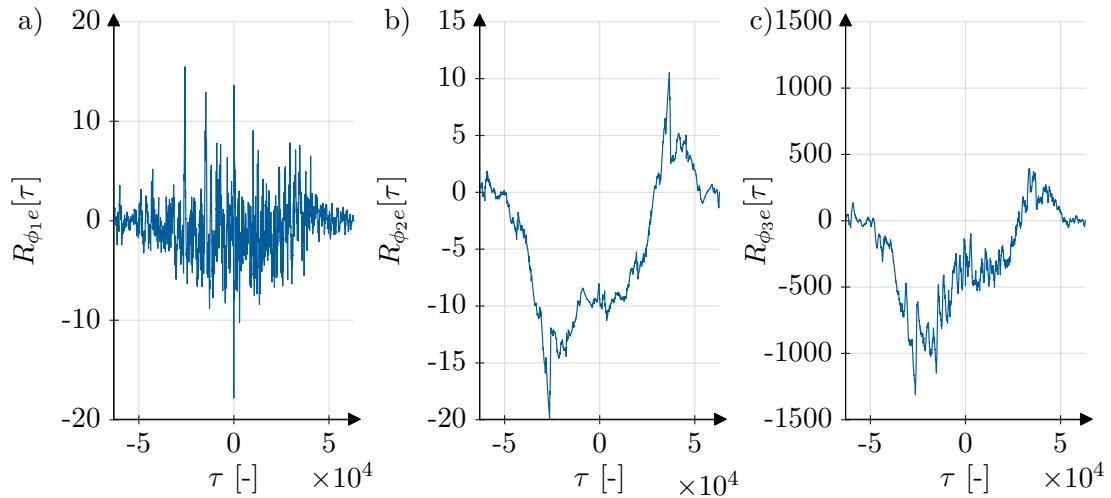


Abbildung 3.25: Kreuzkorrelation des Regressorvektors ϕ und des Modellfehlers e einer Messung

erkennen. Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion tritt am Mittelwert des Residuums e auf. Da das Extremum bei $e = 0$ auftritt, ist die Bedingung $E\{e\} = 0$ erfüllt.

Somit sind die stochastischen Bedingungen an das Residuum e und den Regressor Φ , die für die Herleitung des LS-Algorithmus notwendig sind, erfüllt:

- Das Residuum e ist unkorreliert.
- Der Regressor Φ^T und das Residuum e sind unkorreliert.
- Der Mittelwert des Residuums ist Null ($E\{e\} = 0$).

3.4.4.2 Stochastische Bedingungen an den Regressorvektor

Bei der Herleitung des LS-Algorithmus wird davon ausgegangen, dass der Regressorvektor ϕ fehlerfrei erfasst wird und lediglich der Ausgang y des MISO-Systems von Messfehlern bzw. Rauschen beeinflusst wird. Bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung trifft dies für $y = M_A/r_{Rad}$ zu, da die Modellgröße Antriebsmoment M_A geschätzt wird und nicht exakt bekannt ist. Bei der vorliegenden Anwendung unterliegt der Regressorvektor $\phi = [a_x \ g \ \frac{1}{2}\rho_L v_x^2]^T$ ebenfalls Ungenauigkeiten, da a_x von einem Längsbeschleunigungssensor stammt und somit Messrauschen enthält. Das Gleiche gilt für die Geschwindigkeit, welche aus der Messung von Raddrehzahlsensoren ermittelt wird. Nur $\phi_2 = g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \text{konst.}$ ist bekannt. Die exakten Werte von Längsbeschleunigung a_x und -geschwindigkeit v_x sind nicht verfügbar. Die Analyse der verrauschten Signale verwendet deshalb gefilterte Werte, wie in Abbildung 3.26 dargestellt.

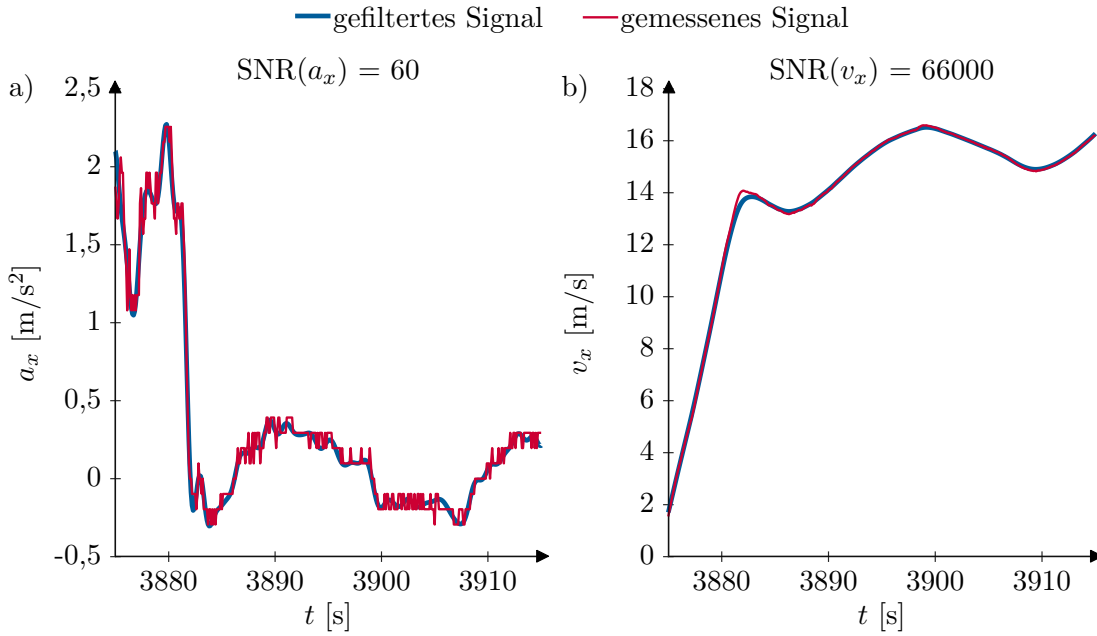


Abbildung 3.26: Gemessene und gefilterte Signale von Längsbeschleunigung a_x und Geschwindigkeit v_x mit zugehörigen SNR-Werten

Es ist zu erkennen, dass a_x und v_x mit unterschiedlich starkem Rauschen behaftet sind. Dabei stammen die Ungenauigkeiten nicht nur von Messfehlern, sondern kommen auch durch die Quantifizierung der Signale zustande, welche für die Buskommunikation notwendig ist. Vor allem die Längsbeschleunigung in Abbildung 3.26 a) ist durch die Quantifizierung mit Fehlern behaftet, erkennbar durch die diskreten Werte, die das Signal annimmt.

Zur Beschreibung des Signalrauschens wird der SNR-Wert verwendet. Er wird als Verhältnis von Leistung $P(y)$ des tatsächlichen Signals zu Leistung $P(\Delta y)$ des Signalrauschens berechnet. [70, S. 42]

$$\text{SNR}(y) = \frac{P(y)}{P(\Delta y)} \quad (3.75)$$

Das SNR-Maß kann mit folgender Formel berechnet werden.

$$\text{SNR}(y) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2[k]}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta y^2[k]} \quad \text{E}\{\Delta y\} = 0 \quad \frac{\text{rms}^2(y)}{\sigma_{\Delta y}^2} \quad (3.76)$$

Wenn der Erwartungswert des Rauschens $\text{E}\{\Delta y\} = 0$ ist, wird aus der Summe der Quadrate die Varianz ($\text{Var}(\Delta y) = \sigma_{\Delta y}^2$). Der quadratische Mittelwert wird als Root Mean Square (RMS) bezeichnet.

Um den Einfluss der Messfehler im Regressor ϕ auf die Schätzungen zu bewerten, wird zunächst die Parameterabweichung in Abhängigkeit der Messfehler ermittelt. Modelle, bei denen neben dem Ausgang y auch der Regressor ϕ von Messrauschen beeinflusst ist,

werden als Modell vom Typ Errors-in-Variables (EIV) bezeichnet. [71, S. 1-3]

$$\underbrace{y + \Delta y}_{\tilde{y}} = \underbrace{(\phi + \Delta\phi)^T}_{\tilde{\phi}^T} \hat{\theta} \quad (3.77)$$

Wie in Abbildung 3.27 schematisch dargestellt, enthält der messbare Ausgang $\tilde{y} = y + \Delta y$ neben dem tatsächliche Systemausgang y auch noch einen Messfehler Δy . Das Gleiche gilt für den messbaren Systemeingang $\tilde{\phi} = \phi + \Delta\phi$. Auf das System wirkt der ungestörte Eingang ϕ , welcher aber bei der Messung mit dem Rauschen $\Delta\phi$ überlagert ist.

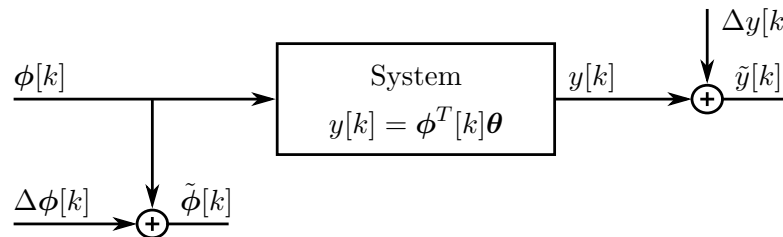


Abbildung 3.27: Blockschaltbild eines allgemeinen EIV-Modells [72]

Bei EIV-Modellen eignen sich die orthogonale Regression bzw. TLS-Methoden, welche die Ungenauigkeiten in $\tilde{\phi}$ berücksichtigen. Der Unterschied zwischen gewöhnlichem LS-Verfahren und TLS-Verfahren ist in Abbildung 3.28 skizziert. Das gewöhnliche Regres-

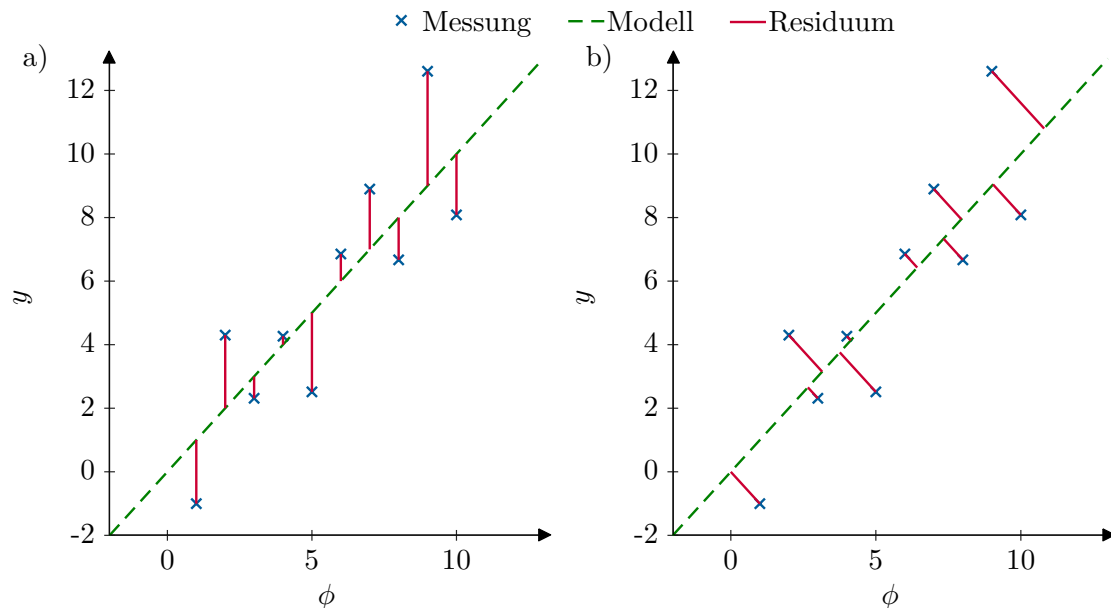


Abbildung 3.28: Synthetisches Beispiel zum gewöhnlichen LS-Verfahren und TLS-Verfahren

sionsverfahren berücksichtigt nur Fehler in y und minimiert das Quadrat der *vertikalen* Abweichungen der Messung vom Modell. Falls auch die Messung von ϕ mit Ungenauigkeiten behaftet ist, kann dies zu einer fehlerhaften Schätzung führen. Das TLS-Verfahren

berücksichtigt die Abweichungen in ϕ -Richtung und minimiert das Quadrat der *orthogonalen* Modellfehler.

Das gewöhnliche TLS-Verfahren geht davon aus, dass das Messrauschen des Ausgangs Δy die gleichen Eigenschaften besitzt wie der Messfehler im Regressor $\Delta\phi$. Dies bedeutet, dass Δy und die Elemente von $\Delta\phi$ die gleiche Standardabweichung besitzen bzw. lässt sich die Kovarianzmatrix von $[\Delta\phi^T, \Delta y]^T$ als $\sigma_\Delta^2 \mathbf{I}$ schreiben.

Für den allgemeinen Fall, dass Δy und die Elemente von $\Delta\phi$ unterschiedliche Streuung aufweisen, kann das GTLS-Verfahren angewendet werden. Dabei ist allerdings Kenntnis über die Kovarianzmatrix von $[\Delta\phi^T, \Delta y]^T$ notwendig. Rhode et al. [73] stellen ein Verfahren vor, welches diese Kovarianzmatrix im laufenden Betrieb mitschätzt.

Um den Einfluss des Fehlers im Regressor zu bewerten, wird die Abweichung der Parameterschätzung abhängig von $\Delta\phi$ nach Söderström [72] berechnet. Für die Herleitung werden die Kovarianzen

$$\mathbf{R}_{\phi\phi} = E\{\phi[k]\phi^T[k]\} \quad \mathbf{r}_{\phi y} = E\{\phi[k]y[k]\} \quad (3.78)$$

verwendet bzw. deren Näherungen für endliche Datensätze

$$\hat{\mathbf{R}}_{\phi\phi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k]\phi^T[k] \quad \hat{\mathbf{r}}_{\phi y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k]y[k]. \quad (3.79)$$

Für $N \rightarrow \infty$ gilt $\hat{\mathbf{R}}_{\phi\phi} \rightarrow \mathbf{R}_{\phi\phi}$ bzw. $\hat{\mathbf{r}}_{\phi y} \rightarrow \mathbf{r}_{\phi y}$. Mit der Definition der Kovarianzen aus Gleichung (3.78) lässt sich die LS-Schätzung aus Gleichung (2.21) umschreiben.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \phi[k]\phi^T[k] \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \phi[k]y[k] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k]\phi^T[k] \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k]y[k] \quad (3.80) \\ &= \hat{\mathbf{R}}_{\phi\phi}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\phi y} \rightarrow \mathbf{R}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{r}_{\phi y} \quad \text{für } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es wird angenommen, dass sich die Fehler $\Delta\phi$ und Δy wie weißes Rauschen verhalten. Der Messfehler Δy kann nicht direkt erfasst werden, aber das Residuum verhält sich nach Kapitel 3.4.4.1 wie weißes Rauschen. Unter der Annahme, dass sich die Eingangs- und Messfehler wie weißes Rauschen verhalten, gilt

$$\mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} = \mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi} \quad \mathbf{r}_{\tilde{\phi}\tilde{y}} = \mathbf{r}_{\phi y} = \mathbf{R}_{\phi\phi} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.81)$$

Der nächste Schritt berücksichtigt die fehlerbehafteten Kovarianzen in (3.81) für die Berechnung aus Gleichung (3.80).

$$\mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{r}_{\tilde{\phi}\tilde{y}} = \mathbf{R}_{\phi\phi}\boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\right)\boldsymbol{\theta} \quad (3.82)$$

Damit ergibt sich für die Schätzung nach Huffel und Vandewalle [71, S. 231-232]

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}^{-1} \left(\mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\right)\boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}^{-1}\mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\right)\boldsymbol{\theta} \\ &= \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\right]\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \underbrace{\left(\mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{b}_{EIV}}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Daraus lässt sich erkennen, dass bei der LS-Schätzung von EIV-Modellen ein Bias \mathbf{b}_{EIV} entsteht und die Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ kleiner ist als der tatsächliche Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$. Außerdem hängt die Abweichung der Schätzung vom Verhältnis der Kovarianzmatrix des Fehlers $\mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}$ zur Kovarianzmatrix des gemessenen Regressorvektors $\mathbf{R}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} = \mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi}$ ab. Dieses Verhältnis von Matrizen kann als inverses SNR-Verhältnis (3.76) aufgefasst werden. Für verschwindende Messfehler $\mathbf{R}_{\Delta\phi\Delta\phi} \rightarrow \mathbf{0}$ ($\text{SNR} \rightarrow \infty$) gilt auch für den Bias $\mathbf{b}_{EIV} \rightarrow \mathbf{0}$.

Abbildung 3.29 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem SNR-Wert der Längsbeschleunigung und der Masseschätzung. Bei dem Beispiel wird die gefilterte Längsbeschleunigung als erstes Element des tatsächlichen Regressorvektors $\boldsymbol{\phi}$ verwendet ($\phi_1 = a_x$). Das SNR-Verhältnis des dritten Elements des Regressorvektors, die quadrierte Geschwindigkeit v_x^2 , bleibt wie in dem Beispiel aus Abbildung 3.26 auf einem konstanten Niveau von $\text{SNR} = 66.000$. Für das Längsbeschleunigungssignal wird das SNR-Maß von $\text{SNR} = 100$ bis $\text{SNR} = 10$ durch künstliches, weißes Rauschen variiert. Die unterschiedlich starken Abweichungen sind in Abbildung 3.29 b)-e) visualisiert.

Die Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} in Abbildung 3.29 a) ist abhängig vom SNR-Niveau der Längsbeschleunigung. Nach Gleichung (3.83) sorgt der Bias \mathbf{b}_{EIV} dafür, dass die Schätzung bei verrauschtem Regressor kleiner ausfällt als bei einem ungestörten Messung. Deshalb ist die Masseschätzung bei vorhandenem Rauschen kleiner als für die Schätzung bei unverrauschten Signal mit $\text{SNR} = \infty$. Bei zunehmendem Anteil des Rauschens wächst auch die Abweichung zum ursprünglichen Schätzwert.

Der Anteil des Rauschens am eigentlichen Signal wird durch das SNR-Maß beschrieben. Die Grafiken 3.29 b) - e) zeigen den gleichen zeitlichen Ausschnitt der Längsbeschleunigung wie in Abbildung 3.26, überlagert mit künstlichem, unterschiedlich starkem weißem Rauschen, welches SNR-Werte von 100 bis 10 erzeugt. Bei $\text{SNR} = 60$, was in etwa dem tatsächlichen Rauschen der ungefilterten Längsbeschleunigung entspricht, beträgt die finale Abweichung der Masseschätzung ca. $\Delta\hat{m} = 80$ kg. Tatsächlich weicht die

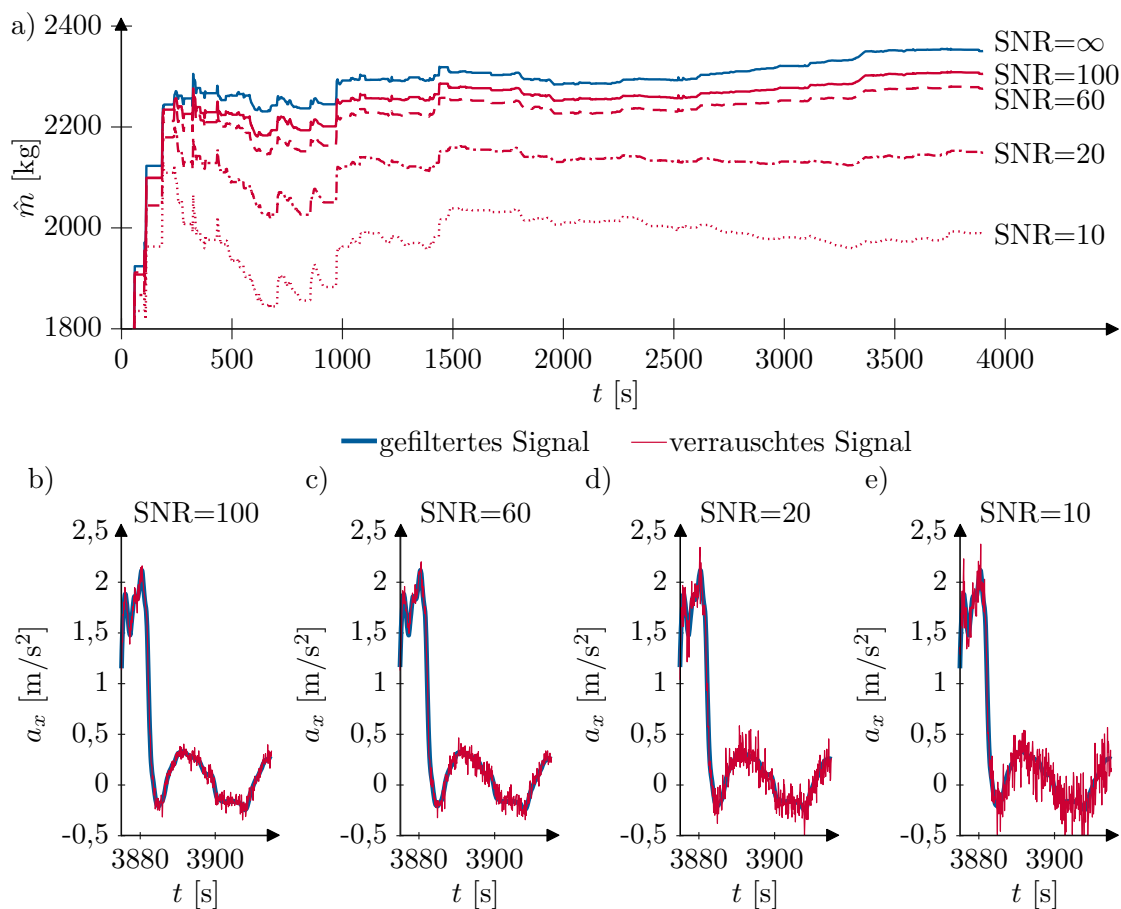


Abbildung 3.29: LS-Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} mit unterschiedlich starkem Rauschen der Längsbeschleunigung

RLS-Schätzung jedoch kaum vom richtigen Massewert ab, da die Längsbeschleunigung geglättet wird, bevor die Schätzung stattfindet. Die Glättung findet in der Signalverarbeitung statt, die nach dem Blockschaltbild aus Abbildung 3.8 einen Teil des gesamten Schätzalgorithmus darstellt.

Für eine größere Streuung der Messfehler bzw. für kleinere SNR-Werte, nimmt die Abweichung der Masseschätzung noch weiter zu. Allerdings ist das Niveau der Streuung für $\text{SNR}=10$ in Abbildung 3.29 e) deutlich größer als die tatsächliche Streuung in 3.26 a). Da das Längsbeschleunigungssignal gefiltert wird, sollten Abweichungen von mehreren 100 kg durch Messfehler im Regressor nicht auftreten.

Abbildung 3.30 vergleicht den berechneten, theoretischen Bias \mathbf{b} aus Gleichung (3.83) mit der tatsächlichen Abweichung der Schätzung $\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$, jeweils auf den eigentlichen Parameter $\boldsymbol{\theta}$ normiert. Der Vergleich zeigt den Unterschied in den drei geschätzten Elementen $\hat{\theta}_1 = \hat{m}$ (Abb. 3.30 a)), $\hat{\theta}_2 = \hat{m}\hat{c}_{r0}$ (Abb. 3.30 b)) und $\hat{\theta}_3 = \hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ (Abb. 3.30 c)). Die Daten stammen von einer Simulation mit realen Messdaten, bei der die Längsbeschleunigung

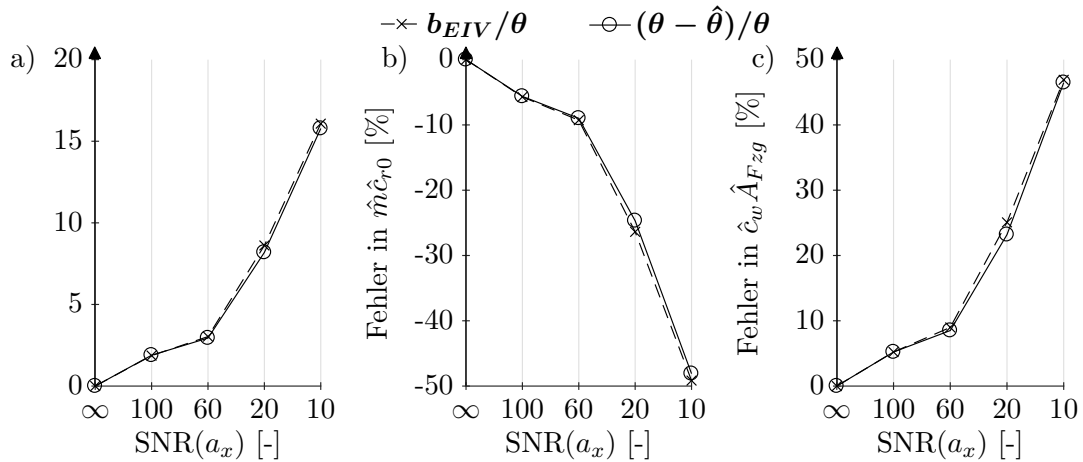


Abbildung 3.30: Abhängigkeit des berechneten Bias \mathbf{b}_{EIV} und der Abweichung der Schätzung $\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ vom SNR-Wert der Längsbeschleunigung

mit unterschiedlich starkem Rauschen überlagert wird. Die Ergebnisse stammen vom RLSeV-Verfahren mit den Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$.

Für die Geschwindigkeit gilt wie in dem Beispiel aus Abbildung 3.26 $\text{SNR} = 66.000$. Der auf den Kovarianzmatrizen basierende Bias \mathbf{b}_{EIV} sagt sehr zuverlässig die tatsächliche Abweichung der Parameterschätzung voraus. Mit zunehmend größerem Rauschen bzw. abnehmendem SNR-Wert erhöht sich auch die Abweichung in allen drei geschätzten Parametern. Dabei ist die Schätzung von \hat{m} und $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ kleiner als die tatsächlichen Parameter in $\boldsymbol{\theta}$, was an der positiven Abweichung zu erkennen ist. Die positive Abweichung gilt jedoch nicht für die Schätzung von $\hat{\theta}_2 = \hat{m}\hat{c}_{r0}$, da der zugehörige Eintrag im Regressorvektor $\phi_2 = g = \text{konst.}$ nicht von Messrauschen beeinflusst ist. Die negative Abweichung des Rollwiderstandskoeffizienten kompensiert zum Teil den positiven Fehler des Luftwiderstandskoeffizienten.

Wird das gewöhnliche LS-Verfahren zur Masse- und Fahrwiderstandsschätzung herangezogen, so kann es durch das Signalrauschen im Regressor des EIV-Modells zu Abweichungen kommen. Die Abweichungen kommen hauptsächlich durch Ungenauigkeiten bei der Längsbeschleunigungsmessung zustande. Die konstante Erdbeschleunigung g ist nicht von Messfehlern beeinflusst und das Quadrat der Längsgeschwindigkeit v_x^2 besitzt ein hohes SNR-Maß. Dadurch besitzen die Abweichungen dieser beiden Elemente einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Schätzung. Der Messfehler in der Längsbeschleunigung kann einen hohen Einfluss haben, falls das Signal ungefiltert in die RLS-Schätzung einfließt. Bei einer geeigneten Filterung hingegen kann davon ausgegangen werden, dass der Fehler der Parameterschätzung aufgrund der EIV-Charakteristik vernachlässigbar ist. Die Verwendung eines TLS-Verfahrens bzw. dessen rekursive Form wie es Rhode und Gauterin [10], [11] für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung vorschlagen, ist für eine robust Schätzung nicht zielführend.

3.4.5 Sensitivitätsanalyse der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung

Der Bias durch die Messfehler im Regressor kann ein Grund für Abweichungen in den geschätzten Parameter sein. Eine weitere Möglichkeit sind Fehler in den Eingangssignalen oder den Fahrzeugparametern, welche für die Schätzung benötigt werden. Dazu gehören nach Gleichung (3.50) folgende Signale und Parameter:

- Antriebsmoment M_A (für die Berechnung von F_A)
- Reifenradius r_{Rad} (für die Berechnung von F_A)
- Längsbeschleunigungsmessung a_x
- Luftdichte ρ_L
- Fahrzeuggeschwindigkeit v_x

Dieser Abschnitt untersucht den Einfluss dieser Größen auf die LS-Schätzung anhand einer Sensitivitätsanalyse. Für die Berechnung der Sensitivität werden drei Verfahren verwendet, basierend auf infinitesimal kleinen Änderungen, linearer Taylorreihen-Approximation und Simulation.

Die Herleitung des Verfahrens mit **infinitesimal kleinen Änderungen** basiert auf der Normalform der LS-Formel (2.20).

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T \mathbf{y} \quad (3.84)$$

Für die Herleitung der Sensitivität nach Bindel [74] wird die Normalgleichung (3.84) abgeleitet, um den Einfluss von infinitesimal kleinen Änderungen $\delta\Phi$ und $\delta\mathbf{y}$ zu untersuchen.

$$(\delta\Phi^T \Phi + \Phi^T \delta\Phi) \hat{\theta} + \Phi^T \Phi \delta\hat{\theta} = \delta\Phi^T \mathbf{y} + \Phi^T \delta\mathbf{y} \quad (3.85)$$

Infinitesimale Änderungen sind hierbei mit $\delta(\cdot)$ gekennzeichnet. Die infinitesimale Änderung in der Parameterschätzung $\delta\hat{\theta}$ ergibt sich in Abhängigkeit der Fehler im Regressor $\delta\Phi$ und Ausgangsvektor $\delta\mathbf{y}$.

$$\delta\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} [\delta\Phi^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\theta}) + \Phi^T (\delta\mathbf{y} - \delta\Phi \hat{\theta})] \quad (3.86)$$

Eine weitere Möglichkeit für die Herleitung der Sensitivität der Schätzparameter auf Fehler in den Eingangssignalen oder Fahrzeugparametern ist die **Taylorreihen-Entwicklung** der LS-Lösung (2.21).

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} = \Phi^+ \mathbf{y} = f(\mathbf{u}) \quad (3.87)$$

Hierbei ist Φ^+ die Pseudoinverse von Φ und $\mathbf{u} = [M_A \ r_{Rad} \ a_x \ \rho_L \ v_x]^T$ beinhaltet die Eingangssignale und Fahrzeugparameter, deren Einfluss auf die LS-Schätzung untersucht wird. Der Ausdruck $f(\mathbf{u})$ verdeutlicht, dass die Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ über $\Phi(\mathbf{u})$ und $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ von den Eingangssignalen und Fahrzeugparametern \mathbf{u} abhängt. Für die Herleitung der Sensitivität werden die linke und rechte Seite von Gleichung (3.87) durch eine lineare Approximation mit der Taylorreihen-Entwicklung angenähert.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_{Tay}\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx f(\mathbf{u}) + \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{Tay}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \quad (3.88)$$

Die Abweichung der Parameterschätzung $\Delta_{Tay}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ aus der linearen Taylor-Approximation (3.88) mit der LS-Schätzung (3.87) ergibt

$$\Delta_{Tay}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \Phi^+(\mathbf{u})\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \Phi^+(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{y}(\mathbf{u}) + \Phi^+(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \Delta \mathbf{u}. \quad (3.89)$$

Die Ableitung der Pseudoinversen Φ^+ berechnet sich nach Golub und Pereyra [75] zu

$$\frac{\partial \Phi^+(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\Phi^+ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \Phi^+ + \Phi^+ \Phi^{+T} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{I} - \Phi \Phi^+) + (\mathbf{I} - \Phi^+ \Phi) \frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{u}} \Phi^{+T} \Phi^+. \quad (3.90)$$

Dabei wird die Abhängigkeit von \mathbf{u} zur Verbesserung der Lesbarkeit weggelassen.

Da eine Definition für die Ableitung einer Matrix nach einem Vektor wie in $\partial \Phi / \partial \mathbf{u}$ schwierig ist, erfolgt die Berechnung der Parameterabweichung $\Delta_{Tay}\hat{\boldsymbol{\theta}}(u_i)$ für jede einzelne Komponente Δu_i .

$$\Delta_{Tay}\hat{\boldsymbol{\theta}}(u_i) = \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial u_i} \Delta u_i = \frac{\partial \Phi^+(\mathbf{u})\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \Delta u_i = \left(\frac{\partial \Phi^+(\mathbf{u})}{\partial u_i} \mathbf{y}(\mathbf{u}) + \Phi^+(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \right) \Delta u_i \quad (3.91)$$

Für die Ableitung der Pseudoinversen gilt

$$\frac{\partial \Phi^+(\mathbf{u})}{\partial u_i} = -\Phi^+ \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \Phi^+ + \Phi^+ \Phi^{+T} \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} (\mathbf{I} - \Phi \Phi^+) + (\mathbf{I} - \Phi^+ \Phi) \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \Phi^{+T} \Phi^+. \quad (3.92)$$

Die Sensitivität der Parameterschätzung auf Fehler in den Eingangssignalen oder Fahrzeugparametern kann auch mit **Simulationen** bewertet werden. Dabei werden die Signale einer Fahrzeugmessung mit einem Fehler beaufschlagt und die fehlerhafte Schätzung der Simulation $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ mit der ungestörten Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ verglichen, wodurch sich der Fehler der Simulation ergibt.

$$\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.93)$$

Die korrekte Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ und die fehlerbehaftete Schätzung $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ werden vom gewöhnliche LS-Verfahren nach Gleichung (2.21) berechnet. Als Basis für die Simulation dient eine

beliebige Fahrzeugmessung, deren Aufzeichnung in Abschnitt 3.3 beschrieben ist.

Die Untersuchung der Sensitivität der Parameterschätzung auf die fünf Eingangssignale und Fahrzeugparameter (M_A , r_{Rad} , a_x , ρ_L , v_x) verwendet folgende Störungen.

Konstante Störung Das fehlerbehaftete Eingangssignal oder der fehlerhafte Fahrzeugparameter \tilde{u}_i setzt sich aus dem nominellen Signal/Parameter u_i und einer konstanten Störung Δu_i zusammen.

$$\tilde{u}_i = u_i + \Delta u_i \quad (3.94)$$

Die Störung ist ein Bruchteil des quadratischen Mittelwerts (RMS-Wert) des Signals, z. B.

$$\Delta u_i = 0,1 \text{ rms}(u_i). \quad (3.95)$$

Multiplikative Störung Das verfälschte Eingangssignal bzw. Parameter ist das ursprüngliche Signal/Parameter multipliziert mit einem Faktor

$$\tilde{u}_i = (1 + \Delta_{u_i})u_i = u_i + \Delta_{u_i}u_i \quad (3.96)$$

Der Unterschied zwischen der konstanten Störung und der multiplikativen Störung ist, dass der konstante Fehler über die gesamte Fahrt gleich ist, während der Fehler der multiplikativen Störung vom Wert des Signals abhängt. Z. B. fällt bei hohen Beschleunigungen der absolute Fehler somit größer aus als bei kleinen Beschleunigungen. Für einen festen Parameter wie den Reifenradius r_{Rad} ergibt die konstante und die multiplikative Störung die gleiche Änderung.

Als Beispiel für die Berechnung der Sensitivität eines konstanten Fehlers auf die Schätzung wird der Radradius r_{Rad} gewählt. Die infinitesimale Änderung ergibt sich, indem der fehlerhafte Radius $\tilde{r}_R = r_R + \Delta r_R$ in den Systemausgang eingesetzt wird.

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{M_A}{\tilde{r}_{Rad}} = \frac{M_A}{r_{Rad} + \Delta r_{Rad}} = \frac{M_A}{r_{Rad}} + \frac{M_A}{r_{Rad} + \Delta r_{Rad}} - \frac{M_A}{r_{Rad}} \\ &= \underbrace{\frac{M_A}{r_{Rad}}}_y + \underbrace{\frac{-M_A \Delta r_{Rad}}{(r_{Rad} + \Delta r_{Rad})r_{Rad}}}_{\delta y} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Da die Änderung des Radradius keine Auswirkung auf den Regressor hat, ergeben sich die infinitesimalen Änderungen für (3.86) zu

$$\begin{aligned} \delta \Phi = \mathbf{0} \quad \delta \mathbf{y} &= - \frac{\Delta r_{Rad}}{(r_{Rad} + \Delta r_{Rad})r_{Rad}} \left[M_A[1] \quad M_A[2] \quad \dots \quad M_A[N] \right]^T \\ &= - \frac{\Delta r_{Rad}}{r_{Rad} + \Delta r_{Rad}} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation des Schätzfehlers (3.89) ist die Ableitung des Regressors und des Systemausgangs nach dem Radradius notwendig.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial r_{Rad}} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial r_{Rad}} = -\frac{1}{r_{Rad}^2} \left[M_A[1] \quad M_A[2] \quad \dots \quad M_A[N] \right]^T = -\frac{1}{r_{Rad}} \mathbf{y} \quad (3.99)$$

Als dritte Möglichkeit, die Parameteränderung (3.93) zu berechnen, wird eine Simulation mit realen Fahrdaten und geändertem Radradius durchgeführt.

Der Vergleich der drei Methoden zur Berechnung der Sensitivität der Parameter auf einen konstanten Fehler im Radradius ist in Abbildung 3.31 dargestellt. Die drei Grafi-

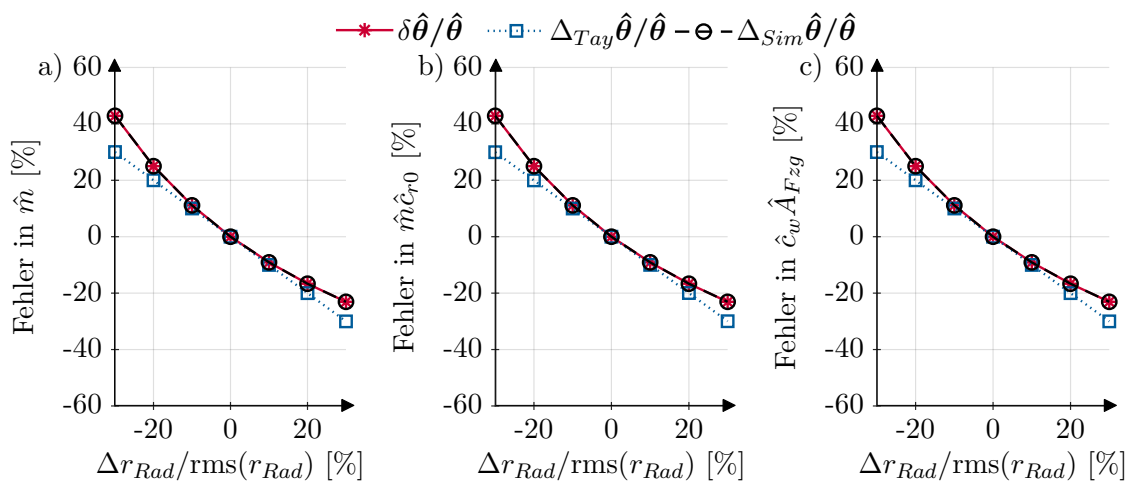


Abbildung 3.31: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δr_R im Radradius

ken zeigen die Änderung von Fahrzeugmasse \hat{m} (Abbildung 3.31 a)), Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ (Abbildung 3.31 b)) und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ (Abbildung 3.31 c)), jeweils bezogen auf die Parameterschätzung $\hat{\theta}$ mit korrektem Radradius. Der Parameterfehler ist über die Änderung des Radradius $\Delta r_{Rad}/\text{rms}(r_{Rad})$ aufgetragen, welcher auf den RMS-Wert bezogen ist. Wenn für die Parameterschätzung ein größerer Radradius als der tatsächliche verwendet wird, so ist die resultierende Antriebskraft $F_A = M_A/r_{Rad}$ geringer und es wird eine kleinere Masse geschätzt. Diesen Zusammenhang beschreibt Grafik 3.31 a), in der ein größerer Radradius zu einem negativen Fehler in der Massenschätzung führt. Bei einem kleineren Radius ergibt sich entsprechend ein positiver Fehler. Die Schätzung der Fahrwiderstände zeigt ein ähnliches Verhalten, indem bei einem zu groß angenommenen Reifenradius geringere Koeffizienten geschätzt werden.

Abbildung 3.31 stellt außerdem dar, dass die Berechnung des Parameterfehlers mit infinitesimalen Änderungen (*) nach Gleichung (3.86) die gleichen Ergebnisse liefert wie

die Simulation (○) aus Formel (3.93) mit fehlerhaftem Radradius ($\delta\hat{\boldsymbol{\theta}} = \Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}}$). Anhang A.1.1 zeigt, unter welchen Voraussetzungen das Verfahren mit infinitesimaler Änderung identische Ergebnisse zum Simulationsverfahren liefert. Die Fehlerberechnung, welche auf der linearen Taylorreihen-Approximation (□) basiert, weicht hingegen von den Simulationsergebnissen ab. Die lineare Taylorreihen-Approximation nach Gleichung (3.88) ist eine Näherung der Ableitung und weist somit Abweichungen bei nichtlinearen Zusammenhängen auf. Die lineare Näherung ist in Abbildung 3.31 durch den linearen Zusammenhang zwischen Schätzfehler und Änderung des Reifenradius zu erkennen. Die auf infinitesimale Änderungen basierende Fehlerberechnung ist in diesem Fall exakt und beschreibt den Zusammenhang zwischen Radiusänderung und Parameterfehler korrekt.

Als Beispiel für die Auswirkung eines multiplikativen Fehlers auf die Parameterschätzung dient das Antriebsmoment M_A . Die infinitesimale Änderung des Systemausgangs ergibt sich aus

$$\tilde{y} = \frac{(1 + \Delta_{M_A})M_A}{r_{Rad}} = \underbrace{\frac{M_A}{r_{Rad}}}_y + \underbrace{\Delta_{M_A} \frac{M_A}{r_{Rad}}}_{\delta y}. \quad (3.100)$$

Die notwendigen infinitesimalen Änderungen für die Berechnung der Gleichung (3.86) lauten

$$\delta\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad \delta\mathbf{y} = \Delta_{M_A} \begin{bmatrix} \frac{M_A[1]}{r_{Rad}} & \frac{M_A[2]}{r_{Rad}} & \dots & \frac{M_A[N]}{r_{Rad}} \end{bmatrix}^T = \Delta_{M_A} \mathbf{y}. \quad (3.101)$$

Die für die lineare Taylorreihen-Approximation (3.89) notwendigen Ableitungen sind

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})}{\partial M_A} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial M_A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{Rad}} & \frac{1}{r_{Rad}} & \dots & \frac{1}{r_{Rad}} \end{bmatrix}^T. \quad (3.102)$$

Im Gegensatz zum Beispiel mit konstantem Signalfehler ist die Signaländerung Δu_i in der Gleichung (3.89) variabel, wodurch sich für jeden Zeitschritt k ein eigener Wert ergibt.

$$\Delta M_A[k] = (1 + \Delta_{M_A})M_A[k] - M_A[k] = \Delta_{M_A} M_A[k] \quad (3.103)$$

Abbildung 3.32 stellt die Abhängigkeit der Parameterschätzung von multiplikativen Fehlern im Antriebsmoment dar.

Wenn das angezeigte Momentensignal größer als das tatsächliche ist, dann wird die Fahrzeugmasse zu hoch geschätzt. Das gleiche Verhalten trifft auch für die Schätzung der Fahrwiderstände zu. Das Verhältnis von Fehler im Eingangssignal (Δ_{M_A}) zu Fehler im geschätzten Parameter ist dabei exakt Eins zu Eins. Außerdem ist die Abhängigkeit zwischen Eingangsfehler und Schätzfehler linear. Damit zeigt die lineare Taylor-Approximation (□) keinen Fehler zu den beiden anderen Verfahren, im Gegensatz zu dem Beispiel aus Abbildung 3.31.

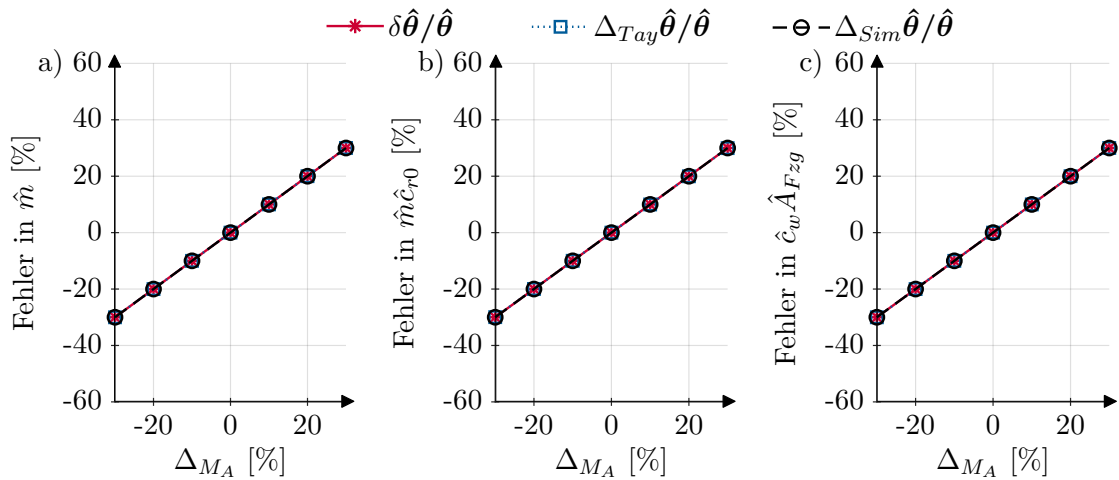


Abbildung 3.32: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δ_{M_A} im Antriebsmoment

Die Berechnung und Auswertung für die weiteren Signal- und Parameterfehler sind in Anhang A.1.2 und A.1.3 ausgeführt.

Im weiteren Verlauf wird für die Berechnung der Sensitivität das Ergebnis aus den Simulationen mit fehlerhaften Eingangssignalen und -parametern verwendet. Die Taylor-Approximation erster Ordnung kann durch die lineare Näherung nur lineare Zusammenhänge zwischen Schätzfehler und Eingangsfehler exakt beschreiben. Die Methode der infinitesimalen Änderungen liefert nach Kapitel A.1.1 nur für $\delta\Phi = \mathbf{0}$ die gleichen Ergebnisse wie in der Simulation.

Eine Übersicht über die Sensitivität der Parameterschätzung auf konstante Fehler in den Eingangssignalen und -parametern stellt Abbildung 3.33 dar. Die Grafiken stellen jeweils die Veränderung der Schätzung bezogen auf den Schätzwert ohne Fehler ($\Delta_{Sim}\hat{\theta}/\hat{\theta}$) dar, aufgetragen über den konstanten Fehler bezogen auf den RMS-Wert $\Delta u_i/\text{rms}(u_i)$.

Bei der Fahrzeugmasse \hat{m} (Abbildung 3.33 a)) führt nur ein konstanter Fehler im Radradius Δr_{Rad} (+) zu einem Schätzfehler. Die konstanten Fehler in den anderen Signalen haben keine Auswirkung.

Die Schätzung des Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ (Abbildung 3.33 b)) ist unabhängig von einem konstanten Fehler in der Luftdichte $\Delta\rho_L$ (\square). Jede andere Fehlerart hat jedoch einen Einfluss auf die Schätzung. Vor allem ein konstanter Fehler im Antriebsmoment ΔM_A (\circ) und in der Längsbeschleunigung Δa_x (\times) führen zu erheblichen Abweichungen der Schätzung.

Ein konstanter Fehler im Radradius Δr_{Rad} (+), in der Luftdichte $\Delta\rho_L$ (\square) und in der Geschwindigkeit Δv_x (\diamond) führen zu einer Abweichung in der Schätzung des Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ (Abbildung 3.33 c)). Die beiden anderen Signalfehler besitzen

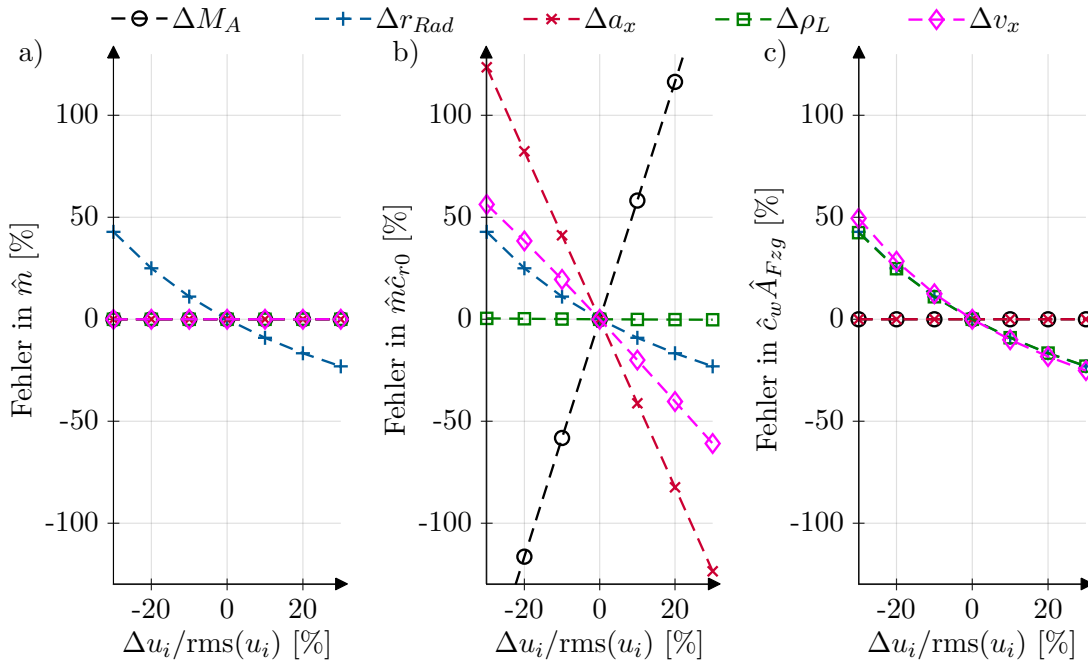


Abbildung 3.33: Übersicht der Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δu_i

keinen Einfluss.

Die Sensitivität der Parameterschätzung auf multiplikative Fehler in den Eingangssignalen und -parametern ist in Abbildung 3.34 beschrieben. Die Darstellung erfolgt analog

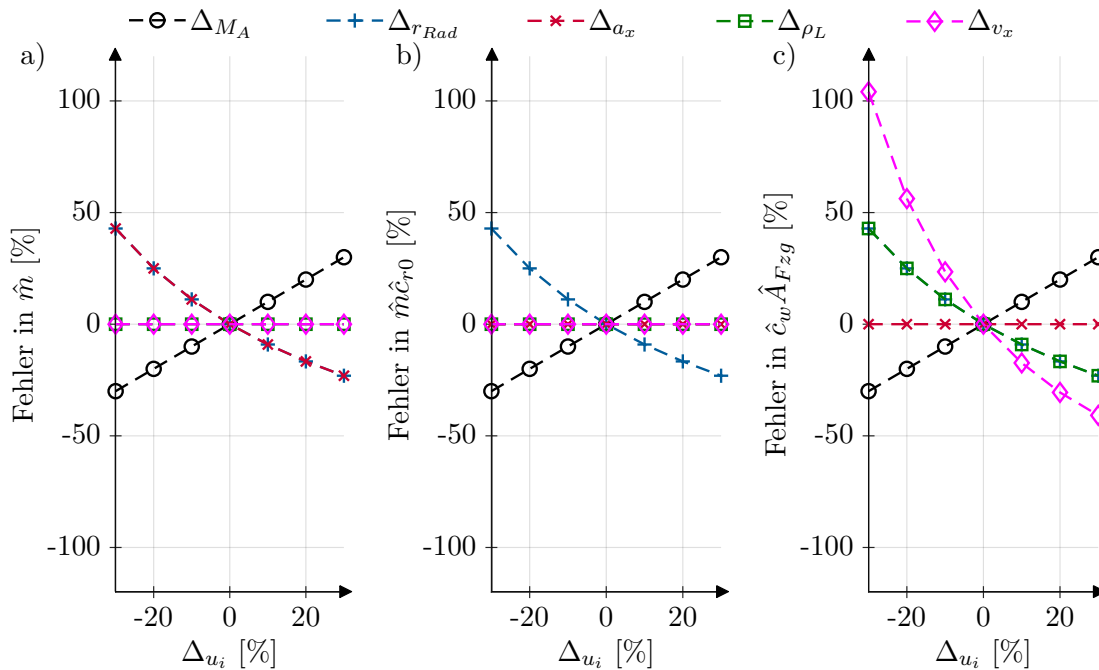


Abbildung 3.34: Übersicht der Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δu_i

zu Abbildung 3.33.

Ein multiplikativer Fehler in der Luftdichte Δ_{ρ_L} (\square) und in der Geschwindigkeit Δ_{v_x} (\diamond) besitzt keinen Einfluss auf die Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} (Abbildung 3.34 a)). Eine multiplikative Abweichung im Antriebsmoment Δ_{M_A} (\circ) bewirkt einen prozentual genauso großen Fehler in der Masseschätzung. Die Auswirkungen eines multiplikativen Fehlers im Radradius $\Delta_{r_{Rad}}$ ($+$) und in der Längsbeschleunigung Δ_{a_x} (\times) sind nahezu identisch.

Die Schätzung des Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ (Abbildung 3.34 b)) ist unabhängig von multiplikativen Fehlern in Luftdichte Δ_{ρ_L} (\square) und in der Geschwindigkeit Δ_{v_x} (\diamond). Alle anderen Fehlerarten haben einen Einfluss auf den Rollwiderstand.

Der Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ (Abbildung 3.34 c)) wird von multiplikativen Fehlern in jedem Eingangssignal und -parameter beeinflusst, bis auf die Längsbeschleunigung Δ_{a_x} (\times). Dabei hat ein Fehler in der Geschwindigkeit Δ_{v_x} (\diamond) den größten Einfluss auf die Schätzung.

Um den unterschiedlich starken Einfluss der einzelnen Fehler auf die Parameterschätzung zu quantifizieren, ist in Tabelle 3.4 eine Übersicht der Sensitivitätsanalyse zusammengefasst.

	Konst. Fehler $\Delta u_i/\text{rms}(u_i) = 10\%$			Mult. Fehler $\Delta u_i = 10\%$			Σ_{u_i} [%]
	$\Delta\hat{m}$ [%]	$\Delta\hat{m}\hat{c}_{r0}$ [%]	$\Delta\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ [%]	$\Delta\hat{m}$ [%]	$\Delta\hat{m}\hat{c}_{r0}$ [%]	$\Delta\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ [%]	
\tilde{M}_A	0	60	0	10	10	10	90,0
\tilde{r}_{Rad}	-9,1	-9,1	-9,1	-9,1	-9,1	-9,1	54,6
\tilde{a}_x	0	-40	0	-8,8	0	0	48,8
\tilde{v}_x	0	-20	-9,7	0	0	-17	46,7
$\tilde{\rho}_L$	0	0	-9,2	0	0	-9,1	18,3

Tabelle 3.4: Übersicht der Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivität ist zum einen für eine konstante Abweichung von $\Delta u_i/\text{rms}(u_i) = 10\%$ und einen multiplikativen Fehler von $\Delta u_i = 10\%$ dargestellt. Für jeden der beiden Fälle sind die Abweichungen der Parameterschätzung ($\Delta\hat{m}$, $\Delta\hat{m}\hat{c}_R$, $\Delta\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$) bezogen auf die fehlerfreie Schätzung aufgelistet. Jede Zeile stellt dabei die Abhängigkeit von einem fehlerhaften Eingangssignal oder -parameter (\tilde{M}_A , \tilde{r}_{Rad} , \tilde{a}_x , \tilde{v}_x , $\tilde{\rho}_L$) dar. Die Tabelle ist anhand eines Kriteriums zur Gesamtbeurteilung sortiert, welches sich aus der Summe der Absolutwerte der Abweichungen zusammensetzt.

$$\Sigma_{u_i} = \sum_{i_{Konst.}=1}^3 |\Delta\theta_i| + \sum_{i_{Mult.}=1}^3 |\Delta\theta_i| \quad (3.104)$$

Für die Berechnung der letzten Spalte in Tabelle 3.4 werden damit die Absolutwerte einer Zeile addiert.

Nach dem Kriterium (3.104) hat ein fehlerhaftes Antriebsmoment \tilde{M}_A die größte Auswirkung auf die Parameterschätzung. Das Antriebsmoment wird nicht direkt gemessen, sondern ist ein Modellwert, welcher sich aus dem Modell des Motormoments und aus dem Antriebsstrangmodell zusammensetzt. Durch die Modellannahmen können Fehler im Antriebsmoment auftreten.

Der Radradius r_{Rad} ist der Eingangsparameter mit dem zweitgrößten Einfluss auf die Schätzung. Da die Berechnung der Geschwindigkeit und der Gesamtkilometer auf dem Radradius basieren, sollte dieser Eingangsparameter nur sehr kleinen Fehlern unterliegen. Abweichungen können trotzdem durch unterschiedliche Reifendrucke zustande kommen.

Das Längsbeschleunigungssignal a_x enthält nach Gleichung (3.34) die Fahrzeugbeschleunigung und einen Steigungsanteil. Da der Beschleunigungssensor fest mit der Karosserie verbaut ist, enthält das gemessene Signal auch die Karosseriebewegungen relativ zur Fahrbahnoberfläche. Diese Relativbewegung ist eine ungewollte Störung und kann durch Anfahr- und Bremsnicken sowie durch hecklastige Beladung zustande kommen.

Ein fehlerhaftes Geschwindigkeitssignal \tilde{v}_x besitzt einen geringeren Einfluss auf das Schätzergebnis. Geschwindigkeitsfehler dürfen im Fahrzeug nur in geringem Maße auftreten, da sich der Fahrer anhand der Geschwindigkeit an die gesetzlich vorgeschriebenen Geschwindigkeitslimits hält.

Den geringsten Einfluss auf die Parameterschätzung hat nach Tabelle 3.4 eine fehlerhafte Luftdichte $\tilde{\rho}_L$. Aufgrund der Berechnung für die Luftdichte nach Gleichung (3.7) kann ein Fehler durch Abweichungen im Umgebungsdruck oder in der Lufttemperatur entstehen.

3.5 Robuste Parameterschätzung

Durch die Problemanalyse in Abschnitt 3.4 ergeben sich folgende Herausforderungen bei der Parameterschätzung für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung:

- Der Algorithmus muss robust gegenüber Messausreißern bzw. nicht normalverteilten Residuen sein (Abschnitt 3.4.2).
- In Phasen mit geringer Systemanregung muss das robuste Verfahren sinnvolle Schätzungen liefern (Abschnitt 3.4.3).

- Die beiden oben genannten Punkte können zu Schätzungen führen, die außerhalb physikalisch sinnvoller Wertebereiche liegen.

Dieses Kapitel stellt Lösungen für diese Herausforderungen vor. Auf die folgenden Punkte wird beim Schätzerentwurf nicht eingegangen, da die Problemanalyse zeigt, dass sie keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielen:

- Zusätzliche Schätzung von linearem oder quartischem Fahrwiderstand oder Kurvenwiderstand (Abschnitt 3.4.1)
- Berücksichtigung von Messfehlern im Regressor, z. B. durch ein TLS-Verfahren (Abschnitt 3.4.4.2)

Für den Einsatz des robusten Schätzverfahrens in einem Fahrzeugsteuergerät muss der Algorithmus möglichst geringen Speicher- und Rechenaufwand besitzen. Zudem soll der Anwender die Einstellparameter des Schätzers auf einfache Weise auswählen können.

3.5.1 Robustheit gegenüber Messfehlern durch M-Schätzer

Um den Einfluss von Messausreißern, welche nach Abschnitt 3.4.2 vorhanden sind, zu eliminieren oder zu minimieren, können nach Söderström [60, S. 497] zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt werden:

- Jeder Messpunkt wird analysiert, ob es sich um einen Messausreißer handelt oder um eine fehlerfreie Messung. Die Ausreißer werden anschließend von der Schätzung ausgeschlossen.
- Statt der quadratischen Kostenfunktion der LS-Schätzung wird eine angepasste Gütefunktion verwendet.

3.5.1.1 Detektion von Messausreißern

Für die Detektion von Messausreißern können grafische Verfahren, wie in Abbildung 3.20, Anwendung finden. Grafische Verfahren sind für die reale Umsetzung zur Berechnung auf einem Steuergerät ungeeignet, wodurch z. B. folgende analytische Ansätze Verwendung finden.

Residuen Wenn das Residuum $e[k]$ ein Vielfaches der Standardabweichung überschreitet, wird die Messung als Ausreißer für die Schätzung abgelehnt. Nach McGee

und Schmidt [76] wurde dieses Verfahren für einen Kalman-Filter beim Apolloprogramm der NASA eingesetzt. Für die vorliegende Anwendung ist diese Herangehensweise ungeeignet, da vor allem zu Beginn eines Experiments die Parameter deutlich von den Schätzungen abweichen und somit ein großes Residuum erzeugen.

Leverage Als Leverage \hat{h}_{ii} (deutsch: Hebelwirkung) werden die Diagonalelemente der Dachmatrix

$$\hat{H} = \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T \quad (3.105)$$

bezeichnet, die den Zusammenhang $\hat{\mathbf{y}} = \hat{H}\mathbf{y}$ beschreibt. Das Leverage \hat{h}_{ii} stellt den potentiellen Einfluss einer Messung auf das Modell dar. Anhand von minimalen oder maximalen Grenzwerten für den Leverage kann eine Messung von der Schätzung ausgeschlossen werden. [26, S. 593]

Studentisierte Residuen Der Modellfehler wird mit der geschätzten Standardabweichung und dem Leverage normiert.

$$e'[i] = \frac{e[i]}{\hat{\sigma}_e \sqrt{1 - \hat{h}_{ii}}} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_e = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2[k] \quad (3.106)$$

Ein Grenzwert für das studentisierte Residuum $e'[i]$ entscheidet, ob es sich bei der Messung um einen Ausreißer handelt. [26, S. 593]

Entfernen studentisierter Residuen Der Unterschied zum eben genannten Verfahren der studentisierten Residuen ist, dass die Berechnung der geschätzten Standardabweichung $\hat{\sigma}_e$ die zu untersuchende Messung i nicht verwendet. [26, S. 594]

$$e''[i] = \frac{e[i]}{\hat{\sigma}_{e,-i} \sqrt{1 - \hat{h}_{ii}}} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{e,-i} = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N e^2[k] \quad (3.107)$$

Cook's Distanz und DFFITS Die Idee hinter diesen beiden Verfahren ist, dass ein hoher Leveragewert und große Residuen zusammen auftreten. Cook's Distanz ist definiert als

$$CD_i = \frac{e'^2[i]}{n} \frac{\hat{h}_{ii}}{1 - \hat{h}_{ii}} \quad (3.108)$$

und DFFITS als

$$DFFITS_i = e''[i] \sqrt{\frac{\hat{h}_{ii}}{1 - \hat{h}_{ii}}}. \quad (3.109)$$

Anhand von Grenzwerten für die beiden Kennziffern wird ein Ausreißer in der Messung erkannt. [26, S. 593]

DFBETAS Dieses Verfahren berechnet die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-i}$ mit jeweils einer weggelassenen Messung i .

$$DFBETAS_i = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{-i}}{\hat{\sigma}_{-i} \sqrt{p_{ii}}} \quad (3.110)$$

Dabei ist p_{ii} der Diagonaleintrag der Kovarianzmatrix $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1}$. Das Verfahren ist sehr rechenaufwändig, da bei einer Horizontlänge von N Messungen auch N Schätzungen berechnet werden müssen. Ein Messausreißer wird anhand eines Grenzwertes identifiziert. [26, S. 594]

Klassifizierung Hodge und Austin [77] stellen Verfahren des maschinellen Lernens wie Künstliche Neuronale Netze (KNN) oder Support Vector Machine (SVM) zum Erkennen von Ausreißern vor. Dabei wird zwischen unbeaufsichtigten, beaufsichtigten und hybriden Verfahren unterschieden, die sich durch die Art der Lerndaten unterscheiden. Die Daten zum Anlernen von KNN oder SVM können auf unterschiedliche Art gekennzeichnet sein:

- Normale Messungen und Messausreißer sind bekannt (Beaufsichtigtes Lernen).
- Die gekennzeichneten Messungen sind normale Daten (Hybrides Lernen).
- Die Lerndaten sind weder in fehlerfreie Messungen noch in Messfehler unterteilt (Unbeaufsichtigtes Lernen).

Weitere Verfahren, wie die Methoden von Grubb, Verfahren mit der MD, Dixon-Test, Rosner-Test, Tukey-Test, Neyman-Pearson-Test, Ansatz von Hampel, Verfahren nach Andrew oder Verfahren nach Stahel-Donoho finden sich in [78]. Die oben genannten Verfahren besitzen Nachteile für die Umsetzung auf einem eingebetteten System, z. B. einem Steuergerät:

- Die meisten der Verfahren arbeiten nicht in einer rekursiven Weise, sondern mit einem Speicher von Messdaten mit festem Zeitfenster. Dadurch steigt der Speicher- und Rechenaufwand der Methoden zur Ausreißerererkennung.
- Die Entscheidung, ob es sich bei der vorliegenden Messung um einen Ausreißer handelt, hängt meist von der Wahl eines Grenzwertes ab. Die Parametrierung dieses Grenzwertes führt zu zusätzlichem Aufwand der Fehlerdetektion.
- Ist die Distanz zwischen dem Startwert der Schätzung und dem tatsächlichen Parametervektor groß, so werden bei manchen Verfahren die ersten Messungen als Ausreißer identifiziert und nicht für die Schätzung verwendet. Dadurch verringert sich die Konvergenzgeschwindigkeit.

Für die robuste Masse- und Fahrwiderstandsschätzung auf einem Steuergerät ist die Ausreißererkenkung wie bei Rhode und Gauterin [10], [11] nur bedingt einsetzbar. Das vorgestellte Verfahren speichert die Messdaten über einen definierten Zeithorizont, was den Speicheraufwand des Verfahrens steigert. Außerdem berechnet die Ausreißererkenkung eine Lösung mit dem nichtrekursiven TLS-Algorithmus, wodurch sich der Rechenaufwand dieser Methode erhöht. Im Gegensatz dazu erfüllt eine Anpassung der Kostenfunktion die Anforderungen eines eingebetteten Systems deutlich besser.

3.5.1.2 Robustheit durch Anpassen der Kostenfunktion

Vor der Beschreibung von Schätzverfahren mit angepasster Kostenfunktion wird ein Maß für die Robustheit eines Schätzers, der Bruchpunkt (engl.: Breakdown Point), eingeführt. Nach Rousseeuw und Leroy [79, S. 9-10] ist der Bruchpunkt bp mathematisch definiert als

$$bp = \min_m \left\{ \frac{m}{N}; \sup_{\mathbf{X}'} \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}') - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})\| \rightarrow \infty \right\}. \quad (3.111)$$

Dabei ist \mathbf{X} ein Datensatz, bestehend aus Regressor $\boldsymbol{\phi}$ und Systemausgang y .

$$\mathbf{X} = \{(\boldsymbol{\phi}[1], y[1]), \dots, (\boldsymbol{\phi}[N], y[N])\} \quad (3.112)$$

und \mathbf{X}' ist ein Datensatz, bei dem m Datenpunkte fehlerhaft bzw. Messausreißer sind.

Der Bruchpunkt nach der Definition in (3.111) ist der Anteil m/N der Messdaten, die fehlerhaft sein können, ohne dass die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}')$ mit Ausreißern eine beliebig große Änderung erfährt. Die gewöhnliche LS-Schätzung (2.21) besitzt einen Bruchpunkt von $bp = 0\%$, da bereits eine einzige fehlerhafte Messung ausreicht, um das Schätzergebnis zu beeinflussen. Dies liegt daran, dass für die Berechnung jeder Messpunkt verwendet wird und somit einen Einfluss auf das Ergebnis besitzt.

Der Bruchpunkt kann einen maximalen Wert von $bp = 50\%$ erreichen. Falls es mehr Messausreißer als normale Datenpunkte gibt, kann auch ein robustes Schätzverfahren nicht mehr zwischen richtigen und falschen Messungen unterscheiden.

Das Verfahren des kleinsten Medians der Fehlerquadrate (engl.: Least Median Square (LMS)) erreicht den maximalen Bruchpunkt von $bp = 50\%$. Beim LMS-Schätzverfahren nach Rousseeuw und Leroy [79, S. 14-15]

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \operatorname{med}_k \frac{1}{2} (y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}})^2 \quad (3.113)$$

haben nicht alle Datenpunkte einen Einfluss auf die Schätzung, sondern lediglich der Median ($\text{med}(\cdot)$). Die Robustheit des LMS-Verfahrens erfolgt nicht durch das Erkennen und Ausschließen von Messausreißern, sondern durch die Anpassung der Kostenfunktion.

Das Beispiel in Abbildung 3.35 nach Zoubir et al. [66] verdeutlicht die Robustheit des Medians bzw. der LMS-Schätzung. Für die Schätzung eines konstanten, skalaren Werts

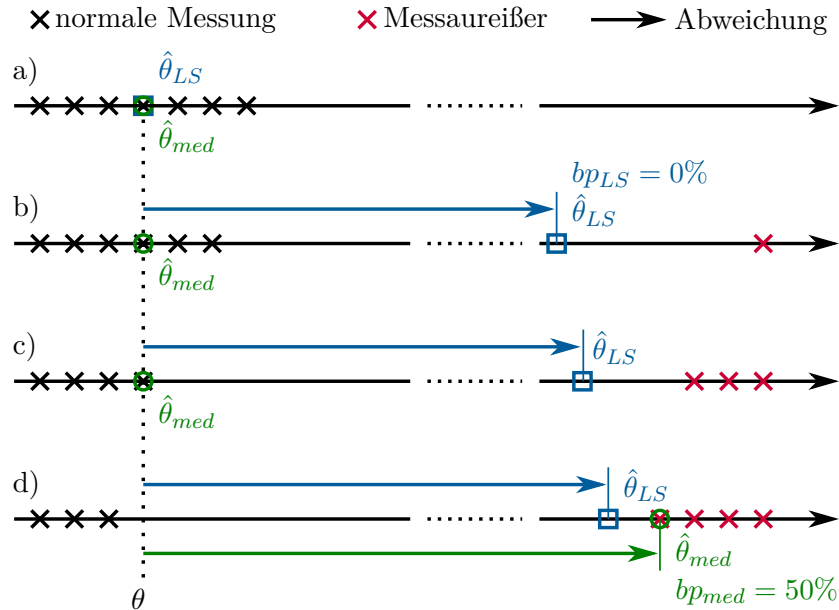


Abbildung 3.35: Abweichung der LS-Schätzung $\hat{\theta}_{LS}$ und der Median-Schätzung $\hat{\theta}_{med}$ für unterschiedliche Anzahl an Messausreißern [66]

θ stehen mehrere Messungen zur Verfügung. Für den Fall a) in Abbildung 3.35, bei dem keine Messausreißer vorhanden sind, ermittelt das LS-Verfahren $\hat{\theta}_{LS}$ und der Median $\hat{\theta}_{med}$ denselben Wert. Bei der Schätzung eines skalaren, konstanten Werts wird das LS-Verfahren zum quadratischen Mittel und das Ergebnis des Medians ist der Punkt, der den gesamten Messdatensatz in zwei Hälften teilt.

Bei einem einzigen Messausreißer (Abbildung 3.35 b)) weicht die LS-Schätzung $\hat{\theta}_{LS}$ vom tatsächlichen Wert θ ab. Deshalb ist der Bruchpunkt des LS-Verfahrens $bp_{LS} = 0\%$.

Das Ergebnis des Medians ist der Messpunkt, welcher den Datensatz in zwei Hälften teilt. Sind gerade noch weniger Messausreißer als normale Messungen vorhanden (Abbildung 3.35 c)), ermittelt der Median immer noch den richtigen Wert.

Erst wenn mehr als die Hälfte der Messungen fehlerhaft sind (Abbildung 3.35 d)), so weicht auch die Medianschätzung $\hat{\theta}_{med}$ vom tatsächlichen Wert θ ab. Somit besitzt der LMS-Schätzer einen Bruchpunkt von $bp_{med} = 50\%$.

Laut dem Bruchpunkt ist das LMS-Verfahren (3.113) der ideale Schätzer für robuste Anwendungen. Allerdings ist der hohe Rechenaufwand des LMS-Verfahrens nachteilig für den Einsatz in eingebetteten Systemen, weshalb dieses Verfahren ausscheidet.

Neben dem LMS-Schätzer ist der M-Schätzer [79, S. 12], [80, S. 46-47] ein weiterer robuster Schätzer, bei dem die Robustheit durch die Wahl der Kostenfunktion erreicht wird. Der M-Schätzer leitet sich vom MLE-Verfahren aus Kapitel 3.4.2.2 ab, von dem auch der Name dieses robusten Schätzers stammt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Folge von Residuen $e[1], \dots, e[N]$ unter der Bedingung einer gegebenen Schätzung $\hat{\theta}$ wird durch den Ausdruck $p(e[1], \dots, e[N]|\hat{\theta})$ beschrieben. Unter der Annahme, dass die Zufallsvariablen $e[k]$ unabhängig und identisch verteilt sind, kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der multivariaten Residuenverteilung geschrieben werden als

$$p(e[1], \dots, e[N]|\hat{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(e[k]|\hat{\theta}) = \mathcal{L}(\hat{\theta}). \quad (3.114)$$

Diese multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird als Likelihoodfunktion $\mathcal{L}(\hat{\theta})$ bezeichnet, die vom geschätzten Parameter $\hat{\theta}$ abhängt. Das MLE-Verfahren bestimmt die Parameter $\hat{\theta}$ so, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Residuenfolge maximal wird.

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\hat{\theta}} \mathcal{L}(\hat{\theta}) \quad (3.115)$$

Anstatt die Likelihoodfunktion \mathcal{L} zu verwenden, ist es für die nachfolgenden Rechenschritte oft einfacher, die logarithmierte Likelihoodfunktion \mathcal{L}' zu benutzen.

$$\mathcal{L}'(\hat{\theta}) = \ln(\mathcal{L}(\hat{\theta})) = \ln \left(\prod_{k=1}^N p(e[k]|\hat{\theta}) \right) = \sum_{k=1}^N \ln p(e[k]|\hat{\theta}) \quad (3.116)$$

Das Logarithmieren hat das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in eine Summe in der Log-Likelihood-Funktion umgewandelt. Anstatt die Likelihoodfunktion wie in (3.115) zu maximieren kann nun auch die logarithmierte Likelihoodfunktion \mathcal{L}' verwendet werden. Außerdem kann anstelle der Maximierung die gebräuchliche Minimierung eines Gütemaßes verwendet werden, indem das Vorzeichen des Gütemaßes umgekehrt wird.

$$\min_{\hat{\theta}} -\mathcal{L}'(\hat{\theta}) \Leftrightarrow \min_{\hat{\theta}} \sum_{k=1}^N -\ln p(e[k]|\hat{\theta}) \quad (3.117)$$

Die Herleitung des robusten M-Schätzers basiert auf der Definition der Kostenfunktion ρ . [81, S. 75-78]

$$\rho(e(\hat{\theta})[k]) = -\ln p(e[k]|\hat{\theta}) \quad (3.118)$$

Die implizite Abhängigkeit der ρ -Funktion von den Parametern $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ist durch das Residuum $e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k] = y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}$ beschrieben. Das Optimierungsproblem (3.117) vereinfacht sich mit der ρ -Funktion (3.118) zu

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \underbrace{\sum_{k=1}^N \rho(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k])}_{J(\hat{\boldsymbol{\theta}})}. \quad (3.119)$$

Eine notwendige Bedingung für eine Lösung von (3.119) ist, dass der Gradient des Gütemaßes $J(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ bzgl. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ verschwindet, analog zur Herleitung des LS-Schätzers in Gleichung (2.19).

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \left[\frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_1}, \dots, \frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_n} \right]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \left(\sum_{k=1}^N \rho(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k]) \right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \rho(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k]) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial e}(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k])}_{\psi(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k])} \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k] \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \underbrace{\frac{\psi(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k])}{e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k]}}_{w(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k])} e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k] \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k] \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N w(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k]) \frac{1}{2} \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (e^2(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k]) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.120)$$

Die Herleitung des M-Schätzers verwendet die Einflussfunktion

$$\psi(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\partial \rho}{\partial e}(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \quad (3.121)$$

und die Gewichtungsfunktion

$$w(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\psi(e(\hat{\boldsymbol{\theta}}))}{e(\hat{\boldsymbol{\theta}})}. \quad (3.122)$$

Die Funktion (3.122) gibt jeder Messung des Gütemaßes ein Gewicht, abhängig von der Größe des Residuums $e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k]$. Das Prinzip des robusten M-Schätzers besteht darin, dass Messungen mit einem großen Residuum, die wahrscheinlich Messausreißer sind, geringer gewichtet werden. Dies geschieht, indem die Gewichtungsfunktion $w(e(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ entsprechend gewählt wird. Dadurch besitzen diese Messpunkte einen geringeren Einfluss auf

die Schätzung von $\hat{\theta}$ im Vergleich zum gewöhnlichen LS-Verfahren, welches eine quadratische Kostenfunktion verwendet. Durch die quadratische Bestrafung besitzen Ausreißer einen überproportional großen Einfluss auf die Schätzung.

Gleichung (3.120) entspricht der Optimalitätsbedingung eines gewichteten LS-Problems wie im Gütemaß (2.28). Damit ergibt sich das Optimierungsproblem des M-Schätzers zu

$$\min_{\hat{\theta}} \sum_{k=1}^N w(e(\hat{\theta})[k]) \left(e(\hat{\theta})[k] \right)^2. \quad (3.123)$$

Der Unterschied des M-Schätzers (3.123) zum gewichteten LS-Problem (2.28) besteht darin, dass die Kostenfunktion nicht quadratisch von den Residuen $e(\hat{\theta})[k]$ abhängt, sondern durch die Gewichtungen $w(e(\hat{\theta})[k])$ eine nichtlineare Abhängigkeit von $e(\hat{\theta})[k]$ besitzt. Aus Gründen der Lesbarkeit und Vereinfachung wird im weiteren Verlauf die explizite Abhängigkeit des Residuums $e(\hat{\theta})[k]$ von der Schätzung $\hat{\theta}$ nicht mehr direkt ausgeschrieben.

Die Gewichtungs- und Einflussfunktion $w(e)$ und $\psi(e)$ leiten sich von der Kostenfunktion $\rho(e)$ ab. Für die Wahl der Kostenfunktion $\rho(e)$ gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Least Squares Die LS-Schätzung ist ein Spezialfall des M-Schätzers.

$$\rho_{LS}(e) = \frac{1}{2}e^2 \quad \psi_{LS}(e) = e \quad w_{LS}(e) = 1 \quad (3.124)$$

In manchen Herleitungen wird der Vorfaktor $1/2$ weggelassen, was am Ergebnis der LS-Schätzung nichts ändert. Das Beispiel aus Abbildung 3.15 verdeutlicht, dass die Wahl der quadratischen LS-Kostenfunktion nicht robust gegenüber Messausreißern ist. Durch die quadratische Bestrafung von Modellfehlern besitzen Ausreißer mit einem hohen Residuum e einen großen Einfluss auf das Schätzergebnis. Da alle Messdaten, also auch Ausreißer, für die Schätzung verwendet werden, ist der Bruchpunkt $bp = 0\%$.

Huber-M-Schätzer Der M-Schätzer nach Huber [82] ist eines der ersten robusten Schätzverfahren.

$$\rho_{Hu}(e) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^2 & \text{für } |e| < \zeta_{Hu} \\ \zeta_{Hu}|e| - \frac{1}{2}\zeta_{Hu}^2 & \text{für } |e| \geq \zeta_{Hu} \end{cases} \quad (3.125a)$$

$$\psi_{Hu}(e) = \begin{cases} e & \text{für } |e| < \zeta_{Hu} \\ \text{sgn}(e)\zeta_{Hu} & \text{für } |e| \geq \zeta_{Hu} \end{cases} \quad (3.125b)$$

$$w_{Hu}(e) = \begin{cases} 1 & \text{für } |e| < \zeta_{Hu} \\ \frac{\zeta_{Hu}}{|e|} & \text{für } |e| \geq \zeta_{Hu} \end{cases} \quad (3.125c)$$

In einem Bereich $\pm\zeta_{Hu}$ um Null wird der Modellfehler e quadratisch wie beim LS-Verfahren bestraft. Über diesen Bereich hinaus steigt die Kostenfunktion linear an. Durch die lineare Kostenfunktion statt der quadratischen, haben Ausreißer einen geringeren Einfluss auf die Schätzung als beim LS-Verfahren. Da aber immer noch alle Messdaten, auch Ausreißer, die Schätzung beeinflussen, liegt der Bruchpunkt bei $bp = 0\%$.

Myriad-M-Schätzer Der M-Schätzer nach Gonzalez und Arce [83] sowie De Brabanter et al. [84] basiert auf der Cauchy-Verteilung.

$$\rho_M(e) = \frac{\zeta_M^2}{2} \ln(\zeta_M^2 + e^2) \quad \psi_M(e) = \frac{\zeta_M^2 e}{\zeta_M^2 + e^2} \quad w_M(e) = \frac{\zeta_M^2}{\zeta_M^2 + e^2} \quad (3.126)$$

Der Vorfaktor $\zeta_M^2/2$, welcher hier eingeführt wird, sorgt dafür, dass für $e = 0$ die Gewichtung $w(e = 0) = 1$ gilt. Dadurch verhält sich der Myriad-M-Schätzer um $e = 0$ wie der gewöhnliche LS-Schätzer. Ohne diese Gewichtung kann sich je nach Wahl von ζ_M die Konvergenz des Schätzers verschlechtern. Auch der Myriad M-Schätzer besitzt einen Bruchpunkt von $bp = 0\%$.

Hampel-M-Schätzer Zou et al. [85] verwenden das Gütemaß von Hampel bei einer der ersten Herleitungen des rekursiven M-Schätzers. Die Hampelfunktion besteht aus vier Teilbereichen und liefert für sehr große Modellfehler $e[k]$ einen konstanten Wert.

$$\rho_{Ha}(e) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^2 & \text{für } 0 \leq |e| < \zeta_{Ha1} \\ \zeta_{Ha1}|e| - \frac{1}{2}\zeta_{Ha1}^2 & \text{für } \zeta_{Ha1} \leq |e| < \zeta_{Ha2} \\ \frac{\zeta_{Ha1}}{2}(\zeta_{Ha2} + \zeta_{Ha3}) - \frac{\zeta_{Ha1}^2}{2} + \frac{\zeta_{Ha1}}{2} \frac{(|e| - \zeta_{Ha3})^2}{\zeta_{Ha2} - \zeta_{Ha3}} & \text{für } \zeta_{Ha2} \leq |e| < \zeta_{Ha3} \\ \frac{\zeta_{Ha1}}{2}(\zeta_{Ha2} + \zeta_{Ha3}) - \frac{\zeta_{Ha1}^2}{2} & \text{für } \zeta_{Ha3} \leq |e| \end{cases} \quad (3.127a)$$

$$\psi_{Ha}(e) = \begin{cases} e & \text{für } 0 \leq |e| < \zeta_{Ha1} \\ \text{sgn}(e)\zeta_{Ha1} & \text{für } \zeta_{Ha1} \leq |e| < \zeta_{Ha2} \\ \text{sgn}(e) \frac{\zeta_{Ha1}(|e| - \zeta_{Ha3})}{\zeta_{Ha2} - \zeta_{Ha3}} & \text{für } \zeta_{Ha2} \leq |e| < \zeta_{Ha3} \\ 0 & \text{für } \zeta_{Ha3} \leq |e| \end{cases} \quad (3.127b)$$

$$w_{Ha}(e) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |e| < \zeta_{Ha1} \\ \frac{\zeta_{Ha1}}{|e|} & \text{für } \zeta_{Ha1} \leq |e| < \zeta_{Ha2} \\ \frac{\zeta_{Ha1}(|e| - \zeta_{Ha3})^2}{|e|(\zeta_{Ha2} - \zeta_{Ha3})} & \text{für } \zeta_{Ha2} \leq |e| < \zeta_{Ha3} \\ 0 & \text{für } \zeta_{Ha3} \leq |e| \end{cases} \quad (3.127c)$$

Da für den Bereich $|e| \geq \zeta_{Ha3}$ die Gewichtung $w(e) = 0$ ist, haben Ausreißer in diesem Teil keine Auswirkung auf das Gütemaß und somit auf die Schätzung. Im Gegensatz zu den oben beschriebenen robusten Verfahren besitzt der Hampel-M-Schätzer einen Bruchpunkt $bp > 0\%$. Beim Einsatz dieses Verfahrens ist zum einen die optimale Wahl der Parameter ζ_{Ha1} , ζ_{Ha2} und ζ_{Ha3} problematisch. Zum anderen kann das Verfahren bei einer großen Differenz zwischen Startwert und tatsächlichem Parameter nie eine Schätzung durchführen, wenn für die initialen Modellfehler $|e| > \zeta_{Ha3}$ gilt.

Anstatt eine künstliche Kostenfunktion für den M-Schätzer zu wählen, kann $\rho(e)$ nach Gleichung (3.118) auch aus der tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(e|\hat{\theta})$ hergeleitet werden. Aus der tatsächlich vorliegende studentischen t -Verteilung in Gleichung (3.61) ergibt sich die Kostenfunktion

$$\begin{aligned} \rho_t(e) &= -\ln p_t(e|\hat{\theta}) = -\ln \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_t+1}{2}\right)}{\sigma_t\sqrt{\nu_t\pi} \Gamma\left(\frac{\nu_t}{2}\right)} \left[\frac{\nu_t + \left(\frac{e-\mu_t}{\sigma_t}\right)^2}{\nu_t} \right]^{-\frac{\nu_t+1}{2}} = \\ &= -\ln \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_t+1}{2}\right)}{\sigma_t\sqrt{\nu_t\pi} \Gamma\left(\frac{\nu_t}{2}\right)}}_{=\text{konst.}} - \ln \left[\frac{\nu_t + \left(\frac{e-\mu_t}{\sigma_t}\right)^2}{\nu_t} \right]^{-\frac{\nu_t+1}{2}} \end{aligned} \quad (3.128)$$

Ein konstanter Term im Gütemaß kann vernachlässigt werden, da er die Position des Optimums nicht beeinflusst. Nach Abbildung 3.22 wird angenommen, dass die studentische t -Verteilung symmetrisch um $e = 0$ ausgeprägt ist, wodurch für den Lageparameter (engl.: Location Parameter) $\mu_t = 0$ gilt. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich (3.128) zu

$$\rho'_t(e) = -\ln \left[\frac{\nu_t + \left(\frac{e}{\sigma_t}\right)^2}{\nu_t} \right]^{-\frac{\nu_t+1}{2}} = \frac{\nu_t+1}{2} \ln \left(1 + \frac{e^2}{\nu_t\sigma_t^2} \right) \quad (3.129)$$

Der Vorfaktor $(\nu_t+1)/2$ beeinflusst nicht die Lage des Optimums und kann weggelassen oder ausgetauscht werden.

Damit für die Gewichtungsfunktion $w(e=0) = 1$ gilt, wird der Vorfaktor $\nu_t \sigma_t^2 / 2$ hinzugefügt.

$$\rho_t''(e) = \frac{\nu_t \sigma_t^2}{2} \ln \left(1 + \frac{e^2}{\nu_t \sigma_t^2} \right) \quad (3.130a)$$

$$\psi_t(e) = \frac{\partial \rho_t''(e)}{\partial e} = e \frac{\nu_t \sigma_t^2}{\nu_t \sigma_t^2 + e^2} \quad (3.130b)$$

$$w_t(e) = \frac{\nu_t \sigma_t^2}{\nu_t \sigma_t^2 + e^2} \quad (3.130c)$$

Durch die Gegenüberstellung der Gewichtungen des studentschen M-Schätzers (3.130) und des Myriad-M-Schätzers (3.126) zeigt sich, dass für $\zeta_M^2 = \nu_t \sigma_t^2$ die Gewichtsfunktionen identisch sind. Dies liegt daran, dass die Cauchyverteilung, auf welcher der Myriad-M-Schätzer basiert, ein Spezialfall der studentschen t -Verteilung für den Fall $\nu_t = 1$ ist [67, S. 103]. Im Anhang A.2 wird genauer auf den Zusammenhang der beiden Verteilungsfunktionen eingegangen.

Im Unterschied zum M-Schätzer nach Huber und Hampel basiert das Gütemaß des vorgeschlagenen studentschen M-Schätzers bzw. Myriad-M-Schätzers auf einer tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die freien Parameter des Gütemaßes werden durch Anpassen der Dichtefunktion auf bekannte Messdaten ermittelt. Dadurch entfällt für den Anwender das aufwändige justieren der Parameter in der Gewichtungsfunktion $w(e)$. Beim M-Schätzer von Huber und Hampel wird hingegen jeweils ein vordefiniertes Gütemaß verwendet, dessen Parameter der Benutzer einstellen muss. Für diese beiden Verfahren existieren keine realen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

Pseudo-Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p(e|\hat{\theta})$ für den Huber- und Hampel-M-Schätzer berechnen sich aus der Gütefunktion $\rho(e[k])$ durch Umformen von Gleichung (3.118).

$$p(e|\hat{\theta}) = \exp(-\rho(e[k])) \quad (3.131)$$

Für den Huber-M-Schätzer lautet die Pseudo-Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p_{Hu}(e|\hat{\theta}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}e^2\right) & \text{für } |e| < \zeta_{Hu} \\ \exp(-\zeta_{Hu}|e|) \exp\left(\frac{1}{2}\zeta_{Hu}^2\right) & \text{für } |e| \geq \zeta_{Hu} \end{cases} \quad (3.132)$$

Die Pseudo-Wahrscheinlichkeitsverteilung des Hampel-M-Schätzers ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 p_{Ha}(e|\hat{\theta}) &= \\
 &= \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}e^2\right) & \text{für } 0 \leq |e| < \varepsilon_{Z,1} \\ \exp\left(-\zeta_{Ha1}|e| + \frac{1}{2}\zeta_{Ha1}^2\right) & \text{für } \zeta_{Ha1} \leq |e| < \zeta_{Ha2} \\ \exp\left(-\frac{\zeta_{Ha1}}{2}(\zeta_{Ha2} + \zeta_{Ha3}) + \frac{\zeta_{Ha1}^2}{2} - \frac{\zeta_{Ha1}}{2} \frac{(|e| - \zeta_{Ha3})^2}{\zeta_{Ha2} - \zeta_{Ha3}}\right) & \text{für } \zeta_{Ha2} \leq |e| < \zeta_{Ha3} \\ \exp\left(-\frac{\zeta_{Ha1}}{2}(\zeta_{Ha2} + \zeta_{Ha3}) + \frac{\zeta_{Ha1}^2}{2}\right) & \text{für } \zeta_{Ha3} \leq |e| \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des gewöhnlichen LS-Schätzers und des studentischen M-Schätzers sind durch (3.54) bzw. durch (3.61) gegeben.

Abbildung 3.36 gibt einen Überblick über die einzelnen Funktionen für LS-Schätzer, Huber-, Hampel- und studentischem M-Schätzer.

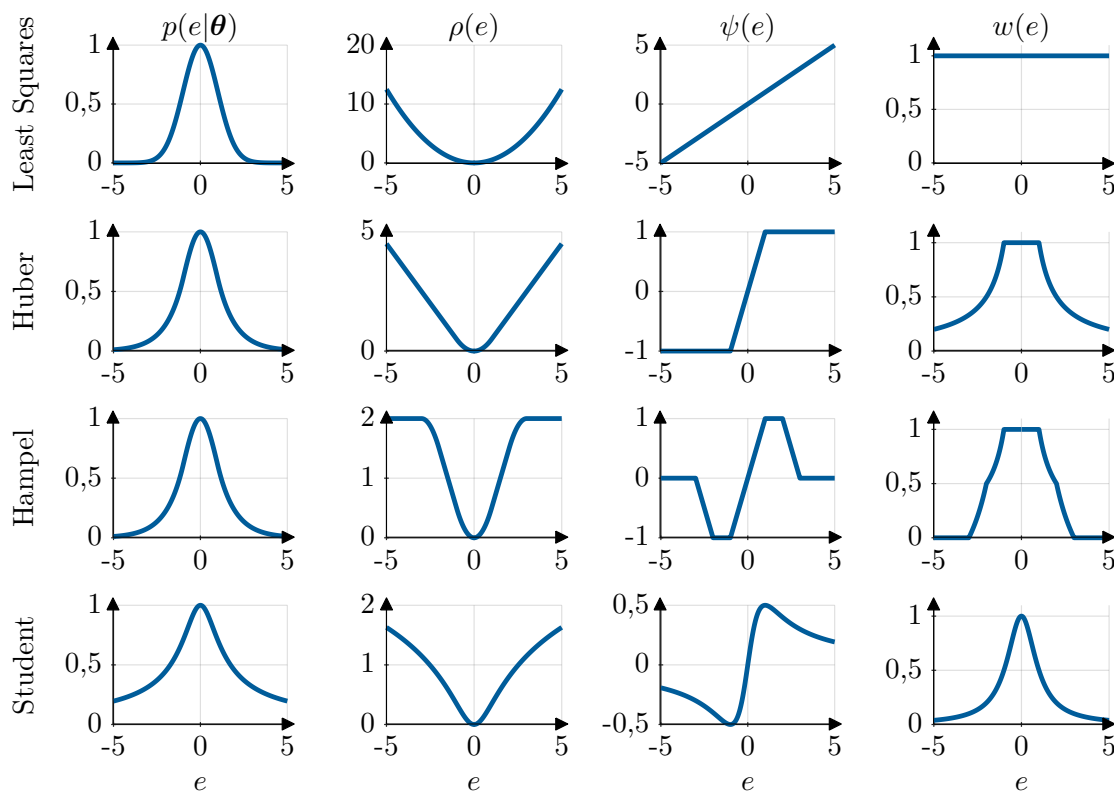


Abbildung 3.36: (Pseudo-)Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(e|\theta)$, Gütefunktion $\rho(e)$, Einflussfunktion $\psi(e)$ und Gewichtungsfunktion $w(e)$ für LS-Schätzer, Huber-, Hampel- und studentischen M-Schätzer

Für jedes Verfahren sind (Pseudo-)Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(e|\theta)$, Kostenfunktion $\rho(e)$, Einflussfunktion $\psi(e)$ und Gewichtungsfunktion $w(e)$ dargestellt. Tabelle 3.5 zeigt die Parameter für das Beispiel von Abbildung 3.36 auf.

ζ_{Hu}	ζ_{Ha1}	ζ_{Ha2}	ζ_{Ha3}	ν_t	σ_t
1	1	2	3	1	1

Tabelle 3.5: Parameter der verschiedenen M-Schätzer für das Beispiel in Abbildung 3.36

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den LS-Schätzer folgt der Gaußglockenkurve. Die dazugehörige Gütefunktion bestraft die Modellfehler mit einer quadratischen Funktion, wodurch Ausreißer mit einem großem Residuum einen hohen Einfluss besitzen. Dies wird auch an der Gewichtungsfunktion $w(e)$ deutlich, mit der jeder Datenpunkt unabhängig vom Wert des Modellfehlers mit einem Faktor Eins in das Gütemaß eingeht.

Für den Huber-M-Schätzer ist die Pseudoverteilung bereits etwas breiter als beim LS-Verfahren, wodurch eine höhere Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Ausreißern angenommen wird. Die Robustheit des Verfahrens ist am Gütemaß $\rho(e)$ zu erkennen, bei dem alle Modellfehler $|e| > \zeta_{Hu}$ linear in die Kostenfunktion einfließen. Um $e = 0$ ist das Gütemaß wie beim LS-Verfahren quadratisch. Dieser Zusammenhang spiegelt sich im Verlauf der Gewichtung $w(e)$ wider, welche Modellfehler in der Nähe von $e = 0$ mit Eins gewichtet. Größere Residuen gehen mit einer Gewichtung von $w(e) < 1$ in das Gütemaß ein.

Der Hampel-M-Schätzer (3.127) ist im Bereich $|e| < \zeta_{Ha2}$ wie der Huber-M-Schätzer (3.125) aufgebaut, wodurch der Verlauf der Einflussfunktion $\psi(e)$ in diesem Bereich identisch ist. Im Verlauf der Einflussfunktion sind auch die vier Bereiche des Hampel-M-Schätzers zu sehen. Außerhalb des Bereichs $|e| > \zeta_{Ha3}$ ist die Gewichtung $w(e) = 0$, wodurch Messausreißer nicht mehr in die Gütefunktion der Schätzung einfließen. Durch die Gewichtung von sehr großen Residuen mit Null fließen diese Fehler nicht mehr in das Gütemaß ein, womit für den Bruchpunkt $bp > 0\%$ gilt.

Für das Beispiel in Abbildung 3.36 besitzt die Dichtefunktion der studentschen t -Verteilung die größte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von hohen Modellfehlern $e[k]$. Auch beim studentschen M-Schätzer wird die Robustheit durch die geringere Gewichtung von hohen Modellfehlern durch $w(e) < 1$ erreicht. Allerdings erreicht die Gewichtungsfunktion nie null ($w(e) > 0$). Dadurch fließen immer alle Residuen, also auch Messausreißer, in das Gütemaß mit ein und für den Bruchpunkt gilt $bp = 0\%$. Im Gegensatz zum M-Schätzer nach Huber und Hampel ist der studentsche M-Schätzer nicht abschnittsweise definiert, sondern anhand einer einzigen Funktion über den gesamten Wertebereich.

Die M-Schätzer, welche einen Bruchpunkt von $bp = 0\%$ besitzen, können nach Zoubir et al. [66] robust gegenüber Messausreißern sein, auch wenn diese für die Schätzung verwendet werden. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass lediglich vertikale Ausreißer und gute Hebelpunkte auftreten. Nach Abbildung 3.20 ist diese Bedingung bei der Masse-

und Fahrwiderstandsschätzung erfüllt. M-Schätzer sind nicht robust gegenüber schlechte Hebelpunkte, die in der vorliegenden Anwendung jedoch nicht auftreten.

3.5.1.3 Robuster M-Schätzer mit Vergessen

Für eine schnellere Anpassung der Schätzung an veränderliche Parameter kann der robuste M-Schätzer zusätzlich um das exponentielle Vergessen mit dem Vergessenheitsfaktor λ wie für das gewöhnliche RLS-Verfahren nach Algorithmus 2.2 ergänzt werden. Das Optimierungsproblem (3.123) erweitert sich zu

$$\min_{\hat{\theta}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} w(e(\hat{\theta})[k]) (e(\hat{\theta})[k])^2 \Leftrightarrow \min_{\hat{\theta}} \underbrace{\frac{1}{2} e^T(\hat{\theta}) \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) e(\hat{\theta})}_{J(\hat{\theta})} \quad (3.134)$$

mit

$$\begin{aligned} e(\hat{\theta}) &= \left[e(\hat{\theta})[1], \dots, e(\hat{\theta})[N] \right]^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda^{N-1}, \dots, \lambda, 1), \\ \mathbf{W} &= \text{diag}(w(e(\hat{\theta})[1]), \dots, w(e(\hat{\theta})[N])). \end{aligned} \quad (3.135)$$

Das Gütemaß aus (3.134) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} J(\hat{\theta}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \Phi \hat{\theta})^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) (\mathbf{y} - \Phi \hat{\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \mathbf{y} - \hat{\theta}^T \Phi^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \mathbf{y} + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Phi^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \Phi \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Durch die Optimalitätsbedingung der Lösung muss der Gradient verschwinden.

$$\nabla_{\hat{\theta}} J(\hat{\theta}) = -\Phi^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \mathbf{y} + \Phi^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \Phi \hat{\theta} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (3.137)$$

Daraus ergibt sich die Lösung des gewichteten LS-Problems (3.134) zu

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \min_{\hat{\theta}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} w^{(i)}[k] (y[k] - \phi^T[k] \hat{\theta})^2 \\ &= \underbrace{(\Phi^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \Phi)^{-1}}_P \Phi^T \Lambda \mathbf{W}(\hat{\theta}) \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.138)$$

Das Gütemaß des M-Schätzers (3.134) ist nicht mehr quadratisch, sondern eine nichtlineare Funktion. Deshalb ist eine analytische Lösung des Optimierungsproblems wie beim LS-Schätzer nicht möglich. Die Lösung $\hat{\theta}$ des M-Schätzers in (3.138) ist nur implizit angegeben, da das Ergebnis wiederum von $\hat{\theta}$ abhängt. Für die tatsächliche Lösung des

Optimierungsproblems (3.134) muss deshalb die Berechnung (3.138) iterativ ausgeführt werden.

Durch die spezielle Form der Kostenfunktion des M-Schätzers, bestehend aus einem quadratischem Anteil und einer Gewichtung, bietet sich als Lösungsalgorithmus das iterativ neugewichtende LS-Verfahren (engl.: Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS)) an [81, S. 44], [66]. Aftab und Hartley [86] beweisen, dass das IRLS-Verfahrens zur Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems in Gleichung (3.119) konvergiert. Der folgende Algorithmus 3.1 stellt die Schritte des IRLS-Schätzers dar, welcher die Erweiterung um den Vergessensfaktor λ enthält. Der Algorithmus wird mit $w^{(0)}[k] = 1$ und $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \mathbf{0}$

Algorithmus 3.1 Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS) mit Vergessensfaktor

Eingang: $\Phi, \mathbf{y}, \Lambda$

- 1: $i = 0$
- 2: $w^{(0)}[k] = 1$
- 3: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \mathbf{0}$
- 4: **Wiederhole:**
- 5: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} = \left(\Phi^T \Lambda \mathbf{W}^{(i)} \Phi \right)^{-1} \Phi^T \Lambda \mathbf{W}^{(i)} \mathbf{y}$
- 6: $w^{(i+1)}[k] = w \left(y[k] - \phi^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} \right)$
- 7: $i = i + 1$
- 8: **Bis:** $\frac{\left| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} \right|}{\left| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} \right|} < \varepsilon_{IRLS}$ **oder** $i \geq i_{max}$

Ausgang: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$

initialisiert, wobei der Startwert für die Schätzung nur für den Vergleich in Zeile 8 notwendig ist. Der Exponent $(\cdot)^{(i)}$ kennzeichnet die i -te Iteration. Jeder Iterationsschritt berechnet die gewichtete LS-Lösung (2.30) mit den Gewichten aus der vorherigen Iteration (Zeile 5). Die Gewichtungen $w(e(\hat{\boldsymbol{\theta}})[k])$ wiederum werden mit der Lösung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ der vorherigen Iteration berechnet (Zeile 6). Die Iteration wird solange durchgeführt, bis der Unterschied von zwei aufeinanderfolgenden Lösungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ geringer ist als der Grenzwert ε_{IRLS} oder bis die maximal zulässige Anzahl an Iterationen i_{max} erreicht ist (Zeile 8). Beim IRLS-Algorithmus handelt es sich um ein Offline-Verfahren, welches nicht für eine Anwendung auf einem Steuergerät geeignet ist.

Für die rekursive Berechnung der Schätzung wird die Annahme getroffen, dass die Gewichte $w[k]$ nicht von der aktuellen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ abhängen, sondern für den aktuellen Zeitschritt bekannt sind. Die Berechnung der Gewichte basiert auf der Schätzung des

vorherigen Zeitschritts $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$. Der Fehler durch diese Annahme sollte klein ausfallen, da die Parameteränderung zwischen zwei Zeitschritten, vor allem im konvergierten Zustand, gering ist.

Die Herleitung der rekursiven Formel für den robusten M-Schätzer beginnt mit der Berechnung des aktuellen $\mathbf{P}_{M\lambda}[k]$, basierend auf dem vorherigen Wert $\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{M\lambda}[k] &= (\boldsymbol{\Phi}^T[k]\boldsymbol{\Lambda}[k]\mathbf{W}[k]\boldsymbol{\Phi}[k])^{-1} = \\
&= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{\Lambda}[k-1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}[k-1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & w[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}[k-1] \\ \boldsymbol{\phi}^T[k] \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= (\lambda\boldsymbol{\Phi}^T[k-1]\boldsymbol{\Lambda}[k-1]\mathbf{W}[k-1]\boldsymbol{\Phi}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k]w[k]\boldsymbol{\phi}^T[k])^{-1} \\
&= \left(\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1] \right)^{-1} + \boldsymbol{\phi}[k]w[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Das Matrixinversions-Lemma (2.42) vereinfacht (3.139) mit der Analogie

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}[k-1] \right)^{-1} \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\phi}[k] \quad \mathbf{C} = w[k] \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\phi}^T[k] \tag{3.140}$$

zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{M\lambda}[k] &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1] - \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] \left(\boldsymbol{\phi}^T[k]\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] + \frac{1}{w[k]} \right)^{-1} \boldsymbol{\phi}^T[k]\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1] \\
&= \mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\frac{1}{\lambda} - \underbrace{\frac{w[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k]}{w[k]\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k] + \lambda}}_{\gamma_{M\lambda}[k]} \boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\frac{1}{\lambda} \\
&= \left(\mathbf{I} - \gamma_{M\lambda}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right) \mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\frac{1}{\lambda},
\end{aligned} \tag{3.141}$$

was der rekursiven Berechnung von $\mathbf{P}[k]$ für das RLS-Verfahren mit exponentiellem Vergessen in Algorithmus 2.2 entspricht. Die rekursive Berechnung des geschätzten Parametervektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ erfolgt analog zu Gleichung (2.40) mit dem Verstärkungsfaktor

$$\gamma_{M\lambda}[k] = \frac{w[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k]}{\lambda + w[k]\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\boldsymbol{\phi}[k]}. \tag{3.142}$$

Das gesamte RLM-Verfahren ist analog nach Zou et al. [87], [88], [85] in Algorithmus 3.2 zusammengefasst. Für die Berechnung der Gewichtung $w[k]$ in Zeile 2 von Algorithmus 3.2 wird die aus der studentschen t -Verteilung abgeleitete Formel für die Gewichte (3.130)

Algorithmus 3.2 Recursive Least M-Schätzer (RLM) mit Vergessensfaktor**Eingang:** $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\theta}[k-1]$, $\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]$, λ

- 1: $e[k] = y[k] - \phi^T[k]\hat{\theta}[k-1]$
- 2: $w[k] = w(e(\hat{\theta}[k-1]))[k]$
- 3: $\gamma_{M\lambda}[k] = \frac{w[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\phi[k]}{\lambda + w[k]\phi^T[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\phi[k]}$
- 4: $\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \gamma_{M\lambda}[k]e[k]$
- 5: $\mathbf{P}_{M\lambda}[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma_{M\lambda}[k]\phi^T[k]\right)\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\frac{1}{\lambda}$

Ausgang: $\hat{\theta}[k]$, $\mathbf{P}_{M\lambda}[k]$

verwendet. Alternativ können auch die Gewichtsfunktionen von Huber- oder Hampel-M-Schätzer zum Einsatz kommen. Wenn die LS-Gewichtung $w_{LS}[k] = 1$ aus (3.124) im RLM-Schätzer aus Algorithmus 3.2 eingesetzt wird, so erhält man das gewöhnliche RLSeV-Verfahren in Algorithmus 2.2.

3.5.1.4 Vergleich der suboptimalen Lösung von Recursive Least M-Schätzer und der optimalen Lösung von Iteratively Reweighted Least Squares

Die Herleitung des RLM-Algorithmus 3.2 basiert nicht auf der exakten, rekursiven Lösung des IRLS-Verfahrens aus Algorithmus 3.1. Im Gegensatz zum RLSeV-Algorithmus 2.2, der eine identische, rekursive Formulierung der LS-Lösung (2.30) darstellt, handelt es sich beim RLM-Verfahren um eine suboptimale Lösung der IRLS-Optimierung. Im Gegensatz zum IRLS-Verfahren führt der RLM-Algorithmus keine Iteration zur Berechnung der Gewichte $w[k]$ aus. Statt die Gewichte mit der aktuellen Schätzung $\hat{\theta}[k]$ zu berechnen, verwendet die Herleitung des RLM-Verfahrens die vorherige Schätzung $\hat{\theta}[k-1]$. Für die Lösung des gewichteten Optimierungsproblems (3.123) ist eine Iteration notwendig, da die Gewichte $w(e(\hat{\theta}))[k]$ von der aktuellen Lösung $\hat{\theta}$ abhängig sind.

Eine Möglichkeit, die IRLS-Schätzung rekursiv zu berechnen, ist in Algorithmus 3.3 dargestellt. Bei der ersten Iteration berechnet Recursive Iteratively Reweighted Least Squares (RIRLS) mit $w^{(0)}[k] = 1$ die gewöhnliche RLSeV-Lösung (Zeile 5 und 6). Anschließend werden analog zur Offline-Berechnung des IRLS-Verfahrens in Algorithmus 3.1 die Gewichte $w^{(i+1)}[k]$ mit der aktuellen Lösung $\hat{\theta}^{(i+1)}$ aktualisiert (Zeile 8). Die Iteration läuft solange bis das Abbruchkriterium in Zeile 10 erfüllt ist.

Bei Algorithmus 3.3 handelt es sich nicht um eine exakte, rekursive Form des IRLS-Verfahrens. In jeder Iteration der IRLS-Methode werden die Gewichte $w^{(i)}[k]$ für den gesamten Zeitraum $k \in [1, N]$ angepasst. Bei der rekursiven Form in Algorithmus 3.3

Algorithmus 3.3 Recursive Iteratively Reweighted Least Squares (RIRLS) mit Vergessensfaktor

Eingang: $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\theta}[k-1]$, $\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]$, λ

1: $i = 0$

2: $w^{(0)}[k] = 1$

3: $\hat{\theta}^{(0)}[k] = \mathbf{0}$

4: **Wiederhole:**

5: $\gamma_{M\lambda}^{(i+1)}[k] = \frac{w^{(i)}[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\phi[k]}{\lambda + w^{(i)}[k]\phi^T[k]\mathbf{P}_{M\lambda}[k-1]\phi[k]}$

6: $\hat{\theta}^{(i+1)}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \gamma_{M\lambda}^{(i+1)}[k] \left(y[k] - \phi^T[k]\hat{\theta}[k-1] \right)$

7: $e^{(i+1)}[k] = y[k] - \phi^T[k]\hat{\theta}^{(i+1)}[k]$

8: $w^{(i+1)}[k] = w(e^{(i+1)}[k])$

9: $i = i + 1$

10: **Bis:** $\frac{\left| \hat{\theta}^{(i+1)}[k] - \hat{\theta}^{(i)}[k] \right|}{\left| \hat{\theta}^{(i)}[k] \right|} < \varepsilon_{RIRLS}$ **oder** $i \geq i_{max}$

11: $\mathbf{P}_{M\lambda}[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma_{M\lambda}^{(i)}[k]\phi^T[k] \right) \mathbf{P}_{M\lambda}[k-1] \frac{1}{\lambda}$

Ausgang: $\hat{\theta}^{(i)}[k]$, $\mathbf{P}_{M\lambda}[k]$

kann jeweils nur die Gewichtung $w^{(i)}[k]$ für den aktuellen Zeitpunkt k aktualisiert werden. Durch die Rekursion findet keine Adaption der vorherigen Gewichte statt.

Aufgrund der Anforderung an die Echtzeitfähigkeit ist eine Abbruchbedingung wie in Zeile 8 von Algorithmus 3.1 ungeeignet, da zu jedem Zeitschritt die Anzahl der Iterationen unterschiedlich sein kann und vorab unbekannt ist. Eine weitere Änderung zum IRLS-Algorithmus ergibt sich, wenn zusätzlich zum normbasierten Abbruchkriterium mit dem Grenzwert ε_{RIRLS} nur eine feste Anzahl an Iterationen zugelassen wird. Der RIRLS Algorithmus 3.3 beendet in Zeile 10 die interne Iteration nach i_{max} Schritten, auch wenn das normbasierte Abbruchkriterium nicht erfüllt ist.

Beim Abbruch des iterativen Prozesses nach einer Iteration erhält man den gewöhnlichen RLSeV-Algorithmus, womit mindestens zwei Iterationen für ein robustes Verhalten notwendig sind. Beim Abbruch nach zwei Iterationen liefert das Verfahren zwar eine suboptimale Lösung, allerdings ist die Anforderung an die Echtzeitfähigkeit erfüllt. Im konvergierten Zustand sollten zwei Iterationen ausreichen, da konstante Parameter geschätzt werden und die Änderung der Schätzung zwischen zwei aufeinanderfolgenden

Zeitschritten so gering ist, dass auch das normbasierte Abbruchkriterium die Iteration beendet. Ein Unterschied des vorzeitigen Abbruchs zur vollständigen Iteration sollte sich zu Beginn einer Messung ergeben, wenn die Schätzung noch stark vom tatsächlichen Parameter abweicht und mehrere Iterationen notwendig sind, bis das normbasierte Kriterium erfüllt ist.

Als zusätzliche Näherung bietet sich an, nicht zuerst die RLS-Lösung im ersten Iterationsschritt zu berechnen. Anstatt die Iteration mit $w^{(0)}[k] = 1$ zu initialisieren und erst im zweiten Iterationsschritt die Gewichtung mit der RLS-Schätzung von $\hat{\theta}^{(1)}[k]$ zu berechnen, kann der Gewichtungsfaktor bereits in der ersten Iteration berechnet werden. Bei der ersten Iteration steht als Information über die Schätzung nur das Ergebnis der vorherigen Berechnung $\hat{\theta}[k-1]$ zur Verfügung, mit der die Schätzung initialisiert wird. Mit dieser zusätzlichen Näherung erhält man den RLM-Algorithmus 3.2.

Abbildung 3.37 zeigt eine Übersicht zum gewöhnlichen LSeV-Schätzer und zum robusten Schätzer mit exponentiellem Vergessen. Die Darstellung enthält unterschiedliche Abstufungen der Vereinfachung für die Offline-Auswertung und die rekursive Berechnung.

Das gewöhnliche LSeV-Verfahren (linke obere Zelle) entsteht aus dem gewöhnlichen LS-Verfahren durch exponentiell abnehmende Gewichte in \mathbf{A} für ältere Messdaten. Mit der Herleitung in Kapitel 2.3.2 kann die Offline-Berechnung der LSeV-Methode durch eine exakte Umformulierung in den RLSeV-Algorithmus gebracht werden (rechte obere Zelle).

Für den robusten M-Schätzer ist eine exakte, rekursive Formulierung nicht möglich. Ausgehend vom MLE-Schätzer (linke untere Zelle) leitet sich durch Logarithmieren, Umformen und Einführen eines Vergessensfaktors ein gewichtetes LS-Gütemaß ab. Da die Gewichte von der aktuellen Schätzung abhängen, lässt sich die Lösung nur durch den IRLS-Algorithmus 3.1 berechnen. Im Offline-Betrieb werden dabei in jeder Iteration die Gewichte für den gesamten Zeitraum angepasst. Wird nur eine Iteration $i_{max} = 1$ durchgeführt, ergeben sich suboptimale Lösungen des IRLS-Problems. In einer rekursiven Form ist keine exakte Lösung möglich, da nur das aktuelle Gewicht $w[k]$ aktualisiert werden kann. Die Näherung führt zum RIRLS-Algorithmus 3.3 (rechte untere Zelle) und ist, wie alle weiteren Vereinfachungen, durch eine rote Box gekennzeichnet.

Eine Näherung, bei der nur eine Iteration ($i_{max} = 1$) ausgeführt wird, führt zu einer suboptimalen Lösung des RIRLS-Algorithmus. Die Vereinfachung ist durch die rote Box gekennzeichnet. Die RIRLS-Methode enthält als Spezialfall für $i_{max} = 0$ und $w[k] = 1$ den gewöhnlichen RLSeV-Algorithmus (rechte obere Zelle).

Wenn keine Iteration ausgeführt wird ($i_{max} = 0$) und anstatt der Initialisierung $w[k] = 1$ die Gewichtung $w(\hat{\theta}[k-1])$ mit dem letzten Schätzwert berechnet wird, so ergibt sich

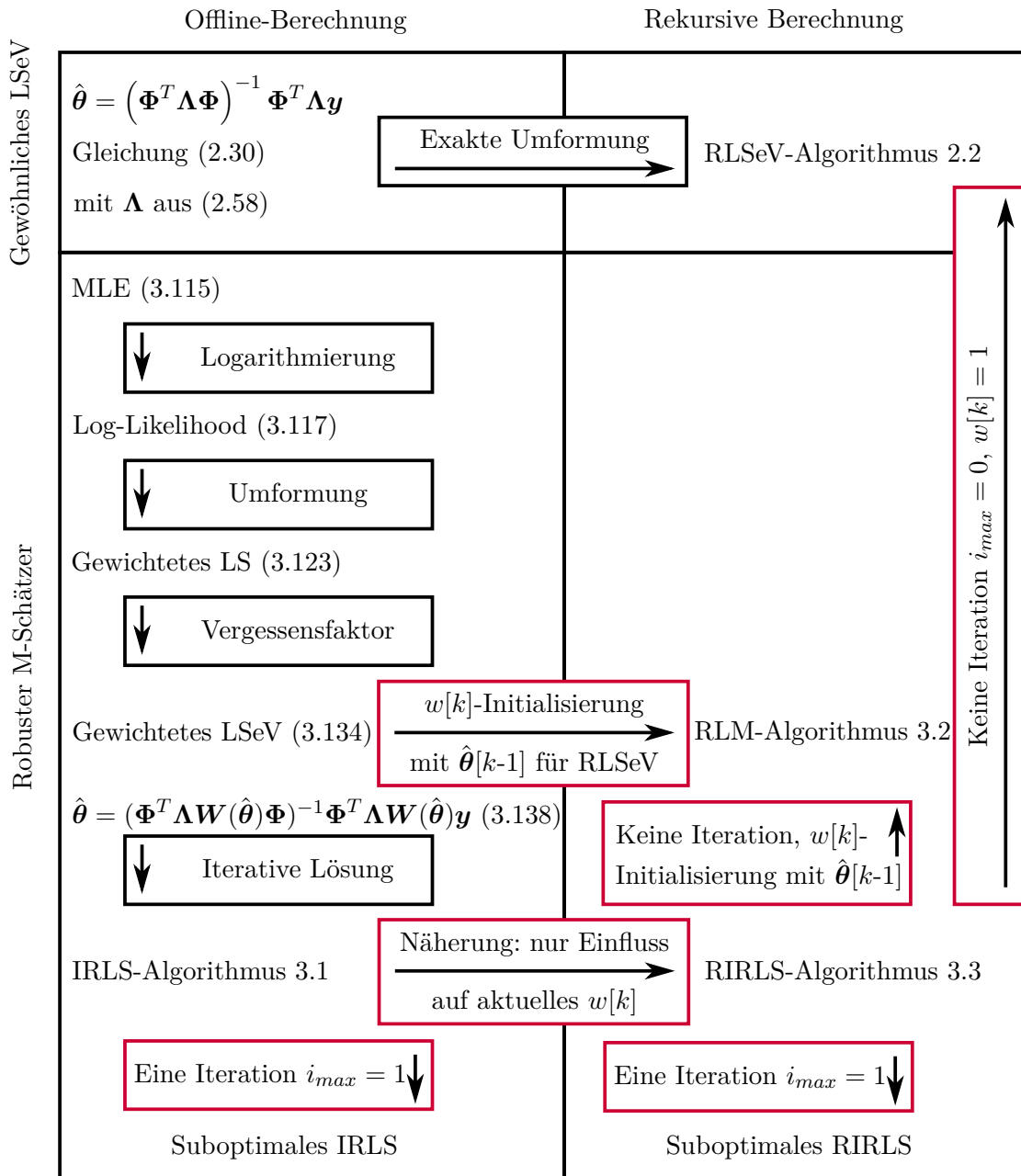


Abbildung 3.37: Zusammenhang zwischen gewöhnlichem LSeV-Verfahren und robustem M-Schätzer mit exponentiellem Vergessen für Offline-Berechnung und rekursiver Berechnung

der RLM-Algorithmus. Anstatt das RLM-Verfahren über den IRLS-Algorithmus herzu-leiten, können beim gewichteten LSeV-Verfahren die Gewichte als konstant betrachtet werden und die Gleichungen (3.139)-(3.142) ergeben den RLM-Algorithmus. Diese Ver-einfachung geht auch davon aus, dass sich die aktuellen Gewichte $w[k]$ aus der vorherigen Schätzung $\hat{\theta}[k - 1]$ berechnen.

Abbildung 3.38 stellt die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Verfah-ren aus der Übersicht in Abbildung 3.37 beispielhaft für eine Messung dar. Die Messdaten

sind identisch zum Beispiel aus Abbildung 3.15.

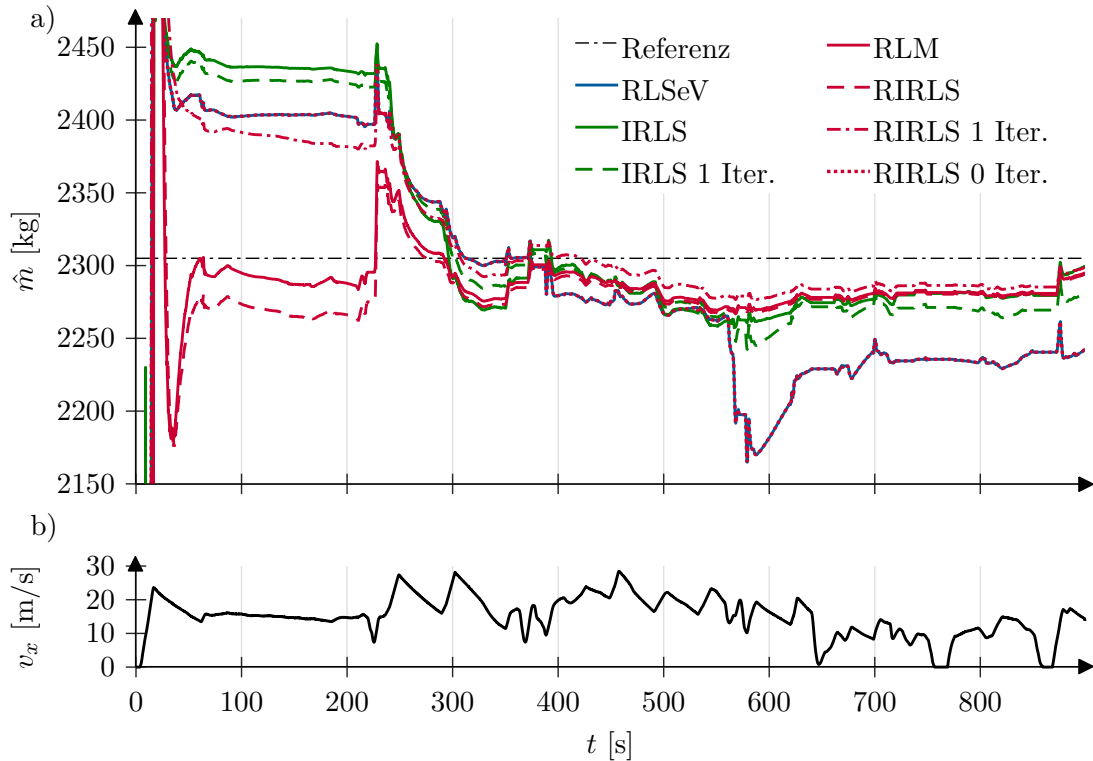


Abbildung 3.38: Masseschätzung \hat{m} für verschiedene rekursive und nichtrekursive Schätzverfahren

In Abbildung 3.38 a) sind die gewogene Fahrzeugmasse als Referenz (---) und die Ergebnisse der Masseschätzung \hat{m} für unterschiedliche robuste Schätzverfahren dargestellt. Der gewöhnliche RLSeV-Schätzer (—) zeigt das gleiche Verhalten wie in Abbildung 3.15, mit einer größeren Abweichung durch Messausreißer im Zeitbereich um $t = 600$ s.

Die Offline-Verfahren berechnen zu jedem Zeitschritt die Schätzung mit den Messdaten des bisherigen Zeitbereichs. Das IRLS-Verfahren (—) besitzt zu Beginn eine ähnlich große Abweichung wie der RLSeV-Algorithmus, welche im Bereich von ca. $t = 50$ s bis ca. $t = 220$ s nicht korrigiert wird, da hier die Geschwindigkeit nach Abbildung 3.38 b) konstant ist. Durch das gleichbleibende Tempo verschwindet die Beschleunigung und somit die ausreichende Anregung für eine Masseschätzung, sodass diese unverändert bleibt. Die Messausreißer um 600 s haben keinen Einfluss auf das robuste IRLS-Verfahren im Gegensatz zur RLSeV-Methode.

Wenn der IRLS-Algorithmus nur eine Iteration (- -) durchführt, dann ergibt sich nur eine geringe, gleichbleibende Abweichung zum vollständig konvergierten IRLS-Verfahren. Das suboptimale IRLS-Verfahren liefert somit relativ gute Ergebnisse bei deutlich geringerem Rechenaufwand.

Beim RIRLS-Verfahrens (---) entsteht ein Fehler, da der Algorithmus nur das aktuelle Gewicht $w[k]$ anpasst. Die näherungsweise Rekursion zeigt sich in der relativ großen Abweichung zu Beginn der Messfahrt, welche auch durch die fehlende Anregung zustande kommt. Mit zunehmender Schätzzeit konvergiert das näherungsweise RIRLS-Verfahren zur Schätzung des exakten IRLS-Algorithmus.

Das suboptimalen RIRLS-Verfahren mit nur einer Iteration (---) besitzt, wie beim suboptimalen IRLS-Algorithmus, eine Abweichung zur konvergierten Lösung. Beim Auslassen der Iterationen im RIRLS-Algorithmus (....) vereinfacht sich das Verfahren zur RLSeV-Methode und liefert das gleiche Ergebnis.

Das RLM-Verfahren (—) verwendet zwei Näherungen, um eine ähnlich geringe Rechenzeit wie das RLSeV-Verfahren zu erreichen. Zum einen wird nur das aktuelle Gewicht $w[k]$ angepasst. Alle vorherigen Gewichte sind durch die vorangegangenen Zeitschritte bereits bestimmt. Zum anderen wird keine Iteration ausgeführt, sondern die Gewichtung mit der vorherigen Parameterschätzung bestimmt. Trotz dieser Vereinfachung liefert das RLM-Verfahren eine ähnliche gute Parameterschätzung wie der RIRLS-Algorithmus. Für längere Schätzzeit konvergiert die suboptimale RLM-Lösung sogar zum optimalen IRLS-Ergebnis.

Den Vorteil der rekursiven Verfahren gegenüber der Offline-Berechnung bei der robusten Schätzung zeigt Abbildung 3.39. Für den Vergleich verwenden IRLS- und RIRLS-

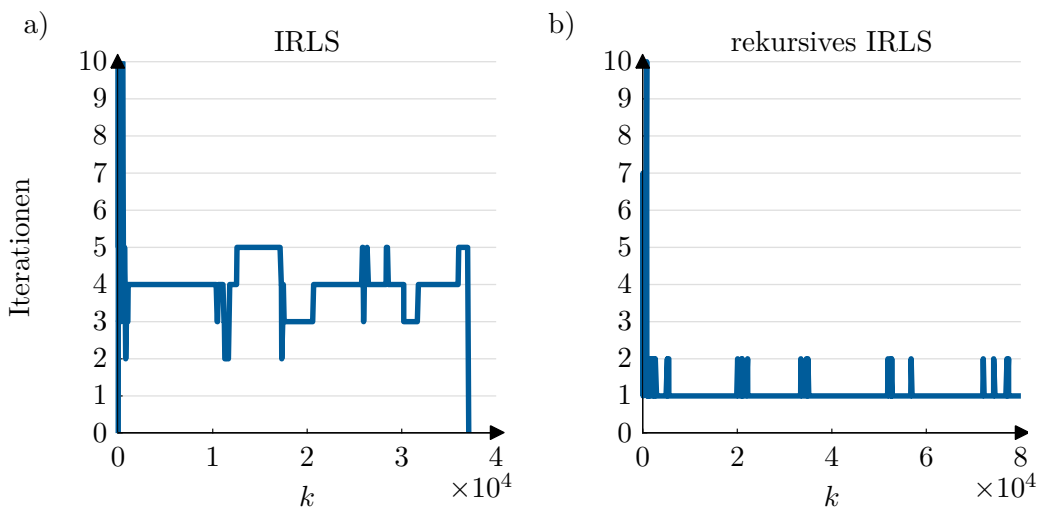


Abbildung 3.39: Anzahl der notwendigen Iterationen bis zur Konvergenz für das IRLS-Verfahren und das RIRLS-Verfahren

Algorithmus die gleichen Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\varepsilon_{IRLS} = \varepsilon_{RIRLS} = 5 \cdot 10^{-4}$ und $i_{max} = 10$.

Es ist jeweils die Anzahl der notwendigen Iterationen bis zur Konvergenz über die Anzahl der gültigen Zeitschritte k aufgetragen, zu denen eine Schätzung stattfindet. Die Daten sind dem Beispiel aus Abbildung 3.38 entnommen.

Im Gegensatz zum gewöhnlichen LSeV-Verfahren benötigt die Berechnung der IRLS-Methode mehrere Iterationen (Abbildung 3.39 a)). Da in jedem Zeitschritt die Berechnung ohne Vorwissen über die letzte Parameterschätzung durchgeführt wird, werden ca. vier Iterationen für die Lösung benötigt.

Laut Abbildung 3.38 nähert sich die suboptimale Lösung des RIRLS-Verfahrens der optimalen IRLS-Lösung bei längerer Schätzzeit. Hintergrund ist die rekursive Berechnung der Schätzung, welche auf dem vorherigem Ergebnis basiert. Da der Parametervektor nahezu konstant ist, fällt im konvergierten Zustand die Änderung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitschritten gering aus. Dadurch benötigt das RIRLS-Verfahren weniger Iterationen zur Berechnung der Lösung (Abbildung 3.39 b)) als das IRLS-Verfahren mit Offline-Berechnung. In den meisten Fällen reicht sogar eine Iteration aus. Lediglich zu Beginn der Schätzung, wenn der geschätzte Parameter stark vom tatsächlichen Parameter abweicht, kommt es zu deutlich mehr Iterationen.

Abschließend können die Eigenschaften des RLM-Algorithmus zusammengefasst werden. Das RLM-Verfahren besitzt einige theoretische Nachteile:

- Suboptimale Lösung
- Gleicher Bruchpunkt $bp = 0\%$ wie beim gewöhnlichen LS-Verfahren

Trotzdem zeigt das Verfahren im Einsatz deutliche Vorteile:

- Reduzierter Rechenaufwand gegenüber der optimalen IRLS-Lösung
- Robustheit gegenüber Messausreißern
- Schnelle Konvergenz

Die Vorteile des RLM-Verfahrens, trotz der suboptimalen Lösung, werden von Vega et al. [89] bestätigt. Laut Zoubir et al [66] sind M-Schätzer, je nach Gewichtungsfunktion, robust gegenüber vertikalen Ausreißern jedoch nicht gegenüber schlechten Hebelpunkten. Laut dem Streudiagramm in Abbildung 3.18 treten bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung nur vereinzelt schlechte Hebelpunkte auf. Abbildung 3.20 stellt ebenfalls dar, dass schlechte Hebelpunkte (Bereich ③) kaum auftreten. Die geringe Anzahl der schlechten Hebelpunkte führt nicht zu einer relevanten Parameterabweichung beim M-Schätzer.

3.5.2 Robustheit bei geringer Anregung

Abschnitt 3.4.3 beschreibt das Zustandekommen von Schätzer-Windup durch Phasen mit ungenügender Anregung bei konstanter Geschwindigkeit. Dieser Abschnitt zeigt verschiedene Verfahren, den RLSeV-Algorithmus zu erweitern, um bei Phasen mit schlechter Anregung das Windup zu vermeiden. Für die Vorstellung der unterschiedlichen Verfahren unterteilt dieser Abschnitt die Methoden nach ihrer Wirkungsweise:

- Variation des Vergessensfaktors
- Anpassung der Spur der Kovarianzmatrix \mathbf{P}
- Beeinflussung der Kovarianzmatrix \mathbf{P}
- Regularisierung des LS-Problems

3.5.2.1 Variation des Vergessensfaktors

Das Kovarianz-Windup entsteht durch Phasen mit ungenügender Anregung in Zusammenhang mit einem Vergessensfaktor $\lambda < 1$, wodurch die Kovarianzmatrix nach (3.67b) ständig anwächst. Anstatt einen konstanten Vergessensfaktor zu verwenden, bei welchem kontinuierlich Messungen entfallen, kann der Vergessensfaktor variiert werden.

Beim RLS-Verfahren mit **Vergessen durch den Vorhersagefehler** nach Fortescue wird der Vergessensfaktor abhängig von $\phi[k]$ zu

$$\lambda[k] = \max(\lambda_0, \alpha[k]) \quad (3.143a)$$

$$\alpha[k] = 1 - \frac{1}{\Sigma_0} \left(1 - \phi^T[k] \gamma[k]\right) e^2[k] \quad (3.143b)$$

gewählt, mit [26, S. 340-341]

$$\Sigma_0 = \sigma_e^2 N_0, \quad N_0 = \frac{1}{\lambda_0}. \quad (3.144)$$

Die Motivation für diese Wahl von $\lambda[k]$ ist das schnellere Vergessen alter Daten bei großen Modellfehlern $e[k]$. Für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung ist das Verfahren weniger geeignet, da der variable Vergessensfaktor $\lambda[k]$ nicht für die Kompensation schlechter Anregung entworfen ist. Außerdem wirkt der Vergessensfaktor λ auf alle Elemente des Regressors gleich und berücksichtigt nicht die unterschiedliche Anregung in den einzelnen Elementen von $\phi[k]$.

Beim **gerichteten Vergessen** nach Kulhavý und Kárný [90] entfallen alte Messungen dann, wenn die Richtung der neuen Information im Parameterraum liegt. Dazu wird der

inverse Vergessensfaktor [91]

$$\lambda^{-1}[k] = \begin{cases} \lambda - \frac{(1-\lambda)}{\boldsymbol{\phi}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \boldsymbol{\phi}[k]} & \text{für } \boldsymbol{\phi}[k] \neq \mathbf{0} \\ 1 & \text{für } \boldsymbol{\phi}[k] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.145)$$

verwendet. Bittanti et al. [92] kombinieren das Verfahren mit gerichtetem Vergessen und Vergessen durch den Vorhersagefehler, indem nicht der Benutzer den konstanten Wert für λ in Gleichung (3.145) einstellt, sondern dieser durch den Ausdruck (3.143) berechnet wird. Das Konvergenzverhalten dieses Verfahrens wird in [93] und [94] untersucht.

Unterschiedliche Vergessenheitsfaktoren $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ für jeden einzelnen Parameter lassen sich beim **RLSmV**-Verfahren nach Vahidi et al. [31], [32], [2] für die Masse- und Steigungsschätzung einstellen. Für die Schätzung von zwei Parametern lautet das Gütemaß

$$J(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda_1^{N-k} (y[k] - \phi_1[k] \hat{\theta}_1 - \phi_2[k] \theta_2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda_2^{N-k} (y[k] - \phi_1[k] \theta_1 - \phi_2[k] \hat{\theta}_2)^2. \quad (3.146)$$

Anhand des ersten (zweiten) Terms der Kostenfunktion wird nur der erste (zweite) Parameter geschätzt. Bei der rekursiven Form des Algorithmus wird als Näherung für den notwendigen, aber unbekanntem Wert des zweiten Parameters $\theta_2[k]$ die Schätzung aus dem vorherigen Zeitschritt $\hat{\theta}_2[k-1]$ verwendet. Auf gleiche Weise wird der zweite Parameter geschätzt, indem $\theta_1[k]$ durch $\hat{\theta}_1[k-1]$ genähert wird.

Für die rekursive Schätzung mehrerer Parameter ergibt sich Algorithmus 3.4 [11]. Der

Algorithmus 3.4 Recursive Least Squares mit mehrfachem Vergessen (RLSmV)

Eingang: $y[k]$, $\boldsymbol{\phi}[k]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$, $\mathbf{P}[k-1]$, $\boldsymbol{\lambda}$

$$1: \gamma_i[k] = \frac{(p_{ii}[k-1] \phi_i[k]) / \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n p_{ii}[k-1] \phi_i^2[k] / \lambda_i} \quad \text{für } i \in [1, \dots, n]$$

$$2: \hat{\boldsymbol{\theta}}[k] = \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\gamma}[k] (y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1])$$

$$3: p_{ii}[k] = (1 - \gamma_i[k] \phi_i[k]) / \lambda_i \quad \text{für } i \in [1, \dots, n]$$

Ausgang: $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$, $\mathbf{P}[k]$

Vorteil des RLSmV-Algorithmus besteht darin, dass jeder Parameter mit einem unterschiedlichen Vergessensfaktor gewichtet wird. Somit wird bei der ursprünglichen Verwendung für die Masse- und Steigungsschätzung berücksichtigt, dass die Masse für eine Fahrt konstant ist, die Steigung sich aber deutlich stärker ändert. Für die Masse eignet sich somit ein hoher Wert für λ , um alte Messungen zu berücksichtigen und eine stabile

Schätzung zu erhalten. Um die Straßenneigung schneller anzupassen, wird der Vergessensfaktor für die Steigung geringer gewählt. Beim gewöhnlichen RLSeV-Verfahren mit nur einem Vergessensfaktor für Masse und Steigung wird bei einem zu hohen λ -Wert die Straßenneigung nicht adaptiert oder bei zu geringem λ die Masseschätzung durch die Steigungsadaption negativ beeinflusst.

Das RLSmV-Verfahren besitzt den Nachteil, dass es keine ideale Lösung im Sinne einer Optimierung darstellt. Ein theoretischer Beweis für die Konvergenz des Verfahrens besteht nicht. Außerdem wird durch die Einführung eines eigenen Vergessensfaktors für jedes Element nach Gütemaß (3.146) die Parameterschätzung entkoppelt. Daraus resultiert auch die diagonalförmige \mathbf{P} -Matrix in Zeile 3 von Algorithmus 3.4. Durch die Entkopplung haben die Parameter keinen direkten Einfluss mehr untereinander. Die Entkopplung erweist sich bei der Masse- und Steigungsschätzung als Vorteil, da sich die Steigung stark ändern kann im Vergleich zur Fahrzeugmasse. Bei der Schätzung der konstanten Fahrzeugmasse und den Fahrwiderständen ist eine Kopplung der Parameterschätzung hingegen vorteilhaft.

3.5.2.2 Anpassung anhand der Spur der skalierten Kovarianzmatrix \mathbf{P}

Das Resultat von Phasen mit ungenügender Anregung ist das Windup der skalierten Kovarianzmatrix für $\lambda < 1$. Das Anwachsen der \mathbf{P} -Matrix ist nicht gewollt, da hierdurch der Schätzalgorithmus sensitiv auf Messrauschen und wiederkehrende Anregungsphasen reagiert. Eine Möglichkeit, dem Windup-Effekt entgegenzuwirken, ist die Anpassung der \mathbf{P} -Matrix durch **Skalierung mit der Spur**.

$$\text{spur}(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n p_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_{EW,i} \quad (3.147)$$

Die Spur einer Matrix berechnet sich aus der Summe aller Diagonaleinträge, was gleichzeitig der Summe aller Eigenwerte, hier mit $\lambda_{EW,i}$ bezeichnet, entspricht. Um das Ausdehnen der \mathbf{P} -Matrix zu vermeiden, wird sie nach Salgado et al. [95] bei jeder Aktualisierung skaliert, um die Spur konstant zu halten. Nach Åström und Wittenmark [68, S. 477] kann zusätzlich zur Skalierung auch noch ein Vielfaches der Einheitsmatrix addiert werden.

$$\mathbf{P}[k] = c_1 \frac{\bar{\mathbf{P}}[k]}{\text{spur}(\bar{\mathbf{P}}[k])} + c_2 \mathbf{I} \quad c_1 > 0, \quad c_2 \geq 0 \quad (3.148)$$

Die Matrix $\bar{\mathbf{P}}[k]$ entspricht dabei der skalierten Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[k]$ aus Zeile 4 im RLS-Algorithmus 2.1. Der Anwender kann über die Parameter c_1 und c_2 das Verhalten der Spurskalierung einstellen. Dieses Verfahren beschränkt die Eigenwerte der \mathbf{P} -Matrix

nach oben, wodurch es nicht zum Windup-Effekt kommt. Der zweite Term $c_2 \mathbf{I}$ ist notwendig, damit die Eigenwerte von \mathbf{P} nicht gegen null konvergieren. Damit wirkt der zusätzliche Ausdruck wie das Vergessen. Als nachteilig stellt sich die mangelnde theoretische Grundlage dar, sowie die richtige Wahl von c_1 und c_2 .

Eine weitere Möglichkeit, das Windup zu vermeiden, stellt nach Krus und Gunnarsson [96] die **Limitierung der Spur** auf einen Maximalwert \mathbf{P}_{max} dar. Die Limitierung wird über die Wahl des Vergessensfaktors

$$\lambda[k] = 1 - (1 - \lambda_0) \left(1 - \frac{\text{spur}(\mathbf{P}[k])}{\text{spur}(\mathbf{P}_{max})} \right) \quad (3.149)$$

erreicht. Wenn bei mangelnder Anregung die skalierte Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[k]$ sich der oberen Grenze \mathbf{P}_{max} nähert, so gilt $\lambda[k] \rightarrow 1$, wodurch alte Daten nicht mehr vergessen werden und die \mathbf{P} -Matrix nicht mehr weiter wächst. Für ausreichende Anregung gilt $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{0}$, was zu $\lambda[k] \rightarrow \lambda_0$ führt. Die Wahl $\lambda_0 < 1$ bei guter Anregung sorgt für die Adaption veränderlicher Parameter. Diese Verfahren unterscheidet allerdings nicht, in welchem Element von ϕ geringe Anregung auftritt.

3.5.2.3 Beeinflussung der skalierten Kovarianzmatrix

Cao und Schwartz [97], [98] entwickeln ein alternatives **gerichtetes Vergessen**, welches nicht auf der Anpassung des Vergessensfaktors wie in Gleichung (3.143a) oder (3.145) basiert. Die Idee hinter dem Verfahren von Cao und Schwartz ist, das Vergessen nicht für jede Messung gleich zu gestalten, sondern abhängig von der Richtung der Anregung $\phi[k]$ auf die einzelnen Dimensionen von \mathbf{R} anzuwenden. Ist nur ein Element von $\phi[k]$ Null, so soll das Entfallen alter Messungen nicht in diese Richtung der Informationsmatrix \mathbf{R} stattfinden. Damit wird die Konvergenz der Matrix \mathbf{R} oder einzelner Richtungen der Matrix gegen Null wie in Gleichung (3.68) unterbunden. Dazu wird die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}[k] = \bar{\mathbf{P}}[k-1] - \frac{\bar{\mathbf{P}}[k-1]\phi[k]}{\underbrace{1 + \phi^T[k]\bar{\mathbf{P}}[k-1]\phi[k]}_{\gamma[k]}} \phi^T[k]\bar{\mathbf{P}}[k-1] \quad (3.150)$$

berechnet, welche, bis auf die modifizierte $\bar{\mathbf{P}}$ -Matrix, der Gleichung (2.45) für den gewöhnlichen RLS-Algorithmus entspricht.

$$\bar{\mathbf{P}}[k-1] = \begin{cases} \mathbf{P}[k-1] + \frac{1-c}{c} \frac{\phi[k]\phi^T[k]}{\phi^T[k]\mathbf{P}^{-1}[k-1]\phi[k]} & \text{für } |\phi[k]| > \varepsilon \\ \mathbf{P}[k-1] & \text{für } |\phi[k]| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.151)$$

Bei geringer Anregung mit $|\phi[k]| \leq \varepsilon$ wird der Algorithmus mit gerichtetem Vergessen zum gewöhnlichen RLS-Verfahren und das Windup-Problem tritt nicht auf. Bei vorhandener Anregung $|\phi[k]| > \varepsilon$ werden über den zusätzlichen Term nur die alten Messungen in Richtung der vorhandenen Anregung vergessen.

Cao und Schwartz [99], [100] entwickeln das Verfahren mit gerichtetem Vergessen weiter, um die Invertierung von \mathbf{P} in (3.151) zu vermeiden. Die Kovarianzmatrix bestimmt sich aus

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}[k-1] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}{\underbrace{r + \phi^T[k]\mathbf{P}[k-1]\phi[k]}_{\gamma[k]}} \phi^T[k]\mathbf{P}[k-1] + \mathbf{Q}[k], \quad (3.152)$$

was der Formel für \mathbf{P} des Kalman-Filters entspricht [30, S. 128-129]. Während beim Kalman-Filter \mathbf{Q} eine konstante Kovarianzmatrix eines Random-Walk-Modells darstellt, wird sie beim erweiterten gerichteten Vergessen abhängig von der Anregung $\phi[k]$ gewählt. Die Berechnung von \mathbf{Q} erfolgt direkt über

$$\mathbf{Q}[k] = \frac{c_1\phi[k]\phi^T[k]}{c_2 + \phi^T[k]\phi[k]} \quad (3.153)$$

oder rekursiv durch

$$\mathbf{Q}[k] = \lambda\mathbf{Q}[k-1] + \frac{c_1\phi[k]\phi[k]}{c_2 + \phi^T[k]\phi[k]}. \quad (3.154)$$

Durch diese beiden Möglichkeiten von $\mathbf{Q}[k]$ wird sichergestellt, dass die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[k]$ nach unten und nach oben begrenzt ist. Die Begrenzung nach unten sorgt dafür, dass der Algorithmus Änderungen in den Parametern adaptieren kann. Das Kovarianz-Windup wird durch die obere Grenze unterbunden. Diese Verfahren benötigen für die Berechnung von \mathbf{Q} zusätzlichen Rechen- und Speicheraufwand.

Stenlund und Gustafsson [69] stellen eine weitere Berechnung von \mathbf{Q} für das gerichtete Vergessen dar.

$$\mathbf{Q}[k] = \frac{\mathbf{P}_{SG}\phi[k]\phi^T[k]\mathbf{P}_{SG}}{\lambda + \phi^T[k]\mathbf{P}_{SG}\phi[k]} \quad (3.155)$$

Diese Wahl von $\mathbf{Q}[k]$ enthält als Spezialfall die Berechnung von $\mathbf{Q}[k]$ nach Gleichung (3.153) für $\mathbf{P}_{SG} = c_1\mathbf{I}$ und $\lambda = c_1c_2$. Der Stenlund-Gustafsson (SG)-Kalman-Filter sorgt dafür, dass die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[k]$ bei guter Anregung zur Sollmatrix \mathbf{P}_{SG} konvergiert. Da die Kovarianzmatrix nicht kleiner wird, können Parameteränderungen adaptiert werden. Bei schlechter Anregung hingegen verbleibt die $\mathbf{P}[k]$ -Matrix auf dem aktuellen Wert, wodurch Windup verhindert wird. Die SG-Erweiterung funktioniert somit wie ein Regler, der versucht, die Regelgröße \mathbf{P} auf die Sollgröße \mathbf{P}_{SG} einzuregeln. Evestedt und Medvedev [101], [102], [103], [104] untersuchen die Konvergenz des SG-Verfahrens.

Abbildung 3.40 verdeutlicht die Funktionsweise der SG-Erweiterung am gleichen Beispiel wie in Abbildung 3.23. Das gewöhnliche RLSeV-Verfahren und die SG-Erweiterung

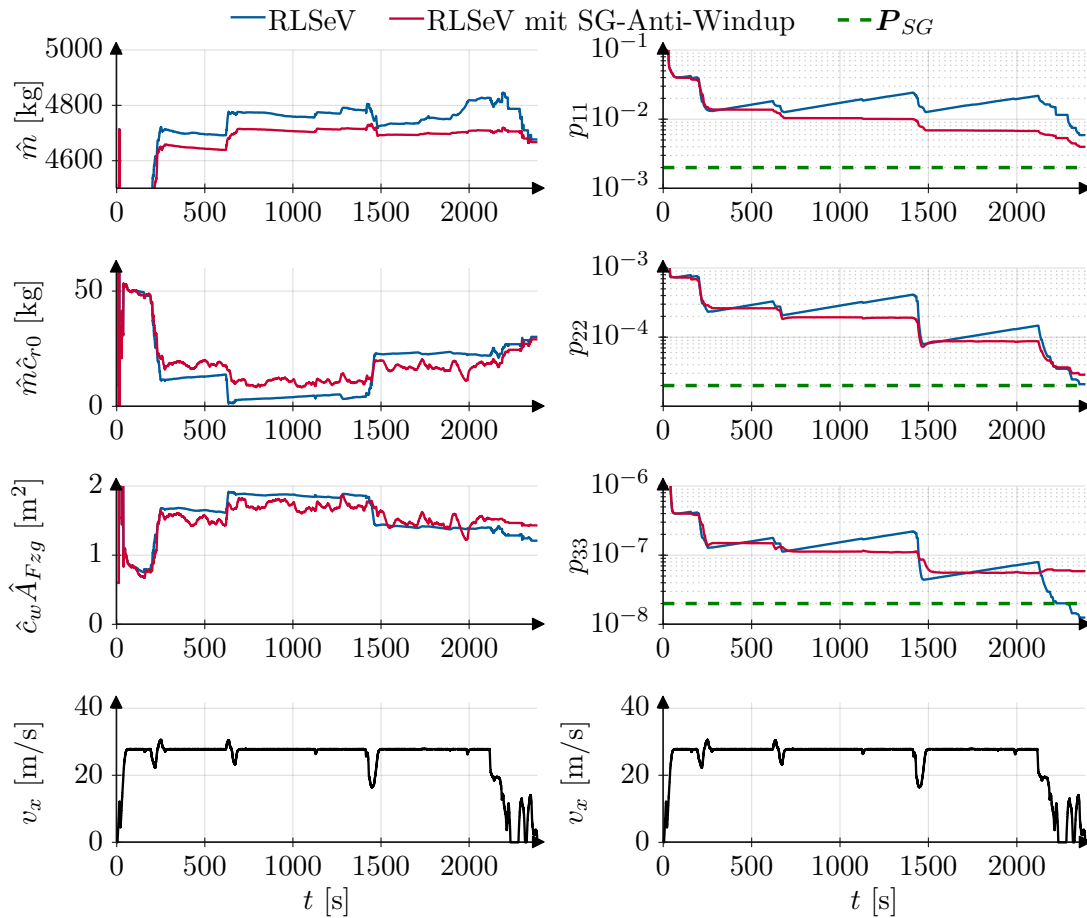


Abbildung 3.40: Vergleich von RLSeV mit und ohne SG-Anti-Windup

verwenden die gleichen Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\hat{\theta}[0] = \mathbf{0}$ und $P[0] = 10^6 \cdot I$. Als zusätzlichen Einstellparameter im Vergleich zum RLSeV besitzt das SG-Verfahren den Sollwert für P , welcher als $P_{SG} = \text{diag}(2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-8})$ gewählt wird.

In Phasen schlechter Anregung, in denen die Geschwindigkeit konstant ist, wächst die P -Matrix beim gewöhnlichen RLSeV-Verfahren (—) durch den Windup-Effekt (Abbildung 3.40 rechte Spalte). Die SG-Erweiterung (3.155) (—) kompensiert das Windup, indem das Vergessen nicht konstant ist, sondern die Berechnung von $Q[k]$ die Anregung in ϕ berücksichtigt. Bei guter Anregung wird die SG-Erweiterung versuchen, den Wert von P_{SG} (---) zu erreichen bzw. zu halten, wodurch auch nach langer Schätzzeit eine Adaption veränderlicher Parameter möglich ist. Durch die Kompensation besitzt das RLSeV-Verfahren mit der SG-Erweiterung keine ungewollten Abweichungen und ist somit robust gegenüber Phasen mit geringer Anregung.

Allerdings ist die Varianz in der Schätzung von $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ und $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ deutlich größer als beim gewöhnlichen RLSeV-Verfahren (Abbildung 3.40 linke Spalte). Weitere Nachteile des SG-Verfahrens sind, neben der geringeren Konvergenzgeschwindigkeit der Kovarianzmatrix, der relative hohe Aufwand für die Berechnung von \mathbf{Q} nach Gleichung (3.155) und die Einstellung von \mathbf{P}_{SG} .

3.5.2.4 Regularisierung des Least Squares Problems

Die **Tikhonov-Regularisierung** fügt einen zusätzlichen Term zum Gütemaß hinzu, welcher die Parameterschätzung mit einer positiv definiten Matrix $\mathbf{\Sigma}_{Reg}$ gewichtet. [26, S. 284]

$$J(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} e(\hat{\boldsymbol{\theta}})^2[k] + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{e}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.156)$$

Die Regularisierung im Gütemaß sorgt dafür, dass bei mangelnder Anregung die Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nicht wegdriftet und zu große Werte annimmt. Alternativ kann die Regularisierung für die Bestimmung der Modellgröße wie in Kapitel 3.4.1 verwendet werden. Die Modellparameter, welche nicht das Eingangs-Ausgangs-Verhaltens beschreiben, werden durch die Regularisierung zu Null geschätzt.

Die hier verwendete Gewichtungsmatrix besitzt die Form einer Diagonalmatrix $\mathbf{\Sigma}_{Reg} = \text{diag}(\sigma_{Reg,1}, \dots, \sigma_{Reg,n})$. Damit kann der Anwender für jeden Parameter $\hat{\theta}_i$ eine eigene Regularisierungsgewichtung $\sigma_{Reg,i}$ vorgeben.

Für die Offline-Lösung des Optimierungsproblems (3.156) wird zunächst $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} J(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{\Lambda} (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Sigma}_{Reg}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (3.157)$$

Für die Berechnung der Lösung wird der Gradient dieses Gütemaßes zu Null gesetzt.

$$\frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Sigma}_{Reg}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.158)$$

Die Offline-Lösung von (3.156) lautet

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Sigma}_{Reg})}_{\mathbf{R}_{Reg}}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}. \quad (3.159)$$

Die Regularisierungsmatrix $\mathbf{\Sigma}_{Reg}$ sorgt dafür, dass die Informationsmatrix \mathbf{R}_{Reg} nicht wie in Gleichung (3.68) bei mangelnder Anregung zu Null konvergiert. Da $\mathbf{R}_{Reg} \geq \mathbf{\Sigma}_{Reg}$ gilt, ist die Bedingung an fortdauernde Anregung nach Ausdruck (3.64) erfüllt.

Für eine echtzeitfähige Anwendung der Regularisierung auf einem eingebetteten System ist die Offline-Lösung (3.159) ungeeignet. Deshalb zeigt der weitere Verlauf die Verwendung der Regularisierung für das rekursive Schätzverfahren. Die Herleitung des RLSeV-Schätzers mit Tikhonov-Regularisierung spaltet im ersten Schritt die Berechnung der Informationsmatrix auf.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{Reg}[k] &= \mathbf{\Phi}^T[k]\mathbf{\Lambda}[k]\mathbf{\Phi}[k] + \mathbf{\Sigma}_{Reg} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T[k-1] & \phi[k-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{\Lambda}[k-1] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}[k-1] \\ \phi^T[k] \end{bmatrix} + \mathbf{\Sigma}_{Reg} \\
&= \lambda\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{\Phi}[k-1] + \phi[k]\phi^T[k] + \mathbf{\Sigma}_{Reg} \\
&= \lambda\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{\Phi}[k-1] + \lambda\mathbf{\Sigma}_{Reg} + \phi[k]\phi^T[k] + \mathbf{\Sigma}_{Reg} - \lambda\mathbf{\Sigma}_{Reg} \\
&= \lambda \underbrace{\left(\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{\Phi}[k-1] + \mathbf{\Sigma}_{Reg} \right)}_{\mathbf{R}_{Reg}[k-1]} + \phi[k]\phi^T[k] + (1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg} \\
&= \lambda\mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \phi[k]\phi^T[k] + (1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg}
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Diese Formel stellt den rekursiven Zusammenhang zwischen $\mathbf{R}_{Reg}[k]$ und $\mathbf{R}_{Reg}[k-1]$ her. Der zweite Teil der Herleitung für den rekursiven Algorithmus enthält die Rekursion der Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Dafür wird die Gleichung (3.159) aufgespalten.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \left(\mathbf{\Phi}^T[k]\mathbf{\Lambda}[k]\mathbf{\Phi}[k] + \mathbf{\Sigma}_{Reg} \right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T[k]\mathbf{\Lambda}[k]\mathbf{y}[k] \\
&= \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T[k-1] & \phi[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{\Lambda}[k-1] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}[k-1] \\ y[k] \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \left(\lambda\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{y}[k-1] + \phi[k]y[k] \right)
\end{aligned} \tag{3.161}$$

Für die Herstellung des rekursiven Zusammenhangs zwischen $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ und $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$ wird zunächst die Schätzung zum Zeitschritt $k-1$ umgeschrieben.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] &= \left(\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{\Phi}[k-1] + \mathbf{\Sigma}_{Reg} \right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{y}[k-1] \\
&= \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k-1]\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{y}[k-1] \\
&\quad \Downarrow \\
\mathbf{\Phi}^T[k-1]\mathbf{\Lambda}[k-1]\mathbf{y}[k-1] &= \mathbf{R}_{Reg}[k-1]\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Dieser Ausdruck wird in Gleichung (3.161) eingesetzt.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[k] = \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \left(\lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \right) \quad (3.163)$$

Der nächste Schritt ersetzt den Ausdruck $\lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1]$ durch Größen im aktuellen Zeitschritt k . Dazu wird die Gleichung (3.160) umgeformt.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{Reg}[k] &= \lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] + (1-\lambda) \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \\ &\Updownarrow \\ \lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] &= \mathbf{R}_{Reg}[k] - \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] - (1-\lambda) \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \end{aligned} \quad (3.164)$$

Dieser Ausdruck wird in Gleichung (3.163) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k] &= \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \left[\left(\mathbf{R}_{Reg}[k] - \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] - (1-\lambda) \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \right] \\ &= \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \left(\mathbf{R}_{Reg}[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - (1-\lambda) \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \right) \\ &= \underbrace{\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \mathbf{R}_{Reg}[k]}_{\mathbf{I}} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] - \\ &\quad - (1-\lambda) \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\phi}[k] y[k] \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \underbrace{\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\phi}[k]}_{\boldsymbol{\gamma}_{Reg}[k]} \underbrace{\left(y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] \right)}_{e[k]} - (1-\lambda) \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] \end{aligned} \quad (3.165)$$

Die Gleichungen (3.160) und (3.165) ergeben zusammen den Algorithmus 3.5, welcher die rekursive Form des RLSeV-Algorithmus mit Tikhonov-Regularisierung beschreibt. [105], [106]

Algorithmus 3.5 Recursive Least Squares mit exponentiellem Vergessen (RLSeV) und Tikhonov-Regularisierung

Eingang: $y[k]$, $\boldsymbol{\phi}[k]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$, $\mathbf{R}_{Reg}[k-1]$, λ , $\boldsymbol{\Sigma}_{Reg}$

- 1: $e[k] = y[k] - \boldsymbol{\phi}^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$
- 2: $\mathbf{R}_{Reg}[k] = \lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \boldsymbol{\phi}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] + (1-\lambda) \boldsymbol{\Sigma}_{Reg}$
- 3: $\boldsymbol{\gamma}_{Reg}[k] = \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\phi}[k]$
- 4: $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k] = \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \boldsymbol{\gamma}_{Reg}[k] e[k] - (1-\lambda) \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] \boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$

Ausgang: $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$, $\mathbf{R}_{Reg}[k]$

Im Vergleich zum gewöhnlichen RLSeV-Algorithmus 2.2 verwendet das Verfahren mit der Tikhonov-Regularisierung die Informationsmatrix $\mathbf{R}_{Reg}[k]$ anstatt der Kovarianzmatrix \mathbf{P} (Zeile 2, Algorithmus 3.5). Die Gewichtungsmatrix der Regularisierung $\boldsymbol{\Sigma}_{Reg}$ wird

bei der Berechnung der Informationsmatrix berücksichtigt. Die Invertierung der Informationsmatrix für die Berechnung des Verstärkungsfaktors $\gamma_{Reg}[k]$ ist rechenaufwändig (Zeile 3, Algorithmus 3.5). Die Subtraktion des zusätzlichen Terms bei der Berechnung der Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$ (Zeile 4, Algorithmus 3.5) sorgt dafür, dass bei mangelnder Anregung die Parameter zu Null tendieren [13, S. 52].

Die **Regularisierung nach Levenberg und Marquard** (LM-Regularisierung) [105] behält bei ungenügender Anregung die Parameterschätzung bei, anstatt die Schätzwerte gegen Null zu konvergieren. Dazu wird bei der Aktualisierung der Parameterschätzung der zusätzliche Term $(1 - \lambda)\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k]\boldsymbol{\Sigma}_{Reg}\hat{\boldsymbol{\theta}}[k - 1]$ in der vierten Zeile des Algorithmus 3.5 weggelassen, wodurch die Berechnung der Schätzung identisch zum gewöhnlichen RLSeV-Verfahren erfolgt. Die Berechnung der Informationsmatrix $\mathbf{R}_{Reg}[k]$ von LM-Regularisierung und Tikhonov-Regularisierung ist identisch.

Um die Invertierung von $\mathbf{R}[k]$ in Algorithmus 3.5 zu vermeiden, wendet Gunnarsson [107], [108] das Matrixinversions-Lemma auf die Berechnung der Informationsmatrix an (Zeile 2, Algorithmus 3.5).

$$\mathbf{R}_{Reg}[k] = \underbrace{\lambda\mathbf{R}_{Reg}[k - 1] + \boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k]}_{\bar{\mathbf{R}}_{Reg}[k]} + (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \quad (3.166)$$

Zunächst erfolgt in einem ersten Schritt die Umwandlung von

$$\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] = \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1}[k] = \left(\lambda\mathbf{R}_{Reg}[k - 1] + \boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1} \quad (3.167)$$

anhand des Matrixinversions-Lemmas aus Gleichung (2.42) mit den Analogien

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{R}_{Reg}[k - 1] \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\phi}[k] \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} = 1 \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\phi}^T[k] \quad . \quad (3.168)$$

Damit ergibt sich $\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k]$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] &= \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1}[k] = \left(\lambda\mathbf{R}_{Reg}[k - 1] + \boldsymbol{\phi}[k]\boldsymbol{\phi}^T[k] \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1] - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1]\boldsymbol{\phi}[k] \left(1 + \boldsymbol{\phi}^T[k]\frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1]\boldsymbol{\phi}[k] \right)^{-1} \boldsymbol{\phi}^T[k]\frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1] = \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1]\boldsymbol{\phi}[k]}{1 + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1]\boldsymbol{\phi}[k]} \boldsymbol{\phi}^T[k] \right) \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k - 1] \frac{1}{\lambda} = \\ &= \left(\mathbf{I} - \underbrace{\frac{\mathbf{P}_{Reg}[k - 1]\boldsymbol{\phi}[k]}{\lambda + \boldsymbol{\phi}^T[k]\mathbf{P}_{Reg}[k - 1]\boldsymbol{\phi}[k]}}_{\gamma_{Reg}[k]} \boldsymbol{\phi}^T[k] \right) \mathbf{P}_{Reg}[k - 1] \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.169)$$

Ein zweiter Schritt formt den Ausdruck

$$\mathbf{P}_{Reg}[k] = \mathbf{R}_{Reg}[k]^{-1} = \left[\bar{\mathbf{R}}_{Reg}[k] + (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \right]^{-1}, \quad (3.170)$$

welcher aus Gleichung (3.166) stammt um. Dabei kommt das Matrixinversions-Lemma (2.42) mit

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{P}}_{Reg}^{-1}[k] \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} \quad \mathbf{D} = (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \quad (3.171)$$

zum Einsatz.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{Reg}[k] &= \left[\bar{\mathbf{R}}_{Reg}[k] + (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \right]^{-1} = \\ &= \left[\bar{\mathbf{P}}_{Reg}^{-1}[k] + (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \right]^{-1} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] - \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \mathbf{I} \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I}^{-1} \right]^{-1} (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \left\{ \mathbf{I} - \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \right\} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \left\{ \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \right\} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \left\{ \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} - (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \right] \right\} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \left\{ \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{I} \right\} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.172)$$

Mit den Gleichungen (3.169) und (3.172) lässt sich die Regularisierung anhand der Kovarianzmatrix \mathbf{P}_{Reg} schreiben anstatt mit der Informationsmatrix \mathbf{R}_{Reg} wie in der 2. Zeile von Algorithmus 3.5.

$$\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma_{Reg}[k] \boldsymbol{\phi}^T[k] \right) \mathbf{P}_{Reg}[k-1] \frac{1}{\lambda} \quad (3.173)$$

$$\mathbf{P}_{Reg}[k] = \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \left[(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} \right]^{-1} \quad (3.174)$$

Die Gleichungen (3.173) und (3.174) beschreiben ebenfalls die Funktionsweise der Regularisierung auf anschauliche Weise. Bei mangelnder Anregung führt der Vergessensfaktor in (3.173) zu einem Anwachsen der gewöhnlichen Kovarianzmatrix $\bar{\mathbf{P}}[k]$. Gleichung (3.174) sorgt mit der Normierung $(1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{Reg} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] + \mathbf{I} > \mathbf{I}$ für eine Verringerung der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{Reg}[k]$ und gleicht somit das Windup aus.

Rhode [13, S. 52] verwendet die Gleichungen (3.173) und (3.174) für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung. Allerdings ist bei diesem Verfahren zur Berechnung der Regularisierung die Matrixinversion in (3.174) nachteilig für einen echtzeitfähigen Einsatz. Hintergrund für das Entfallen der Matrixinvertierung bei Anwendung des Matrixinversions-Lemmas auf Gleichung (2.49) beim gewöhnlichen RLS-Verfahren ist die Aktualisierung der Informationsmatrix mit $\phi[k]\phi^T[k]$, was einer Matrix mit Rang Eins entspricht. Dadurch wird aus der Invertierung im Matrixinversions-Lemma (2.42) eine gewöhnliche Division. Um bei der Regularisierung die Invertierung einer Matrix zu umgehen, muss die Berechnung der Informationsmatrix

$$\mathbf{R}_{Reg}[k] = \lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \phi[k]\phi^T[k] + (1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg} \quad (3.175)$$

aus Zeile 2 in Algorithmus 3.5 auf eine Aktualisierung mit Matrizen vom Rang Eins umgeformt werden. Dazu wandeln Ljung und Söderström [109, S. 361-365] den Term für die Regularisierung um.

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg} &= (1-\lambda) \begin{bmatrix} \sigma_{Reg,1} & & & \\ & \sigma_{Reg,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{Reg,n} \end{bmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\sigma_{Reg,1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + (1-\lambda)\sigma_{Reg,n} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\sigma_{Reg,1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1^T + \dots + (1-\lambda)\sigma_{Reg,n} \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n^T \end{aligned} \quad (3.176)$$

Damit kann in jedem Rechenschritt die Regularisierungsmatrix $(1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg}$ über n Additionen von Matrizen mit Rang Eins realisiert werden. Der Aufwand lässt sich noch weiter reduzieren, indem in jedem Zeitschritt nur eine der n Matrizen aus (3.176) addiert wird.

$$j = \text{mod}(k, n) + 1 \quad (3.177a)$$

$$\mathbf{R}_{Reg}[k] = \lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \phi[k]\phi^T[k] + n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j^T \quad (3.177b)$$

Hierbei ist $\text{mod}(k, n)$ die Modulfunktion, welche den Rest der Division k/n ausgibt.

Die reduzierte Formel für $\mathbf{R}_{Reg}[k]$ (3.177) ist nicht identisch zur ursprünglichen Berechnung von $\mathbf{R}_{Reg}[k]$ mit der Regularisierung (3.175). Nach jeweils n Zeitschritten hat die Modulofunktion (3.177a) die Werte $j \in [1, \dots, n]$ ausgegeben und für die näherungsweise Regularisierung in (3.177b) gilt

$$\sum_{k=l}^{l+n} n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j^T = n(1-\lambda)\sigma_{Reg,1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1^T + \dots + n(1-\lambda)\sigma_{Reg,n} \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n^T \quad (3.178)$$

$$\stackrel{(3.176)}{=} n(1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg}.$$

Nach n Zeitschritten ist die reduzierte Berechnung von $\mathbf{R}_{Reg}[k]$ (3.177) identisch zur ursprünglichen Aktualisierung (3.175). Im Mittel entspricht die Regularisierung über die einzelnen Diagonalelemente $n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j^T$ der Regularisierung mit der gesamten Matrix $(1-\lambda)\mathbf{\Sigma}_{Reg}$.

Die Aktualisierung für die Informationsmatrix (3.177) besteht aus zwei Additionen mit Matrizen vom Rang Eins anstatt der Addition einer Matrix vom Rang n . Das Matrixinversions-Lemma wird zweimal auf (3.177)

$$\mathbf{R}_{Reg}[k] = \underbrace{\lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \phi[k] \phi^T[k]}_{\bar{\mathbf{R}}_{Reg}[k]} + n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j^T \quad (3.179)$$

angewendet, um eine Gleichung ohne Matrixinversionen zu erhalten. Zunächst wird die Invertierung von $\bar{\mathbf{R}}_{Reg}[k]$ mit dem Matrixinversions-Lemma (2.42) umgestellt, was bereits in Gleichung (3.169) gezeigt ist.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] &= \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1}[k] = \left(\lambda \mathbf{R}_{Reg}[k-1] + \phi[k] \phi^T[k] \right)^{-1} = \\ &= \left(\mathbf{I} - \underbrace{\frac{\mathbf{P}_{Reg}[k-1] \phi[k]}{\lambda + \phi^T[k] \mathbf{P}_{Reg}[k-1] \phi[k]}}_{\gamma_{Reg}[k]} \phi^T[k] \right) \mathbf{P}_{Reg}[k-1] \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.180)$$

Diese Gleichung entspricht der gewöhnlichen Berechnung der $\mathbf{P}[k]$ -Matrix des RLSeV-Algorithmus 2.2. Im zweiten Schritt erfolgt die Berechnung der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{Reg}[k]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{Reg}[k] &= \mathbf{R}_{Reg}^{-1}[k] = \left[\bar{\mathbf{R}}_{Reg}[k] + n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j^T \right]^{-1} = \\ &= \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1}[k] - \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1}[k] \mathbf{i}_j \left(\frac{1}{n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j}} + \mathbf{i}_j^T \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1} \mathbf{i}_j \right)^{-1} \mathbf{i}_j^T \bar{\mathbf{R}}_{Reg}^{-1} \quad (3.181) \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \mathbf{i}_j}{\frac{1}{n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j}} + \mathbf{i}_j^T \bar{\mathbf{P}}_{Reg} \mathbf{i}_j} \mathbf{i}_j^T \right) \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] \end{aligned}$$

Lediglich diese Gleichung muss zusätzlich für die LM-Regularisierung oder die Tikhonov-Regularisierung berechnet werden. Bei der Verwendung dieser Zusatzberechnung muss

darauf geachtet werden, dass die Regularisierungsmatrix Σ_{Reg} keine Nulleinträge auf der Hauptdiagonalen besitzt. Sonst ist der Bruch $1/n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j}$ nicht mehr definiert. Laufen die Diagonaleinträge der Regularisierungsmatrix Σ_{Reg} gegen Null, so geht der Bruch gegen Unendlich. Damit wird der zweite Term in der Klammer von Gleichung (3.181) Null und es gilt $\mathbf{P}[k] = \bar{\mathbf{P}}[k]$. Somit konvergiert die LM-Regularisierung für $\Sigma_{Reg} \rightarrow \mathbf{0}$ gegen das gewöhnliche RLS-Verfahren.

Das RLSeV-Verfahren mit LM-Regularisierung, welches keine Matrixinversion benötigt, ist in Algorithmus 3.6 zusammengefasst. Bei mangelnder Anregung wird die Kovari-

Algorithmus 3.6 Recursive Least Squares mit exponentiellem Vergessen RLSeV mit LM-Regularisierung

Eingang: $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\theta}[k-1]$, $\mathbf{P}_{Reg}[k-1]$, λ , Σ_{Reg}

$$1: e[k] = y[k] - \phi^T[k]\hat{\theta}[k-1]$$

$$2: \gamma_{Reg}[k] = \frac{\mathbf{P}_{Reg}[k-1]\phi[k]}{\lambda + \phi^T[k]\mathbf{P}_{Reg}[k-1]\phi[k]}$$

$$3: \hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \gamma_{Reg}[k]e[k]$$

$$4: \bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma_{Reg}[k]\phi^T[k]\right)\mathbf{P}_{Reg}[k-1]\frac{1}{\lambda}$$

$$5: j = \text{mod}(k, n) + 1$$

$$6: \mathbf{P}_{Reg}[k] = \left(\mathbf{I} - \frac{\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k]\mathbf{i}_j}{\frac{1}{n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j}} + \mathbf{i}_j^T\bar{\mathbf{P}}_{Reg}\mathbf{i}_j}\mathbf{i}_j^T\right)\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k]$$

Ausgang: $\hat{\theta}[k]$, $\mathbf{P}_{Reg}[k]$

anzmatrix $\bar{\mathbf{P}}_{Reg}[k]$ in Zeile 4 größer und durch die Regularisierung in Zeile 6 wieder kleiner.

Abbildung 3.41 beschreibt die Funktionsweise der LM-Regularisierung am gleichen Beispiel wie in Abbildung 3.23. Für dieses Beispiel nutzt der Algorithmus 3.6 die Regularisierungsmatrix $\Sigma_{Reg} = \text{diag}(10^{-3}, 1, 1)$ und $\lambda = 0,9999$. Bei konstanter Geschwindigkeit und verschwindender Beschleunigung ist die Anregung sehr gering. Für die RLSeV-Schätzung (—) kommt es in diesen Phasen zu einem Anstieg bzw. Windup der Kovarianzmatrix, gekennzeichnet durch die Diagonaleinträge p_{ii} der Kovarianzmatrix (Abbildung 3.41, mittlere Spalte). Der Anstieg der Kovarianzmatrix entspricht einer Verkleinerung der Informationsmatrix $\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}$ bei geringer Anregung. Die Verringerung der \mathbf{R} -Matrix stellt den Informationsverlust durch den Vergessensfaktor dar. Alte Messungen mit hoher Beschleunigung werden für die Schätzung immer weniger berücksichtigt und neue Messungen besitzen keine Geschwindigkeitsänderung. Das Ansteigen der \mathbf{P} -Matrix bedeutet eine erhöhte Unsicherheit in der Parameterschätzung und kann über den Verstärkungsfaktor $\gamma[k]$ in (2.66) zu großen Parameteradaptation bei wiederkehrender

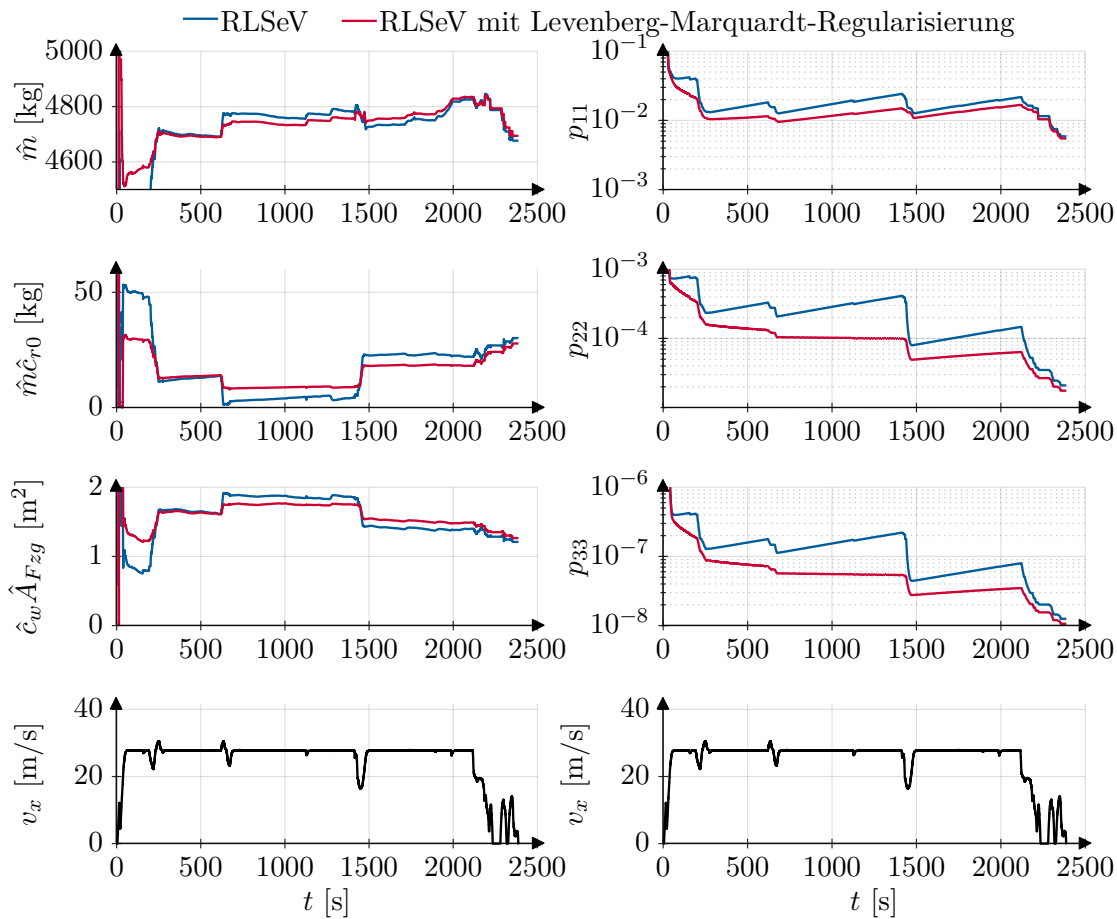


Abbildung 3.41: Vergleich von RLSeV-Verfahren mit und ohne LM-Regularisierung

Anregung führen. Durch die hohe Unsicherheit nach langer Konstantfahrt ermittelt der RLSeV-Algorithmus teilweise große Parameteränderungen bei kurzen Beschleunigungsphasen (Abbildung 3.41, linke Spalte). Da durch den Vergessensfaktor λ die Information aus vorherigen Beschleunigungen verloren geht, steht der Parameterschätzung nur wenig Information zur Verfügung. Dabei reichen die kurzen Beschleunigungsphasen nicht aus, um eine sinnvolle Schätzung zu berechnen. Es kommt zu deutlichen Abweichungen zu den bisher geschätzten Parametern. Dies führt in diesem Beispiel zu einem nicht sinnvollen Rollwiderstandskoeffizienten von $\hat{m}\hat{c}_{r0} \approx 0$ im Bereich um $t = 1000$ s. Da die Geschwindigkeit nahezu konstant ist, wird der Modellfehler $e[k]$, welcher aus dem falschen Rollwiderstandskoeffizienten entsteht, durch einen zu hohen Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ kompensiert.

Das RLSeV-Verfahren mit LM-Regularisierung (—) nach Algorithmus 3.6 verbessert die Parameterschätzung. Je nach Wahl der Regularisierungsmatrix Σ_{Reg} (3.176) wird das Windup von \mathbf{P}_{Reg} verringert oder vollständig kompensiert (Abbildung 3.41, rechte Spalte). Durch die Korrektur des Windup-Effekts ist die Schätzung mit LM-Regularisierung robuster gegenüber Phasen mit geringer Anregung. Dies zeigt sich durch die geringeren

Abweichungen in der Parameterschätzung (Abbildung 3.41, linke Spalte) im Vergleich zum gewöhnlichen RLSeV-Verfahren ohne Regularisierung.

3.5.3 Berücksichtigung von physikalischen Parametergrenzen

Die Parameterschätzung kann zusätzlich robust gestaltet werden, indem die RLS-Methode weitere Informationen über das System berücksichtigt. Die Schätzung im Beispiel aus Abbildung 3.15 kann durch die Bereitstellung von unteren und oberen Parameterschranken verbessert werden. Diese zusätzliche Information über einen physikalisch sinnvollen Wertebereich vermeidet die negative Schätzung des Luftwiderstandskoeffizienten im Bereich um $t = 600$ s. Gleiches gilt für den zu geringen Rollwiderstandskoeffizienten im Beispiel aus Abbildung 3.23 um $t = 1000$ s.

Die Parameterbeschränkung ist beschrieben durch die Ungleichungen

$$\boldsymbol{\theta}_{min} \leq \hat{\boldsymbol{\theta}} \leq \boldsymbol{\theta}_{max}, \quad (3.182)$$

wobei $\boldsymbol{\theta}_{min}$ ($\boldsymbol{\theta}_{max}$) die untere (obere) Grenze der Schätzung kennzeichnet.

Die Beschreibung von Optimierungsproblemen verwendet meist nur eine Ungleichung anstatt zweier wie in Gleichung (3.182). Durch Multiplikation der linken Ungleichung mit -1 ergibt sich aus (3.182) eine Darstellung mit einer Ungleichung.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\theta}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{max} \\ -\boldsymbol{\theta}_{min} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad (3.183)$$

Das gewöhnliche LS-Optimierungsproblem mit dem Gütemaß (2.18) wird durch diese Ungleichung zu einem quadratischen Optimierungsproblem unter einer Nebenbedingung (u. N.).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \quad (3.184)$$

u. N.: $\mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\theta}} \leq \mathbf{c}$

3.5.3.1 Einfache Parameterbeschränkung durch Projektion

Die einfachste Möglichkeit, die Bedingung an die Parameterbeschränkungen (3.182) zu erfüllen, ist das Zurücksetzen der freien Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_f$ auf die Grenzen, wenn diese überschritten werden. Die begrenzte Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj}$ berechnet sich für jeden Parameter

$i \in [1, \dots, n]$ einzeln über die Projektion

$$\hat{\theta}_{proj,i} = \max(\min(\hat{\theta}_{f,i}, \theta_{max,i}), \theta_{min,i}). \quad (3.185)$$

Diese einfache Projektion kann die Parametergrenzen extern oder intern einhalten. Bei der externen Parameterbeschränkung wird die Projektion nur für die Ausgabe der Schätzung nach außen angewendet. Intern rechnet der RLS-Algorithmus mit den unbeschränkten Größen weiter. Bei der internen Parameterbeschränkung verwendet das RLS-Verfahren die projizierten Ergebnisse für die Schätzung. Abbildung 3.42 verdeutlicht den Zusammenhang von interner und externer Parameterbeschränkung.

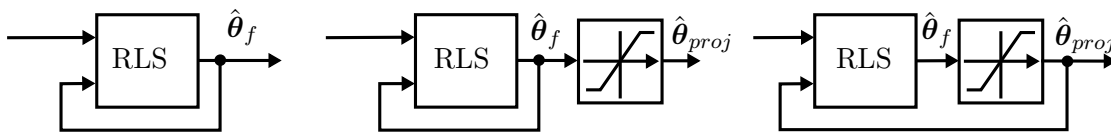


Abbildung 3.42: Anschauliche Darstellung von unbeschränkter Parameterschätzung (links), externer (Mitte) und interner (rechts) Parameterbeschränkung

Ein Nachteil der internen Parameterbeschränkung ist der Verlust der Optimalitätsbedingungen der LS-Lösung, was in Abbildung 3.43 dargestellt ist. Für das schematische

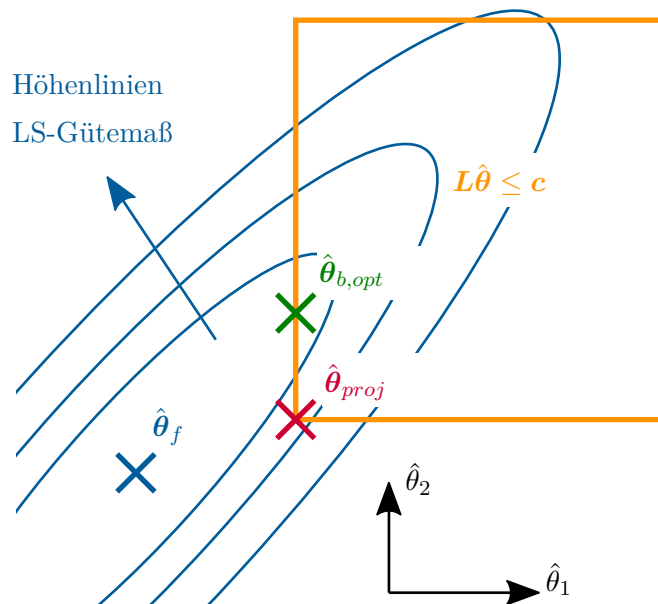


Abbildung 3.43: Abweichungen der beschränkten Schätzung durch einfache Projektion $\hat{\theta}_{proj}$ zur optimalen, begrenzten Schätzung $\hat{\theta}_{b,opt}$

Beispiel mit zwei geschätzten Parametern sind die Höhenlinien des LS-Gütemaßes als Ellipsen eingezeichnet und die freie Parameterschätzung $\hat{\theta}_f$ ist durch ein blaues Kreuz (\times) gekennzeichnet. Als Nebenbedingung $L\hat{\theta} \leq c$ müssen die Parameter innerhalb oberer und unterer Grenzwerte liegen, gekennzeichnet durch das orange Rechteck (\square). Da

die freie Parameterschätzung außerhalb des gültigen Bereichs liegt, projiziert die simple Parameterbeschränkung (3.185) das Ergebnis auf den Eckpunkt $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj}$. Dieser Wert erfüllt zwar die Nebenbedingungen, ist jedoch nicht optimal, da es andere Punkte innerhalb der Begrenzung gibt, welche einen geringeren Wert für das Gütemaß aufweisen. Der optimale Wert, welcher die Nebenbedingungen einhält, ist mit $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{b,opt}$ bezeichnet.

Die Methode der einfachen Projektion liefert keine optimalen Ergebnisse im Sinne des Optimierungsproblems (3.184) und sollte nicht verwendet werden. Eine Ausnahme bildet die Anwendung der einfachen Projektion auf das RLSmV-Verfahren (3.146). Da die Schätzung der Parameter voneinander entkoppelt ist, hat die Begrenzung eines Parameters keinen Einfluss auf die Schätzung der anderen Größen. Rhode und Gauterin [11] zeigen, dass die einfache Projektion das Ergebnis des RLSmV-Verfahrens aus Algorithmus 3.4 sogar verbessert.

3.5.3.2 Optimale Parameterbeschränkung durch Transformation und Projektion

Die Ellipsenform der Höhenlinien in Abbildung 3.43 ist der Grund für das suboptimale Resultat der einfachen Projektion. Für den Fall, dass die Höhenlinien auf Kreisbahnen verlaufen, würde die einfache Projektion optimale Ergebnisse liefern. Die Ausrichtung der Höhenlinien wird durch die Kovarianzmatrix \mathbf{P} beschrieben. Besitzt die Kovarianzmatrix \mathbf{P} gleich große Eigenwerte, dann verlaufen die Höhenlinien auf konzentrischen Kreisen.

Diese Eigenschaft nutzt das Verfahren der optimalen Projektion nach Goodwin und Sin [110, S. 91-94] und transformiert das Problem in einen Raum, in dem die Höhenlinien kreisförmig verlaufen. Die optimale Projektion besteht aus dem gewöhnlichen RLS-Algorithmus 2.1, welcher bei der Verletzung von Parameterbegrenzungen um drei Schritte erweitert wird.

1. Es wird eine Koordinatentransformation

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_f[k] = \mathbf{P}[k-1]^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\theta}}_f[k] \quad (3.186)$$

durchgeführt, mit

$$\mathbf{P}[k-1]^{-1} = \left(\mathbf{P}^T[k-1] \right)^{-1/2} \mathbf{P}[k-1]^{-1/2}. \quad (3.187)$$

Die gleiche Transformation wird auch auf die Parameterbeschränkung angewendet.

2. Die transformierte, freie Schätzung $\hat{\xi}_f[k]$ wird durch eine einfache, orthogonale Projektion auf den transformierten, gültigen Parameterbereich abgebildet. Dadurch ergibt sich eine begrenzte Schätzung $\hat{\xi}_b[k]$ in den transformierten Koordinaten.
3. Die Transformation wandelt die begrenzte Schätzung in den ursprünglichen Raum mit

$$\hat{\theta}_b[k] = \mathbf{P}[k-1]^{1/2} \hat{\xi}_b[k] \quad (3.188)$$

zurück.

Abbildung 3.44 stellt diese drei Schritte grafisch dar.

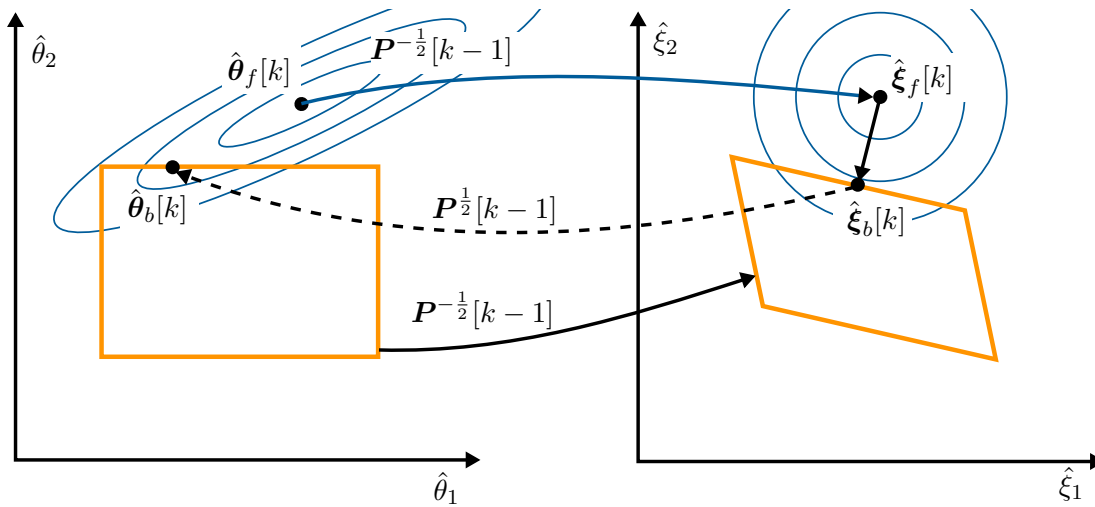


Abbildung 3.44: Prinzip der optimalen Projektion nach Goodwin und Sin [110, S. 93]

Das Problem bei der optimalen Projektion ist die orthogonale Projektion auf die transformierten Begrenzungen. Durch die Transformation mit $\mathbf{P}^{-1/2}[k-1]$ sind die Parameterbeschränkungen im ξ -Raum keine einfachen unteren und oberen Schranken mehr, wodurch die Berechnung der Projektion nicht mehr die Einfachheit wie in (3.185) besitzt. Außerdem ist die Berechnung von $\mathbf{P}^{-1/2}[k-1]$ und $\mathbf{P}^{1/2}[k-1]$ sehr aufwändig.

3.5.3.3 Optimale Parameterbeschränkung über die Lagrange-Funktion

Timmons et al. [111] stellen eine weitere Methode zur Parameterbeschränkung vor, die auf der Lagrange-Funktion basiert. Die Lagrange-Funktion zur Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung (3.184) lautet

$$\mathcal{L}(\hat{\theta}_b, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\theta}_b)^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\theta}_b) - \boldsymbol{\tau}^T (\mathbf{c} - \mathbf{L} \hat{\theta}_b) \quad (3.189)$$

mit dem Vektor der Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\tau}$.

Nach Nocedal und Wright [112, S. 320-321] sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen erster Ordnung an die Lagrange-Funktion notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Lösung des Optimierungsproblems.

$$\mathbf{c} - \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_b \geq \mathbf{0} \quad (3.190a)$$

$$\boldsymbol{\tau} \geq \mathbf{0} \quad (3.190b)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T (\mathbf{c} - \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_b) = \mathbf{0} \quad (3.190c)$$

$$-\boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}_b) + \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (3.190d)$$

Die Bedingung (3.190a) entspricht der Ungleichungsbedingung (3.183) der Parameterbeschränkung. Damit Gleichung (3.190c) erfüllt ist, muss entweder ein Parameter direkt an der Begrenzung liegen ($\mathbf{c} - \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_b = \mathbf{0}$) oder der zugehörige Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{\tau}$ ist Null. Gleichung (3.190d) lässt sich umformen zu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_b = \underbrace{(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_f} - \underbrace{(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \mathbf{L}}_{\mathbf{P}} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.191)$$

Die Berechnung der begrenzten Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_b$ setzt sich aus der freien Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_f$ und einem zusätzlichen Term zusammen. Diese Gleichung gilt nicht nur für die Offline-Berechnung des LS-Problems, sondern auch für den RLS-Algorithmus, bei dem in jedem Zeitschritt eine Aktualisierung von $\hat{\boldsymbol{\theta}}_f$ und \mathbf{P} berechnet wird. Die einzige unbekannte Größe ist der Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{\tau}$. Ein lineares Komplementaritätsproblem (engl.: Linear Complementarity Problem (LCP)) ermittelt den gesuchten Lagrange-Vektor. [112, S. 415]

Die Herleitung der LCP-Formulierung basiert auf der Schlupfvariablen $\mathbf{s} = \mathbf{c} - \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_b$, welche die Abweichung zur Parameterbegrenzung angibt. Gleichung (3.191), eingesetzt in die Schlupfvariable, ergibt

$$\mathbf{s} = \mathbf{LPL}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{c} - \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_f. \quad (3.192)$$

Aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen (3.190a) - (3.190c) leiten sich folgende Bedingungen ab.

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}^T \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (3.193)$$

Die LCP-Formulierung besteht aus den Ausdrücken in (3.192) und (3.193). Für die Lösung von LCP-Problemen gibt es effiziente, echtzeitfähige Algorithmen, welche ähnlich dem Simplex-Algorithmus [112, S. 355-358] arbeiten und auf Pivot-Schritten basieren. Die LCP-Lösung ist deutlich einfacher zu berechnen als das Ergebnis des quadratischen Optimierungsproblems (3.184). Von Almqvist [113] stammt eine Implementierung des

LCP-Algorithmus in MATLAB.

3.5.3.4 Parameterbeschränkung durch weiche Grenzen

Die optimale Projektion der Parameterschätzung über die Transformation als auch über die Lagrange-Funktion sind für eine echtzeitfähige Anwendung sehr aufwändig. Eine einfache Möglichkeit der Parameterbeschränkung stellen weiche Grenzen dar. Dieses Verfahren lässt kleine Verletzungen der Beschränkungen zu, im Gegensatz zum Transformations- oder Lagrange-Ansatz, welche die Grenzen stets exakt einhalten.

Die weiche Berücksichtigung von Grenzen erfolgt, indem die Nebenbedingung (3.182) in das LS-Gütemaß integriert wird.

$$J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_b) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}_b)^T \Lambda (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}_b) + c(\hat{\boldsymbol{\theta}}_b - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj})^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_b - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj}) \quad (3.194)$$

Der zusätzliche Term in diesem Gütemaß zur weichen Berücksichtigung der Grenzen ist ähnlich zur Tikhonov-Regularisierung aus Gleichung (3.156). Der Unterschied liegt darin, dass die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_b$ nicht auf Null regularisiert wird, sondern auf die einfache Projektion $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj}$ aus (3.185). Wenn die Parametergrenzen eingehalten werden, so gilt $\hat{\boldsymbol{\theta}}_b - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj} = \mathbf{0}$ und der zusätzliche Term hat keine Auswirkung auf das Ergebnis. Mit dem Parameter c kann der Anwender einstellen, wie stark der Algorithmus die Parametergrenzen einhält. Algorithmus 3.7 fasst das RLS-Verfahren mit weichen Parametergrenzen zusammen. Die weiche Parameterbeschränkung verändert nur die Schätzung

Algorithmus 3.7 Recursive Least Squares mit exponentiellem Vergessen (RLSeV) mit weichen Parametergrenzen

Eingang: $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$, $\mathbf{P}[k-1]$, λ , c , $\boldsymbol{\theta}_{min}$, $\boldsymbol{\theta}_{max}$

1: $e[k] = y[k] - \phi^T[k] \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1]$

2: $\gamma[k] = \frac{\mathbf{P}[k-1] \phi[k]}{\lambda + \phi^T[k] \mathbf{P}[k-1] \phi[k]}$

3: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_f[k] = \hat{\boldsymbol{\theta}}[k-1] + \gamma[k] e[k]$

4: $\mathbf{P}[k] = (\mathbf{I} - \gamma[k] \phi^T[k]) \mathbf{P}[k-1] \frac{1}{\lambda}$

5: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj,i} = \max(\min(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{f,i}, \boldsymbol{\theta}_{max,i}), \boldsymbol{\theta}_{min,i})$ für $i \in [1, \dots, n]$

6: $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_f - c \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_f - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{proj})$

Ausgang: $\hat{\boldsymbol{\theta}}[k]$, $\mathbf{P}[k]$

und nicht die Aktualisierung der Kovarianzmatrix, im Gegensatz zum LM-Algorithmus 3.6, bei welchem nur die \mathbf{P} -Matrix angepasst wird und nicht die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Abbildung 3.45 stellt die unterschiedlichen Verfahren zur Parameterbegrenzung am Beispiel der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung aus Abbildung 3.15 dar. Dabei verwenden

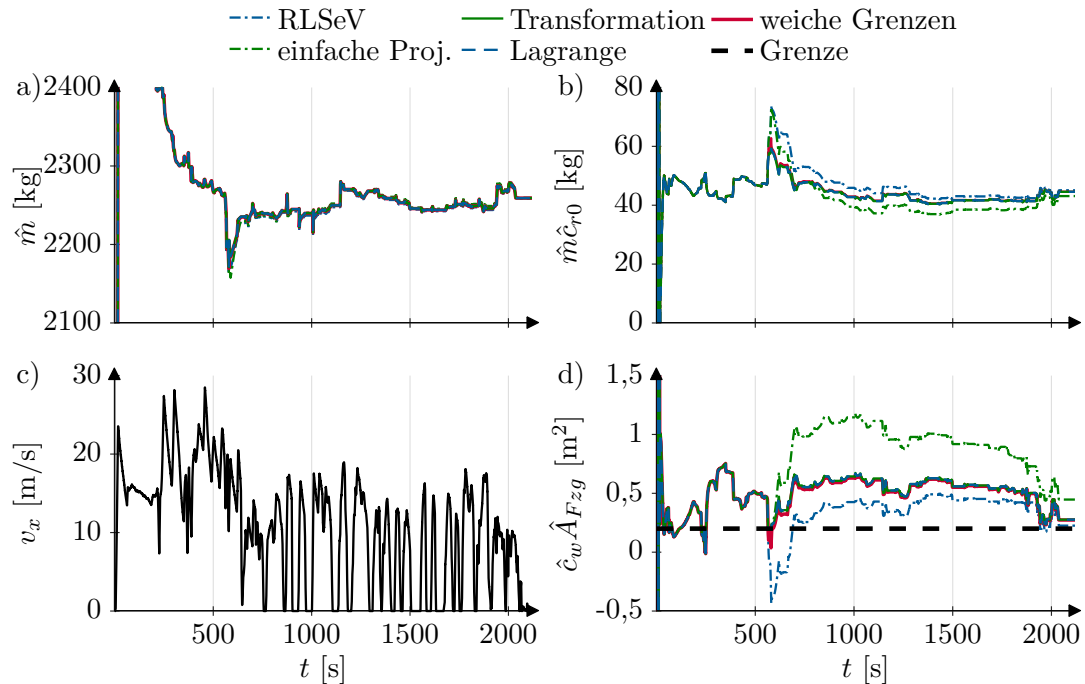


Abbildung 3.45: Vergleich unterschiedlicher Verfahren zur Parameterbeschränkung bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung

det das RLSeV-Verfahren mit weichen Grenzen aus Algorithmus 3.7 die Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$. Für die Einhaltung der Beschränkungen kommen die Einstellparameter $c = 10^6$, $\boldsymbol{\theta}_{min} = [1600 \ 20 \ 0,2]^T$ und $\boldsymbol{\theta}_{max} = [5000 \ 200 \ 5]^T$ zum Einsatz.

Im Bereich um $t = 600$ s schätzt der gewöhnliche RLSeV-Algorithmus (---) einen negativen Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ (Abbildung 3.45 d)). Um diesen Fehler im Längsdynamikmodell auszugleichen, wird der Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ deutlich zu hoch geschätzt (Abbildung 3.45 b)).

Die einfachste Methode zur Einhaltung ist die interne Parameterbeschränkung mit einer einfachen Projektion nach Gleichung (3.185) (---). Dieses Verfahren hält die untere Grenze (---) von $\hat{\theta}_{min,3} = 0,2 \text{ m}^2$ ein, allerdings ist die Lösung des Verfahrens nicht mehr optimal und im weiteren Verlauf ist die Berechnung des Luftwiderstandskoeffizienten deutlich zu hoch. Entsprechend dazu ist die Schätzung des Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ geringer. Da die Geschwindigkeit (Abbildung 3.45 c)) in diesem Bereich relativ gering ist, benötigt das gewöhnliche RLSeV-Verfahren mit einfacher Projektion sehr lange, um wieder den richtigen Parameterwert zu lernen.

Die optimalen Projektionsverfahren, basierend auf Transformation (—) und Lagrange-Funktion (---), berechnen beide die optimale Lösung unter Einhaltung der Nebenbedingung. Da die optimale Lösung eindeutig ist, liefern beide Verfahren das gleiche Ergebnis. Die Schätzung des Luftwiderstandskoeffizienten beider Verfahren liegt oberhalb der unteren Grenze und wird durch die kurz aktive Beschränkung nicht nachteilig beeinflusst, wie etwa bei der einfachen Projektion.

Das Verfahren der weichen Grenzen aus Algorithmus 3.7 (—) verletzt die Beschränkung nur kurzzeitig. Im Großteil der Schätzung wird die Begrenzung eingehalten und trotz des deutlich reduzierten Rechenaufwands ermittelt dieses Verfahren vergleichbare Ergebnisse wie die aufwändigen, optimalen Projektionsmethoden.

3.5.4 Zusammenfassung der robusten Parameterschätzung

Die einzelnen Maßnahmen aus Abschnitt 3.5.1.3 zur Robustheit gegenüber Messausreißern, aus Abschnitt 3.5.2 zur Robustheit gegen Phasen mit geringer Anregung und aus Kapitel 3.5.3 zur Berücksichtigung von Parametergrenzen können beliebig kombiniert werden. Algorithmus 3.8 verbindet z. B. den robusten M-Schätzer mit studentscher t -Verteilung, die LM-Regularisierung und die weiche Parameterbegrenzung und wird im weiteren Verlauf als robuste RLS-Verfahren bezeichnet. Trotz der komplexen Darstel-

Algorithmus 3.8 Recursive Least-M-Schätzer (RLM) für die studentsche t -Verteilung mit Levenberg-Marquardt-Regularisierung und weicher Parameterbegrenzung (robustes RLS)

Eingang: $y[k]$, $\phi[k]$, $\hat{\theta}[k-1]$, $\mathbf{P}[k-1]$, λ , ν_t , σ_t , Σ_{Reg} , θ_{min} , θ_{max} , c

$$1: e[k] = y[k] - \phi^T[k] \hat{\theta}[k-1]$$

$$2: w[k] = \frac{\nu_t \sigma_t^2}{\nu_t \sigma_t^2 + e^2[k]}$$

$$3: \gamma[k] = \frac{w[k] \mathbf{P}[k-1] \phi[k]}{\lambda + w[k] \phi^T[k] \mathbf{P}[k-1] \phi[k]}$$

$$4: \hat{\theta}_f[k] = \hat{\theta}[k-1] + \gamma[k] e[k]$$

$$5: \bar{\mathbf{P}}[k] = \left(\mathbf{I} - \gamma[k] \phi^T[k] \right) \mathbf{P}[k-1] \frac{1}{\lambda}$$

$$6: j = \text{mod}(k, n) + 1$$

$$7: \mathbf{P}[k] = \left(\mathbf{I} - \frac{\bar{\mathbf{P}}[k] \mathbf{i}_j}{\frac{1}{n(1-\lambda)\sigma_{Reg,j}} + \mathbf{i}_j^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{i}_j} \mathbf{i}_j^T \right) \bar{\mathbf{P}}[k]$$

$$8: \hat{\theta}_{proj,i} = \max(\min(\hat{\theta}_{f,i}, \theta_{max,i}), \theta_{min,i}) \quad \text{für } i \in [1, \dots, n]$$

$$9: \hat{\theta} = \hat{\theta}_f - c \mathbf{P}[k] (\hat{\theta}_f - \hat{\theta}_{proj})$$

Ausgang: $\hat{\theta}[k]$, $\mathbf{P}[k]$

lung des Algorithmus in Pseudocode ist eine Implementierung auf einem eingebetteten System, z. B. einem Fahrzeugsteuergerät, sehr einfach. Der Algorithmus benötigt lediglich einfache Rechenoperationen, Matrixinvertierungen oder iterative Rechenschritte sind nicht notwendig. Durch die rekursive Form ist auch der Speicherbedarf der robusten Parameterschätzung gering. Teile von Algorithmus 3.8 stammen aus [46], [47] und [48].

3.5.5 Wahl der initialen Parameter und der initialen Kovarianzmatrix

Für die Wahl des initialen Schätzwerts $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0]$ eignet sich entweder das Ergebnis der vorherigen Fahrt oder des vorherigen Experiments. Alternativ kann der Startwert durch einen Standardwert initialisiert werden. Die Leermasse eines Fahrzeugs ist z. B. ein sinnvoller Startwert für die Masseschätzung.

Die Wahl einer initialen Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[0]$ ist schwieriger und wurde zum Teil in Kapitel 2.3.1 behandelt. Eine zu geringe Wahl von $\mathbf{P}[0]$ stellt eine hohe Konfidenz in den Startwert der Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0]$ dar und der RLS-Algorithmus vertraut den alten Schätzungen mehr als den neuen Messungen. Dadurch werden nur kleine Anpassungen in $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ zugelassen und die Konvergenzgeschwindigkeit der Schätzung ist gering. Wenn die initiale Wahl der Kovarianzmatrix hingegen zu hoch ist, so nimmt der RLS-Algorithmus eine geringe Konfidenz des Startwerts $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0]$ an. Nach Gleichung (2.47) ergeben sich große Werte für den Korrekturvektor $\boldsymbol{\gamma}$ bei hohen Startwerten der Kovarianzmatrix und damit auch große Anpassungen im Schätzwert. Da zum einen die alten Schätzungen kaum Einfluss auf die Korrektur haben und zum anderen die Messungen mit Fehlern behaftet sind, kann es zu Beginn der Schätzung zu erheblichen Abweichungen des Schätzwerts kommen.

Eine Möglichkeit zur Wahl der initialen Kovarianzmatrix ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen \mathbf{P} und der Kovarianz des Schätzfehlers $\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta})$ nach Gleichung (2.27).

$$\text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \sigma_e^2 \mathbf{P} \quad (3.195)$$

Die Wahl der initialen Kovarianzmatrix erfolgt über folgende Umformungen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}[0] &= \frac{1}{\sigma_e^2} \text{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \\
 &= \frac{1}{\sigma_e^2} \begin{bmatrix} E\{(\Delta\theta_1 - \mu(\Delta\theta_1))^2\} & & & \\ & E\{(\Delta\theta_2 - \mu(\Delta\theta_2))^2\} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \mu(\Delta\theta_j)=0 \\
 &= \frac{1}{\sigma_e^2} \begin{bmatrix} E\{\Delta\theta_1\Delta\theta_1\} & & & \\ & E\{\Delta\theta_2\Delta\theta_2\} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_e^2} \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta\theta_1}^2 & & & \\ & \sigma_{\Delta\theta_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.196}$$

Der Mittelwert wird mit $\mu(\cdot)$ dargestellt. Die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[0]$ wird als Diagonalmatrix initialisiert, womit lediglich die Einträge auf der Hauptdiagonalen von Interesse sind. Die Standardabweichung des Schätzfehlers $\sigma_{\Delta\theta_j}$ wird anhand der Normalverteilung gewählt.

Abbildung 3.46 zeigt den Verlauf der Normalverteilung mit Mittelwert μ_x und Standardverteilung σ_x . Zusätzlich sind in dieser Abbildung die Wahrscheinlichkeiten als Pro-

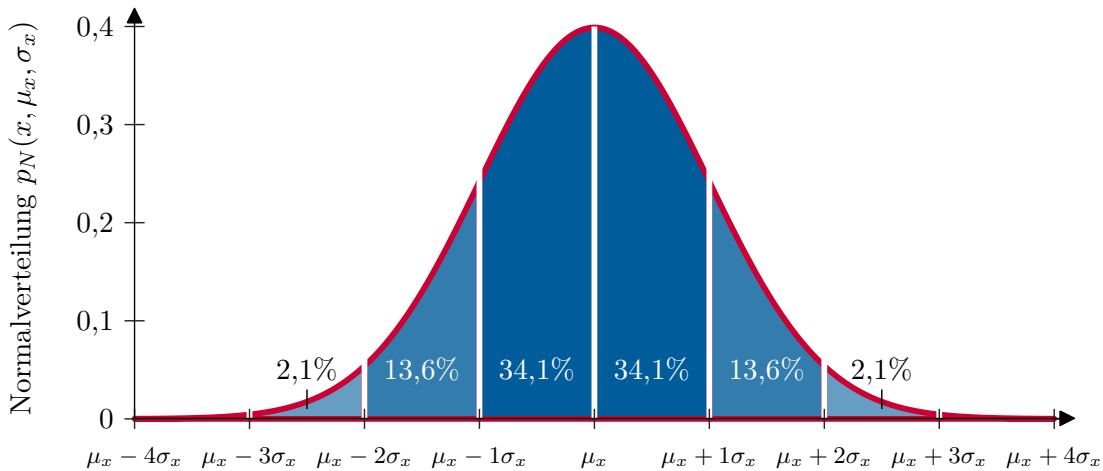


Abbildung 3.46: Wahrscheinlichkeiten für die Normalverteilung innerhalb von Vielfachen der Standardabweichung σ_x um den Mittelwert μ_x

zentwerte eingetragen mit der die Zufallsvariable x innerhalb eines Bereichs um den Mittelwert liegt. Die Bereiche sind jeweils als Vielfaches der Standardabweichung angegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable im Bereich $x \in [\mu_x, \mu_x + 1\sigma_x]$ liegt, beträgt 34,1 %.

Die kumulierten Wahrscheinlichkeiten, dass die Zufallsvariable x innerhalb eines Bereichs um den Mittelwert μ_x liegt, sind in Tabelle 3.6 zusammengefasst. Wenn sichergestellt

Bereich	Wahrscheinlichkeit
$\mu_x \pm 1\sigma_x$	68,3 %
$\mu_x \pm 2\sigma_x$	95,5 %
$\mu_x \pm 3\sigma_x$	99,7 %

Tabelle 3.6: Wahrscheinlichkeiten für die Normalverteilung innerhalb eines Bereichs um den Mittelwert herum zu liegen

werden soll, dass die Variable x mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7 % in einem Bereich enthalten ist, so muss das Intervall $\mu_x \pm 3\sigma_x$ gewählt werden.

Mit den Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung aus Abbildung 3.46 und Tabelle 3.6 kann der Initialwert für die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[0]$ abgeschätzt werden. Durch die oberen und unteren physikalischen Grenzen ist die maximale Streuung der Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ bekannt. Damit liegen alle Schätzungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 100 % zwischen Minimal- und Maximalwert, $\boldsymbol{\theta}_{min}$ bzw. $\boldsymbol{\theta}_{max}$. Da die Normalverteilung nie Null wird, erhält man eine Wahrscheinlichkeit von 100 % nur für den Bereich $x \in [\mu_x - \infty, \mu_x + \infty]$. Da diese Annahme nicht realistisch ist, wird für die Initialisierung der Bereich $\mu_x \pm 3\sigma_x$ verwendet, für den die Wahrscheinlichkeit 99,7 % ist und damit fast 100 % beträgt. Für den $3\sigma_x$ -Bereich und den unteren und oberen Schranken wird angenommen

$$\theta_{max,j} - \theta_{min,j} = \underbrace{\mu(\Delta\theta_j)}_{=0} + 3\sigma_{\Delta\theta_j} \quad (3.197)$$

mit einem verschwindenden Mittelwert des Parameterfehlers $\mu(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$. Daraus leitet sich die Standardabweichung des Parameterfehlers in Gleichung (3.196) ab.

$$\sigma_{\Delta\theta_j} = \frac{\theta_{max,j} - \theta_{min,j}}{3} \quad (3.198)$$

Aus den Gleichungen (3.196) und (3.198) ergibt sich schließlich die Wahl für die Diagonaleinträge der initialen Kovarianzmatrix.

$$p_{jj}[0] = \frac{1}{\sigma_e^2} \left(\frac{\theta_{max,j} - \theta_{min,j}}{3} \right)^2 \quad (3.199)$$

3.6 Ergebnisse der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung

Dieser Abschnitt vergleicht das im vorherigen Abschnitt entwickelte robuste Schätzverfahren aus Algorithmus 3.8 mit dem gewöhnlichen RLSeV. Beide Algorithmen verwenden die gemeinsamen Einstellungen $\lambda = 0,9999$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}[0] = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}[0] = 10^6 \cdot \mathbf{I}$. Das robuste Schätzverfahren besitzt die zusätzlichen Einstellparameter $\sigma_t = 151$ und $\nu_t = 3,64$ aus Tabelle 3.3, welche die studentsche t -Verteilung der tatsächlichen Verteilung der

Residuen e beschreiben. Die Regularisierung des robusten Schätzverfahrens verwendet $\Sigma_{Reg} = \text{diag}(10^{-3}, 1, 1)$. Für die Parameterbeschränkungen kommen die Einstellparameter $c = 10^6$, $\theta_{min} = [1600 \ 20 \ 0,2]^T$ und $\theta_{max} = [5000 \ 200 \ 5]^T$ zum Einsatz. Die Bewertung des robusten Schätzalgorithmus erfolgt anhand aller Messdaten, deren Aufzeichnung in Abschnitt 3.3 beschrieben ist. Zum einen wird die richtige Schätzung der Fahrzeugmasse bewertet. Zum anderen erfolgt die Auswertung der Fahrwiderstandsschätzung anhand von Ausrollkurven.

Zunächst wird die Funktionsweise des robusten Schätzalgorithmus anhand einer Messfahrt auf Landstraßen und in der Stadt beschrieben. Abbildung 3.47 stellt beispielhaft an einer Messung das gewöhnliche RLSeV-Verfahren dem robusten RLS-Algorithmus 3.8 aus Kapitel 3.5.4 gegenüber. Diese Abbildung stellt die drei Schätzungen von Fahrzeug-

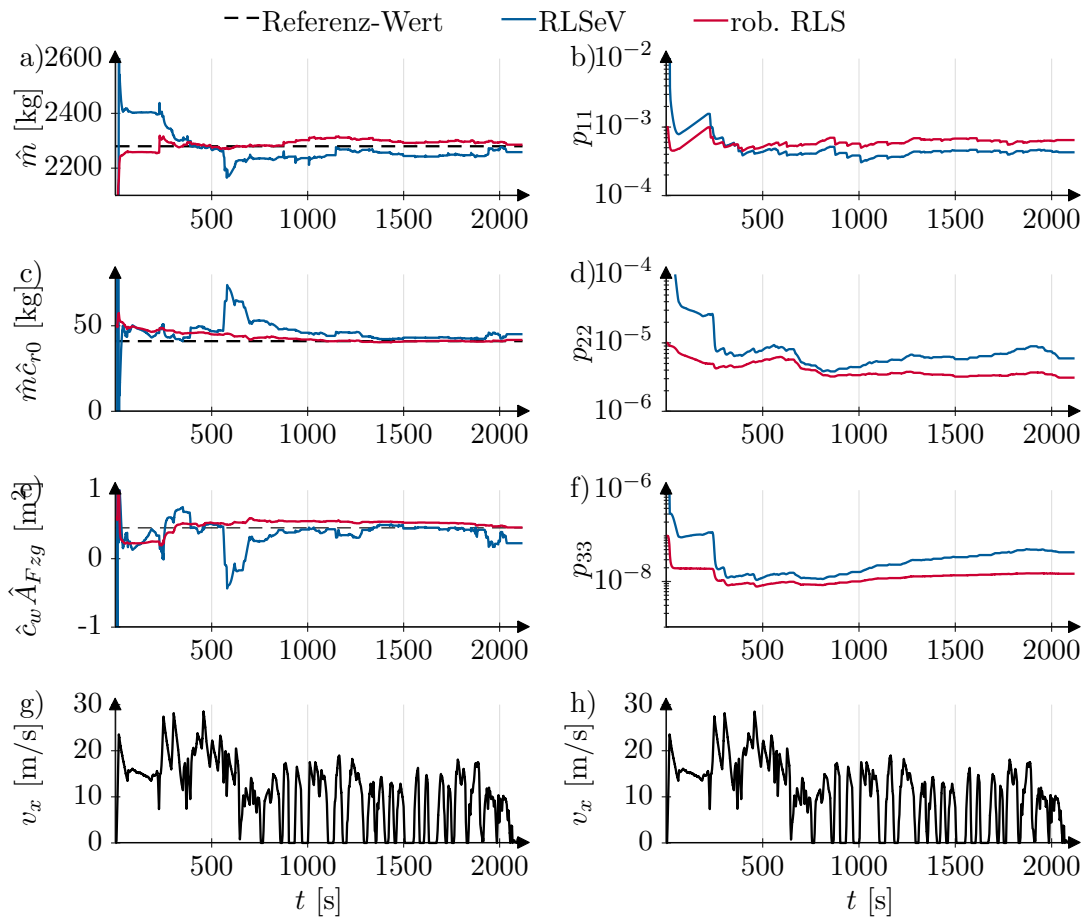


Abbildung 3.47: Vergleich der Ergebnisse von gewöhnlichem RLSeV-Algorithmus und robustem RLS-Algorithmus für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung

masse \hat{m} a), Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ c) und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ e) dar, zusammen mit den zugehörigen Kovarianzeinträgen p_{11} b), p_{22} d) und p_{33} f).

Die Ergebnisse der gewöhnlichen RLSeV-Schätzung (—) enthalten Messausreißer bei ca. $t = 600$ s, die zu negativen Widerstandskoeffizienten führen und damit deutlich vom

Referenz-Wert (---) abweichen. Außerdem kommt es zum Kovarianz-Windup in p_{22} und p_{33} ab ca. $t = 700$ s, da ab diesem Zeitpunkt die Fahrt innerorts verläuft und die Geschwindigkeit, welche als Anregung für die Schätzung der Fahrwiderstände dient, begrenzt ist (Abbildung 3.47 g), h)). Durch den Windup-Effekt kommt es am Ende der Messung noch zu größeren Änderungen in den Schätzungen der beiden Fahrwiderstände.

Im Vergleich zum gewöhnlichen RLSeV-Verfahren besitzt der robuste RLS-Algorithmus (—) folgende Eigenschaften.

Robustheit gegen Messausreißer Die Messausreißer im Bereich um $t = 600$ s beeinflussen die Schätzergebnisse des robusten Verfahrens durch die geringere Gewichtung nicht.

Robustheit gegen mangelnde Anregung Auch bei begrenzter Geschwindigkeit von $v_x < 13,9$ m/s = 50 km/h vermeidet das robuste Verfahren Kovarianz-Windup durch den zusätzlichen Regularisierungsterm nach Levenberg-Marquardt. Dadurch, dass das robuste RLS-Verfahren das Anwachsen der \mathbf{P} -Matrix verhindert, kommt es nicht mehr zu plötzlichen Änderungen in den geschätzten Parametern.

Berücksichtigung von Grenzen Die weiche Parameterbeschränkung führt zu physikalisch sinnvollen Ergebnissen.

Geringer Ressourcenbedarf Der robuste RLS-Algorithmus 3.8 benötigt nur geringfügig mehr Rechen- und Speicheraufwand als das gewöhnliche RLSeV-Verfahren.

3.6.1 Ergebnis der Masseschätzung

Die Güte der Fahrzeugmasseschätzung lässt sich direkt aus dem Vergleich mit der gewogenen Fahrzeugmasse m bestimmen. Um verschiedene Fahrzeuge, Beladungszustände und Anhänger zu vergleichen, verwendet die Bewertung den normierten, mittleren quadratischen Fehler (engl.: Normalized Mean Squared Error (NMSE)).

$$\text{NMSE}(\hat{m}) = 1 - \frac{\|m - \hat{m}\|_2^2}{\|m\|_2^2} \quad (3.200)$$

Wenn im idealen Fall die geschätzte Fahrzeugmasse \hat{m} der tatsächlichen Masse m entspricht, so wird der Bruch Null und der NMSE-Wert wird maximal Eins.

Abbildung 3.48 vergleicht die Ergebnisse der gewöhnlichen RLSeV-Schätzung mit denen der robusten Schätzung von Algorithmus 3.8 anhand von Boxplots des NMSE-Werts. Ein Boxplot visualisiert die Verteilung von Daten. Der Median bzw. das 50%-Quantil ($Q_{50\%}$) der Daten ist durch den waagrechten roten Strich gekennzeichnet. Das untere

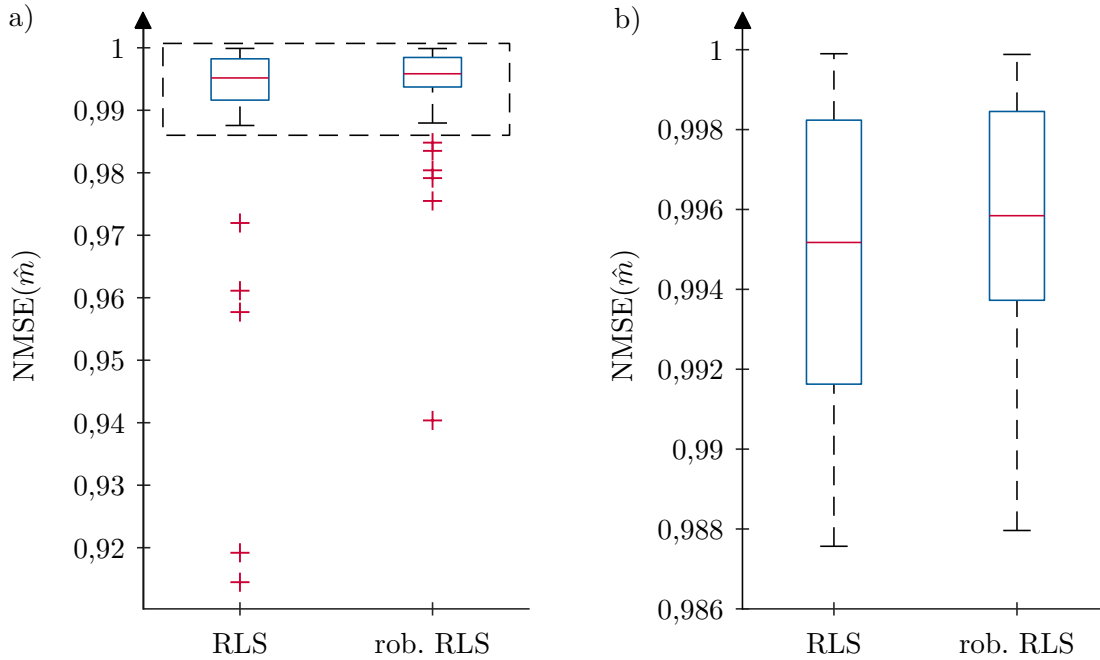


Abbildung 3.48: Boxplot zur Beschreibung der Verteilung des NMSE-Werts der Masseschätzung \hat{m} für gewöhnlichen und robusten RLS-Algorithmus

und obere Ende der blauen Box beschreiben das 25 %- bzw. 75 %-Quantil ($Q_{25\%}$ bzw. $Q_{75\%}$). Die untere und obere Antenne, welche aus der Box herausragen, berechnen sich durch $Q_{25\%} - 1,5(Q_{75\%} - Q_{25\%})$ und $Q_{75\%} + 1,5(Q_{75\%} - Q_{25\%})$. Werte, die außerhalb des durch die Antennen gekennzeichneten Bereichs liegen, werden durch rote Pluszeichen (+) gekennzeichnet und als Ausreißer interpretiert. [114]

Abbildung 3.48 a) stellt die Verteilung des NMSE-Werts für die Masseschätzung aus allen Messfahrten dar. Das gewöhnliche RLSeV-Verfahren und der robuste RLS-Algorithmus erreichen für manche Messungen fast das Optimum von $NMSE(\hat{m}) = 1$. Das gewöhnliche RLSeV-Verfahren weist vereinzelt größere Abweichungen in der Masseschätzung auf als das robuste Verfahren, was durch die größere Distanz der Ausreißer (+) gekennzeichnet ist.

Abbildung 3.48 b) stellt den Bereich aus Abbildung 3.48 a) vergrößert dar, der durch die gestrichelte Box gekennzeichnet ist. Die Vergrößerung zeigt, dass für das robuste RLSeV-Verfahren der Median (roter Strich), das 25 %- und das 75 %-Quantil (blaue Box) näher am optimalen Wert $NMSE(\hat{m}) = 1$ liegen. Daraus folgt, dass für das robuste Verfahren die Abweichungen in der Masseschätzung geringer ausfallen als beim gewöhnlichen RLSeV-Algorithmus.

3.6.2 Prädiktion der Ausrollkurven

Die Schätzung der Fahrwiderstände kann nicht direkt bewertet werden, da sich Roll- und Luftwiderstand nicht messen lassen. Zwar können Referenzwerte für die Fahrwiderstände nach [115] aus Ausrollkurven ermittelt werden, allerdings gelten die ermittelten Werte nur für den aktuellen Straßen- und Umweltzustand.

Anstatt die Fahrwiderstandsschätzung anhand von Referenzwerten zu bewerten, wird eine indirekte Evaluierung verwendet. Ein möglicher Abnehmer der geschätzten Fahrwiderstände ist z. B. eine Assistenzfunktion, die anhand der prädizierten Ausrollkurven dem Fahrer empfiehlt in den Segelzustand überzugehen. Dazu wird ständig für den zukünftigen Streckenabschnitt der zu erwartende Geschwindigkeitsverlauf berechnet. Stimmt die prädizierte Geschwindigkeit mit einem zukünftigen Tempolimit überein, so erhält der Fahrer einen Hinweis vom Gaspedal zu gehen. Im Idealfall erreicht das Fahrzeug dann ohne Motorkraft mit der exakten Geschwindigkeit das Tempolimit. Durch das Ausrollen des Fahrzeugs wird weniger Treibstoff benötigt, als wenn der Fahrer die Geschwindigkeit beibehält und erst kurz vor dem Tempolimit bremst. [116]

Die Prädiktion der Ausrollkurven basiert zum einen auf den aktuell geschätzten Fahrwiderständen und zum anderen auf der zukünftigen Straßenneigungen, welche im Navigationssystem hinterlegt sind. Mit dem linearen Modell der Längsdynamik (3.50), welches für die Parameterschätzung verwendet wird, können auch die Ausrollkurven berechnet werden. Dazu wird die Längsdynamikgleichung zunächst nach der Fahrzeugbeschleunigung \dot{v}_x aufgelöst.

$$\underbrace{F_A}_{=0} = \underbrace{(\dot{v}_x + g\beta)}_{a_x} m + gmc_{r0} + \frac{1}{2} \rho_L v_x^2 c_w A_{Fzg} \quad (3.201a)$$

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m} (-g\beta m - gmc_{r0} - \frac{1}{2} \rho_L v_x^2 c_w A_{Fzg}) \quad (3.201b)$$

Die Bedingung $F_A = 0$ gilt bei Ausrollkurven, da der Antrieb keine Kraft auf das Fahrzeug ausübt. Zudem wird der Zusammenhang zwischen Fahrbahnsteigung und gemessener Längsbeschleunigung $a_x = \dot{v}_x + g\beta$ aus Gleichung (3.4) verwendet.

Der Ausdruck (3.201b) stellt eine Differentialgleichung mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v_x dar, die analytisch gelöst werden kann, was in Anhang A.3 dargestellt ist. Da bei der analytischen Lösung verschiedene Fälle unterschieden werden müssen, ist eine numerische Berechnung der Geschwindigkeit von Vorteil. Für den vorausliegenden Streckenabschnitt wird iterativ die Geschwindigkeit zu jedem Zeitschritt berechnet, indem

zunächst die Fahrzeugbeschleunigung ermittelt wird.

$$\dot{\hat{v}}_x[k] = \frac{1}{\hat{m}}(-g\beta[k-1]\hat{m} - g\hat{m}\hat{c}_{r0} - \frac{1}{2}\rho_L\hat{v}_x^2[k-1]\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}) \quad (3.202)$$

Das explizite Eulerverfahren zur numerischen Integration über einen Zeitschritt Δt liefert die Geschwindigkeit für die Prädiktion der Ausrollkurve bis zum Stillstand.

$$\hat{v}_x[k] = \hat{v}_x[k-1] + \Delta t\dot{\hat{v}}_x[k] \quad (3.203)$$

Die Bewertung der Fahrwiderstandsschätzung verwendet nicht die Steigung aus prädiktiven Streckendaten, sondern die Berechnung der Steigung aus fahrzeugeigener Sensorik nach Gleichung (3.5). Dieses Vorgehen ist möglich, da die Auswertung erst nach den Messfahrten durchgeführt wird. Da der gesamte Signalverlauf bei der nachträglichen Auswertung bekannt ist, kann die Steigung für die prädiktive Berechnung herangezogen werden. Steigungsfehler in den prädiktiven Streckendaten aus dem Navigationssystem haben dadurch keinen Einfluss auf die Auswertung.

Abbildung 3.49 a) vergleicht beispielhaft die tatsächliche Geschwindigkeit mit den prädizierten Ausrollkurven. Zu Beginn einer Ausrollkurve, wenn der Fahrer vom Fahrpedal

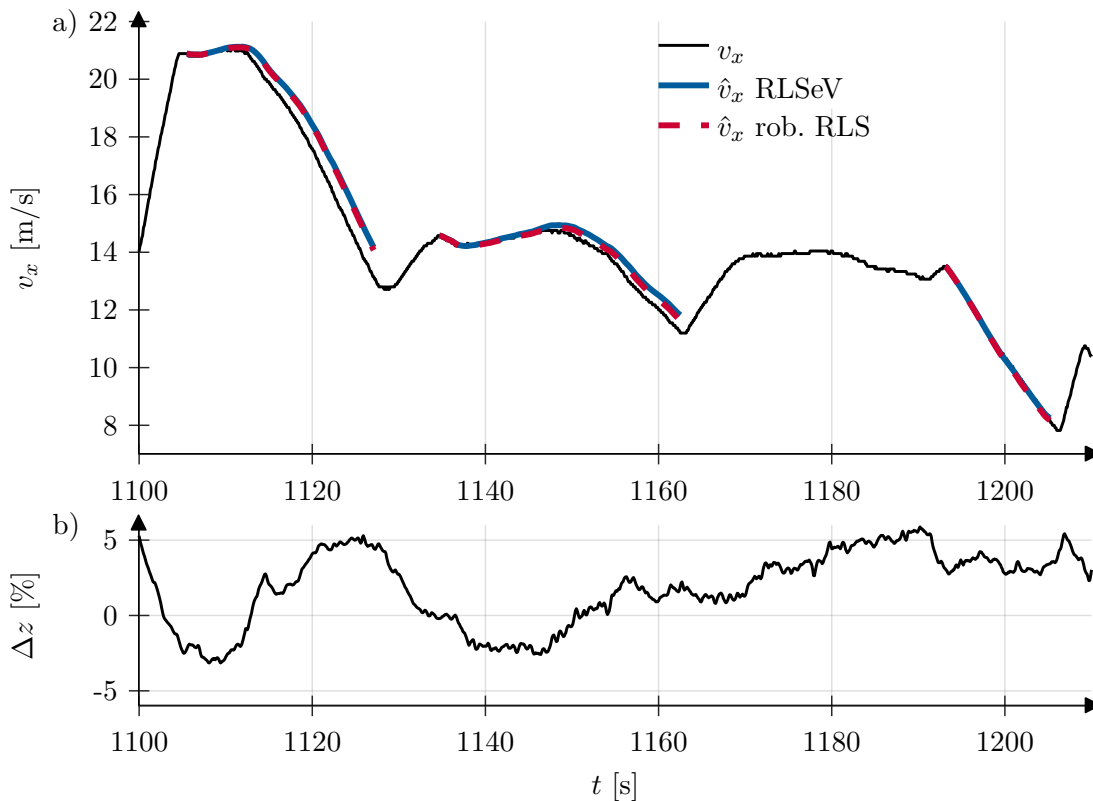


Abbildung 3.49: Prädizierte Geschwindigkeit \hat{v}_x der Ausrollkurven im Vergleich zur tatsächlichen Geschwindigkeit v_x und Fahrbahnneigung Δz

geht, werden die aktuellen Schätzungen von Masse \hat{m} , Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$

und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w \hat{A}_{Fzg}$ verwendet, um die zukünftige Ausrollkurve mit Hilfe der voraus liegenden Steigung zu berechnen. Die Auswertung vergleicht anschließend die Prädiktion mit der tatsächlichen Geschwindigkeit (**—**). Die Ausrollkurven \hat{v}_x , basierend auf den Schätzungen des robusten RLS-Algorithmus, (**- -**) passen sehr gut zur tatsächlichen Ausrollkurve. Auch die Prädiktion mit den Parametern des gewöhnlichen RLSeV-Verfahrens (**—**) weist nur eine geringe Abweichung zur gemessenen Geschwindigkeit auf.

In dem Beispiel zeigt nur die dritte Ausrollkurve um $t = 1200$ s den charakteristischen Verlauf mit abnehmender Geschwindigkeit. Bei den beiden ersten Ausrollkurven erhöht sich die Geschwindigkeit sogar, obwohl keine Antriebskraft F_A auf das Fahrzeug wirkt. Dies liegt daran, dass an diesen Stellen die Straße ein Gefälle aufweist, was an der negativen Steigung Δz in [%] in Abbildung 3.49 b) zu erkennen ist.

Als Bewertungskriterium dient die normierte Abweichung der prädizierten Geschwindigkeit \hat{v}_x zur tatsächlichen Geschwindigkeit v_x zum Zeitschritt k_{end} am Ende des Ausrollvorgangs.

$$\Delta \hat{v}_x = \frac{\hat{v}_x[k_{end}] - v_x[k_{end}]}{v_x[k_{end}]} \quad (3.204)$$

Für eine Bewertung zeigt Abbildung 3.50 die Auswertung der Ausrollvorgänge aus allen Messfahrten. Teilabbildung a) zeigt die Verteilung der normierten Abweichung $\Delta \hat{v}_x$

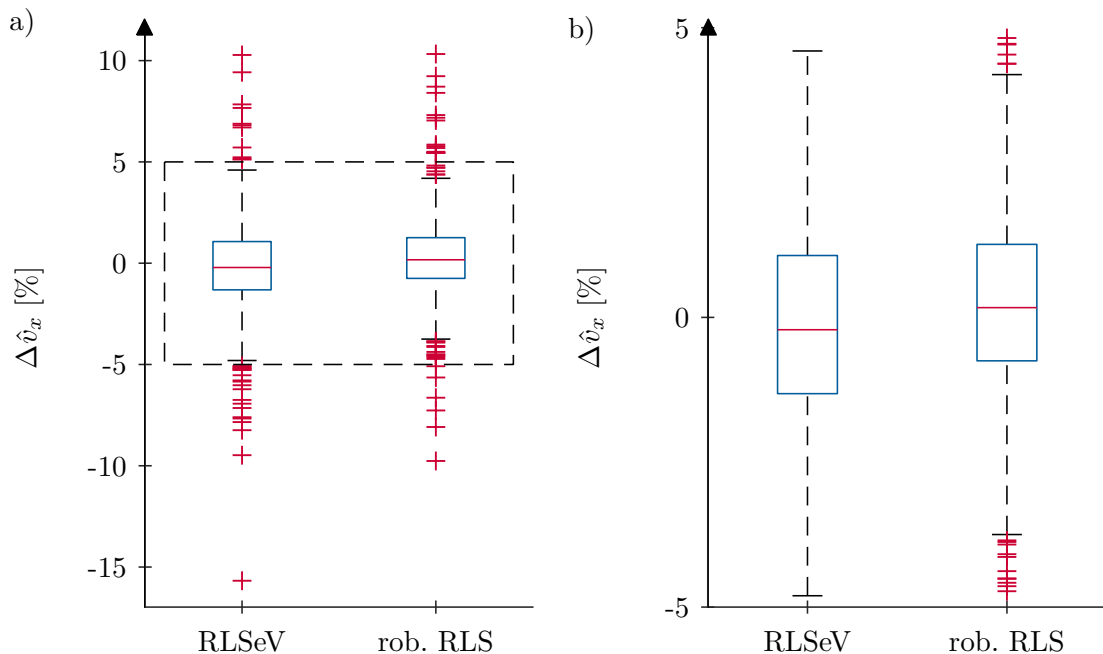


Abbildung 3.50: Boxplot zur Beschreibung der Verteilung des Fehlers $\Delta \hat{v}_x$ in der Geschwindigkeitsprädiktion

von Gleichung (3.204) jeweils für das gewöhnliche RLSeV-Verfahren und für den robusten RLS-Algorithmus. Das robuste RLS-Verfahren weist dabei weniger und geringere Ausreißer (+) auf als die gewöhnliche RLSeV-Methode.

Abbildung 3.50 b) stellt die Vergrößerung des gestrichelten Bereichs aus Teilgrafik a) dar. Der Interquartilsabstand, in dem die mittleren 50% aller Daten liegen und den die blaue Box kennzeichnet, ist für das robuste Verfahren kleiner, was eine geringere Streuung des robusten Verfahrens im Vergleich zum gewöhnlichen RLSeV zeigt. Das Gleiche gilt für die untere und obere Antenne (schwarzer Strich), wodurch das robuste Verfahren geringere Abweichungen bei der Prädiktion der Ausrollkurven erreicht.

3.6.3 Schätzung des Bremskoeffizienten

Mit dem linearen Modell (3.38) schätzt der RLSeV-Algorithmus oder das robuste Schätzverfahren nach Algorithmus 3.8 den Bremskoeffizient c_p . Nach Gleichung (3.23) stellt der c_p -Wert den Zusammenhang zwischen dem Druck im Hauptbremszylinder p_{HBZ} und dem Bremsmoment M_B dar.

Abbildung 3.51 zeigt eine exemplarische c_p -Schätzung während einer Messfahrt. Bis zur

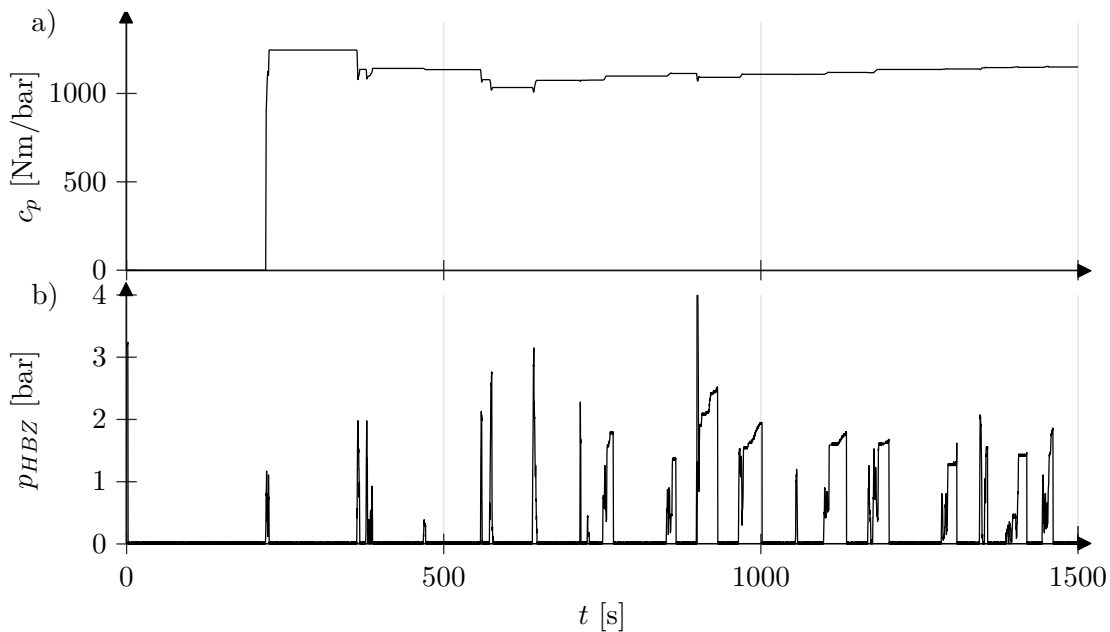


Abbildung 3.51: Schätzung des Bremskoeffizienten \hat{c}_p

ersten Bremsung bei ca. 200 s bleibt die c_p -Schätzung auf dem Startwert von Null (Abbildung 3.51 a)). Nach der ersten kurzen Bremsung mit $p_{HBZ} \approx 1$ bar (Abbildung 3.51 b) bestimmt das Schätzverfahren sehr schnell einen guten Wert für den Bremskoeffizienten. Nach weiteren Bremsungen konsolidiert sich die Schätzung bei ca. $c_p = 1000$ Nm/bar,

was gewöhnlichen Werten für den Bremskoeffizienten entspricht. Die Schätzung des c_p -Werts erfolgt deutlich schneller als die der Fahrzeugmasse, obwohl Bremsungen im Vergleich zu Beschleunigungen und Konstantfahrten nur vereinzelt auftreten. Die Bremsanlage besitzt eine deutlich größere Leistung als der Antrieb und somit treten bei Bremsungen höhere Kräfte und Verzögerungen auf. Durch diese bessere Anregung konvergiert die Schätzung des Bremskoeffizienten schneller als die der Fahrzeugmasse.

4 Robuste Parameterschätzung für die Asynchronmaschine

Neben dem Gesamtfahrzeug bzw. dessen Längsdynamik, stellt die elektrische Antriebsmaschine eine weitere wichtige Komponente eines Elektrofahrzeugs dar. Dieses Kapitel behandelt die Parameterschätzung einer ASM, indem zunächst bestehende Verfahren vorgestellt werden. Anschließend erfolgt die Modellierung der ASM anhand eines elektrischen Ersatzschaltbildes. Das Ergebnis ist ein Modell der E-Maschine in Form eines MISO-Modells nach Gleichung (2.2). Bei der Schätzung der elektrischen Parameter der ASM mit dem gewöhnlichen RLS-Verfahren aus Kapitel 2 ergeben sich Probleme. Im weiteren Verlauf analysiert dieses Kapitel diese Herausforderungen und stellt Lösungsansätze vor, die anhand realer Daten aus einem Prüfstand validiert werden. Teile aus diesem Kapitel sind bereits in [49] veröffentlicht.

4.1 Stand der Technik zur Parameterschätzung bei Asynchronmaschinen

Die ASM kann anhand einer elektrischen Ersatzschaltung modelliert werden, welche fünf physikalische Parameter enthält. Dazu zählen die elektrischen Widerstände und Induktivitäten von jeweils Stator und Rotor sowie die Koppelinduktivität. Zusätzlich kann die mechanische Dynamik der ASM mit Rotationsträgheitsmoment und Reibung modelliert werden.

Vélez-Reyes et al. [18] verwenden als eine der ersten den RLS-Algorithmus, um die physikalischen Parameter und die Drehzahl einer ASM zu schätzen. Das lineare MISO-Modell stammt aus mehreren Differentialgleichungen, welche den elektrischen Kreis von Stator und Rotor sowie die magnetischen Kopplungen beschreiben. Es können vier der fünf unbekannt Parameter und die Drehzahl geschätzt werden, was anhand von Simulationen gezeigt wird.

Der Ansatz von Boussak und Capolino [117] schätzt lediglich die Rotorzeitkonstante und basiert auf der numerisch stabilen Bierman-Umsetzung des RLS-Verfahrens. Versuche mit Simulationen und einem Prüfstand zeigen die Ergebnisse des Algorithmus.

Stephan et al. [19] stellen einen RLS-Algorithmus vor, welcher den elektrischen Widerstand und die Induktivität des Stators sowie Streuziffer und Rotorzeitkonstante schätzt. Es wird gezeigt, dass nur vier physikalische Parameter aus den fünf Schätzwerten berechnet werden können, wodurch ein abhängiger Parameter übrig bleibt. Dies ist auch der Grund dafür, dass lediglich Kombinationen (Streuziffer, Rotorzeitkonstante) der physikalischen Parameter bestimmt werden. Der Ansatz verwendet die zweite zeitliche Ableitung des Stroms, welche durch numerische Differentiation mit anschließender Filterung berechnet wird. Zusätzlich stellt die Arbeit verschiedene Verfahren vor, um die numerischen Probleme zu lösen, welche aus der Abhängigkeit des fünften Parameters stammen. Neben den elektrischen Parametern werden auch die mechanischen Parameter der ASM geschätzt, was anhand von Simulationen und realen Versuchen gezeigt wird.

Die Arbeit von Moons und De Moor [118] verwendet die selben Basisgleichungen wie die vorherigen Ansätze, allerdings führt dies zu einem MISO-Modell neunter Ordnung. Auf die Herleitung dieser Modellierung wird nicht eingegangen. Dieses Modell enthält die dritte zeitliche Ableitung des Stroms, welche mit numerische Methoden nur schwer zu berechnen ist. Aus diesem Modell können alle fünf physikalischen Parameter der ASM ermittelt werden. Da das Modell für die Schätzung neun Parameter enthält und es lediglich fünf unabhängige, physikalische Parameter gibt, sind vier nichtlineare Zwangsbedingungen vorhanden. Ein TLS-Verfahren, welches neben Messfehler im Systemausgang auch Messrauschen im Systemeingang berücksichtigt, schätzt die neun Parameter des Modells. Eine aufwändige numerische Optimierung mit Parameterbeschränkung, welche die vier verbleibenden, nichtlinearen Zwangsbedingungen berücksichtigt, verbessert die Schätzung.

De Souza Ribeiro et al. [20] verwenden Sensitivitätsfunktionen, um die Identifizierbarkeit der Parameter zu analysieren. Das Ergebnis ist eine zusätzliche Anregung auf dem Stromsignal, welches die Identifizierbarkeit garantiert. Die Schätzung der vier Parameter besitzt mehrere Stufen. So wird zunächst der Statorwiderstand mit einer Gleichstrommessung ermittelt. Damit ist das Verfahren nicht für den laufenden Betrieb geeignet. Anschließend werden mehrere Verfahren zur Ermittlung der verbleibenden Parameter vorgestellt.

Das Modell mit neun Dimensionen, welches Marion et al. [119] benutzen, ermittelt den elektrischen Widerstand von Stator und Rotor. Die Identifizierbarkeit wird anhand von Lyapunovfunktionen untersucht. Versuche mit realen Daten und dynamischem Verhalten zeigen die Einsatzfähigkeit des Algorithmus.

Pavlov und Zaremba [120] stellen vier Verfahren zur Schätzung von Stator- und Rotorwiderstand vor. Die ersten beiden Lösungen ermitteln jeweils nur einen Parameter und die dritte Methode schätzt beide Parameter. Die vierte Methode benötigt keine Messung der Drehzahl mehr, allerdings ist ein zusätzliches Anregungssignal auf dem Spannungssignal notwendig, um ausreichend Anregung zu garantieren.

Die Arbeiten von Cirrincione et al. [121], [122], [123] verwenden einen TLS-Algorithmus zur Schätzung der vier unabhängigen physikalischen Parameter. Eine Optimierung mit Nebenbedingungen berücksichtigt die nichtlineare Zwangsbedingung des fünften Parameters. Der Ansatz wird zum einen um magnetische Sättigung erweitert, zum anderen um eine analytische Lösung des beschränkten Optimierungsproblems.

Jacobina et al. [124] betrachten eine zweistufige Schätzung der Maschinenparameter im Stillstand. Im ersten Schritt wird die Maschine mit Gleichspannung beaufschlagt, um den Statorwiderstand zu ermitteln. Die weiteren drei physikalischen Parameter werden in einem zweiten Schritt mit einem speziellen Testsignal geschätzt.

Ein nichtlinearer LS-Ansatz, welcher das instationäre Verhalten der ASM berücksichtigt, wird von Wang et al. [125] vorgeschlagen. Das Modell in rotierendem Koordinatensystem besitzt 15 freie Parameter mit vier physikalischen, unabhängigen Parametern und elf nichtlinearen Zwangsbedingungen. Durch das umfangreiche Modell ist die Berechnung der Lösung sehr aufwändig. Anhand der Hessematrix der nichtlinearen Kostenfunktion wird überprüft, ob die Eingangssignale ausreichende Systemanregung besitzen.

Hasan und Husain [126] präsentieren einen Luenberger-Sliding-Mode-Beobachter, welcher nur den Statorwiderstand und die Rotorzeitkonstante bestimmt. Der Algorithmus wird anhand von Simulationen und realen Experimenten untersucht.

Die Arbeit von Uphues et al. [127] vergleicht Ansätze mit zeitkontinuierlichem und zeitdiskretem Modell. Der Statorwiderstand wird im Stillstand mit Gleichspannungsmessung ermittelt. Die weiteren drei physikalischen Parameter werden ebenfalls im Stillstand geschätzt. Damit ist das Verfahren nicht für den Einsatz im laufenden Betrieb der ASM geeignet. Ein Ansatz mit Signalfaltung berechnet die zweite zeitliche Ableitung des Stromsignals, indem die Ableitung vom gemessenen Signal auf Modulationsfunktionen übertragen wird. Der Vorschlag zur Verwendung von Modulationsfunktionen und der Signalfaltung stammt von Kertzscher [21, S. 43-51].

Michalik stellt in [128, S. 523-573] herkömmliche Verfahren zu Parameterbestimmung wie Freilaufversuch und Kurzschlussversuch vor. Zusätzlich wird auf ein Offline-Verfahren

zur Parameterschätzung mit einem linearen Modell der ASM eingegangen. Dabei kommen Modelle zum Einsatz, die sowohl mit und ohne Drehzahlmessung arbeiten. Zusätzlich wird die RLS-Methode zur Schätzung im laufenden Betrieb vorgestellt sowie Methoden zur Schätzung bei nichtlinearem Parametereinfluss.

4.2 Modellierung einer Asynchronmaschine

Die Modellierung der ASM basiert auf dem sogenannten Γ -Ersatzschaltbild in Abbildung 4.1 und folgt der Herleitung nach Schröder [128, S. 423-435].

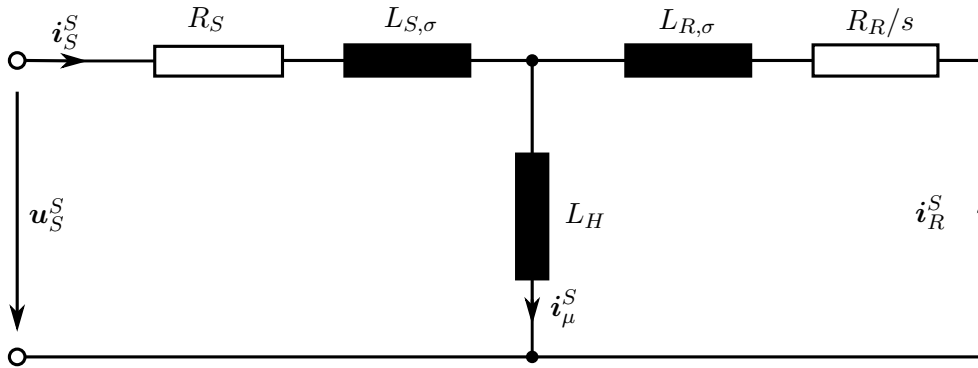


Abbildung 4.1: Stationäres elektrisches Ersatzschaltbild der ASM mit Kurzschlussläufer, ohne Sättigungseffekte, ohne Eisenverluste [128, S. 455]

Unter der Annahme von Symmetrie kann eine dreiphasige ASM im statorfesten α - β -Koordinatensystem (oberer Index S), mit vektorieller Notation der Zustandsgrößen in Raumzeigerdarstellung, z. B.

$$\mathbf{i}_S^S = \begin{bmatrix} i_S^\alpha \\ i_S^\beta \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

notiert werden. Für den Stator- und den Rotorkreis ergeben sich jeweils eine Spannungsgleichung sowie eine Flussverkettung.

$$\mathbf{u}_S^S = R_S \mathbf{i}_S^S + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_S^S \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{u}_R^S = R_R \mathbf{i}_R^S + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_R^S - \mathbf{J} n_p \omega_m \boldsymbol{\psi}_R^S = \mathbf{0} \quad (4.2b)$$

$$\boldsymbol{\psi}_S^S = L_S \mathbf{i}_S^S + L_H \mathbf{i}_R^S \quad (4.2c)$$

$$\boldsymbol{\psi}_R^S = L_R \mathbf{i}_R^S + L_H \mathbf{i}_S^S \quad (4.2d)$$

Die Signale sind die Vektoren von Strom \mathbf{i} , Spannung \mathbf{u} und magnetischem Fluss $\boldsymbol{\psi}$. Zu den Maschinenparametern gehören der ohmsche Widerstand von Stator R_S und Rotor

R_R sowie die Koppel-/Hauptinduktivität L_H und die Rotor- bzw. Statorinduktivität

$$L_S = L_H + L_{S,\sigma} \quad (4.3a)$$

$$L_R = L_H + L_{R,\sigma} \quad (4.3b)$$

mit den Streuinduktivitäten von Stator $L_{S,\sigma}$ und Rotor $L_{R,\sigma}$. Weitere Größen sind die Polpaarzahl n_p und die mechanische Drehzahl des Rotors ω_m . Die Kopplung zwischen α - und β -Koordinaten ist durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

beschrieben. Das Modell der ASM aus den Gleichungen (4.2) verwendet folgende Vereinfachungen:

- Vernachlässigung der Eisenverluste durch Ummagnetisierung des Eisens
- Keine Berücksichtigung der magnetischen Sättigung
- Vernachlässigung von dynamischen Effekten

Für die Schätzung der ASM-Parameter R_S , R_R , L_H , L_S , L_R ist die Umwandlung der Gleichungen (4.2) in die lineare Form nach Gleichung (2.2) notwendig. Die Umformung eliminiert die unbekanntenen Ströme \mathbf{i}_R^S und Spannungen \mathbf{u}_R^S des Rotors sowie die magnetischen Flüsse ψ_S^S und ψ_R^S , damit nur noch die messbaren Statorgrößen von Strom \mathbf{i}_S^S und Spannung \mathbf{u}_S^S verbleiben.

Die Herleitung des linearen Modells basiert auf folgenden Schritten.

1. Die zeitliche Ableitung von (4.2d) lautet

$$\frac{d}{dt}\psi_R^S = L_R \frac{d}{dt}\mathbf{i}_R^S + L_H \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S. \quad (4.5)$$

Einsetzen von (4.2d) und (4.5) in (4.2b) liefert

$$R_R \mathbf{i}_R^S + L_R \frac{d}{dt}\mathbf{i}_R^S + L_H \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S - \mathbf{J} n_p \omega_m (L_R \mathbf{i}_R^S + L_H \mathbf{i}_S^S) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

2. Die zeitliche Ableitung von (4.6) entspricht

$$R_R \frac{d}{dt}\mathbf{i}_R^S + L_R \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_R^S + L_H \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_S^S - \mathbf{J} n_p \omega_m \left(L_R \frac{d}{dt}\mathbf{i}_R^S + L_H \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S \right) = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

3. Durch Umstellen und Ableiten von (4.2a) folgt

$$\frac{d}{dt}\psi_S^S = \mathbf{u}_S^S - R_S \mathbf{i}_S^S \quad (4.8a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi_S^S = \frac{d}{dt}\mathbf{u}_S^S - R_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S. \quad (4.8b)$$

Damit sind die erste und zweite Ableitung des Statorflusses ψ_S^S in Abhängigkeit der bekannten Statorspannungen \mathbf{u}_S^S und der bekannten Statorströme \mathbf{i}_S^S gegeben.

4. Auflösen und Ableiten von (4.2c) liefert

$$\mathbf{i}_R^S = \frac{1}{L_H} \left(\psi_S^S - L_S \mathbf{i}_S^S \right) \quad (4.9a)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i}_R^S = \frac{1}{L_H} \left(\frac{d}{dt}\psi_S^S - L_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S \right) \quad (4.9b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_R^S = \frac{1}{L_H} \left(\frac{d^2}{dt^2}\psi_S^S - L_S \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_S^S \right). \quad (4.9c)$$

Die Gleichungen (4.8) ersetzen die Ableitungen des unbekanntes Statorflusses ψ_S^S in (4.9).

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i}_R^S = \frac{1}{L_H} \left(\mathbf{u}_S^S - R_S \mathbf{i}_S^S - L_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S \right) \quad (4.10a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_R^S = \frac{1}{L_H} \left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}_S^S - R_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S - L_S \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_S^S \right) \quad (4.10b)$$

5. Das Ersetzen der Ableitungen der unbekanntes Rotorströme \mathbf{i}_R^S (4.10) in (4.7) ergibt

$$\begin{aligned} & R_R \frac{1}{L_H} \left(\mathbf{u}_S^S - R_S \mathbf{i}_S^S - L_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S \right) \\ & + L_R \frac{1}{L_H} \left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}_S^S - R_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S - L_S \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_S^S \right) \\ & + L_H \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}_S^S \\ & - \mathbf{J} n_p \omega_m \left(L_R \frac{1}{L_H} \left(\mathbf{u}_S^S - R_S \mathbf{i}_S^S - L_S \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S \right) + L_H \frac{d}{dt}\mathbf{i}_S^S \right) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

6. Die Multiplikation von (4.11) mit L_H/L_R und Einführung des blondelschen Streukoeffizienten

$$\sigma_{Bl} = 1 - \frac{L_H^2}{L_S L_R} \quad (4.12)$$

in (4.11) führt zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_S^S - \mathbf{J} n_p \omega_m \mathbf{u}_S^S = \sigma_{Bl} L_S \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{i}_S^S - \mathbf{J} n_p \omega_m \frac{d}{dt} \mathbf{i}_S^S \right) + L_S \frac{R_R}{L_R} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_S^S - \\ - \frac{R_R}{L_R} \mathbf{u}_S^S + R_S \left(\frac{d}{dt} \mathbf{i}_S^S - \mathbf{J} n_p \omega_m \mathbf{i}_S^S \right) + R_S \frac{R_R}{L_R} \mathbf{i}_S^S. \end{aligned} \quad (4.13)$$

7. Die gesuchten Parameter der ASM sind sowohl in der α - als auch der β -Komponente der vektoriellen Gleichung (4.13) enthalten. Die Schätzung verwendet die α -Komponente und kann in der bekannten linearen Form nach (2.2) geschrieben werden.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} u_S^\alpha + n_p \omega_m u_S^\beta}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} i_S^\alpha + \frac{d}{dt} (n_p \omega_m i_S^\beta) \\ \frac{d}{dt} i_S^\alpha \\ -u_S^\alpha \\ \frac{d}{dt} i_S^\alpha + n_p \omega_m i_S^\beta \\ i_S^\alpha \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{Bl} L_S \\ L_S \frac{R_R}{L_R} \\ \frac{R_R}{L_R} \\ R_S \\ R_S \frac{R_R}{L_R} \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (4.14)$$

Die Berechnung der physikalischen ASM-Parameter aus $\hat{\theta}$ ist nur möglich unter der Annahme gleicher Streuinduktivitäten von Stator und Rotor ($L_{S,\sigma} = L_{R,\sigma}$) und somit auch gleicher Gesamtinduktivitäten $L_S = L_R$.

$$R_S = \hat{\theta}_4, \quad R_R = \hat{\theta}_2, \quad L_R = L_S = \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_3}, \quad L_H = L_R \sqrt{1 - \frac{\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_2}} \quad (4.15)$$

Durch die Annahme gleicher Stator- und Rotorinduktivität gibt es nur vier unabhängige physikalische Parameter bei fünf Parametern im Modell (4.14). Die Umrechnungen in (4.15) sind unabhängig vom fünften Element von $\hat{\theta}$, für welches folgender Zusammenhang gelten muss.

$$\hat{\theta}_5 = \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_4 \quad (4.16)$$

4.3 Versuchsbeschreibung

Abbildung 4.2 zeigt den schematischen Aufbau einer Versuchsanlage, bestehend aus einer ASM vom Typ DRS71M2 der Firma SEW Eurodrive mit 500 W und einer GM mit 700 W Nennleistung, welche über eine Welle miteinander verbunden sind. Zwei-Level-Umrichter versorgen beide E-Maschinen mit der Sollspannung, welche eine feldorientierte Regelung stellt. Die Regelung arbeitet auf einer Echtzeitkarte von dSPACE [129], welche über eine Ein-/Ausgangs-(E/A)-Schnittstelle mit der Anlage kommuniziert. Die E/A-Schnittstelle

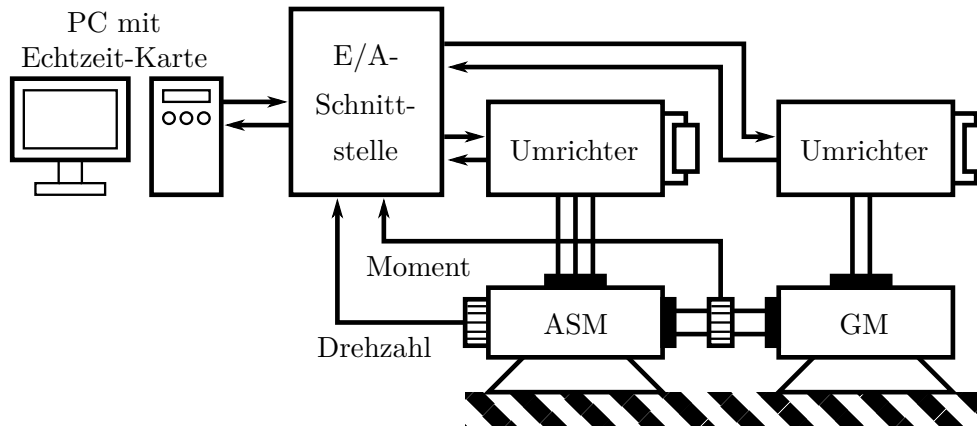


Abbildung 4.2: Schematischer Aufbau der Versuchsanlage für die Parameterschätzung der ASM

liefert die für die Regelung notwendigen Messwerte von Strom und Drehzahl sowie dem Drehmoment zwischen den beiden Maschinen. Die Anlage misst keine Spannungen, weshalb die Parameterschätzung auf die zu stellenden Sollspannungen zurückgreift.

Die Regelung auf der Echtzeitkarte arbeitet in einem schnellen Rechenraster von $\Delta t = 0,5$ ms, damit die Spannungen als pulswidenmodulierte Signale gestellt werden können. Der RLS-Algorithmus und die Signalverarbeitung arbeiten hingegen nur in jedem 50. Rechenraster bzw. mit einer Abtastzeit von $\Delta t_{RLS} = 25$ ms.

4.4 Problemanalyse und robuste Parameterschätzung

Die Versuche am vorliegenden Prüfstand mit dem gewöhnlichen RLSeV-Algorithmus aus Abschnitt 2.3.2 zeigen keine Probleme durch Messausreißer. Allerdings ist die Bedingung an fortdauernde Anregung nach Gleichung (3.64) aus Abschnitt 3.4.3 nicht erfüllt. Diese Bedingung kann sowohl durch mangelnde Anregung der Eingangssignale verletzt sein als auch durch die Struktur des Modells. Zudem kommt es zu Parameterabweichungen durch die Differentiation von verrauschten Messsignalen. [49]

4.4.1 Strukturelle Identifizierbarkeit

Probleme bei der strukturellen Identifizierbarkeit treten bei der Parameterschätzung an der ASM auf, da mit dem Modell aus Gleichung (4.14) fünf Parameter in $\hat{\theta}$ geschätzt werden, es aber nur vier unabhängige, physikalische Parameter gibt. Das System besitzt somit mehr Freiheitsgrade als im realen System vorhanden sind, was auch die nichtlineare Zwangsbedingung in Gleichung (4.16) ausdrückt. Versuche zeigen, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist und der Parameter $\hat{\theta}_5$ falsche Werte annimmt. Dies liegt daran, dass der

zugehörige Eintrag im Regressor $\phi_5 = i_S^\alpha$ den kleinsten Wertebereich besitzt und ein Fehler im zugehörigen Parameter $\hat{\theta}_5$ nur einen sehr kleinen Einfluss auf die Kostenfunktion des LS-Problems besitzt. Eine Lösung für dieses Problem ist die Schätzung der vier Parameter $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_4$ ohne $\hat{\theta}_5$. Der fünfte Parameter wird anhand der Bedingung (4.16) dem Systemausgang y zugerechnet, wodurch sich ein Modell mit reduzierter Ordnung ergibt.

$$\begin{aligned}
 y_{red} &= \frac{d}{dt} u_S^\alpha + n_p \omega_m u_S^\beta - i_S^\alpha \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_4 \\
 \phi_{red} &= \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} i_S^\alpha + \frac{d}{dt} (n_p \omega_m i_S^\beta) \\ \frac{d}{dt} i_S^\alpha \\ -u_S^\alpha \\ \frac{d}{dt} i_S^\alpha + n_p \omega_m i_S^\beta \end{bmatrix} \\
 \hat{\theta}_{red} &= \left[\sigma_{Bl} L_S \quad \frac{L_S R_R}{L_R} \quad \frac{R_R}{L_R} \quad R_S \right]^T
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die Parameterschätzung verwendet für den Ausdruck $\hat{\theta}_3 \hat{\theta}_4$ in y_{red} die Werte aus dem vorherigem Zeitschritt $\hat{\theta}_3[k-1] \hat{\theta}_4[k-1]$.

Das Verhalten der Modelle mit fünfter Ordnung (4.14) und vierter Ordnung (4.17), kann mit der Bedingung fortdauernder Anregung (3.64) untersucht werden. Die Bedingung der positiven Definitheit für die Informationsmatrix \mathbf{R} beinhaltet, dass alle Eigenwerte von \mathbf{R} positiv sein müssen. Selbst wenn alle Eigenwerte positiv sind, kann ein deutlich kleinerer Eigenwert im Vergleich zu den anderen Eigenwerten dazu führen, dass die Anregungsbedingung (3.64) nicht erfüllt ist. Durch den sehr kleinen Eigenwert ist das LS-Problem schlecht konditioniert und die Konditionszahl

$$\kappa(\mathbf{R}) = \frac{\lambda_{EW,max}}{\lambda_{EW,min}}, \tag{4.18}$$

welche den größten Eigenwert $\lambda_{EW,max}$ zum kleinsten Eigenwert $\lambda_{EW,min}$ vergleicht, wird sehr groß. [112, S. 43]

Tabelle 4.1 zeigt den kleinsten Eigenwert $\lambda_{EW,min}$ und den korrespondierenden Eigenvektor \mathbf{v}_{min} von \mathbf{R} für das Modell vierter und fünfter Ordnung mit Daten aus einem realen Experiment. Das Modell fünfter Ordnung ist schlecht konditioniert, was die hohe Konditionszahl $\kappa(\mathbf{R})$ in der Größenordnung von 10^9 ausdrückt. Dies liegt am sehr kleinen Eigenwert $\lambda_{EW,min} = 11,4$, welcher, im Vergleich zu den anderen Eigenwerten, beinahe Null ist. Der kleinste Eigenwert korrespondiert mit dem fünften Parameter $\hat{\theta}_5$, was der zugehörige Eigenvektor \mathbf{v}_{min} zeigt.

	vierte Ordnung	fünfte Ordnung
$\kappa(\mathbf{R})$	$1,16 \cdot 10^5$	$4,27 \cdot 10^9$
$\lambda_{EW,min}$	$4,18 \cdot 10^5$	11,4
\mathbf{v}_{min}	$\begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-4} \\ -0,15 \\ -0,075 \\ 0,986 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,28 \cdot 10^{-6} \\ 0,015 \\ 0,0157 \\ -0,009 \\ 0,9997 \end{bmatrix}$

Tabelle 4.1: Konditionszahl κ , kleinster Eigenwert $\lambda_{EW,min}$ und korrespondierender Eigenvektor \mathbf{v}_{min} von \mathbf{R} für das ASM-Modell vierter und fünfter Ordnung

Das Entfernen des fünften Parameters aus der Schätzung führt zum reduzierten Modell vierter Ordnung und verbessert die Konditionszahl mit einer Größenordnung von 10^5 deutlich. Der kleinste Eigenwert $\lambda_{EW,min} = 4,18 \cdot 10^5$ ist signifikant größer als Null.

4.4.2 Mangelnde Anregung der Eingangssignale

Neben der strukturellen Identifizierbarkeit müssen auch die Eingangssignale ausreichende Dynamik besitzen, um die gesamte Modelldynamik anzuregen. Für die Analyse der Signalanregung ist das Modell im statorfesten α - β -Koordinatensystem ungeeignet, da Ströme und Spannungen sich durch die Rotation ständig ändern. Das d - q -Koordinatensystem (oberer Index P), welches am Rotorfeld ausgerichtet ist, eignet sich besser für diese Analyse. Das d - q -System ist um den Winkel ϕ^P zum statorfesten Koordinatensystem verdreht und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega^P = d\phi^P/dt$. In diesem System sind Ströme und Spannungen im stationären Fall konstant, wodurch es sich für die Regelung und auch für die Analyse der Anregung besser eignet.

Die Transformation des Modells der ASM (4.2) im α - β -Koordinatensystem in das am Rotorfeld ausgerichtete d - q -System erfolgt anhand der Park-Transformation mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}^P(\phi^P) = \begin{bmatrix} \cos(\phi^P) & -\sin(\phi^P) \\ \sin(\phi^P) & \cos(\phi^P) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

und liefert

$$\mathbf{u}_S^P = R_S \mathbf{i}_S^P + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_S^K + \mathbf{J} \omega^P \boldsymbol{\psi}_S^P \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{u}_R^P = R_R \mathbf{i}_R^P + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_R^P + \mathbf{J}(\omega^P - n_p \omega_m) \boldsymbol{\psi}_R^P = 0 \quad (4.20b)$$

$$\boldsymbol{\psi}_S^P = L_S \mathbf{i}_S^P + L_H \mathbf{i}_R^P \quad (4.20c)$$

$$\boldsymbol{\psi}_R^P = L_R \mathbf{i}_R^P + L_H \mathbf{i}_S^P. \quad (4.20d)$$

Das Ersetzen der unbekanntenen Flüsse und Rotorgrößen analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.2 sowie die Reduktion der Modellordnung durch Elimination von $\hat{\theta}_5$ analog zum Modell (4.17) liefert ein lineares Maschinenmodell vierter Ordnung im d - q -Koordinatensystem.

$$\begin{aligned}
 y^P &= \frac{d}{dt} u_S^d - (\omega^P - n_p \omega_m) u_S^q - i_S^d \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_4 \\
 \phi^P &= \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} i_S^d - (2\omega^P - n_p \omega_m) \frac{d}{dt} i_S^q - ((\omega^P)^2 - \omega_P n_p \omega_m) i_S^d \\ \frac{d}{dt} i_S^d - \omega^P i_S^q \\ -u_S^d \\ \frac{d}{dt} i_S^d - (\omega^P - n_p \omega_m) i_S^q \end{bmatrix} \\
 \theta^P &= \left[\sigma L_S \quad \frac{L_S R_R}{L_R} \quad \frac{R_R}{L_R} \quad R_S \right]^T
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Zur Parameterschätzung kann auch dieses Modell verwendet werden, allerdings ist dann zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit des Rotorflusses ω^P zu ermitteln. Da ω^P ebenfalls nur ein Schätzwert ist, wird die Parameterschätzung im d - q -System ungenau. Das Modell aus Gleichung (4.21) dient deshalb nur zur Analyse der Identifizierbarkeit.

Numerische Probleme der \mathbf{R} -Matrix treten in der Nähe der Synchrondrehzahl auf. In diesem Zustand verschwindet der Schlupf

$$s = \frac{\omega^P - n_p \omega_m}{\omega^P} \tag{4.22}$$

und damit auch der zweite Term in ϕ_4^P aus der Gleichung (4.21). Die Stromkomponente i_S^d erzeugt den Rotorfluss und bleibt bis auf den Feldschwächebereich konstant. Deshalb verschwindet auch die Rotorflussänderung $\frac{d}{dt} i_S^d$ und es gilt $\phi_4^P = 0$, wodurch die Bedingung an fortdauernde Anregung nicht mehr erfüllt ist.

Um genügend Anregung für die Parameterschätzung sicherzustellen, kann ein zusätzliches Anregungssignal in den i_S^d -Strom eingespeist werden.

$$i_{S,Anr}^d[k] = i_S^d[k] + I_{Anr} \sin(2\pi f_{Anr} k \Delta t) \tag{4.23}$$

Das injizierte Signal ist sinusförmig mit der Amplitude I_{Anr} und der Frequenz f_{Anr} .

Eine numerische Auswertung der Bedingung für fortdauernde Anregung an einer Messung veranschaulicht das Problem durch Synchrondrehzahl und konstantem i_S^d -Strom. Tabelle 4.2 zeigt die numerische Verbesserung durch das eingespeiste Anregungssignal.

Ohne der zusätzlichen Einspeisung ist der kleinste Eigenwert $\lambda_{EW,min} = 12,5$ nahe Null und der korrespondierende Eigenvektor \mathbf{v}_{min} zeigt in die Richtung von ϕ_4 . Da das vierte

	ohne Einspeisung	mit Einspeisung
$\kappa(\mathbf{R})$	$3,76 \cdot 10^7$	$8,46 \cdot 10^5$
$\lambda_{EW,min}$	12,5	$9,43 \cdot 10^3$
\mathbf{v}_{min}	$\begin{bmatrix} 9,48 \cdot 10^{-5} \\ -1,66 \cdot 10^{-2} \\ 6,1 \cdot 10^{-3} \\ 0,999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,43 \cdot 10^{-4} \\ 0,144 \\ 0,984 \\ 0,102 \end{bmatrix}$

Tabelle 4.2: Konditionszahl κ , kleinster Eigenwert $\lambda_{EW,min}$ und zugehöriger Eigenvektor von \mathbf{R} ohne und mit eingespeistem Signal in i_S^d

Element des Datenvektors gar nicht angeregt ist, müsste der kleinste Eigenwert Null sein. Lediglich das Signalrauschen sorgt für eine Anregung und liefert einen sehr geringen Eigenwert.

Durch das injizierte Signal verbessert sich die Konditionszahl. Außerdem ist der kleinste Eigenwert deutlich größer als Null und das Problem damit besser konditioniert. Durch die Anregung ist außerdem nicht mehr der vierte Eintrag des Datenvektors am geringsten angeregt, sondern der dritte Eintrag, was der zugehörige Eigenvektor \mathbf{v}_{min} widerspiegelt.

4.4.3 Robuste Signalglättung und Signaldifferentiation

Ein weiteres Problem bei der Parameterschätzung für die ASM ist die zweite zeitliche Ableitung des Statorstroms $\frac{d^2}{dt^2} i_S^\alpha$ im Modell (4.17). Stromsensoren besitzen meist einen hohen Rauschanteil und eine numerische Differentiation für die Berechnung der ersten und zweiten Ableitung führt zu noch stärker verrauschten Signalen. Eine Alternative zur numerischen Berechnung stellt die Methode von Savitzky und Golay [130] zur Signalglättung dar. Die Idee hinter der Savitzky-Golay-Glättung ist die Anpassung eines Polynoms der Ordnung m_{Fil} an die Messungen einer Fensterlänge von k_{Fil} Datenpunkten. Das Ergebnis ist ein Polynom, welches in dem gegebenen Fenster den Verlauf der Messungen möglichst gut nachbildet. Die zeitliche Ableitung des Signals kann durch Differentiation des Polynoms berechnet werden, anstatt eine numerische Differentiation anzuwenden.

Die Umsetzung der Savitzky-Golay-Glättung entspricht der Form eines Filters mit endlicher Impulsantwort (engl.: Finite Impulse Response (FIR)).

$$\hat{y}[k] = \sum_{i=-(k_{Fil}-1)/2}^{(k_{Fil}-1)/2} c_{0,i} y[k+i] \quad (4.24)$$

Das Ergebnis ist ein geglätteter Wert \hat{y} in der Mitte des Datenfensters, der erst nach $(k_{Fil} - 1)/2$ Zeitschritten zur Verfügung steht. Die Berechnung der Filterkoeffizienten

$\mathbf{c}_0 = [c_{0, -(k_{Fil}-1)/2}, \dots, c_{0, (k_{Fil}-1)/2}]$ erfolgt durch

$$\mathbf{z} = \left[\frac{1 - k_{Fil}}{2}, \dots, \frac{k_{Fil} - 1}{2} \right]^T \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{z}^0, \mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \dots, \mathbf{z}^{m_{Fil}}] \quad (4.25b)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{m_{Fil}} \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T. \quad (4.25c)$$

Die Savitzky-Golay-Glättung arbeitet ähnlich zum LS-Algorithmus, indem das Verfahren ein Polynom durch ein quadratisches Gütemaß an die Messdaten anpasst. Deshalb erfolgt die Berechnung der Koeffizienten der Glättung (4.25c) ähnlich zur Lösung des LS-Problems (2.21) aus Abschnitt 2.2.

Neben den Koeffizienten \mathbf{c}_0 für die Signalglättung enthält \mathbf{C} auch die Koeffizienten für die erste (zweite, ...) Ableitung in \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_2 , ...). Mit diesen Koeffizienten berechnet sich die erste Ableitung in ähnlicher Form wie die Glättung

$$\frac{d}{dt} \hat{y}[k] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=-(k_{Fil}-1)/2}^{(k_{Fil}-1)/2} c_{1,i} y[k+i] \quad (4.26)$$

mit der Abtastzeit Δt und in analoger Weise auch die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{y}[k] = \frac{2}{\Delta t^2} \sum_{i=-(k_{Fil}-1)/2}^{(k_{Fil}-1)/2} c_{2,i} y[k+i]. \quad (4.27)$$

Abbildung 4.3 zeigt den Vorteil der Savitzky-Golay-Glättung zur Berechnung der ersten und zweiten Ableitung eines verrauschten Signals gegenüber der numerischen Differentiation. Obwohl das gemessene Signal von i_S^α nur wenig Rauschen besitzt (Abbildung 4.3 a)) verstärkt die numerische Differentiation (—) das Rauschen in der ersten Ableitung (Abbildung 4.3 b)) und zweiten Ableitung (Abbildung 4.3 c)) deutlich. Für die Parameterschätzung ist der Anteil des Rauschens durch die numerische Differentiation zu hoch.

Die Savitzky-Golay-Glättung (—) liefert hingegen brauchbare Ableitungen. Das Verfahren passt zunächst ein Polynom in das gemessene Stromsignal i_S^α ein und berechnet die erste Ableitung $\frac{d}{dt} i_S^\alpha$ und zweite Ableitung $\frac{d^2}{dt^2} i_S^\alpha$ aus der analytischen Ableitung des Polynoms. Das Savitzky-Golay-Verfahren glättet alle Signale von Strom, Spannung und Drehzahl, um die gleiche Phasenverschiebung zu erhalten.

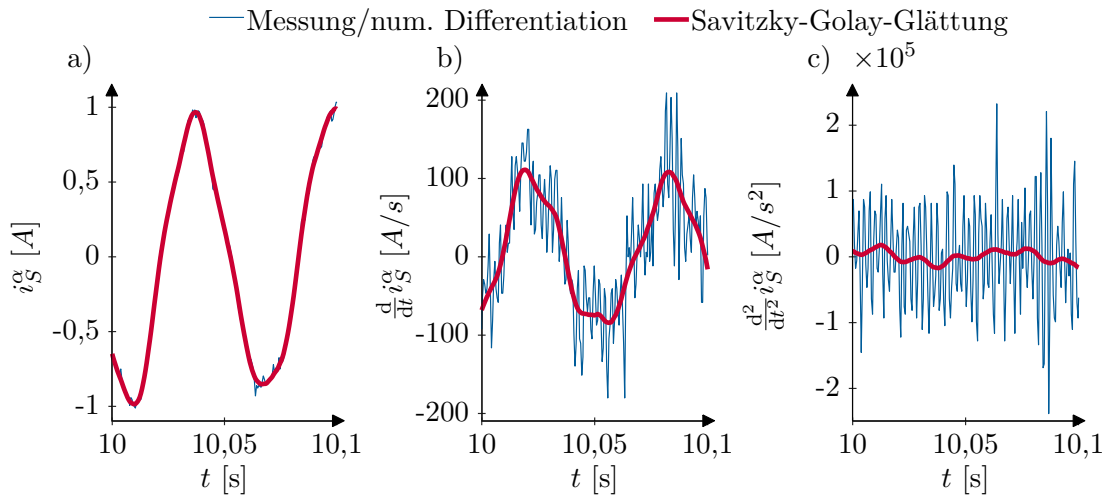


Abbildung 4.3: Messung von i_S^α sowie Berechnung der ersten und zweiten Ableitung durch numerische Differentiation und Savitzky-Golay-Glättung

4.5 Ergebnisse der Parameterschätzung für die Asynchronmaschine

Die Auswertung erfolgt mit dem Modell der ASM aus Abschnitt 4.2 und dem gewöhnlichen RLSeV-Verfahren nach Algorithmus 2.2 in Abschnitt 2.3.2. Dabei verwendet das Schätzverfahren die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt 4.4. Dazu gehört das Modell mit reduzierter Ordnung aus Gleichung (4.17) und das zusätzliche Anregungssignal für den rotorflussbildenden Strom nach Gleichung (4.23). Außerdem glättet die robuste Parameterschätzung alle Eingangssignale mit dem Savitzky-Golay-Verfahren nach Gleichung (4.24). Die Ausdrücken (4.26) und (4.27) berechnen eine robuste erste und zweite Ableitung des Stromsignals. Die Ergebnisse stammen vom Prüfstand, welcher in Abschnitt 4.3 erklärt ist. Das RLSeV-Verfahren verwendet den Vergessenheitsfaktor $\lambda = 0,9997$. Die Startwerte für $\hat{\theta}[0]$ werden aus den nominellen physikalischen Maschinenparametern aus Tabelle 4.3 und den Umrechnungen in (4.17) ermittelt. Die Berechnung der initialen Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[0]$ erfolgt anhand den Überlegungen in Abschnitt 3.5.5. Dabei wird in Gleichung (3.199) die Standardabweichung der Residuen $\sigma_e = 218$ verwendet.

Als erstes wird die Adaption der elektrischen Widerstände bei der Erwärmung der E-Maschine gezeigt. Tabelle 4.3 vergleicht die geschätzten physikalischen Parameter der ASM zu Beginn und nach 20 Minuten im Betrieb mit einer Dauerleistung von 200 W. Die GM bringt die Last auf. Zusätzlich sind die nominellen Werte des Herstellers angegeben. Außerdem zeigt die Tabelle die prozentuale Abweichung der Schätzung. Die Abweichungen können von Produktions- oder Messungenauigkeiten stammen. Nach 20 Minuten Betrieb mit ca. der halben nominellen Leistung erwärmt sich die ASM durch

	R_S [Ω]	R_R [Ω]	$L_{S/R}$ [H]	L_H [H]
nomielle Werte	12,8	9,114	1,12	1,03
Schätzung zu Beginn	13,71	8,809	1,05	1,002
relativer Fehler	+7 %	-3 %	-6 %	-3 %
Schätzung nach 20 min	15,01	9,398	1,037	0,992
relativer Fehler	+17 %	+3 %	-7 %	-4 %

Tabelle 4.3: Geschätzte und nominelle Parameter der ASM

elektrische Verluste. Die Erwärmung spiegelt sich wider in der erhöhten Schätzung der Stator- und Rotorwiderstände R_S und R_R , welche von der Temperatur abhängen. Die Induktivitäten von Stator und Rotor $L_{S/R}$ sind hingegen nicht von der Temperatur abhängig und deren Schätzung verändert sich kaum.

Abbildung 4.4 verdeutlicht die Notwendigkeit eines zusätzlichen Anregungssignals in der i_S^d -Stromkomponente. In den ersten 2 s des Experiments ist $i_S^d = 0,7$ A konstant bis auf

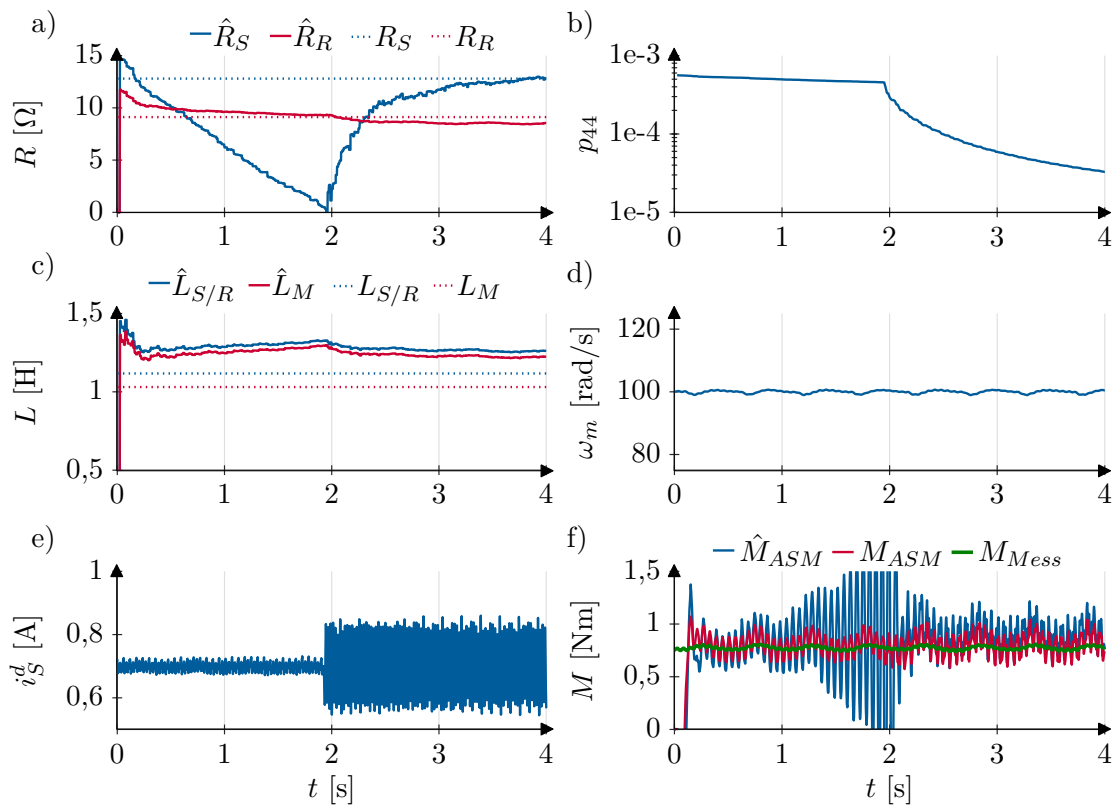


Abbildung 4.4: Einfluss des Anregungssignals im i_S^d -Strom auf die Schätzung von elektrischen Parametern der ASM

das Messrauschen (Abbildung 4.4 e)). Während dieser Zeit divergiert die Schätzung des Statorwiderstands \hat{R}_S (—) in Abbildung 4.4 a). Dieses Verhalten stimmt mit dem Ergebnis aus Unterabschnitt 4.4.2 überein. Mit einem konstanten Wert für i_S^d und in der Nähe der Synchrondrehzahl ist die Bedingung an fortdauernde Anregung für ϕ_4^K nicht

erfüllt und $\hat{\theta}_4 = \hat{R}_S$ lässt sich nicht schätzen. Auch die Schätzungen der Induktivitäten $\hat{L}_{S/R}$ und \hat{L}_M (Abbildung 4.4 c)) konvergieren bei fehlender Anregung nicht. Die Schätzung des Rotorwiderstands \hat{R}_R (—) nähert sich als einziger Schätzwert dem nominellen Wert R_R (⋯) (Abbildung 4.4 a)).

Nach 2 s erhält der i_S^d -Strom ein zusätzliches sinusförmiges Anregungssignal mit Amplitude $I_{Anr} = 0,15$ A und Frequenz $f_{Anr} = 45$ Hz. Diese zusätzliche Anregung sorgt für die Konvergenz aller geschätzten Parameter, was die Notwendigkeit eines injizierten Signals für die Parameterschätzung verdeutlicht.

Die Kovarianzmatrix \mathbf{P} enthält auf der Hauptdiagonalen die Varianzen der geschätzten Parameter $\hat{\theta}$, was einem Maß für die Sicherheit der jeweiligen Schätzung entspricht. p_{44} beschreibt die Varianz des vierten Parameters und somit des Statorwiderstands $\hat{R}_S = \hat{\theta}_4$. Erst die zusätzliche Anregung sorgt für eine sinnvolle Parameterschätzung, was sich in p_{44} (Abbildung 4.4 b)) durch eine geringe Varianz bzw. erhöhte Sicherheit der Schätzung widerspiegelt.

Ein zusätzliches Anregungssignal besitzt einen positiven Einfluss auf die Parameterschätzung, hat aber keine negativen Auswirkungen auf den Betrieb der ASM. Unabhängig vom injiziertem Signal bleibt die Drehzahl der Maschine konstant bei $\omega_m = 100$ rad/s (Abbildung 4.4 d)). Auch das gemessene Drehmoment M_{Mess} (—) in Abbildung 4.4 f)) ist unbeeinflusst von der Anregung. Das berechnete Moment der ASM

$$M_{ASM} = -\frac{3}{2}n_p \frac{L_H}{L_S} i_R^S T \mathbf{J} \psi_S^S = \frac{3}{2}n_p \frac{L_H}{L_S} (i_R^\alpha \psi_S^\beta - i_R^\beta \psi_S^\alpha) \quad (4.28)$$

mit den nominellen Maschinenparametern ist ebenfalls unabhängig von der zusätzlichen Anregung (—). Bei der Berechnung des Drehmoments \hat{M}_{ASM} (— in Abbildung 4.4 f)), welches auf der Gleichung (4.28) und der Schätzung $\hat{\theta}$ basiert, zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie bei der Parameterschätzung. Ohne dem Anregungssignal divergiert das berechnete Moment \hat{M}_{ASM} , in den ersten 2 s, was an der starken Abweichung der geschätzten Parameter liegt. Mit der zusätzlichen Anregung ab 2 s konvergiert die Parameterschätzung und auch die darauf basierende Drehmomentenberechnung \hat{M}_{ASM} nähert sich dem gemessenen Drehmoment M_{Mess} an.

5 Robuste Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen

Neben der Längsdynamik des Gesamtfahrzeugs und der elektrischen Antriebsmaschine stellt der Traktionsakkumulator, bestehend aus Lithium-Ionen-Zellen, eine weitere Hauptkomponente eines Elektrofahrzeugs dar. Ähnlich zu den beiden vorherigen Kapiteln erfolgt zunächst eine kurze Übersicht über bestehende Arbeiten auf dem Gebiet der Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen. Der anschließende Abschnitt modelliert diese Zelle als elektrisches Ersatzschaltbild und leitet daraus ein MISO-Modell in der Form nach Gleichung (2.2) ab. Bei der Anwendung des gewöhnlichen RLS-Verfahrens nach Kapitel 2 kommt es zu ähnlichen Problemen, wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung. Deshalb kommt schließlich der in Kapitel 3 entwickelte robuste Schätzalgorithmus auch für die Lithium-Ionen-Zellen zum Einsatz. Die Probleme bei der Parameterschätzung und deren Lösung durch das robuste Schätzverfahren werden anhand von realen Messdaten aus einem Elektrofahrzeug gezeigt.

5.1 Stand der Technik zur Parameterschätzung bei Akkumulatorzellen

Weng et al. [131] modellieren die Ruhespannungskennlinie als Summe von Sigmoidfunktionen. Ein EKF schätzt den SoC der Lithium-Ionen-Zelle mit einem Modell, welches feste Parameter für den Innenwiderstand und das RC-Glied besitzt. Die Bestimmung des SoH-Werts verwendet ebenfalls das Modell mit den Sigmoidfunktionen und basiert auf der inkrementellen Kapazitätsanalyse. Diese Analyse bildet den inkrementellen Quotienten aus Kapazitätsänderung zu Spannungsänderung [22]. Die Messdaten zur Validierung des Algorithmus stammen aus einem Batterieprüfstand. Die Ergebnisse werden allerdings nur mit präziser Messtechnik erreicht.

Unterrieder et al. [23] vergleichen verschiedene Verfahren zur Schätzung der Ruhespannungskennlinie. Dazu gehören die Schätzung mit LS und RLS sowie ein Schätzer, welcher

auf der gramscen Beobachtbarkeitsmatrix basiert. Ein weiteres Verfahren ist die Schätzung, welche auf der Interpolation und Anpassung der Ruhespannungskennlinie basiert. Um mit dem RLS-Verfahren gute Ergebnisse zu erreichen, werden spezielle Entladungsexperimente durchgeführt.

Der Ansatz von Rahimi-Eichi et al. [24] verwendet ein lineares elektrisches Ersatzschaltbild zur Schätzung der nichtlinearen SoC-Ruhespannungs-Kennlinie. Ein LS-Verfahren mit fester Fensterbreite schätzt die Parameter des Akkumulators. Anschließend verwendet ein Beobachter die Parameterschätzung, um den SoC zu ermitteln. Das Modell enthält einen Innenwiderstand und ein RC-Glied, bestehend aus parallel geschaltetem Widerstand und Kapazität. Eine stückweise definierte lineare Funktion nähert die SoC-Kurve an. Der RLS-Schätzer bestimmt die Akkumulatorparameter und ein Kalman-Filter schätzt den SoC. Die Versuche finden an einem Prüfstand statt und verwenden ein gepulstes Stromsignal. Der Schätzalgorithmus konvergiert kaum und die Parameterschätzungen weisen eine hohe Varianz auf.

Die Arbeit von Zou et al. [25] stellt Verfahren für die Schätzung von SoC und SoH vor. Der SoC entspricht dem Ladezustand und der SoH kann entweder als verfügbare Kapazität, Innenwiderstand oder Impedanz des RC-Glieds aufgefasst werden und hängt somit direkt von den physikalischen Parametern der Zelle ab. Das Akkumulatormodell enthält einen Widerstand und ein RC-Glied in Reihe. Die Ruhespannungskennlinie wird bei stationären Phasen ermittelt und der Innenwiderstand anhand des Spannungseinbruchs berechnet. Ein gewöhnlicher RLS-Algorithmus schätzt die beiden Parameter des RC-Glieds. Die Versuche am Prüfstand enthalten unterschiedliche Lastfälle von Pulstests bis hin zu Fahrprofilen von Fahrzeugen.

5.2 Modellierung einer Lithium-Ionen-Zelle

Die Modellbildung des Akkumulators folgt dem Ansatz von Harmoko et al. [132] und basiert auf dem elektrischen Ersatzschaltbild mit einem elektrischen Widerstand und einem RC-Glied aus Abbildung 5.1. Der Innenwiderstand R_0 stellt das stationäre Verhalten beim Laden/Entladen des Akkumulators dar und das RC-Glied aus R_1 und C_1 bestimmt das dynamische Verhalten. U_{Akk} ist die Spannung, welche an der Ausgangsklemme der Zelle anliegt, U_{OC} entspricht der Leerlauf- bzw. Ruhespannung (engl.: Open Circuit Voltage) und I_{Akk} ist der Akkumulatorstrom.

Die Maschengleichung des elektrischen Ersatzschaltbildes nach Abbildung 5.1 lautet

$$U_{Akk}(s) = U_{OC} - U_0(s) - U_1(s) = U_{OC} - I_{Akk}(s) \left(R_0 + \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} \right) \quad (5.1)$$

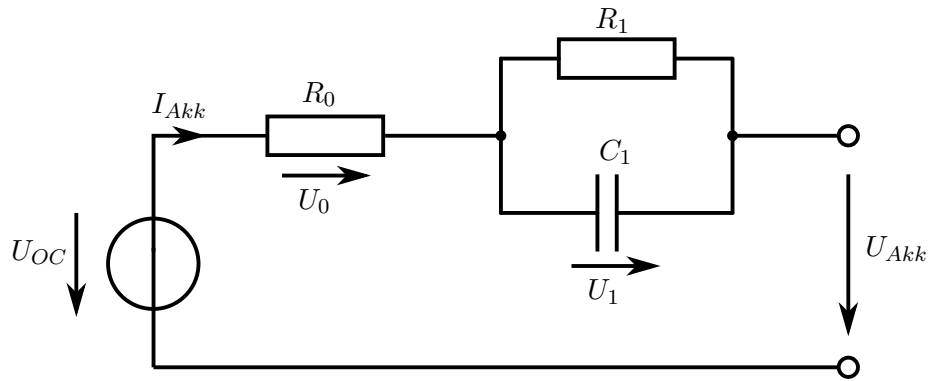


Abbildung 5.1: Elektrisches Ersatzschaltbild der Lithium-Ionen-Zelle

im Laplace-Bereich mit dem komplexen Frequenzparameter s .

Da der RLS-Algorithmus im zeitdiskreten Bereich arbeitet, wandelt der nächste Schritt der Modellierung die Gleichung (5.1) anhand der Tustin-Methode bzw. bilinearen Transformation

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5.2)$$

mit der Abtastzeit Δt und der komplexen z -Variablen in den zeitdiskreten z -Bereich um [26, S. 389]. Die bilineare Transformation wandelt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{E_{Akk}(s)}{I_{Akk}(s)} = \frac{U_{Akk}(s) - U_{OC}}{I_{Akk}(s)} = -\frac{R_0 + R_0 R_1 C_1 s + R_1}{1 + R_1 C_1 s} \quad (5.3)$$

um, welche aus dem Modell (5.1) stammt. Die Transformation liefert

$$\begin{aligned} G(z^{-1}) &= \frac{E_{Akk}[z^{-1}]}{I_{Akk}[z^{-1}]} = -\frac{\frac{\Delta t R_0 + 2R_0 R_1 C_1 + \Delta t R_1}{\Delta t + 2R_1 C_1} + \frac{\Delta t R_0 - 2R_0 R_1 C_1 + \Delta t R_1}{\Delta t + 2R_1 C_1} z^{-1}}{1 + \frac{\Delta t - 2R_1 C_1}{\Delta t + 2R_1 C_1} z^{-1}} \\ &= \frac{a_2 + a_3 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\Delta t - 2R_1 C_1}{\Delta t + 2R_1 C_1} & a_2 &= \frac{\Delta t R_0 + 2R_0 R_1 C_1 + \Delta t R_1}{\Delta t + 2R_1 C_1} \\ a_3 &= \frac{\Delta t R_0 - 2R_0 R_1 C_1 + \Delta t R_1}{\Delta t + 2R_1 C_1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Der nächste Schritt transformiert die Gleichung (5.4) in den diskreten Zeitbereich.

$$\begin{aligned} E_{Akk}[z^{-1}] &= \frac{a_2 + a_3 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} I_{Akk}[z^{-1}] \\ &\Updownarrow \\ E_{Akk}[z^{-1}](1 - a_1 z^{-1}) &= (a_2 + a_3 z^{-1}) I_{Akk}[z^{-1}] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bei der Rücktransformation in den Zeitbereich entspricht der z^{-1} -Operator einer Verschiebung um einen Zeitschritt.

$$E_{Akk}[k] - a_1 E_{Akk}[k-1] = a_2 I_{Akk}[k] + a_3 I_{Akk}[k-1] \quad (5.7)$$

Einsetzen von $E_{Akk}[k] = U_{Akk}[k] - U_{OC}$ liefert

$$\underbrace{U_{Akk}[k]}_{y[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & U_{Akk}[k-1] & I_{Akk}[k] & I_{Akk}[k-1] \end{bmatrix}}_{\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} (1-a_1)U_{OC} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\theta}, \quad (5.8)$$

was einem linearen Modell in der Form von Gleichung (2.2) entspricht. Anhand von diesem Modell kann ein RLS-Algorithmus den Parametervektor $\hat{\theta}$ schätzen und anschließend die physikalischen Parameter über

$$U_{OC} = \frac{\hat{\theta}_1}{1 - \hat{\theta}_2} \quad (5.9a)$$

$$R_0 = -\frac{\hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_4}{1 + \hat{\theta}_2} \quad (5.9b)$$

$$R_1 = -\frac{2(\hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4)}{1 - \hat{\theta}_2^2} \quad (5.9c)$$

$$C_1 = -\frac{\Delta t (1 + \hat{\theta}_2)^2}{4(\hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4)} \quad (5.9d)$$

berechnen.

5.3 Versuchsbeschreibung

Als Versuchsobjekt für die Parameterschätzung an der Lithium-Ionen-Zell dient das Akkumulatorpaket eines Elektrofahrzeugs. Abbildung 5.2 zeigt die Antriebsstrangkomponenten des untersuchten Mitsubishi i-MiEV. Hosokawa et al. [134] beschreiben die Entwicklung dieses Elektrofahrzeugs. Für das Laden des Fahrzeugs stehen zwei unterschiedliche Systeme zur Verfügung. Der Traktionsakkumulator, welcher im Unterboden des Fahrzeugs verbaut ist, besteht aus 88 Lithium-Ionen-Zellen, die in Reihe geschaltet sind. Zusammen besitzen diese Zellen eine Nominalspannung von 330 V und einen Energieinhalt von 16 kWh. Laut Datenblatt reicht die elektrische Energie für eine Reichweite von 160 km. Ein Inverter wandelt die Gleichspannung des Akkumulators in eine

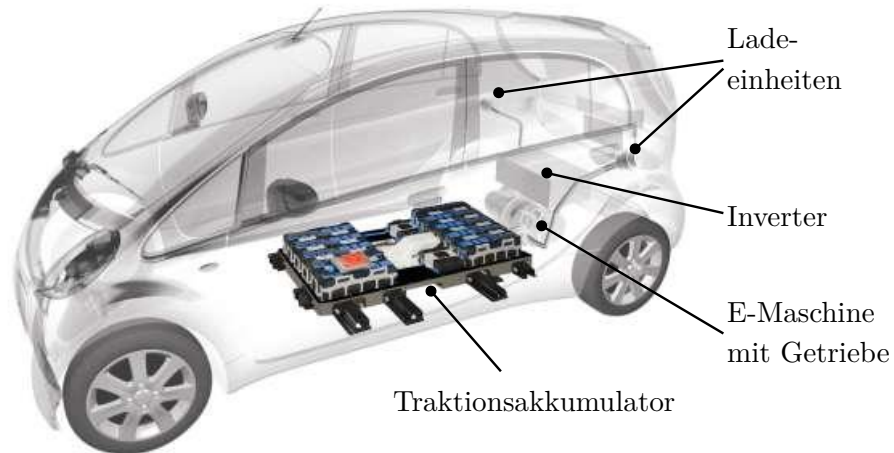


Abbildung 5.2: Anordnung der Antriebsstrangkomponenten eines Mitsubishi i-MiEV nach [133]

Wechselspannung für die E-Maschine um. Als Antrieb dient eine permanenterrregte Synchronmaschine mit einer Maximalleistung von 49 kW und einem Spitzendrehmoment von 180 Nm. Die Kraftübertragung an die Räder übernimmt ein einstufiges Getriebe ohne Schaltmöglichkeit, welches auch als Differential dient.

Für die Messung der relevanten Größen zur Parameterschätzung der Li-Ionen-Zelle stehen am Fahrzeug unterschiedliche Quellen zur Verfügung. Zum einen besitzt das Fahrzeug zusätzliche Sensoren zur Strommessung an unterschiedlichen Stellen des elektrischen Antriebsstrangs. Abbildung 5.3 zeigt schematisch den Einbauort dieser Stromsensoren. Zum einen erfasst ein Stromsensor den Ladestrom I_{Laden} , mit dem der Akku-

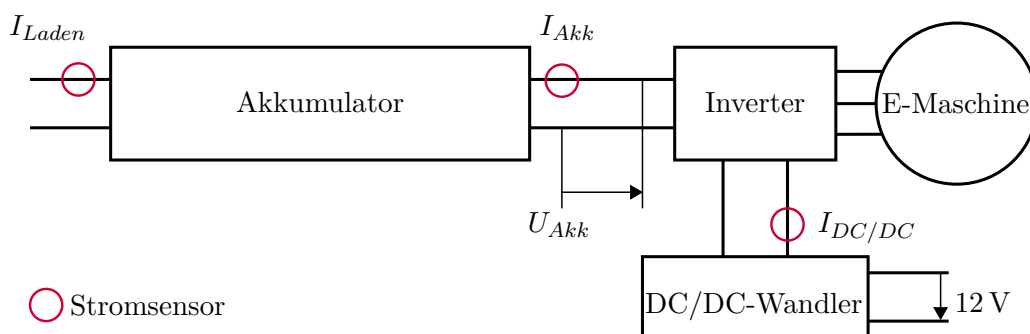


Abbildung 5.3: Einbeilage der Stromsensoren

lator am Stromnetz aufgeladen wird. Zum anderen misst ein Sensor den Strom I_{Akk} , welcher vom Akkumulator zum Inverter fließt. Das Controller Area Network (CAN) des Akkumulatorpakets überträgt das Signal der Spannung U_{Akk} am Akkumulatorausgang. Ein Datenlogger zeichnet diese Signale auf. Neben der E-Maschine speißt der Inverter mit

dem messbaren Strom $I_{DC/DC}$ zusätzlich einen Gleichspannungswandler, der die Gleichspannung (engl. Direct Current (DC)) des Bordnetzes von 12 V bereitstellt. Die Messung der Ströme zur permanentenregten Synchronmaschine ist nicht möglich. Dadurch fehlt ein Teil der Eingangssignale zur Parameterschätzung für die E-Maschine im i-MiEV. In Kapitel 4 erfolgt die robuste Schätzung für elektrische Maschinen deshalb an einem Laboraufbau. Außerdem befinden sich zusätzlich diverse Temperaturfühler im Fahrzeug. Zum anderen ist es möglich, den Serien-CAN mit den allgemeinen Fahrzeugdaten, wie Geschwindigkeit, mitzumessen. Zusätzlich wird der CAN des Akkumulatorpakets aufgezeichnet.

Abbildung 5.4 gibt einen Überblick über die Struktur der Datenerfassung. Ein Da-

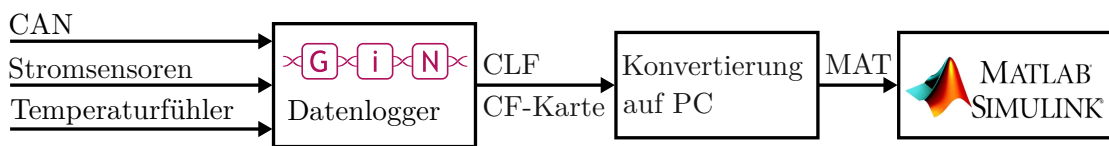


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung der Datenerfassung am i-MiEV

tenlogger von GiN [135] zeichnet den CAN des Fahrzeugs und des Akkumulatorpakets zusammen mit den zusätzlichen Signalen der Stromsensoren und der Temperaturfühler auf. Die Messungen liegen danach im Format Compact Log Format (CLF) vor, die auf einer Speicherkarte des Typs Compact Flash (CF) gespeichert sind. Das Auslesen und Konvertieren der CLF-Daten in das MAT-Format übernimmt ein gewöhnlicher PC. Die MAT-Dateien finden anschließend Einsatz in der Entwicklung und Validierung des Schätzalgorithmus für die Lithium-Ionen-Zelle.

5.4 Problemanalyse und robuste Parameterschätzung

Ähnlich wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung treten bei der Messung von Strom und Spannung im Elektrofahrzeug Messausreißer auf. Abbildung 5.5 a) zeigt die Verteilung der Residuen bei der Parameterschätzung für den Akkumulator, analog zu Abbildung 3.22 für die Fahrzeuglängsdynamik. Die Tabelle 5.1 zeigt die Parameter für die Normalverteilung und für die studentsche t -Verteilung aus der Abbildung 5.5.

	Mittelwert	Standardabweichung/ Skalierungsparameter	Anzahl der Freiheitsgrade
Normalverteilung	$\mu_N = -2,61 \cdot 10^{-5} V$	$\sigma_N = 1,44 \cdot 10^{-3} V$	-
t -Verteilung	$\mu_t = -2,19 \cdot 10^{-5} V$	$\sigma_t = 4,45 \cdot 10^{-4} V$	$\nu_t = 1,23$

Tabelle 5.1: Parameter der Normal- und der studentschen t -Verteilung für das Beispiel aus Abbildung 5.5

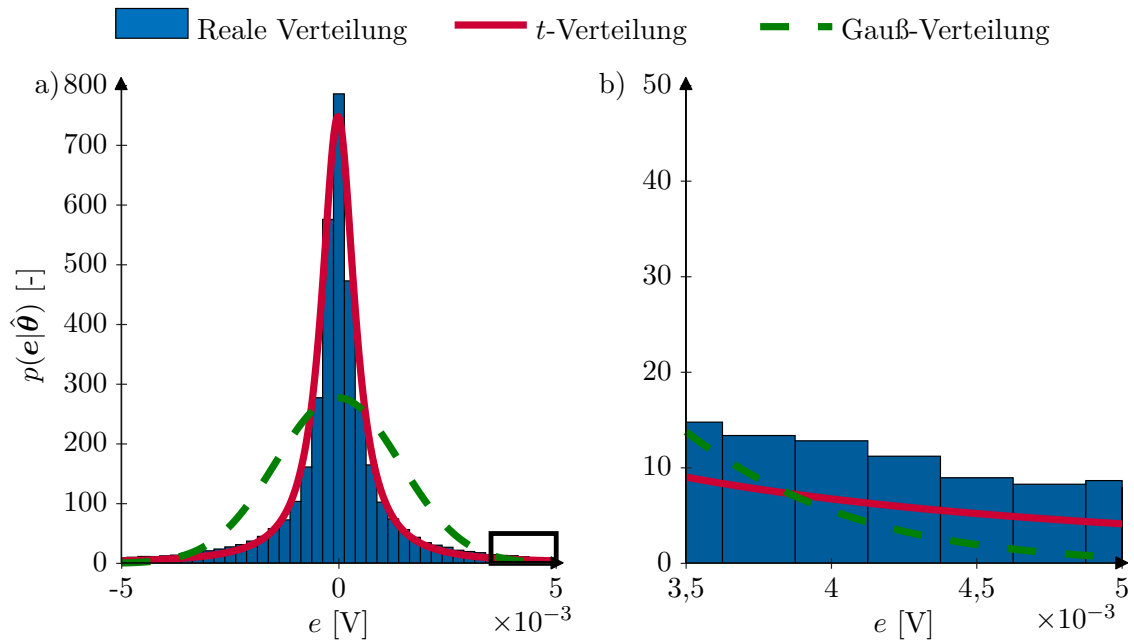


Abbildung 5.5: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(e|\hat{\theta})$ der realen Residuen im Vergleich zu angepasster studentscher t -Verteilung und Gaußverteilung

Bei der Schätzung der Zellparameter folgen die Residuen nicht einer Gaußverteilung (---). Die studentsche t -Verteilung (—) bildet, wie auch bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung, die reale Verteilung deutlich besser ab. Auch für die Anwendung am Akkumulator gilt, dass die hohe Anzahl großer Residuen, welche auch als Ausreißer interpretiert werden können, die Gaußverteilung verzerren. Der Bereich des schwarzen Rechtecks im Histogramm von Abbildung 5.5 a) ist in der Teilgrafik b) vergrößert dargestellt. Die t -Verteilung beschreibt den großen Anteil an hohen Residuen deutlich besser als die Gaußverteilung. Für eine robuste Parameterschätzung am Akkumulator muss, wie bei der Fahrzeuglängsdynamik, die abweichende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berücksichtigt werden.

Phasen mit mangelnder Systemanregung treten bei der Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen auf, wenn der Regressorvektor ϕ in Gleichung (5.8) über einen längeren Zeitraum konstant bleibt. Für eine sinnvolle Schätzung dürfen Akkumulatorspannung U_{Akk} und Akkumulatorstrom I_{Akk} nicht konstant sein. Bei konstanter Leistungsanforderung an den Akkumulator, z. B. bei Konstantfahrt, sind diese Werte jedoch konstant und es kommt zum Windup-Effekt. Deshalb bietet sich wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung ein Regularisierungsverfahren zur Minimierung dieses Effekts an.

Bei der Rückrechnung der geschätzten Parameter $\hat{\theta}$ auf die physikalischen Parameter ergibt sich das Problem, dass der Nenner der Gleichungen (5.9a) und (5.9c) für $\hat{\theta}_2 = 1$ Null ist. Die Beschränkung des Schätzwertes $\hat{\theta}_2 \leq 0,999$ mit dem Verfahren der weichen Grenzen nach Abschnitt 3.5.3.4 erfüllt die Bedingung $\hat{\theta}_2 \neq 1$.

Bei der Schätzung der elektrischen Parameter von Lithium-Ionen-Zellen treten somit ähnliche Herausforderung auf, wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung aus Kapitel 3. Somit eignet sich das robuste Schätzverfahren nach Algorithmus 3.8 aus Abschnitt 3.5.4 auch für die Anwendung beim Lithium-Ionen-Akkumulator. Dieser Algorithmus ist speziell für Anwendungen entwickelt, bei denen Messausreißer und Phasen mit mangelnder Anregung auftreten und Parametergrenzen eingehalten werden müssen.

5.5 Ergebnisse der Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen

Dieser Abschnitt stellt die Ergebnisse der Parameterschätzung für Lithium-Ionen-Zellen mit dem robusten Schätzverfahren aus Abschnitt 3.5.4 dar. Als Basis dienen Messungen aus einem Elektrofahrzeug, deren Aufzeichnung der Abschnitt 5.3 beschreibt.

Im Folgenden verwenden das gewöhnliche RLSeV-Verfahren und der robuste Schätzalgorithmus den gleichen Vergessenheitsfaktor und die gleichen Startwerte.

$$\lambda = 0,9999$$

$$\hat{U}_{OC}[0] = 4 \text{ V} \quad \hat{R}_0[0] = 4 \cdot 10^{-3} \Omega \quad \hat{R}_1[0] = 3 \cdot 10^{-3} \Omega \quad \hat{C}_1[0] = 1 \cdot 10^4 \text{ F}$$

Anhand der Gleichungen (5.5) und (5.8) ergibt sich daraus der Startwert für die Schätzparameter $\hat{\theta}[0]$. Der Abschnitt 3.5.5 beschreibt die Berechnung der initiale Kovarianzmatrix für die beiden Schätzverfahren. Die Parameter für die studentsche t -Verteilung, die für die Berechnung der Gewichte in Zeile 2 des robusten Algorithmus 3.8 benötigt werden, stammen aus Tabelle 5.1. Das robuste Schätzverfahren verwendet zusätzlich die folgenden Einstellungen.

$$\Sigma_{Reg} = \text{diag} \left(10^{-3}, 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1} \right)$$

$$\theta_{min} = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix} \quad \theta_{max} = \begin{bmatrix} \infty \\ 0,999 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \quad c = 1$$

Zunächst zeigt Abbildung 5.6 die Ergebnisse der Schätzparameter $\hat{\theta}$ aus dem RLSeV-Algorithmus und mit dem robusten Schätzverfahren nach Algorithmus 3.8. Die Graphen a), c), e) und g) von Abbildung 5.6 zeigen der Verlauf der vier Schätzgrößen $\hat{\theta}_1$ bis $\hat{\theta}_4$. Ausreißer in den Messungen verursachen die Sprünge in den Verläufen für das RLSeV-Verfahren (—). Da der robuste Schätzalgorithmus (—) den Einfluss von Messausreißern

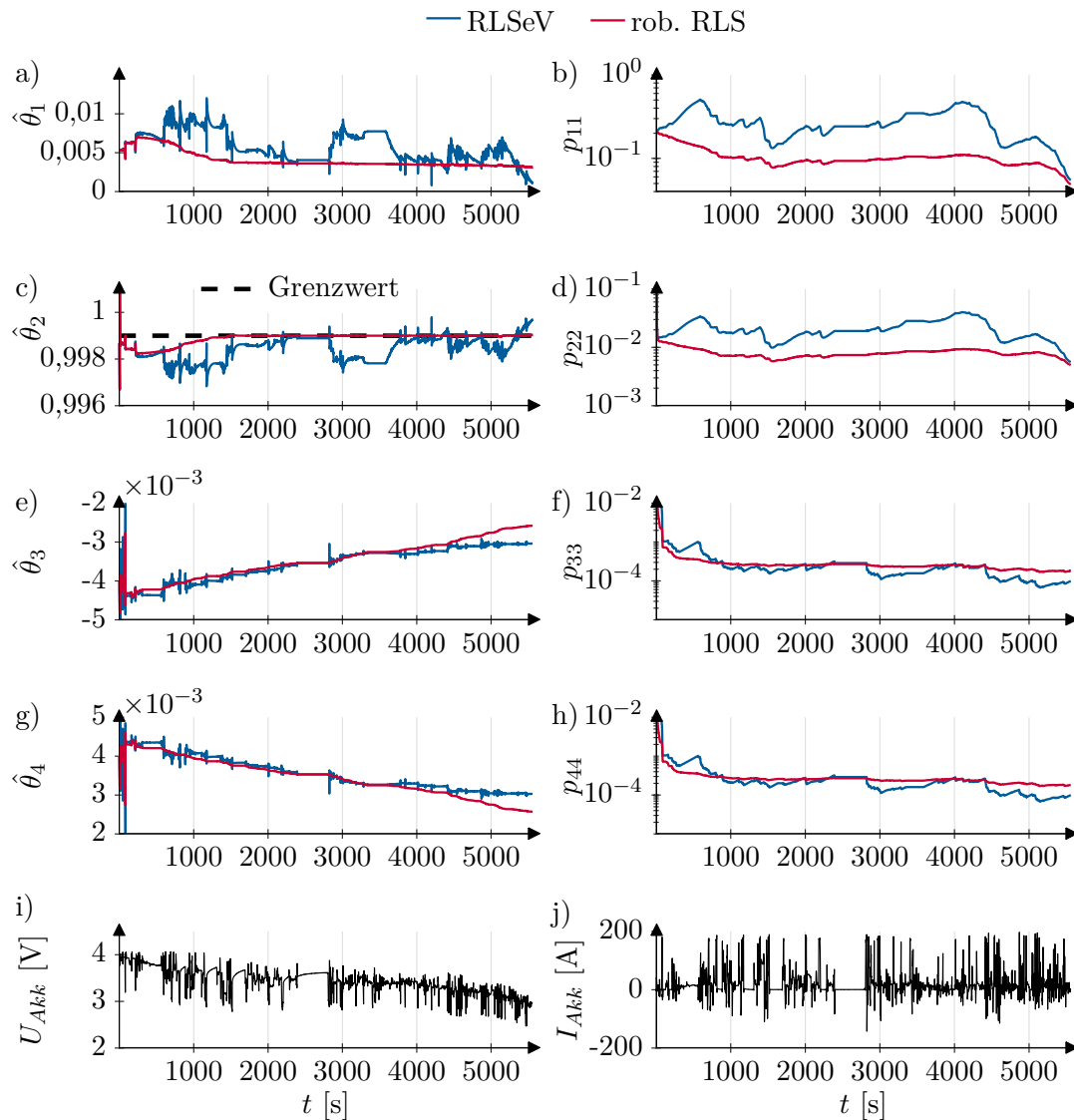


Abbildung 5.6: Schätzparameter von gewöhnlichem RLSeV-Verfahren und robustem RLS sowie zugehörige Diagonaleinträge der Kovarianzmatrix für die Schätzung der Parameter von Lithium-Ionen-Zellen

minimiert, besitzen die Ergebnisse einen ruhigeren Verlauf ohne sprunghafte Abweichungen.

Neben den Schätzgrößen $\hat{\theta}$ zeigen die Grafiken b), d), f) und h) in Abbildung 5.6 das Verhalten der Diagonaleinträge der Kovarianzmatrix \mathbf{P} . Hierbei ist der Windup-Effekt beim gewöhnlichen RLSeV-Verfahren (—) zu erkennen. In Phasen mit geringer Anregung, z. B. um den Zeitpunkt $t = 500\text{s}$ herum, wachsen die Einträge p_{11} bis p_{44} der Kovarianzmatrix des RLSeV-Algorithmus an. Der Grund hierfür ist die mangelnde Anregung in diesem Zeitbereich in dem die Eingangssignale U_{Akk} (Abbildung 5.6 i)) und I_{Akk} (Abbildung 5.6 j)) nahezu konstant sind. Abbildung 5.7 e) zeigt die zu dieser

Messfahrt gehörende Geschwindigkeit. Da um $t = 500$ s die Geschwindigkeit nahezu konstant ist, gibt der Akkumulator auch eine konstante Leistung ab, die keine ausreichende Anregung für die Parameterschätzung besitzt. Der Windup-Effekt tritt beim robusten Schätzverfahren (—) nicht auf, da die LM-Regularisierung ein beliebiges Anwachsen der Kovarianzmatrix verhindert.

Abbildung 5.6 c) enthält neben der Schätzung $\hat{\theta}_2$ auch den Grenzwert $\theta_{max,2} = 0,999$ (- -). Bei der Rückrechnung von $\hat{\theta}$ auf die physikalischen Parameter mit den Gleichungen (5.9) muss u. a. sichergestellt sein, dass $\hat{\theta}_2 \neq 1$ gilt. Um diese Bedingung einzuhalten wird die obere Grenze für den robusten Schätzalgorithmus auf $\theta_{max,2} = 0,999$ gesetzt. Das gewöhnliche RLSeV-Verfahren besitzt keine Möglichkeit, Grenzwerte einzuhalten. Vor allem zum Ende der Messfahrt hin besteht die Gefahr, dass die RLSeV-Methode die Bedingung $\hat{\theta}_2 \neq 1$ verletzt. Selbst wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, kann es für den Fall $\hat{\theta}_2 \approx 1$ bei der Rückrechnung zu numerischen Problemen kommen.

Abbildung 5.7 zeigt das Ergebnis der Parameterschätzung für eine gesamte Fahrt mit einer Dauer von mehr als 90 min = 5400 s, was einer vollständigen Entladung des Akkumulatorpakets entspricht. Bei der Schätzung der vier Zellparameter Innenwiderstand R_0 (Abbildung 5.7 b)), Ruhespannung U_{OC} (Abbildung 5.7 c)), Widerstand R_1 (Abbildung 5.7 d)) und Kapazität C_1 (Abbildung 5.7 f)) des RC-Glieds zeigt sich, dass der robuste RLS-Algorithmus (—) deutlich ruhigere Schätzungen ohne sprunghafte Fehlschätzungen liefert als das gewöhnliche RLS-Verfahren (—). Vor allem die Schätzung für \hat{R}_1 divergiert für das RLSeV-Verfahren in Abbildung 5.7 d). Dies liegt u. a. daran, dass bei der Rückrechnung von \hat{R}_1 nach Gleichung (5.9c) der Nenner $1 - \hat{\theta}_2^2$ nicht Null werden darf. Abbildung 5.6 c) zeigt, dass für die Schätzung des RLSeV-Verfahrens (—) am Ende der Messung $\hat{\theta}_2 \rightarrow 1$ gilt. Damit divergiert die zurückgerechnete Größe \hat{R}_1 in Abbildung 5.7 d) am Ende der Testfahrt. Das robuste Schätzverfahren (—) begrenzt die Schätzung in Abbildung 5.6 c) auf den Wert $\theta_{max,2} = 0,999$. Damit ist die Rückrechnungsvorschrift immer erfüllt und das robuste Schätzverfahren liefert sinnvolle Werte für \hat{R}_1 in Abbildung 5.7 d).

Die robuste RLS-Methode bildet das richtige Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Modells nach, was der Vergleich von gemessenem Systemausgang y (—) mit dem geschätzten Systemausgang $\hat{y}_{rob} = \phi^T \hat{\theta}$ (- -) zeigt. In Abbildung 5.7 a) liegen beide Signale übereinander. In diesem Graphen ist außerdem die geschätzte Ruhespannungskennlinie \hat{U}_{OC} (—) eingezeichnet. Für eine Lithium-Ionen-Zelle liegt die Nennspannung bei 3,7 V. Der Systemausgang $y = U_{Akk}$ entspricht der Ausgangsspannung des Akkumulators. Die Ruhespannung U_{OC} ist nicht konstant, sondern vom Ladezustand der Zelle abhängig. Somit ist eine Schätzung mit $\lambda = 1$ nicht zielführend, da ansonsten die Adaption von \hat{U}_{OC} zu langsam verläuft.

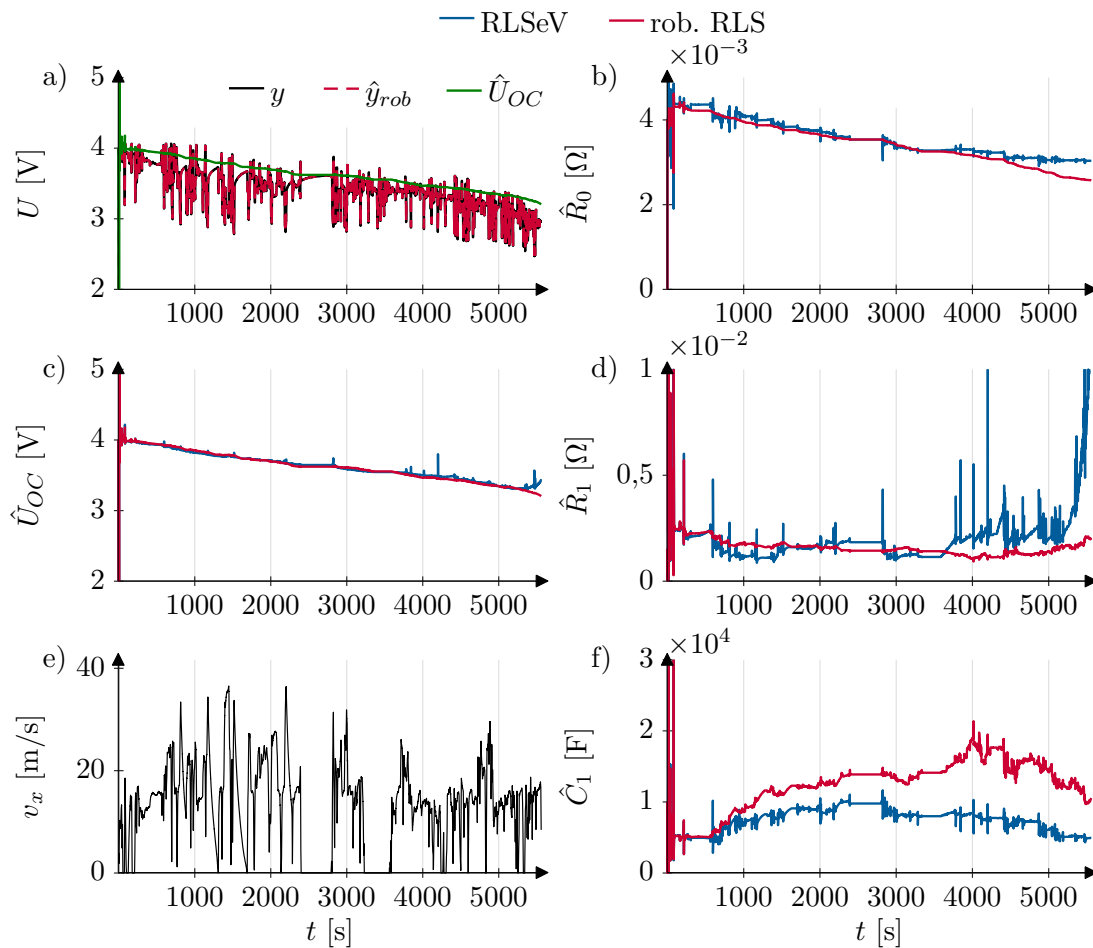


Abbildung 5.7: Gemessene Ausgangsspannung des Akkumulators und geschätzte Parameter

Die Abbildung 5.7 macht außerdem die Notwendigkeit für die Modellierung der Lithium-Ionen-Zelle mit einem statischen Innenwiderstand R_0 und einem dynamischen RC-Glied deutlich. Wenn aus dem Akkumulator Ladung entnommen wird, so bricht die Spannung $U_{Akk} = y$ vom Level der Ruhespannung U_{OC} zunächst um einen konstanten Wert ein. Die sprunghafte Änderung bzw. das stationäre Verhalten wird durch den Innenwiderstand modelliert. Bei konstanter Last nähert sich die Akkumulatordspannung mit einem PT1-Verhalten, modelliert durch das RC-Glied, einem Grenzwert an. Bei Wegnahme der Last konvergiert die Ausgangsspannung U_{Akk} wieder zur Ruhespannung U_{OC} . Im Bereich um $t = 2500\text{s}$ steht das Fahrzeug für einen längeren Zeitraum, erkennbar an $v_x = 0$ in Abbildung 5.7 e). Zunächst springt die Spannung des Akkumulators $U_{Akk} = y$ in Richtung der Ruhespannung und nähert sich dann mit dem Verhalten eines PT1-Glieds der U_{OC} -Kennlinie.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorgestellten robusten Parameterschätzer berücksichtigen die beim Einsatz an realen Elektrofahrzeugen auftretenden Probleme. Als Teilanwendungen werden dabei die Längsdynamik eines Fahrzeugs, sowie eine ASM als Antriebsmaschine und die Lithium-Ionen-Zelle betrachtet. Anhand realer Messdaten aus Fahrzeug- und Prüfstandtests erfolgt zunächst eine Problemanalyse mit anschließender Entwicklung eines angepassten Algorithmus. Die anschließende Validierung der robusten Verfahren erfolgt mit ausgiebigen Messreihen.

6.1 Fahrzeuglängsdynamik

Die Modellierung der Fahrzeuglängsdynamik enthält neben den Parametern der Fahrzeugmasse, des Roll- und Luftwiderstands auch den Bremsenparameter, der den Zusammenhang zwischen Bremsdruck und Bremsmoment darstellt. Diese Arbeit stellt eine Möglichkeit vor, den Bremsenparameter basierend auf der Schätzung von Fahrzeugmasse und Fahrwiderständen zu adaptieren.

Neben den bereits genannten Parametern haben noch weitere Kenngrößen einen Einfluss auf die Fahrzeuglängsdynamik wie der Kurvenwiderstand und ein von der Geschwindigkeit linear und quartisch abhängiger Fahrwiderstand. Durch Auswertung des Gesamtgütemaßes über viele Messfahrten stellt sich heraus, dass durch die Schätzung von Fahrzeugmasse, konstantem Rollwiderstand und quadratischem Luftwiderstand die Fahrzeuglängsdynamik ausreichend genau beschrieben ist. Die Eingangsgrößen für die Parameterschätzung sind in der Realität meist durch Fehler verfälscht. Um die Auswirkung von Eingangsfehlern auf die Parameterschätzung zu bewerten werden verschiedene Sensitivitätsanalysen durchgeführt. Zum einen zeigt sich, dass für die Sensitivitätsanalyse der LS-Schätzung die Simulationsmethode besser geeignet ist als die Verfahren mit infinitesimal kleiner Änderung oder der linearen Taylorreihen-Approximation. Zum anderen ist das Ergebnis dieser Analyse, dass ein Fehler im Antriebsmoment den größten Einfluss auf die Parameterschätzung besitzt. Durch die Problemanalyse mit realen

Messdaten zeigt sich, dass bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung ein speziell angepasster Algorithmus für ein robustes Verhalten notwendig ist.

- Bei der vorliegenden Anwendung treten Messausreißer auf, welche die Schätzung verzerren. Die Detektion dieser Ausreißer ist sehr rechenaufwändig und somit nicht geeignet für eine Anwendung auf einem Steuergerät. Für einen recheneffizienten Algorithmus interpretiert diese Arbeit die Messausreißer als normale Messungen einer studentischen t -Verteilung. Bei dieser Verteilungsfunktion besitzen große Messfehler eine höhere Wahrscheinlichkeit als bei einer Normalverteilung. Anhand einer angepassten Kostenfunktion, die auf der studentischen t -Verteilung basiert, ergibt sich ein rekursiver M-Schätzer, welcher robust gegenüber großen Messfehlern ist.
- Außerdem ist bei konstanter Geschwindigkeit die Systemanregung zu gering für eine sinnvolle Parameterschätzung und es kommt zum Windup-Effekt. Als Lösung bietet sich dafür die Regularisierung nach Levenberg und Marquardt an, die einen zusätzlichen Term in der Berechnung der Informationsmatrix einführt. Eine effiziente Verrechnung dieses Terms sichert den geringen Rechenaufwand der Regularisierung.
- Durch Messausreißer oder dem Windup-Effekt kann es zu Abweichungen in der Parameterschätzung kommen, die physikalisch nicht mehr sinnvoll sind, wie z. B. negative Fahrwiderstände. Um die Schätzwerte auf einen vorgegebenen Bereich exakt zu beschränken, existieren verschiedene Verfahren, die aufwändig zu berechnen sind. Wenn die Grenzen nicht exakt eingehalten werden müssen, dann bietet sich die vorgestellte Methode der weichen Grenzen an, welche die Beschränkungen nicht exakt erfüllt, dafür deutlich geringeren Rechenbedarf aufweist.

Aus den drei Einzellösungen entsteht ein robuster Schätzalgorithmus, welcher robust gegenüber Messausreißern ist, den Einfluss des Windup-Effekts reduziert und Schätzungen innerhalb physikalisch sinnvoller Grenzen liefert. Diese Arbeit stellt zudem eine einfache Möglichkeit vor, die Parametrierung der initialen Kovarianzmatrix auf analytischem Weg durchzuführen. Dies erspart dem Anwender des robusten Schätzverfahrens eine zeitaufwändige Anpassung der Kovarianzmatrix per Hand. Die Validierung des robusten Schätzers erfolgt anhand einer Vielzahl von Messfahrten mit unterschiedlichen Fahrzeugtypen und Antriebskonzepten. Als Auswertekriterium dient dabei die Abweichung der geschätzten Fahrzeugmasse zur tatsächlichen, gewogenen Masse. Da sich die echten Fahrwiderstandswerte nicht messen lassen, dient die Prädiktion der Ausrollkurven als Bewertung. Das in dieser Arbeit entwickelte robust Schätzverfahren liefert dabei bessere Ergebnisse als das gewöhnliche RLSeV-Verfahren.

6.2 Asynchronmaschine

Nach einer kurzen Einführung zur Parameterschätzung für die ASM folgt die aufwändige Modellierung dieser E-Maschine als MISO-Modell. Die Problemanalyse der ASM erfolgt anhand der Bedingung an fortdauernde Anregung. Erstens ergibt sich durch die Untersuchung mit experimentellen Messdaten, dass das vorliegende Modell aufgrund der Struktur nicht identifizierbar ist. Der Grund hierfür ist Überparametrisierung des Modells. Mit einer Reduktion der Modellordnung wird die strukturelle Identifizierbarkeit erreicht. Zweitens zeigt sich, dass bei einem konstanten rotorflussbildenden Stromanteil die Bedingung an fortdauernde Anregung nicht erfüllt ist. Ein zusätzliches künstliches Anregungssignale auf dieser Stromkomponente erhöht die Systemanregung und ermöglicht eine sinnvolle Parameterschätzung. Ein weiteres Problem für die Schätzung der ASM-Parameter ist die Notwendigkeit der zweiten zeitlichen Ableitung eines Stromsignals. Bei der Verwendung einer gewöhnlichen numerischen Differentiation ergeben sich durch das Messrauschen auf dem Stromsignal erhebliche Abweichungen im abgeleiteten Signal, was schließlich zu Fehlern in den Schätzungen führt. Der Savitzky-Golay-Filter bietet sich hier als Lösung an. Dieses Verfahren glättet zum einen das Signal und liefert eine einfache Berechnung der Signalableitungen. Mit diesen drei Verbesserungen lässt sich eine robuste Schätzung der ASM-Parameter erreichen. Dies wird anhand von Messungen an einem E-Maschinen-Prüfstand gezeigt.

6.3 Lithium-Ionen-Zelle

Die Parameterschätzung für eine Lithium-Ionen-Zelle erfolgt anhand eines realen Elektrofahrzeugs. Bei der Analyse der Messungen zeigen sich ähnliche Probleme wie bei der Masse- und Fahrwiderstandsschätzung. Zum einen treten Messfehler auf, welche als normale Messungen einer studentischen t -Verteilung interpretiert werden. Bei konstantem Zellenstrom ist zudem die Bedingung an fortdauernde Anregung nicht mehr erfüllt, wodurch es zum Windup-Effekt kommt. Bei der Rückrechnung der geschätzten Werte auf die physikalischen Parameter müssen außerdem die Schätzwerte einen bestimmten Wertebereich einhalten. Als Lösung für diese drei Punkte bietet sich das vorgestellte robuste Schätzverfahren an, welches ursprünglich für die Masse- und Fahrwiderstandsschätzung hergeleitet wird. Damit lässt sich der Einfluss von Messausreißern und dem Windup-Effekt minimieren und es wird ein gewählter Wertebereich eingehalten. Reale Fahrzeugmessungen zeigen die Verbesserungen durch den robusten Schätzalgorithmus im Vergleich zum gewöhnlichen RLSeV-Verfahren.

6.4 Ausblick

Zukünftige Verbesserungen in der Parameterschätzung können zum einen durch eine detailliertere Modellierung der Teilsysteme erreicht werden. Die einfache Annahme eines konstanten c_p -Werts über den gesamten Betriebsbereich ist zu ungenau. Eine zusätzliche Abhängigkeit des c_p -Koeffizienten von Bremsdruck und Geschwindigkeit kann die Realität besser beschreiben. Zusätzlich ist der Gesamtbremsenkoeffizient temperaturabhängig. Eine Temperaturmessung direkt an der Bremsscheibe ist nicht möglich, wodurch sich eine modellbasierte Schätzung der Temperatur eignet. Für die ASM können zusätzlich die Eisenverluste und die magnetische Sättigung berücksichtigt werden. Die Parameterschätzung für den Lithium-Ionen-Akkumulator lässt sich verbessern, indem die Ruhespannungsquelle nicht als konstanter Parameter angenommen wird. Eine Modellierung der Ruhespannung als Polynom in Abhängigkeit des SoC-Werts kann die tatsächliche Kennlinie deutlich besser annähern. Außerdem können zusätzliche RC-Glieder dem Modell hinzugefügt werden, um die Genauigkeit zu erhöhen.

Neben der genaueren Modellierung können zum anderen auch verbesserte Schätzverfahren eingesetzt werden. Der Kalman-Filter ist eng verwandt mit dem RLS-Verfahren und findet auch Anwendung in der Parameterschätzung. Die statistischen Eigenschaften der Signale, wie z. B. die Eigenschaften des Rauschsignals, können durch einen Kalman-Filter besser berücksichtigt werden. Dies liegt u. a. daran, dass der Kalman-Filter mehr Einstellparameter besitzt als das RLS-Verfahren. Daraus ergibt sich die zusätzliche Fragestellung, wie die Parameter des Schätzverfahrens optimal gewählt werden. Dieser offene Punkt gilt auch für das vorgestellte robuste Schätzverfahren, bei dem die Parameter für den Vergesslichkeitsfaktor, die Regularisierung und die Parameterbeschränkung optimal zu bestimmen sind.

A Anhang

A.1 Sensitivitätsanalyse

Dieses Kapitel analysiert die Sensitivität der Parameterschätzung auf konstante und multiplikative Fehler in den Eingangssignalen und -parametern.

A.1.1 Vergleich von infinitesimaler Änderung und Simulation

Bei fehlerhaftem Eingangssignal oder Fahrzeugparametern ist auch die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ fehlerhaft. Um die Auswirkung eines Fehler zu bestimmen, kann in einer Sensitivitätsanalyse das Ergebnis einer fehlerfreien Simulation $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ mit dem Ergebnis $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ aus einer Simulation mit fehlerhaften Signalen und Parametern erfolgen. Die Differenz

$$\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.1})$$

lässt sich mit (3.86) auch über infinitesimal kleine Änderung des Regressors $\delta\boldsymbol{\Phi}$ und des Systemausgangs $\delta\mathbf{y}$ beschreiben.

$$\delta\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1} \left[\delta\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\Phi}^T(\delta\mathbf{y} - \delta\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \quad (\text{A.2})$$

Die Ergebnisse aus Abbildung 3.31 zeigen identisches Verhalten der Parameterabweichung $\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ und $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Für die Herleitung des Zusammenhangs dieser beiden Ausdrücke

wird zunächst (A.1) umgeformt.

$$\begin{aligned}
\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\
\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T \tilde{\boldsymbol{y}} \\
(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}) (\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T \tilde{\boldsymbol{y}} \\
[(\boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi})^T (\boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi})] (\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= (\boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi})^T (\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{y}) \\
[\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi}] (\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Daraus ergibt sich schließlich die Parameteränderung aufgrund von Fehlern im Regressor und Systemausgang.

$$\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi})^{-1} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y}) - \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{A.4}$$

Dieser Ausdruck für den Parameterfehler unterscheidet sich von der Berechnung des Parameterfehlers, basierend auf infinitesimale Änderungen (A.2). Somit stellt die Berechnung durch infinitesimale Änderungen, genauso wie die lineare Taylorreihen-Approximation, nur eine Näherung des tatsächlichen Parameterfehlers dar.

Im weiteren Verlauf wird der Fehler zwischen der Approximation durch infinitesimale Änderungen und dem Simulationsergebnis untersucht. Das Produkt zweier infinitesimaler Änderungen ist noch einmal um einige Größenordnungen kleiner als die infinitesimale Änderung und wird im ersten Schritt vernachlässigt.

$$\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} \Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} \Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \tag{A.5}$$

Durch diese Annahme vereinfacht sich Gleichung (A.3).

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} \tag{A.6}$$

In dieser Gleichung kann die Normalform der LS-Schätzggleichung (2.20) $\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y}$ auf beiden Seiten eliminiert werden.

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} \tag{A.7}$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ergibt

$$\begin{aligned}
\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} [\boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Phi}^T \delta\boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \delta\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}}] \\
&= (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} [\delta\boldsymbol{\Phi}^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\Phi}^T (\delta\boldsymbol{y} - \delta\boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}})],
\end{aligned} \tag{A.8}$$

was dem Ausdruck für $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ in (A.2) entspricht. Somit hängt die Abweichung bei der Berechnung des Parameterfehlers zwischen der Methode der infinitesimalen Änderungen und Simulation von den Ausdrücken in (A.5) ab. Da diese Terme jeweils aus der Multiplikation zweier infinitesimaler Änderungen bestehen, sollte der Fehler zwischen infinitesimaler Änderung und Simulation klein sein. Bei den Ausdrücken in (A.5) kommt jeweils die infinitesimale Änderung des Regressors $\delta\boldsymbol{\Phi}$ vor. Tritt ein Signalfehler nur im Systemausgang $\delta\mathbf{y}$ auf und nicht im Regressor ($\delta\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}$), so stimmt die Berechnung des Parameterfehlers aus der Simulation $\Delta_{Sim}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ und die infinitesimaler Änderung $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ überein. Diese Bedingung gilt z. B. bei einem Fehler im Radradius, da hier $\delta\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}$ und $\delta\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ erfüllt ist. Dadurch liefern die Methode der infinitesimalen Änderungen und die Simulation gleiche Ergebnisse in dem Beispiel aus Abbildung 3.31.

A.1.2 Sensitivität für konstante Signal- und Parameterfehler

Für einen konstanten Fehler im Momentensignal ΔM_A ergeben sich folgende infinitesimalen Änderungen.

$$\delta\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad \delta\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta M_A}{r_{Rad}} & \frac{\Delta M_A}{r_{Rad}} & \dots & \frac{\Delta M_A}{r_{Rad}} \end{bmatrix}^T = \frac{\Delta M_A}{r_{Rad}} \mathbf{1}_N \quad (\text{A.9})$$

Hierbei ist $\mathbf{1}_N = [1, 1, \dots, 1]^T$ ein Vektor der Dimension N mit lauter Einträgen von Eins. Die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation erfolgt mit den Ableitungen

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})}{\partial M_A} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial M_A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{Rad}} & \frac{1}{r_{Rad}} & \dots & \frac{1}{r_{Rad}} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{r_{Rad}} \mathbf{1}_N. \quad (\text{A.10})$$

Die Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler im Antriebsmoment ist in Abbildung A.1 dargestellt. Der Momentenfehler beeinflusst nicht die Schätzung der Masse \hat{m} und des Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w \hat{A}_{Fzg}$. Wenn das Radmomentensignal konstant einen zu großen Wert anzeigt, dann führt dies zu einer erhöhten Schätzung des Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m} \hat{c}_{r0}$. Liegt ein konstant zu hohes Moment vor, so interpretiert der LS-Schätzer diesen Fehler als konstanten Fahrwiderstand. Aufgrund des linearen Zusammenhangs berechnet die lineare Taylorreihen-Approximation das exakte Ergebnis von infinitesimaler Änderung und Simulation. Ursachen für einen konstanten Fehler im Antriebsmoment können z. B. falsche Annahmen über das Reibmoment im Antriebsstrang sein.

Für die Berechnung des Parameterfehlers, basierend auf infinitesimalen Änderungen bei einem konstanten Fehler in der Längsbeschleunigung, sind folgende Ausdrücke notwendig.

$$\delta\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \mathbf{1}_N & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}_N \quad (\text{A.11})$$

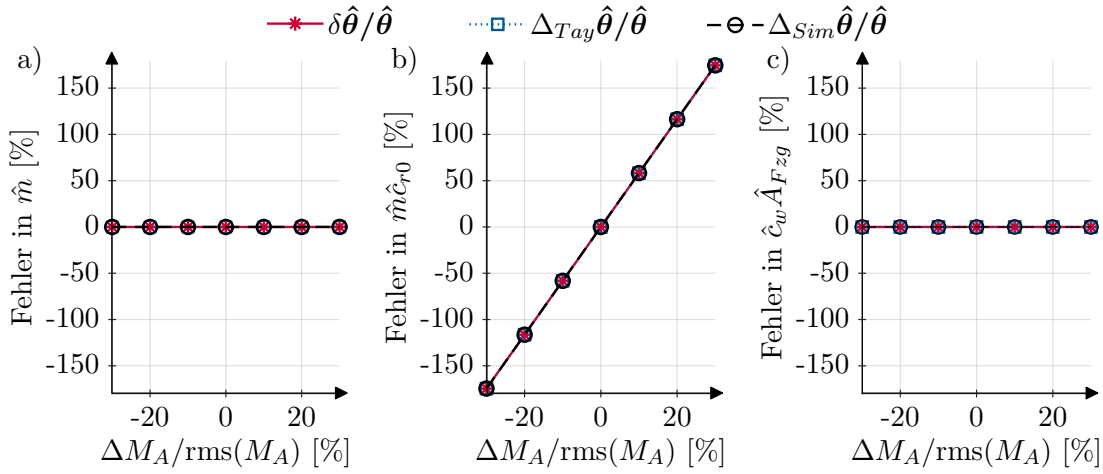


Abbildung A.1: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler ΔM_A im Antriebsmoment

Für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation sind folgende Ableitungen von Regressor und Systemausgang erforderlich.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial a_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial a_x} = \mathbf{0}_N \quad (\text{A.12})$$

Die Auswirkung eines konstanten Fehlers in der Längsbeschleunigungsmessung auf die Parameterschätzung zeigt Abbildung A.2. Der Längsbeschleunigungsfehler hat keinen

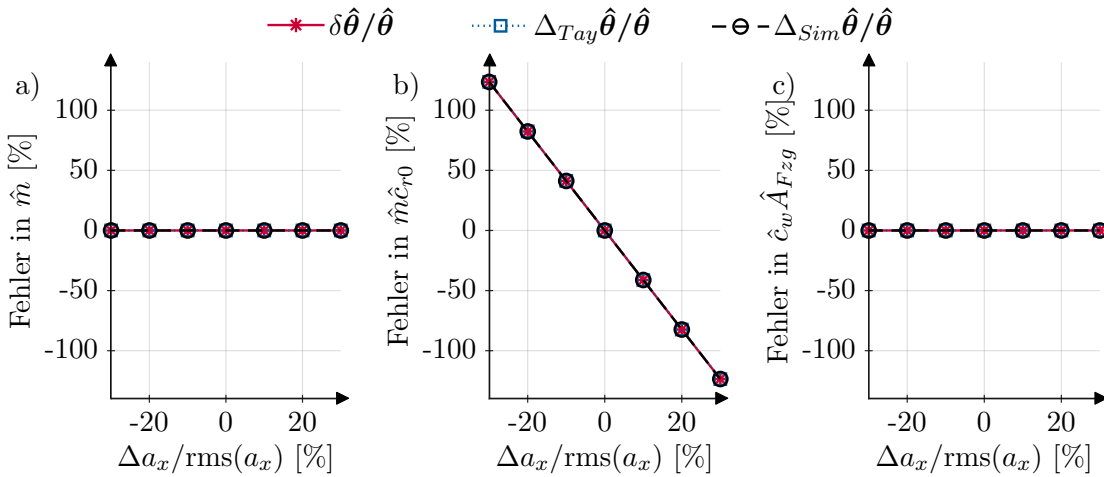


Abbildung A.2: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δa_x in der Längsbeschleunigung

Einfluss auf die Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} und des Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w \hat{A}_{Fzg}$. Wenn die Längsbeschleunigung konstant zu hoch angenommen wird, so wird ein kleinerer Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m} \hat{c}_{r0}$ geschätzt. Der LS-Schätzer interpretiert einen konstanten Längsbeschleunigungsfehler als zusätzliche Steigung. Da diese virtuelle Steigung aber in der Realität nicht existiert, wird ein geringerer Rollwiderstand geschätzt,

um die erhöhte Steigungskraft zu kompensieren. Dabei ist der Zusammenhang zwischen Signalfehler und Schätzfehler linear, wodurch die lineare Taylorreihen-Approximation richtige Ergebnisse liefert. Ein konstanter Fehler in der Längsbeschleunigung kann sich zum Beispiel durch Einbaufehler des Sensors oder Alterungseffekte ergeben. Eine weitere Fehlerquelle ist eine Fahrzeugbeladung, bei der die Hinterachse des Fahrzeuges einfedert. Durch das Verkippen der Karosserie misst der Längsbeschleunigungssensor zusätzlich einen Anteil der Erdbeschleunigung.

Die Abweichung für einen konstanten Fehler in der Luftdichte $\Delta\rho_L$ berechnet sich aus

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2}(\rho_L + \Delta\rho_L)v_x^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_L v_x^2}_{\phi_3} + \underbrace{\frac{1}{2}\Delta\rho_L v_x^2}_{\Delta\phi_3}. \quad (\text{A.13})$$

Damit ergeben sich die infinitesimalen Änderungen von Regressor und Systemausgang.

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \frac{1}{2}\Delta\rho_L v_x^2 \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}_N \quad (\text{A.14})$$

Die Ableitungen für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation sind

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{u})}{\partial\rho_L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \frac{1}{2}v_x^2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial\rho_L} = \mathbf{0}_N. \quad (\text{A.15})$$

Abbildung A.3 stellt den Einfluss eines konstanten Fehlers in der Luftdichte dar. Die

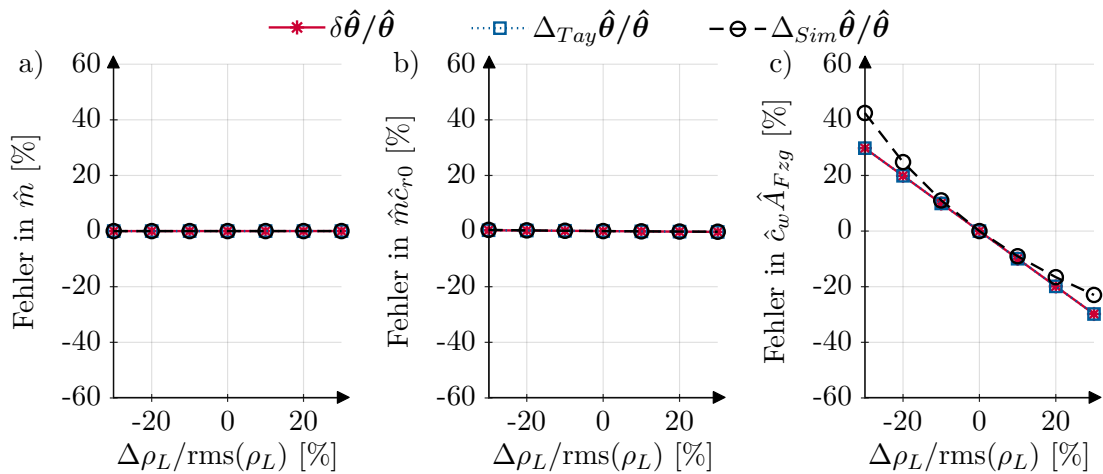


Abbildung A.3: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler $\Delta\rho_L$ in der Luftdichte

Schätzung von Fahrzeugmasse \hat{m} und Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ werden durch den Fehler nicht beeinflusst. Bei einer zu groß angenommenen Luftdichte wird der Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ zu gering berechnet. Die lineare Taylorreihen-Approximation zeigt einen linearen Zusammenhang zwischen Schätzfehler und Signalfehler an. Auch die Methode der infinitesimalen Änderung ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen

Eingangs- und Schätzfehler. Zwischen der Methode der infinitesimalen Änderung und den Simulationsergebnissen ergibt sich eine Abweichung. Nach Kapitel A.1.1 tritt solch eine Abweichung für $\delta\Phi \neq \mathbf{0}$ auf, was nach Gleichung (A.14) in diesem Fall zutrifft.

Eine konstante Abweichung in der Geschwindigkeit Δv_x führt zu folgendem fehlerhaften Eintrag im Regressor.

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2}\rho_L(v_x + \Delta v_x)^2 = \frac{1}{2}\rho_L(v_x^2 + 2v_x\Delta v_x + \Delta v_x^2) = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_L v_x^2}_{\phi_3} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho_L(2v_x\Delta v_x + \Delta v_x^2)}_{\Delta\phi_3} \quad (\text{A.16})$$

Die infinitesimalen Änderungen ergeben sich somit zu

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \frac{1}{2}\rho_L \circ (2\Delta v_x \mathbf{v}_x + \Delta v_x^2 \mathbf{1}_N) \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.17})$$

Hierbei bezieht sich der Operator \circ auf eine elementweise Multiplikation von Vektoren. Die Berechnung der Ableitungen für die lineare Taylorreihen-Approximation lauten

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{u})}{\partial v_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \rho_L \circ \mathbf{v}_x \end{bmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial\rho_L} = \mathbf{0}_N. \quad (\text{A.18})$$

Die Auswirkung eines konstanten Signalfehlers auf die Parameterschätzung zeigt Abbildung A.4. Der konstante Geschwindigkeitsfehler hat keinen Einfluss auf die Schät-

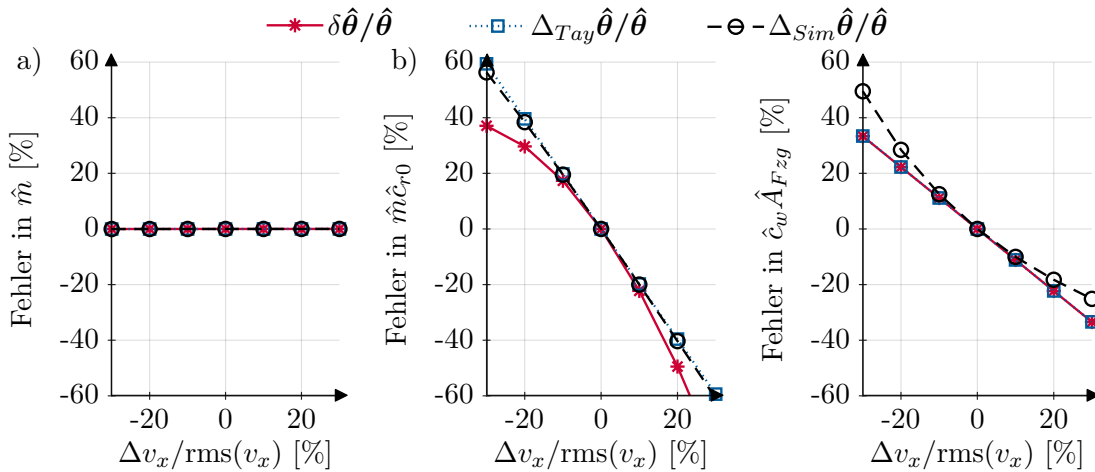


Abbildung A.4: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen konstanten Fehler Δv_x in der Geschwindigkeit

zung der Fahrzeugmasse \hat{m} . Bei der Parameterschätzung mit zu hoch angenommener Geschwindigkeit werden Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ und Luftwiderstandskoeffizient $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzg}$ zu niedrig bestimmt. Dabei zeigen die drei verschiedenen Methoden der Sensitivitätsberechnung unterschiedliches Verhalten. Die lineare Taylorreihen-Approximation beschreibt für beide Fahrwiderstandskoeffizienten einen linearen Zusammenhang. Die

Abweichung zwischen infinitesimaler Änderung und Simulation ergibt sich nach Gleichung (A.1.1), da $\delta\Phi \neq \mathbf{0}$ gilt.

A.1.3 Sensitivität für multiplikative Signal- und Parameterfehler

Ein multiplikativer Fehler des Radradius $\Delta_{r_{Rad}}$ verhält sich wie ein konstanter Fehler, da der Radius eine feste Größe ist. Die Änderungen des Systemausgangs ergibt sich durch

$$\tilde{y} = \frac{M_A}{(1 + \Delta_{r_{Rad}})r_{Rad}} = \underbrace{\frac{M_A}{r_{Rad}}}_y - \underbrace{\frac{\Delta_{r_{Rad}}M_A}{(1 + \Delta_{r_{Rad}})r_{Rad}}}_{\Delta y}. \quad (\text{A.19})$$

Die infinitesimalen Änderungen von Regressor und Systemausgang sind

$$\delta\Phi = \mathbf{0} \quad \delta\mathbf{y} = \frac{\Delta_{r_{Rad}}}{1 + \Delta_{r_{Rad}}} \begin{bmatrix} M_A[1] & M_A[2] & \dots & M_A[N] \end{bmatrix}^T = \frac{\Delta_{r_{Rad}}}{1 + \Delta_{r_{Rad}}} \mathbf{y}. \quad (\text{A.20})$$

Die Ableitungen für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation sind

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{u})}{\partial r_{Rad}} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial r_{Rad}} = -\frac{1}{r_{Rad}^2} \begin{bmatrix} M_A[1] & M_A[2] & \dots & M_A[N] \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{r_{Rad}} \mathbf{y}. \quad (\text{A.21})$$

Abbildung A.5 stellt die Abhängigkeit zwischen Schätzfehler und multiplikativem Fehler im Radradius grafisch dar. Der Schätzfehler verhält sich exakt wie bei dem Beispiel in

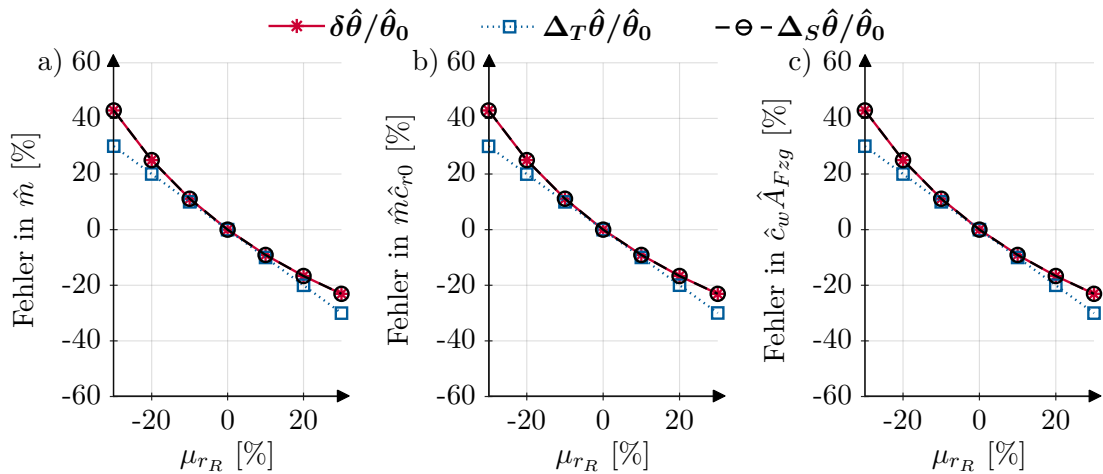


Abbildung A.5: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler $\Delta_{r_{Rad}}$ im Radradius

Abbildung 3.31 mit konstantem Fehler im Radradius. Da der Radradius eine feste Größe ist, ergibt eine multiplikative Abweichung einen konstanten Fehler.

Für einen multiplikativen Fehler im Längsbeschleunigungssignal Δ_{a_x} ergibt sich die Änderung im Regressor aus

$$\tilde{\phi}_1 = (1 + \Delta_{a_x})a_x = \underbrace{a_x}_{\phi_1} + \underbrace{\Delta_{a_x}a_x}_{\Delta\phi_3}. \quad (\text{A.22})$$

Für die Methode der infinitesimalen Änderungen werden die Abweichungen des Regressors und Systemausgangs benötigt.

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \Delta_{a_x}a_x & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}_N \quad (\text{A.23})$$

Für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation sind die folgenden Ableitungen notwendig.

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{u})}{\partial a_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial a_x} = \mathbf{0}_N \quad (\text{A.24})$$

Abbildung A.6 beschreibt den Zusammenhang zwischen multiplikativem Fehler in der Längsbeschleunigung und Schätzfehler. Eine erhöhte Längsbeschleunigung führt zu ei-

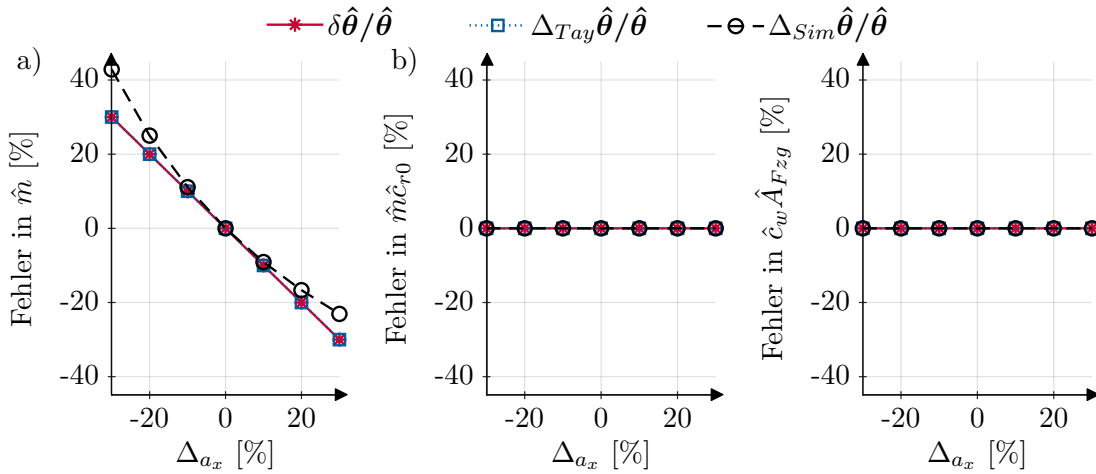


Abbildung A.6: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δ_{a_x} in der Längsbeschleunigung

ner geringeren Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} . Die zu falsch angenommene Längsbeschleunigung führt nicht zu einer Änderung im Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m}\hat{c}_{r0}$ oder im Luftwiderstandskoeffizienten $\hat{c}_w\hat{A}_{Fzsg}$.

Die Abweichung des Regressors für einen multiplikativen Fehler in der Luftdichte Δ_{ρ_L} bestimmt sich aus

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2}(1 + \Delta_{\rho_L})\rho_L v_x^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_L v_x^2}_{\phi_3} + \underbrace{\frac{1}{2}\Delta_{\rho_L}\rho_L v_x^2}_{\delta\phi_3}. \quad (\text{A.25})$$

Damit ergeben sich die infinitesimalen Änderungen von Regressor und Systemausgang.

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \frac{1}{2}\Delta_{\rho_L}\rho_L \circ \mathbf{v}_x^2 \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}_N \quad (\text{A.26})$$

Die Ableitungen für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation ergeben sich zu

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{u})}{\partial\rho_L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \frac{1}{2}\mathbf{v}_x^2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial\rho_L} = \mathbf{0}_N. \quad (\text{A.27})$$

Die Auswirkung eines multiplikativen Fehlers in der Luftdichte auf die Parameterschätzung ist in Abbildung A.7 visualisiert. Der multiplikative Fehler in der Luftdichte hat

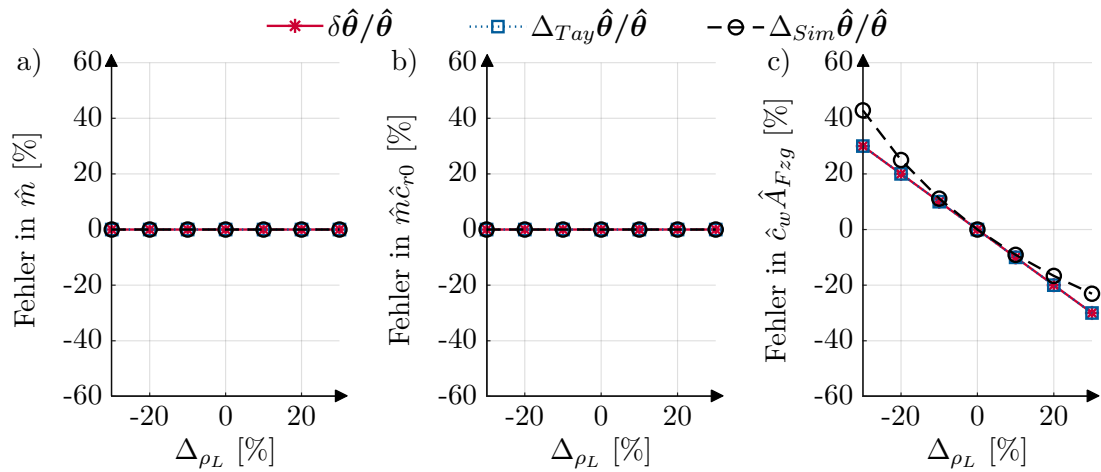


Abbildung A.7: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δ_{ρ_L} in der Luftdichte

keinen Einfluss auf die Schätzung von Fahrzeugmasse \hat{m} und Rollwiderstandskoeffizient $\hat{m}\hat{c}_{r0}$. Bei einer zu groß angenommenen Luftdichte wird der Luftwiderstandskoeffizient zu niedrig ermittelt. Das Verhalten eines multiplikativen Fehlers in der Luftdichte ist nahezu identisch mit dem konstanten Fehler in dem Beispiel aus Abbildung A.3. Dies liegt daran, dass die Luftdichte nahezu konstant ist und ein multiplikativer Fehler somit einem konstanten Fehler entspricht.

Die infinitesimale Änderung im Regressor für einen multiplikativen Geschwindigkeitsfehler Δ_{v_x} ergibt sich aus

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2}\rho_L [(1 + \Delta_{v_x})v_x]^2 = \frac{1}{2}\rho_L (1 + 2\Delta_{v_x} + \Delta_{v_x}^2)v_x^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_L v_x^2}_{\phi_3} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho_L (2\Delta_{v_x} + \Delta_{v_x}^2)v_x^2}_{\Delta\phi_3}. \quad (\text{A.28})$$

Die infinitesimalen Änderungen von Regressor und Systemausgang sind

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \frac{1}{2}(2\Delta_{v_x} + \Delta_{v_x}^2)\rho_L \circ \mathbf{v}_x^2 \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}_N. \quad (\text{A.29})$$

Für die Berechnung der linearen Taylorreihen-Approximation sind folgende Ableitungen notwendig.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial v_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \boldsymbol{\rho}_L \circ \mathbf{v}_x^2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial v_x} = \mathbf{0} \quad (\text{A.30})$$

Abbildung A.8 stellt die Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler im Geschwindigkeitssignal dar. Ein multiplikativer Fehler in der Geschwindig-

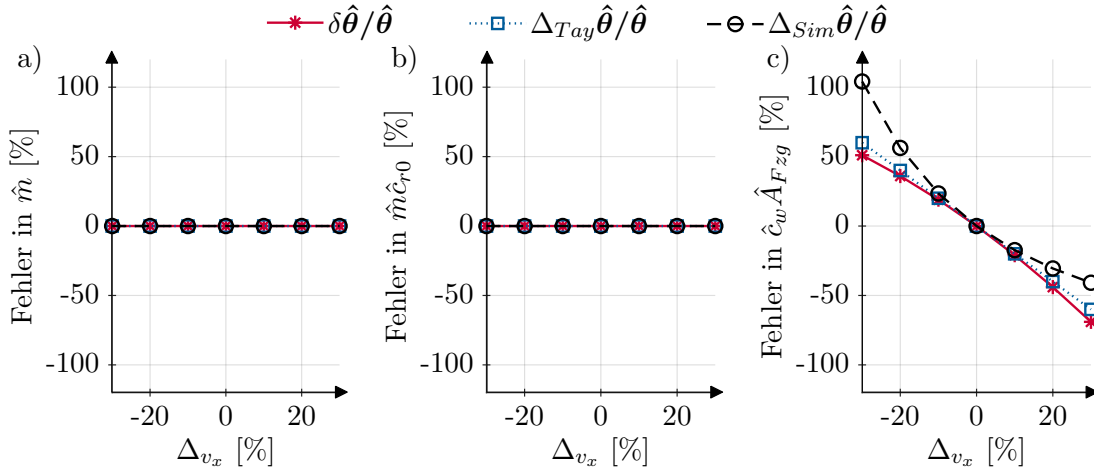


Abbildung A.8: Sensitivität der Parameterschätzung auf einen multiplikativen Fehler Δv_x in der Geschwindigkeit

keit hat keinen Einfluss auf die Schätzung der Fahrzeugmasse \hat{m} und des Rollwiderstandskoeffizienten $\hat{m} \hat{c}_{r0}$. Bei einem positiven Fehler in der Geschwindigkeit wird der Luftwiderstandskoeffizient zu gering geschätzt. Dabei ergeben sich deutliche Unterschiede zwischen den drei Verfahren zur Berechnung der Sensitivität. Die Abweichung der linearen Taylorreihen-Approximation zur tatsächlichen Sensitivität aus der Simulation ergibt sich aus der linearen Näherung. Die Abweichung des Verfahrens der infinitesimalen Änderung ergibt sich durch die großen Einträge von $\delta \Phi$ in Gleichung (A.29) durch \mathbf{v}_x^2 . Laut Kapitel A.1.1 ergibt die Methode der infinitesimalen Änderungen nur dann die gleichen Ergebnisse wie die Simulation, wenn $\delta \Phi = \mathbf{0}$ gilt, was hier nicht der Fall ist. Mit einem größerem $\delta \Phi$ ergeben sich erhöhte Abweichungen zwischen der Methode der infinitesimalen Änderungen und der Simulation.

A.2 Zusammenhang von studentscher t -Verteilung und Cauchy-Verteilung

Für die studentsche t -Verteilung (3.61) gilt für $\nu_t = 1$ und verschwindenden Mittelwert $\mu_t = 0$

$$p_t(e|\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma(1)}{\sigma_t \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[1 + \frac{e^2}{\sigma_t^2}\right]^{-1}. \quad (\text{A.31})$$

Für die Γ -Funktion (3.62) gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} u^0 e^{-u} du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} du = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-u}]_0^b = \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b}}_{\rightarrow 0} + 1 = 1. \quad (\text{A.32})$$

Die Berechnung von

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du \quad (\text{A.33})$$

gestaltet sich schwieriger. Zunächst wird das Integral durch Substitution von $x = \sqrt{u}$ mit $du = 2x dx$ in das gaußsche Fehlerintegral umgewandelt.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2} 2x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{A.34})$$

Diese Gleichung wird anhand der Substitution $-x^2 = -\frac{1}{2}z^2$ mit $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dz$ weiter umgeformt.

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dz = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (\text{A.35})$$

Nach Lee [136] ergibt der Ausdruck des Integrals $\sqrt{\pi/2}$, womit für die Gamma-Funktion gilt

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.36})$$

Mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ wird aus (A.32)

$$p_t(e|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_t \pi} \left[\frac{\sigma_t^2 + e^2}{\sigma_t^2} \right]^{-1} = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_t}{\sigma_t^2 + e^2}, \quad (\text{A.37})$$

was der Cauchy-Verteilung mit einem Skalierungsparameter σ_t und verschwindendem Lageparameter bzw. Mittelwert $\mu_t = 0$ entspricht. [137, S. 26-28]

A.3 Analytische Berechnung der Ausrollkurven

Für die Prädiktion der zukünftigen Geschwindigkeit \hat{v}_x wird das Modell für die Längsdynamik (3.50) verwendet.

$$F_A = \underbrace{(\hat{v}_x + g\beta)}_{a_x} m + gm c_{r0} + \frac{1}{2} \rho_L \hat{v}_x^2 c_w A_{Fzg} \quad (\text{A.38})$$

Auflösen nach der Beschleunigung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_x &= \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{1}{m} \underbrace{(F_A)}_{=0} - g\beta m - gm c_{r0} - \frac{1}{2} \rho_L \hat{v}_x^2 c_w A_{Fzg} \\ &= - \underbrace{(g\beta + g c_{r0})}_{f_0} - \underbrace{\frac{1}{2m} \rho_L c_w A_{Fzg}}_{f_2} v_x^2. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Diese Differentialgleichung in \hat{v}_x lässt sich durch Integration des folgenden Ausdrucks lösen.

$$\begin{aligned} \int_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} \frac{1}{f_2 \hat{v}_x^2 + f_0} d\hat{v}_x &= - \int_{t_0}^t dt \\ \int_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} \frac{1}{f_0} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{f_2}{f_0}} \hat{v}_x\right)^2 + 1} dv_x &= - \int_{t_0}^t dt \\ \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{f_0}{f_2}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{f_2}{f_0}} \hat{v}_x \right) \right]_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} &= - [t]_{t_0}^t \\ \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{f_0}{f_2}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{f_2}{f_0}} \hat{v}_x \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{f_2}{f_0}} v_{x,0} \right) \right] &= - [t - \underbrace{t_0}_{=0}] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Die Startzeit ist $t_0 = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_{x,0}$ für die Prädiktion der Ausrollkurve ist die aktuelle Fahrzeuggeschwindigkeit v_x . Die Berechnung der Ausrollgeschwindigkeit erfolgt durch Umstellen von (A.40).

$$\hat{v}_x(t) = \sqrt{\frac{f_0}{f_2}} \tan \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{f_2}{f_0}} v_{x,0} \right) - \sqrt{f_0 f_2} t \right] \quad (\text{A.41})$$

Der erste Term innerhalb der eckigen Klammer hängt von der aktuellen Geschwindigkeit bzw. der Startgeschwindigkeit der Ausrollkurve $v_{x,0}$ ab und ist konstant. Der zweite Term ist abhängig von der zukünftigen Zeit t und beschreibt damit, wie sich das Fahrzeug ohne Antriebskraft auf dem vorausliegenden Streckenabschnitt verhält.

Die analytische Berechnung der Ausrollkurven nach Gleichung (A.41) ist nicht lösbar, wenn f_0 oder f_2 negativ sind, da dann das Argument der Wurzel ebenfalls negativ wird.

Der Koeffizient f_2 enthält laut der Definition in Gleichung (A.39) nur positive Faktoren und ist somit zu jedem Zeitpunkt positiv. Der Ausdruck für f_0 enthält den Rollwiderstandskoeffizienten c_{r0} , welcher stets positiv ist, jedoch kann der Gesamtausdruck negativ werden, wenn das Gefälle β den Rollwiderstand kompensiert. Für den Fall, dass f_0 negativ ist, wird die Lösung von (A.40) folgendermaßen ermittelt.

$$\begin{aligned} \int_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} \frac{1}{f_2 \hat{v}_x^2 + f_0} d\hat{v}_x &= - \int_{t_0}^t dt \\ \int_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} \frac{1}{f_2 \hat{v}_x^2 - (-f_0)} d\hat{v}_x &= - \int_{t_0}^t dt \\ \int_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} \frac{1}{-f_0} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \hat{v}_x\right)^2 - 1} d\hat{v}_x &= - \int_{t_0}^t dt \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Für die Lösung von (A.42) ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig.

Fall 1 $\left|\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}}\right| < 1$: Für diesen Fall basiert die Stammfunktion des Integrals in (A.42) auf der $\operatorname{arctanh}(\cdot)$ -Funktion.

$$\begin{aligned} \frac{1}{-f_0} \sqrt{\frac{-f_0}{f_2}} \left[-\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \hat{v}_x \right) \right]_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} &= - [t]_{t_0}^t \\ \frac{1}{-f_0} \sqrt{\frac{-f_0}{f_2}} \left[-\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \hat{v}_x \right) + \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} v_{x,0} \right) \right] &= - \left[t - \underbrace{t_0}_{=0} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Hieraus ergibt sich die Lösung zur Berechnung der Ausrollgeschwindigkeit.

$$\hat{v}_x(t) = \sqrt{\frac{-f_0}{f_2}} \tanh \left[\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} v_{x,0} \right) + \sqrt{-f_0 f_2} t \right] \quad (\text{A.44})$$

Fall 2 $\left|\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}}\right| > 1$: Für diesen Fall basiert die Stammfunktion des Integrals in (A.42) auf der $\operatorname{arccoth}(\cdot)$ -Funktion.

$$\begin{aligned} \frac{1}{-f_0} \sqrt{\frac{-f_0}{f_2}} \left[-\operatorname{arccoth} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \hat{v}_x \right) \right]_{v_{x,0}}^{\hat{v}_x} &= - [t]_{t_0}^t \\ \frac{1}{-f_0} \sqrt{\frac{-f_0}{f_2}} \left[-\operatorname{arccoth} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \hat{v}_x \right) + \operatorname{arccoth} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} v_{x,0} \right) \right] &= - \left[t - \underbrace{t_0}_{=0} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Hieraus ergibt sich die Lösung zur Berechnung der Ausrollgeschwindigkeit.

$$\hat{v}_x(t) = \sqrt{\frac{-f_0}{f_2}} \coth \left[\operatorname{arccoth} \left(\sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} v_{x,0} \right) + \sqrt{-f_0 f_2} t \right] \quad (\text{A.46})$$

Fall 3 $\left| \sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \right| = 1$ Die Bedingung für den dritten Fall kann mit den Definitionen für f_0 und f_2 in (A.39) folgendermaßen aufgelöst werden.

$$\left| \sqrt{\frac{f_2}{-f_0}} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \rho_L c_w A_{Fzg} \hat{v}_x^2 + mg c_{r0} + mg \beta = 0 \quad (\text{A.47})$$

Die Gleichung (A.47) drückt aus, dass die Summe aller Widerstandskräfte am Fahrzeug gleich Null sind. Da auch keine Antriebskraft ($F_A = 0$) vorhanden ist, wird das Fahrzeug weder beschleunigt noch verzögert. Die Geschwindigkeit bleibt somit konstant, wodurch für die Geschwindigkeitsprädiktion

$$\hat{v}_x(t) = v_{x,0} \quad (\text{A.48})$$

gilt.

Für die Prädiktion der Ausrollgeschwindigkeit anhand der analytischen Formeln (A.41), (A.44), (A.46) und (A.48) muss eine vierfache Fallunterscheidung durchgeführt werden. Da die Unterscheidung von der Straßensteigung des vorausliegenden Streckenabschnitts abhängt, muss bei jeder Änderung von β die Fallunterscheidung durchgeführt werden. Da das analytische Verfahren durch die Fallunterscheidung sehr aufwändig ist, eignet sich eine numerische Berechnung der Ausrollkurven nach Gleichung (3.202) und (3.203).

Literatur

- [1] P. Lingman und B. Schmidtbauer, „Road Slope and Vehicle Mass Estimation Using Kalman Filtering“, *Vehicle System Dynamics*, Jg. 37, Nr. 1, S. 12–23, 2002.
- [2] A. Vahidi, A. Stefanopoulou und H. Peng, „Recursive Least Squares with Forgetting for Online Estimation of Vehicle Mass and Road Grade: Theory and Experiments“, *Vehicle System Dynamics*, Jg. 43, Nr. 1, S. 31–55, 2005.
- [3] M. McIntyre, T. Ghotikar, A. Vahidi, X. Song und D. Dawson, „A Two-Stage Lyapunov-Based Estimator for Estimation of Vehicle Mass and Road Grade“, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Jg. 58, Nr. 7, S. 3177–3185, 2009.
- [4] V. Winstead und I. V. Kolmanovsky, „Estimation of Road Grade and Vehicle Mass via Model Predictive Control“, in *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, 2005, S. 1588–1593.
- [5] H. K. Fathy, D. Kang und J. L. Stein, „Online Vehicle Mass Estimation Using Recursive Least Squares and Supervisory Data Extraction“, in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, 2008, S. 1842–1848.
- [6] H. S. Bae, J. Ryu und J. C. Gerdes, „Road Grade and Vehicle Parameter Estimation for Longitudinal Control Using GPS“, in *Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2001.
- [7] G. Kedar-Dongarkar und M. Das, „Vehicle Parameter Estimation Using Nested RLS Algorithm“, in *Proceedings of the IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*, 2013, S. 404–407.
- [8] Z. Yu, Y. Feng, L. Xiong und X. Wu, „Vehicle Mass Estimation for Four In-Wheel-Motor Drive Vehicle“, in *Electrical Engineering and Control*, Springer, 2011, S. 117–125.
- [9] M. N. Mahyuddin, J. Na, G. Herrmann, X. Ren und P. Barber, „An Adaptive Observer-Based Parameter Estimation Algorithm with Application to Road Gradient and Vehicle’s Mass Estimation“, in *Proceedings of the UKACC International Conference on Control (CONTROL)*, 2012, S. 102–107.

- [10] S. Rhode und F. Gauterin, „Vehicle Mass Estimation Using a Total Least-Squares Approach“, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2012.
- [11] —, „Online Estimation of Vehicle Driving Resistance Parameters with Recursive Least Squares and Recursive Total Least Squares“, in *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, 2013, S. 269–276.
- [12] S. Rhode, S. Hong, J. K. Hedrick und F. Gauterin, „Vehicle Tractive Force Prediction with Robust and Windup-Stable Kalman Filters“, *Control Engineering Practice*, Jg. 46, S. 37–50, 2016.
- [13] S. Rhode, „Robust and Regularized Algorithms for Vehicle Tractive Force Prediction and Mass Estimation“, Karlsruhe Institut für Technologie (KIT), 2016.
- [14] V. Ricciardi, K. Augsburg, S. Gramstat, V. Schreiber und V. Ivanov, „Survey on Modelling and Techniques for Friction Estimation in Automotive Brakes“, *Applied Sciences*, Jg. 7, Nr. 9, S. 873, 2017.
- [15] V. Ricciardi, D. Savitski, K. Augsburg und V. Ivanov, „Estimation of Brake Friction Coefficient for Blending Function of Base Braking Control“, *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems*, Jg. 10, Nr. 3, S. 774–785, 2017.
- [16] V. Ricciardi, K. Augsburg und V. Ivanov, „A Novel Approach For The Estimation Of The Brake Friction Coefficient For Environmental And Safety Control Applications“, in *Proceedings of Eurobrake*, 2017.
- [17] V. Ricciardi, M. Acosta, K. Augsburg, S. Kanarachos und V. Ivanov, „Robust Brake Linings Friction Coefficient Estimation for Enhancement of EHB Control“, IEEE, 2017, S. 1–7.
- [18] M. Vélez-Reyes, K. Minami und G. Verghese, „Recursive Speed and Parameter Estimation for Induction Machines“, in *Industry Applications Society Annual Meeting*, 1989, S. 607–611.
- [19] J. Stephan, M. Bodson und J. Chiasson, „Real-Time Estimation of the Parameters and Fluxes of Induction Motors“, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. 30, Nr. 3, S. 746–759, 1994.
- [20] L. de Souza Ribeiro, C. Jacobina, A. Lima und A. Oliveira, „Real-Time Estimation of the Electric Parameters of an Induction Machine Using Sinusoidal PWM Voltage Waveforms“, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. 36, Nr. 3, S. 743–754, 2000.
- [21] J. Kertzscher, *Ein Verfahren Zur Identifikation Der Elektrischen Parameter von Asynchronmaschinen*. Berlin: Tenea, 2003.

- [22] C. Weng, Y. Cui, J. Sun und H. Peng, „On-Board State of Health Monitoring of Lithium-Ion Batteries Using Incremental Capacity Analysis with Support Vector Regression“, *Journal of Power Sources*, Jg. 235, S. 36–44, 2013.
- [23] C. Unterrieder, R. Priewasser, M. Agostinelli, S. Marsili und M. Huemer, „Comparative Study and Improvement of Battery Open-Circuit Voltage Estimation Methods“, in *Proceedings of the Midwest Symposium on Circuits and Systems*, IEEE, 2012, S. 1076–1079.
- [24] H. Rahimi-Eichi, F. Baronti und M.-Y. Chow, „Modeling and Online Parameter Identification of Li-Polymer Battery Cells for SOC Estimation“, in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2012, S. 1336–1341.
- [25] Y. Zou, X. Hu, H. Ma und S. E. Li, „Combined State of Charge and State of Health Estimation over Lithium-Ion Battery Cell Cycle Lifespan for Electric Vehicles“, *Journal of Power Sources*, Jg. 273, S. 793–803, 2015.
- [26] R. Isermann und M. Münchhof, *Identification of Dynamic Systems*. Springer, 2011.
- [27] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall, 1999.
- [28] D. Schröder, *Elektrische Antriebe - Grundlagen*. Springer, 2013.
- [29] C. F. Gauß, *Abhandlungen Zur Methode Der Kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauß*, A. Börsch und P. Simon, Hrsg. P. Stankiewicz Buchdruckerei, 1887.
- [30] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H_∞ and nonlinear approaches*. Wiley-Interscience, 2006.
- [31] A. Vahidi, M. Druzhinina, A. Stefanopoulou und H. Peng, „Simultaneous Mass and Time-Varying Grade Estimation for Heavy-Duty Vehicles“, in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, 2003.
- [32] A. Vahidi, A. Stefanopoulou und H. Peng, „Experiments for Online Estimation of Heavy Vehicle’s Mass and Time-Varying Road Grade“, in *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2003.
- [33] M. N. Mahyuddin, J. Na, G. Herrmann, X. Ren und P. Barber, „Adaptive Observer-Based Parameter Estimation With Application to Road Gradient and Vehicle Mass Estimation“, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 61, Nr. 6, S. 2851–2863, 2014.
- [34] R. Wragge-Morley, G. Herrmann, P. Barber und S. Burgess, „Information Fusion for Vehicular Systems Parameter Estimation Using an Extended Regressor in a Finite Time Estimation Algorithm“, 2014, S. 401–406.

- [35] ———, „Gradient and Mass Estimation from CAN Based Data for a Light Passenger Car“, *SAE International Journal of Passenger Cars-Electronic and Electrical Systems*, Jg. 8, Nr. 1, 2015.
- [36] D. Kim, S. B. Choi und J. Oh, „Integrated Vehicle Mass Estimation Using Longitudinal and Roll Dynamics“, in *Proceedings of the International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, 2012, S. 862–867.
- [37] S. Rhode, F. Bleimund und F. Gauterin, „Recursive Generalized Total Least Squares with Noise Covariance Estimation“, in *Proceedings of the IFAC World Congress*, 2014.
- [38] W. Chu, K. Cao, S. Li, Y. Luo und K. Li, „Vehicle Mass Estimation Based on High-Frequency-Information Extraction“, in *Proceedings of the IFAC Symposium on Advances in Automotive Control*, 2013, S. 72–76.
- [39] E. Raffone, „Road Slope and Vehicle Mass Estimation for Light Commercial Vehicle Using Linear Kalman Filter and RLS with Forgetting Factor Integrated Approach“, in *IEEE International Conference on Information Fusion (FUSION)*, 2013, S. 1167–1172.
- [40] L. Liu, C. Huang, Y. Li und S. Shi, „Study on State Parameters Estimation for Commercial Vehicle“, in *Proceedings of the FISITA World Automotive Congress*, 2013, S. 143–155.
- [41] X. Zhang, L. Xu, J. Li und M. Ouyang, „Real-Time Estimation of Vehicle Mass and Road Grade Based on Multi-Sensor Data Fusion“, in *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*, 2013, S. 1–7.
- [42] E. Wilhelm, L. Rodgers und R. Bornatico, „Real-Time Electric Vehicle Mass Identification“, in *Proceedings of the World Electric Vehicle Symposium and Exhibition (EVS27)*, IEEE, 2013, S. 1–6.
- [43] E. Wilhelm, L. Rodgers, R. G. Bornatico und G. S. Soh, „Towards Real-Time Identification of Electric Vehicle Mass“, SAE Technical Paper, 2013.
- [44] N. Kidambi, R. L. Harne, Y. Fujii, G. M. Pietron und K. W. Wang, „Methods in Vehicle Mass and Road Grade Estimation“, *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems*, Jg. 7, S. 981–991, 2014.
- [45] K. Maalej, S. Kelouwani, Y. Dube und K. Agbossou, „Event-Based Electric Vehicle Mass and Grade Estimation“, in *Proceedings of the Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*, IEEE, 2014, S. 1–6.
- [46] S. Altmannshofer, J. Martin und C. Endisch, „Robuste, onlinefähige Schätzung von Fahrzeugmasse und Fahrwiderständen“, in *VDI-Berichte*, Bd. 2233, VDI-Verlag, 2015, S. 29–36.

- [47] S. Altmannshofer und C. Endisch, „Robust Vehicle Mass and Driving Resistance Estimation“, in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, IEEE, 2016, S. 6869–6874.
- [48] S. Altmannshofer, C. Endisch, J. Martin, M. Gerngroß und R. Limbacher, „Robust Estimation of Vehicle Longitudinal Dynamics Parameters“, in *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, 2016, S. 566–571.
- [49] S. Altmannshofer, C. Endisch und K. D. Trieu, „On-Line Identification and Identifiability Analysis of Electrical and Mechanical Parameters of Induction Machines“, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2017.
- [50] S. Altmannshofer und C. Endisch, „Robuste Parameterschätzung für reale Anwendungen“, in *Intelligente Verfahren: Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer, 2017.
- [51] B. Heißing, M. Ersoy und S. Gies, *Fahrwerkhandbuch*. Springer, 2013.
- [52] D. Schramm, M. Hiller und R. Bardini, *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Springer, 2013.
- [53] M. Mitschke und H. Wallentowitz, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer, 2014.
- [54] K.-L. Haken und W. Klement, *Grundlagen der Kraftfahrzeugtechnik: mit 36 Tabellen sowie 20 Übungsaufgaben*. Hanser, 2013.
- [55] K. Reif, K.-E. Noreikat und K. Borgeest, Hrsg., *Kraftfahrzeug-Hybridantriebe*, Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [56] U. Kiencke und L. Nielsen, *Automotive Control Systems for Engine, Driveline, and Vehicle*. Springer, 2005.
- [57] ETAS. Adresse: <https://www.etas.com/de/> (besucht am 30.04.2018).
- [58] Vector. Adresse: <https://vector.com/> (besucht am 30.04.2018).
- [59] Mathworks. Adresse: <https://de.mathworks.com/> (besucht am 30.04.2018).
- [60] T. Söderström und P. Stoica, *System Identification*. Prentice Hall, 2001.
- [61] S. Thrun, W. Burgard und D. Fox, *Probabilistic Robotics*. MIT Press, 2006.
- [62] T. J. Hastie, R. J. Tibshirani und J. H. Friedman, *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer, 2016.
- [63] G. James, D. Witten, T. Hastie und R. Tibshirani, *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*. Springer, 2013.
- [64] G. Shakhnarovich, „Notes on Derivation of Bias-Variance Decomposition in Linear Regression“, Toyota Technological Institute at Chicago, 2011.

- [65] P. J. Rousseeuw und B. C. van Zomeren, „Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points“, *Journal of the American Statistical Association*, Jg. 85, Nr. 411, 1990.
- [66] A. M. Zoubir, V. Koivunen, Y. Chakhchoukh und M. Muma, „Robust Estimation in Signal Processing: A Tutorial-Style Treatment of Fundamental Concepts“, *IEEE Signal Processing Magazine*, Jg. 29, Nr. 4, S. 61–80, 2012.
- [67] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, 2009.
- [68] K. J. Åström und B. Wittenmark, *Adaptive Control*. Dover Publications, 2008.
- [69] B. Stenlund und F. Gustafsson, „Avoiding Windup in Recursive Parameter Estimation“, *Vorabdruck Reglermöte 2002*, S. 148–153, 2002.
- [70] L. Tan und J. Jiang, *Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications*. Academic Press/Elsevier, 2013.
- [71] S. van Huffel und J. Vandewalle, *The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991.
- [72] T. Söderström, „Errors-in-variables methods in system identification“, *Automatica*, Jg. 43, Nr. 6, S. 939–958, 2007.
- [73] S. Rhode, K. Usevich, I. Markovsky und F. Gauterin, „A Recursive Restricted Total Least-Squares Algorithm“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Jg. 62, Nr. 21, S. 5652–5662, 2014.
- [74] D. Bindel, „Matrix Computations“, Cornell University, Ithaca, 2009.
- [75] G. H. Golub und V. Pereyra, „The Differentiation of Pseudo-Inverses and Non-linear Least Squares Problems Whose Variables Separate“, *SIAM Journal on numerical analysis*, Jg. 10, Nr. 2, S. 413–432, 1973.
- [76] L. A. Mcgee und S. F. Schmidt, „Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry“, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research, 1985.
- [77] V. J. Hodge und J. Austin, „A Survey of Outlier Detection Methodologies“, *Artificial Intelligence Review*, Jg. 22, Nr. 2, S. 85–126, 2004.
- [78] V. Chandola, A. Banerjee und V. Kumar, „Anomaly Detection: A Survey“, *ACM Computing Surveys*, Jg. 41, Nr. 3, S. 1–58, 2009.
- [79] P. J. Rousseeuw und A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*, Ser. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 1987.
- [80] P. J. Huber und E. M. Ronchetti, *Robust Statistics*. Wiley, 2009, 354 S.
- [81] F. Brunet, „Contributions to Parametric Image Registration and 3D Surface Reconstruction“, Diss., Université d’Auvergne, 2010.

- [82] P. J. Huber, „Robust Estimation of a Location Parameter“, *The Annals of Mathematical Statistics*, Jg. 35, Nr. 1, S. 73–101, 1964.
- [83] J. G. Gonzalez und G. R. Arce, „Statistically-Efficient Filtering in Impulsive Environments: Weighted Myriad Filters“, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Jg. 2002, Nr. 1, S. 4–20, 2002.
- [84] K. De Brabanter, K. Pelckmans, J. De Brabanter, M. Debruyne, J. A. K. Suykens, M. Hubert und B. De Moor, „Robustness of Kernel Based Regression: A Comparison of Iterative Weighting Schemes“, in *Artificial Neural Networks – ICANN 2009*, Springer, 2009, S. 100–110.
- [85] Y. Zou, S. Chan und T. Ng, „Robust M-Estimate Adaptive Filtering“, *IEE Proceedings - Vision, Image, and Signal Processing*, Jg. 148, Nr. 4, S. 289, 2001.
- [86] K. Aftab und R. Hartley, „Convergence of Iteratively Re-Weighted Least Squares to Robust M-Estimators“, *IEEE*, Jan. 2015, S. 480–487.
- [87] Y. Zou, S.-C. Chan und T.-S. Ng, „A Robust M-Estimate Adaptive Filter for Impulse Noise Suppression“, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Bd. 4, 1999, S. 1765–1768.
- [88] Y. Zou, S. C. Chan und T. S. Ng, „A Recursive Least M-Estimate (RLM) Adaptive Filter for Robust Filtering in Impulse Noise“, *IEEE Signal Processing Letters*, Jg. 7, Nr. 11, S. 324–326, 2000.
- [89] L. Vega, H. Rey, J. Benesty und S. Tressens, „A Fast Robust Recursive Least-Squares Algorithm“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Jg. 57, Nr. 3, S. 1209–1216, 2009.
- [90] R. Kulhavy und M. Karny, „Tracking of Slowly Varying Parameters by Directional Forgetting“, in *Proceedings of IFAC World Congress*, 1984, S. 78–83.
- [91] D. Bertin, S. Bittanti und P. Bolzern, „Tracking of Nonstationary Systems by Means of Different Prediction Error Direction Forgetting Techniques“, in *Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, Elsevier, 1987, S. 185–190.
- [92] S. Bittanti, P. Bolzern und M. Campi, „Adaptive Identification via Prediction-Error Directional-Forgetting Factor: Convergence Analysis“, *International Journal of Control*, Jg. 50, Nr. 6, S. 2407–2421, 1989.
- [93] ———, „Recursive Least-Squares Identification Algorithms with Incomplete Excitation: Convergence Analysis and Application to Adaptive Control“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 35, Nr. 12, S. 1371–1373, 1990.
- [94] S. Bittanti und M. Campi, „Adaptive RLS Algorithms under Stochastic Excitation — Strong Consistency Analysis“, *Systems & Control Letters*, Jg. 17, Nr. 1, S. 3–8, 1991.

- [95] M. Salgado, G. Goodwin und R. Middleton, „Modified Least Squares Algorithm Incorporating Exponential Resetting and Forgetting“, *International Journal of Control*, Jg. 47, Nr. 2, S. 477–491, 1988.
- [96] P. Krus und S. Gunnarsson, „Adaptive Control of a Hydraulic Crane Using On-Line Identification“, in *Proceedings of the Third Scandinavian International Conference on Fluid Power*, 1993.
- [97] L. Cao und H. M. Schwartz, „A Novel Recursive Algorithm for Directional Forgetting“, in *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, 1999, S. 1334–1338.
- [98] L. Cao und H. Schwartz, „A directional forgetting algorithm based on the decomposition of the information matrix“, *Automatica*, Jg. 36, Nr. 11, S. 1725–1731, 2000.
- [99] L. Cao und H. M. Schwartz, „The Kalman Filter Based Recursive Algorithm: Windup and Its Avoidance“, in *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, 2001, S. 3606–3611.
- [100] —, „Analysis of the Kalman filter based estimation algorithm: an orthogonal decomposition approach“, *Automatica*, Jg. 40, Nr. 1, S. 5–19, 2004.
- [101] M. Evestedt und A. Medvedev, „Stationary behavior of an anti-windup scheme for recursive parameter estimation under lack of excitation“, *Automatica*, Jg. 42, Nr. 1, S. 151–157, 2006.
- [102] M. Evestedt, A. Medvedev und T. Wigren, „Windup Properties of Recursive Parameter Estimation Algorithms in Acoustic Echo Cancellation“, *Control Engineering Practice*, Jg. 16, Nr. 11, S. 1372–1378, 2008.
- [103] M. Evestedt und A. Medvedev, „Recursive Parameter Estimation by Means of the SG-Algorithm“, in *Proceedings of the IFAC World Congress*, 2008.
- [104] A. Medvedev und M. Evestedt, „Elementwise decoupling and convergence of the Riccati equation in the SG algorithm“, *Automatica*, Jg. 45, Nr. 6, S. 1524–1529, 2009.
- [105] T. van Waterschoot, G. Rombouts und M. Moonen, „Optimally Regularized Recursive Least Squares for Acoustic Echo Cancellation“, in *Proceedings of the Annual IEEE Benelux/DSP Valley Signal Processing Symposium (SPS-DARTS)*, 2006, S. 31–34.
- [106] T. van Waterschoot, G. Rombouts und M. Moonen, „Optimally Regularized Adaptive Filtering Algorithms for Room Acoustic Signal Enhancement“, *Signal Processing*, Jg. 88, Nr. 3, S. 594–611, 2008.

- [107] S. Gunnarsson, „On Covariance Modification and Regularization in Recursive Least Squares Identification“, in *Proceedings of the IFAC Symposium on System Identification*, 1994, S. 661–666.
- [108] S. Gunnarsson, „Combining Tracking and Regularization in Recursive Least Squares Identification“, in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1996, S. 2551–2552.
- [109] L. Ljung und T. Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, 1986, 529 S.
- [110] G. C. Goodwin und K. S. Sin, *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, 1984.
- [111] W. D. Timmons, H. J. Chizeck, F. Casas, V. Chankong und P. G. Katona, „Parameter-Constrained Adaptive Control“, *Industrial & engineering chemistry research*, Jg. 36, Nr. 11, S. 4894–4905, 1997.
- [112] J. Nocedal und S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer, 2006, 664 S.
- [113] A. Almqvist, *A Pivoting Algorithm Solving Linear Complementarity Problems*, 2013. Adresse: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/41485-a-pivoting-algorithm-solving-linear-complementarity-problems> (besucht am 21.05.2018).
- [114] D. F. Williamson, R. A. Parker und J. S. Kendrick, „The Box Plot: A Simple Visual Method to Interpret Data“, *Annals of Internal Medicine*, Jg. 110, Nr. 11, S. 916, 1989.
- [115] *Road Load Measurement Using Onboard Anemometry and Coastdown Techniques*. SAE International, 2008. Adresse: http://standards.sae.org/j2263_200812/ (besucht am 21.05.2018).
- [116] B. Dornieden, L. Junge und P. Pascheka, „Vorausschauende energieeffiziente Fahrzeuglängsregelung“, *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift*, Jg. 114, Nr. 3, S. 230–235, 2012.
- [117] M. Boussak und G. A. Capolino, „Recursive Least Squares Rotor Time Constant Identification for Vector Controlled Induction Machine“, *Electric Machines & Power Systems*, Jg. 20, Nr. 2, S. 137–147, 1992.
- [118] C. Moons und B. De Moor, „Parameter identification of induction motor drives“, *Automatica*, Jg. 31, Nr. 8, S. 1137–1147, 1995.
- [119] R. Marino, S. Peresada und P. Tomei, „On-Line Stator and Rotor Resistance Estimation for Induction Motors“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Jg. 8, Nr. 3, S. 570–579, Mai 2000.

- [120] A. Pavlov und A. Zaremba, „Real-Time Rotor and Stator Resistances Estimation of an Induction Motor“, in *Proc. 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2001.
- [121] M. Cirrincione, M. Pucci, G. Cirrincione und G.-A. Capolino, „A New Experimental Application of Least-Squares Techniques for the Estimation of the Induction Motor Parameters“, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. 39, Nr. 5, S. 1247–1256, 2003.
- [122] M. Cirrincione, M. Pucci, G. Cirrincione und G.-A. Capolino, „Experimental Identification of an Induction Motor Considering the Effects of Main Flux Saturation by Using a Constrained Minimization“, *IEEE*, 2004, 513–518 vol. 1.
- [123] —, „Constrained Minimization for Parameter Estimation of Induction Motors in Saturated and Unsaturated Conditions“, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 52, Nr. 5, S. 1391–1402, 2005.
- [124] C. Jacobina, J. Filho und A. Lima, „Estimating the Parameters of Induction Machines at Standstill“, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Jg. 17, Nr. 1, S. 85–89, 2002.
- [125] K. Wang, J. Chiasson, M. Bodson und L. Tolbert, „A Nonlinear Least-Squares Approach for Identification of the Induction Motor Parameters“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 50, Nr. 10, S. 1622–1628, 2005.
- [126] N. Hasan und I. Husain, „A Luenberger-Sliding Mode Observer for Online Parameter Estimation and Adaptation in High-Performance Induction Motor Drives“, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. 45, Nr. 2, S. 772–781, 2009.
- [127] A. Uphues, K. Notzold, R. Wegener und S. Soter, „Comparison of Parameter Identification Approaches with Linearised Process Models Based on RLS for Induction Machines with $P > 100$ kW“, in *Proceedings of the International Conference on Industrial Technology*, *IEEE*, 2016, S. 134–140.
- [128] D. Schröder, *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Springer, 2009.
- [129] *dSPACE*. Adresse: <https://www.dspace.com/> (besucht am 04.05.2018).
- [130] A. Savitzky und M. J. E. Golay, „Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures.“, *Analytical Chemistry*, Jg. 36, Nr. 8, S. 1627–1639, 1964.
- [131] C. Weng, J. Sun und H. Peng, „A Unified Open-Circuit-Voltage Model of Lithium-Ion Batteries for State-of-Charge Estimation and State-of-Health Monitoring“, *Journal of Power Sources*, Jg. 258, S. 228–237, 2014.

- [132] D. P. Harmoko, S. A. Widayat, L. K. Amifia, B. R. Dewangga, A. I. Cahyadi und O. Wahyunggoro, „Online Battery Parameter And Open Circuit Voltage (OCV) Estimation Using Recursive Least Square (RLS)“, *Techné Jurnal Ilmiah Elektroteknika*, Jg. 15, Nr. 1, S. 55–66, 2016.
- [133] *Long Term Review: 10,000 Miles In My Mitsubishi iMiEV*. Adresse: <https://insideevs.com/long-term-review-10000-miles-in-my-imiev/> (besucht am 01.05.2018).
- [134] T. Hosokawa, K. Tanihata und H. Miyamoto, „Development of i MiEV Next-Generation Electric Vehicle (Second Report)“, *Mitsubishi Motors Technical Review*, Nr. 20, S. 53–60, 2008.
- [135] *G.i.N. Gesellschaft Für Industrielle Netzwerke*. Adresse: <http://gin.de/> (besucht am 04.05.2018).
- [136] P. M. Lee, „The Probability Integral“, 2016. Adresse: https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/normal_history.pdf (besucht am 21.05.2018).
- [137] C. Walck, „Hand-Book on Statistical Distributions for Experimentalists“, University of Stockholm, SUF-PFY/96-01, 2007.

Veröffentlichungen und betreute Studienarbeiten

Teile der vorliegenden Arbeit wurden in folgenden Beiträgen unter dem Geburtsnamens des Autors (Altmannshofer) veröffentlicht.

- [49] S. Altmannshofer, J. Martin, E. Endisch, „Robuste, onlinefähige Schätzung von Fahrzeugmasse und Fahrwiderständen“, in *VDI-Bericht*, Bd. 2233, VDI-Verlag, 2015, S. 29-36.
- [50] S. Altmannshofer, C. Endisch, J. Martin, M. Gerngroß und R. Limbacher, „Robust Estimation of Vehicle Longitudinal Dynamics Parameters“, in *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, 2016, S. 566-571.
- [51] S. Altmannshofer und C. Endisch, „Robust Vehicle Mass and Driving Resistance Estimation“, in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, IEEE, 2016, S. 6869-6874.
- [52] S. Altmannshofer, C. Endisch und K. D. Trieu, “On-Line Identification and Identifiability Analysis of Electrical and Mechanical Parameters of Induction Machines“, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2017.
- [53] S. Altmannshofer und C. Endisch, „Robuste Parameterschätzung für reale Anwendungen“, in *Intelligente Verfahren: Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer, 2017

Folgende Studienarbeiten wurden vom Autor betreut.

- [127] T. Hoffmann, „Identifikation von Nutzerverhalten sowie Parameter für ein Elektrofahrzeug“, Masterarbeit, 2017
- [128] K. D. Trieu, „Online Identifikation der elektrischen und mechanischen Parameter von Asynchronmaschinen“, Masterarbeit, 2017
- [129] J. Martin, „Parametrierung und Bewertung eines Fahrwiderstandsschätzers durch statistische Messdatenanalyse“, Masterarbeit, 2016
- [130] M. Gerngroß, „Parameterschätzung für die Längsdynamik von Fahrzeugen“, Masterarbeit, 2015
- [131] J. Martin, „Analysis and Evaluation of Algorithms for Online Identification of Longitudinal Vehicle Parameters“, Projektarbeit, 2015
- [132] J. Shi, „Real Time Estimation of Driving Resistance Under Lack of Excitation“, Seminararbeit, 2015