

Parameteridentifikation in Echtzeit mit einem erwartungstreuen FIR-Filter

Dipl.-Ing. Steffen Siegl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Mag. Dr. habil. Thomas Pany

Gutachter:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

Die Dissertation wurde am 16.06.2020 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 05.01.2021 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 27.01.2021 statt.

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner nebenberuflichen Tätigkeit als externer Doktorand am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Universität der Bundeswehr München in Neubiberg.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek für seine Geduld und seine Unterstützung. Seine Anregungen und die Hinweise zur Erstellung dieser Arbeit waren unverzichtbar.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Johann Reger von der Technischen Universität Ilmenau danke ich für die Übernahme des Koreferats und das Interesse an meiner Arbeit.

Ferner bedanke ich mich bei Herrn Dr. Klaus-Dieter Otto für seine wertvollen Beiträge zu dieser Arbeit. Während meines Studiums der Luft- und Raumfahrttechnik hat er als (ehemaliger) wissenschaftlicher Mitarbeiter des ISR mein Interesse an der Regelungstechnik geweckt. Auch hierfür bin ich ihm zu Dank verpflichtet.

Nicht zuletzt möchte ich mich herzlichst bei meiner Familie bedanken, die mich immer unterstützt und den ganzen Weg begleitet hat.

Kressbronn, im Februar 2021

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein erwartungstreuere Filter mit endlicher Impulsantwort (Unbiased Finite Impulse Response/UFIR) zur Systemidentifikation mittels Parameterschätzung in Echtzeit verwendet. Dieses entspricht einem Least-Squares-Verfahren auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Least Squares/RHLS) ohne die Verwendung von Anfangsbedingungen und mit optimaler Horizontlänge für eine minimale Schätzfehlerkovarianz in Gegenwart von Parameter- und Messrauschen. Der entwickelte Parameterschätzer kommt ohne A-priori-Informationen und ohne Anfangsbedingungen aus, was ihn für praktische Anwendungen interessant macht. Ergänzend wird auch eine neue ressourcenschonende rekursive Variante entwickelt, die keine Verarbeitungen in Blockform verwendet und damit auch numerisch stabiler ist. Ferner werden die Schätzgüte und Stabilität des neuen Ansatzes ausführlich analysiert.

Der Vormarsch der „Networked Control Systems“ (NCS) macht auch vor der Systemidentifikation mittels Parameterschätzung nicht Halt. So ist eine Modellbildung (aus experimentellen Daten) zur Lösung der Regelungsaufgabe auch bei diesen angezeigt. Neben unerwünschten Totzeiten ist eine weitere wesentliche Einschränkung, die mit der Nutzung eines Netzwerks in einem Regelkreis einhergeht, der stochastische Datenverlust bei der Übertragung. Dessen Einfluss auf die Identifikation von Modellparametern mit dem neuen UFIR-Verfahren ist daher der Schwerpunkt dieser Arbeit.

Konkret werden zwei Ansätze entwickelt und analysiert, die die Verwendung des neuen UFIR-Parameterschätzers ermöglichen sollen, wenn ein Kommunikationsnetzwerk, basierend auf dem Transmission Control Protocol (TCP), die Messdaten des Systemausgangs an den Schätzer überträgt. Der Einfluss von stochastisch auftretenden Paketverlusten auf den bisher wenig zur Parameteridentifikation eingesetzten Schätzer wird dabei untersucht.

Im Rahmen eines sogenannten **Co-Design-Ansatzes** wird zunächst gezeigt, dass ohne größeren Aufwand akzeptable Ergebnisse erzielt werden können, wenn man die Synergien von FIR-Filter und paketbasierter Arbeitsweise des Netzwerks entsprechend ausnutzt. So wird eine Messdatensequenz, die ein „intelligenter Sensor“ mit einem Puffer generiert, von der Strecke über das Netzwerk zum Parameterschätzer übertragen. Auf deren Basis erfolgt dann die Schätzung der Parameter. Konvergenz- und Stabilitätsbetrachtungen zu diesem Ansatz werden abgeleitet und an einem numerischen Beispiel erläutert.

Ein zweiter Ansatz wird für den Fall entwickelt, dass kein „intelligentes“ Messglied zur Verfügung steht und die Messwerte des Ausgangssignals einzeln paketbasiert von der Strecke über das Netzwerk zum Parameterschätzer übertragen werden. Die dabei stochastisch auftretenden Paketverluste werden mit Hilfe multipler Imputation (MI) kompensiert. Ferner werden weitere Modifikationen des UFIR-Verfahrens benötigt, um Parameterschätzungen in diesem Fall zu ermöglichen. Der Einfluss des Netzwerks auf die Schätzgüte des so entstandenen **MI-UFIR-Algorithmus** wird untersucht. Entsprechende Defizite dieses Ansatzes werden deutlich gemacht und im Rahmen des Ausblicks Lösungsmöglichkeiten aufgezeigt. Ein abschließendes numerisches Beispiel veranschaulicht die Ergebnisse.

Abstract

An unbiased finite impulse response filter (UFIR filter) is used for real-time parameter identification. The algorithm is equivalent to the receding horizon least squares method (RHLS). But it does not require initial conditions and the horizon length is optimised to guarantee a minimal error covariance if there is parameter and measurement noise. This parameter estimator does not need any a priori information and the knowledge of initial conditions. That makes it highly attractive for engineering applications. Furthermore, a new resource-efficient recursive version is developed which does not use any batch processing. This makes the algorithm numerically more stable. The quality and stability of this new approach is analysed in detail.

The advance of the “networked control systems” (NCS) has found its way into system identification on the basis of parameter estimation methods. Experimental modelling is also used in NCS. Besides unwanted delay there is random packet loss when a communication network is used within a control loop. This work focuses on the impact of this major constraint on the UFIR estimator.

Two new approaches are developed and analysed. They should allow the usage of the UFIR parameter estimator, if a network based on the Transmission Control Protocol (TCP) connects the system output with the estimation scheme. The impact of random packet dropouts on this new real-time estimation method is analysed.

A so-called **co-design approach** uses synergetic effects of the FIR filter and the packet-based network. A “smart sensor” generates a sequence of measurements. This sequence is sent to the UFIR estimator via the network. The effects of package dropouts are investigated. Furthermore a convergence and stability analysis is carried out and approved within numerical studies.

The second approach is developed in case that a “smart sensor” is not available or cannot be implemented. Then the output measurements are sent separately to the UFIR estimator via the network. The package dropouts are compensated by multiple imputations (MI). Further modifications allow the usage of the UFIR method in the described network environment. The network influence on the resulting **MI-UFIR parameter estimator** is investigated. The shortcomings of the approach are revealed and possible solutions are proposed within the prospects in the last chapter. Furthermore, the found results are approved within numerical studies.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	VII
1 Einführung	1
1.1 Networked Control Systems	1
1.1.1 „Artfremde“ digitale Netzwerke und Regelung	2
1.1.2 Einteilung der Networked Control Systems	3
1.1.3 Modellbildung, Analyse und Regelungsentwurf von NCS	6
1.2 Systemidentifikation	9
1.2.1 Grundlagen der experimentellen Modellbildung	9
1.2.2 Parameteridentifikation in Echtzeit	10
1.3 Filter mit endlicher Impulsantwort	11
1.3.1 Allgemeines	11
1.3.2 Das FIR-Filter im Zustandsraum	12
1.4 Einordnung dieser Arbeit	13
1.4.1 Beschreibung der Aufgabenstellung	13
1.4.2 Stand der Technik	14
1.4.3 Beitrag der Arbeit	15
1.5 Gliederung der Arbeit	17
2 Problembeschreibung	19
2.1 Das Parameteridentifikationsmodell	19
2.1.1 Rauscheigenschaften	20
2.1.2 Persistente Anregung (Uniforme vollständige Beobachtbarkeit)	21
2.2 Das Netzwerkmodell	21
3 UFIR-Parameteridentifikation in Echtzeit	23
3.1 Die Blockform des UFIR-Parameterschätzers	23
3.2 Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers	27
3.3 Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers ohne Startschätzung	29
3.4 Schätzfehler und Schätzfehlerkovarianz	31
3.4.1 Schätzfehlerkovarianz des UFIR-Parameterschätzers in Blockform	31
3.4.2 Rekursive Berechnung der Schätzfehlerkovarianz des UFIR-Verfahrens	33
3.4.3 Optimierung des UFIR-Parameterschätzers	34
3.4.4 Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz bei UFIR-Schätzungen	35
3.4.4.1 Die untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz	35
3.4.4.2 Die obere Schranke der Schätzfehlerkovarianz	36
3.5 Die optimale Horizontlänge	37
3.5.1 Bandbegrenzte Signale	37
3.5.2 Die Festlegung von N_{opt}	37
3.6 Ergänzende Punkte zum UFIR-Parameterschätzer	39
3.6.1 Das generalisierte Noise-Power-Gain (GNPG)	39
3.6.2 Die Deadbeat-Eigenschaft des UFIR-Parameterschätzers	40
3.7 Vergleich des UFIR- mit dem Kalmanfilter	41

3.8	Stabilität und Konvergenzeigenschaften	44
3.8.1	BIBO-Stabilität	46
3.8.2	Die Stabilität des UFIR-Parameterschätzers	47
3.8.3	Konvergenz der UFIR-Parameterschätzung	52
3.9	Numerische Simulation	52
3.9.1	Strecke und Modell	52
3.9.2	Die Festlegung der optimale Horizontlänge	52
3.9.3	Vergleich der Schätzungen	53
3.9.4	Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz	54
4	UFIR-Parameteridentifikation in Echtzeit über das Netzwerk	57
4.1	Co-Design-Ansatz zur Nutzung synergetischer Eigenschaften von Netzwerk und Filter	58
4.1.1	Die UFIR-Parameterschätzung über das Netzwerk im Co-Design-Ansatz	59
4.1.2	Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz bei UFIR-Schätzungen über das Netzwerk	61
4.1.2.1	Die untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz	61
4.1.2.2	Die obere Schranke der Schätzfehlerkovarianz	62
4.1.3	Stabilität der UFIR-Parameterschätzung im Netzwerk bei Verwendung des Co-Design-Ansatzes	63
4.1.4	Numerische Simulation	64
4.1.4.1	Strecke, Modell und Netzwerkverhalten	64
4.1.4.2	Die Festlegung der optimale Horizontlänge	65
4.1.4.3	Vergleich der Schätzungen	66
4.1.4.4	Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz	66
4.2	UFIR-Parameteridentifikation mit multiplen Imputationen bei fehlenden Messungen	69
4.2.1	Die MI-UFIR-Parameterschätzung bei Messungsverlusten im Netzwerk	70
4.2.1.1	Benötigte Speicher	71
4.2.1.2	Die Hilfsmodellmethode	72
4.2.1.3	Prädiktion des Systemausgangssignals und multiple Imputation	73
4.2.2	Die MI-UFIR-Algorithmen	75
4.2.3	Schätzfehler und Schätzfehlerkovarianz des MI-UFIR-Parameterschätzers	78
4.2.3.1	Schätzfehlerkovarianz des MI-UFIR-Parameterschätzers in Blockform	78
4.2.3.2	Rekursive Berechnung der Schätzfehlerkovarianz des MI-UFIR-Parameterschätzers	80
4.2.4	Stabilitätsanalyse des MI-UFIR-Parameterschätzverfahrens	82
4.2.4.1	Stabilität des MI-UFIR-Schätzfehlers im zweiten Moment	82
4.2.4.2	Stabilität der Prädiktion des Systemausgangssignals	87
4.2.5	Diskussion der Eigenschaften der MI-UFIR-Parameteridentifikation	88
4.2.6	Numerische Simulation	90
4.2.6.1	Strecke, Modell und Netzwerkverhalten	90
4.2.6.2	Die Festlegung der optimale Horizontlänge	91
4.2.6.3	Vergleich der Schätzungen	92

4.2.6.4	Die Stabilität der Ausgangssignalprädiktion	95
5	Zusammenfassung und Ausblick	98
5.1	Zusammenfassung	98
5.2	Ausblick	100
	Literaturverzeichnis	103
	Anhang	114
A	Ergänzende und weiterführende Punkte	114
A.1	Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers über die gesamte Horizontlänge	114
A.2	Der DKF-Parameterschätzer als Benchmark	114
A.3	Das Kalmanfilter auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Kalman Filter/RHKF)	115
A.3.1	Herleitung des RHKF-Algorithmus	115
A.3.2	Relevante Eigenschaften des RHKF-Parameterschätzers	117
A.3.3	Die Festlegung der Horizontlänge	120
A.3.4	Herleitung des RHKF-Parameterschätzers bei Messungsverlusten	120

Symbolverzeichnis

$ \mathbf{A} $	Determinante einer Matrix \mathbf{A}
$tr\{\mathbf{A}\}$	Spur einer Matrix \mathbf{A}
$\lambda_{max}\{\mathbf{A}\}, \lambda_{min}\{\mathbf{A}\}$	Größter/kleinster Eigenwert einer Matrix \mathbf{A}
$\ \cdot\ $	Euklidische Vektornorm (2-Norm)
$Pr(\cdot \cdots)$	(Bedingte) Wahrscheinlichkeitsverteilung
$pdf(\cdot \cdots)$	(Bedingte) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$E[\cdot \cdots]$	Erwartungswertoperator, (bedingter) Erwartungswert
$o(\cdot)$	Komplexität
$O(g_k)$	Die Relation $f_k = O(g_k)$ bedeutet, dass positive Konstanten ν und k_0 existieren, so dass $\ f_k\ \leq \nu \cdot g_k$ für $g_k \geq 0$ und $k \geq k_0$ gilt.
V_k	Ljapunov-Funktion
$\phi(\cdot)$	Verlustfunktion
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$[\cdot]$	Untere Gaußklammer
\mathbf{I}	Einheitsmatrix passender Dimension
t	Zeit (allgemein)
T	Abtastzeit
f	Frequenz
q	Forward-Shift-Operator: $q^i \cdot y_k = y_{k+i}$; Backward-Shift-Operator: $q^{-i} \cdot u_k = u_{k-i}$
$E(q^{-1}), B(q^{-1})$	Polynome (insbesondere der Übertragungsfunktion im Zeitbereich)
e_i, b_i	Polynomkoeffizienten
y	Systemausgang
u	Systemeingang
$G(q^{-1})$	Übertragungsfunktion im Zeitbereich
$G_a(q^{-1}; \boldsymbol{\theta})$	Übertragungsfunktion des Hilfssystems im Zeitbereich
$G_S(z)$	z -Übertragungsfunktion eines Systems
φ_k	Regressionsvektor

$\boldsymbol{\theta}$	Parametervektor
$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k k}$	Parameterschätzung zum Zeitpunkt k mit Messungen bis zum Zeitpunkt k
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k k}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k k}$	Optimale/erwartungstreue Parameterschätzung
$\boldsymbol{\epsilon}_k$	Schätzfehler einer Parameterschätzung
ζ_k	Modellfehler $\zeta_k := y_k - G_a(q^{-1}; \boldsymbol{\theta}) \cdot u_k$
ϵ_k^y	Prädiktionsfehler des Systemausgangs
ϵ_k^*	Fehler im vom Schätzer verwendeten Systemausgangssignal
J_k	Mittlere quadratische Abweichung (Mean Square Error/MSE)
$\mathbf{P}_{k k}$	(A-Posteriori-)Schätzfehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k k} := E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T]$
$\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{P}_k^-$	A-priori-Schätzfehlerkovarianzmatrix
$\mathfrak{S}_{k,1}$	Informationsmatrix nach Jazwinski
V_k^y	Prädiktionsfehlerkovarianz
S^o, S^u	Obere/untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz
v_k	Messrauschen
R	Kovarianz des Messrauschens
\mathbf{w}_k	Prozessrauschen/Parameterrauschen
Q	Kovarianz des Prozessrauschens/Parameterrauschens
σ_w^2 / σ_v^2	Verhältnisse des Parameterrauschens zum Messrauschen (verallgemeinerte Darstellung)
M_k	Generalisiertes Noise-Power-Gain (GNPG)
$\mathbf{H}_{k,m}, \bar{\mathbf{H}}_{k,m}$	Verstärkungsmatrix des FIR-Filters/UFIR-Filter-Verstärkung
N, N_{opt}	Horizontlänge/optimale Horizontlänge
$\mathbf{K}_k, \bar{\mathbf{K}}_l$	Kalmanverstärkung, Korrektur-Verstärkung auf dem Horizont
$\mathbf{Y}_{k,m}$	Speicher der Abtastwerte des Systemausgangs
$\Phi_{k,m}$	Speicher für den Regressionsvektor
$\Gamma_{k,m}$	Speicher für die Kommunikationsvariable γ_k
γ_k	Kommunikationsvariable
γ	Kommunikationsrate

1 Einführung

Im Rahmen der Einführung wird zunächst ein Überblick über die sogenannten „Networked Control Systems“ (NCS) gegeben. Neben der Einteilung dieses Forschungsgebiets der Regelungstechnik wird auch auf die gängigsten Methoden zur Modellbildung, Analyse und zum Entwurf eingegangen. Ferner werden zugehörige Literaturquellen benannt.

Daran schließt sich eine kurze Beschreibung der Hintergründe zur Systemidentifikation mittels Parameterschätzverfahren an. Neben den Grundlagen der experimentellen Modellbildung wird auch auf die Parameteridentifikation in Echtzeit eingegangen, wie sie z. B. bei der adaptiven Regelung oder im Rahmen der Systemdiagnose verwendet wird.

Im Zentrum dieser Arbeit steht die Nutzung von Filtern mit endlicher Impulsantwort zur Parameterschätzung. Daher erfolgt eine kurze Einführung in diese Thematik. Neben grundlegenden Aspekten wird auf den Bereich der Nutzung dieser Filter im Zustandsraum verwiesen. Ihr Einsatz im Frequenzbereich und bei der Signalverarbeitung ist ein etabliertes Forschungsgebiet, wohingegen die Nutzung im Rahmen von Zeitbereichsmethoden weniger verbreitet ist.

Am Ende der Einführung folgt eine Einordnung dieser Arbeit in den Stand der Technik und ihr weiterer Aufbau wird beschrieben.

1.1 Networked Control Systems

Der folgende kurze Überblick über das Gebiet der vernetzten Regelungssysteme basiert auf den Ausführungen in Siegl (2017) und fasst diese zusammen.

Der weitverbreitete Einsatz von Datennetzen führt zu einem grundlegenden Wandel im Bereich der Regelungstechnik. Fast alle Komponenten einer technischen Anlage können heute über Bussysteme, Netzwerke oder drahtlos verbunden werden. Die dabei gewonnene Flexibilität in der Festlegung der Automatisierungsstruktur und deren vereinfachte Wartung sind entscheidende Faktoren für die Entwicklung neuer regelungstechnischer Konzepte. In vernetzten Regelungssystemen kann der eigentliche Regler mit den physikalischen Prozessen über (große) räumliche Distanzen kommunizieren. Zukunftsweisende Beispiele sind automatische Produktionsanlagen, bei denen funkbasierte Sensoren mit den Produkten durch die Fertigung bewegt werden, und informationstechnisch vernetzte, kooperierende Multi-Roboter-Systeme, die über Datennetze verbunden sind. Die Bussysteme, die in der Vergangenheit zur Automatisierung von Anlagen eingesetzt wurden, sind so ausgelegt, dass ihre Übertragungskapazität auch in kritischen Situationen den erforderlichen Datenaustausch zulässt. Der Fokus richtet sich bei digital vernetzten Regelungssystemen auf Netzwerke, die nicht nur für regelungstechnische Aufgaben genutzt werden, sondern in denen der Datenverkehr zwischen den Komponenten eines Regelkreises mit anderen Nutzern konkurriert. In diesem Fall lassen sich deutliche Einflüsse auf die Regelgüte identifizieren. Die wichtigsten hierbei sind die Nichtvorhersagbarkeit der Ankunftszeit der Datenpakete beim Adressaten und ein möglicher Datenverlust. Im Gegenzug führt die digitale Informationskopplung aber auch zu einer bisher nicht realisierbaren Flexibilität der Regelung in Bezug auf die im Regelkreis dauerhaft, zeitweise oder aufgabenabhängig verbundenen Komponenten, so dass vollkommen neuartige Regelungsmethoden möglich werden, deren Potenzial bisher nicht systematisch untersucht wurde (Litz *et al.*, 2008).

Als ein Ergebnis sind die sogenannten „Networked Control Systems“ in den Blickpunkt der Forschung gerückt [Branicky und Phillips (2007)/Lunze (2013)]. Ohne den Begriff selbst zu

nutzen, veröffentlichten Ray und Halevi bereits 1988 Forschungsergebnisse zur Modellierung und Analyse von vernetzten linearen Regelungssystemen mit zufälligen Totzeiten unter dem Titel „Integrated Communication and Control Systems (ICCS)“ (Ray und Halevi, 1988). Die Bezeichnung „Networked Control Systems“ (NCS) wurde erstmals von Kim *et al.* (1996) und Walsh *et al.* (1999a) gebraucht.

Neben den für Automatisierungszwecke geschaffenen Feldbussystemen werden mehr und mehr „artfremde“ digitale Netzwerke, wie etwa das Ethernet, für Regelungszwecke eingesetzt, die das deterministische oder zumindest quasideterministische Verhalten der Feldbussysteme nicht aufweisen und somit als Teil der Regelstrecke beim Regelungsentwurf nicht vernachlässigt werden können (Litz *et al.*, 2008).

1.1.1 „Artfremde“ digitale Netzwerke und Regelung

Sogenannte „General-Purpose-Netzwerke“ wie Ethernet, Internet/Intranet und WLAN sind für Büroanwendungen ohne Echtzeitanforderung entwickelt worden. Trotz vorhandener Nichtdeterminismen werden diese digitalen Netzwerke für Regelungszwecke herangezogen. Die Gründe hierfür liegen in der hohen Verfügbarkeit, der ständig steigenden Leistungsfähigkeit und nicht zuletzt an den günstigen Kosten.

Die Vorteile der Nutzung dieser „artfremden“ Netzwerke sind nach Asif und Webb (2015):

- **Flexibilität:** Das Netzwerk macht das Regelungssystem und die Nutzung seiner Ressourcen variabler.
- **Geringere Komplexität** gegenüber anderen echtzeitfähigen Kommunikationsmitteln.
- **Datenaustausch:** Ein NCS kann einen effizienten Datenaustausch ermöglichen, insofern die Daten an den Netzwerkknoten bei Bedarf verfügbar sind.
- Vor allem bei großen Regelungssystemen **reduziert** sich der **Aufwand für die Verkabelung**.
- **Erweiterbarkeit:** Ein NCS ist ohne große Änderungen am physischen Aufbau erweiterbar.
- Die Regelung ist über **große Distanzen** möglich.

„Artfremde“ Netzwerke weisen allerdings auch die folgenden Nachteile auf (Asif und Webb, 2015):

- **Netzwerksicherheit:** Daten, die über ein solches Netzwerk gesendet werden, sind für jedermann zugänglich, wenn keine entsprechenden Maßnahmen getroffen werden. Am kritischsten ist dieses Problem, wenn der Regelkreis über das Internet geschlossen wird.
- **Bandbreitenbeschränkung:** Es ist einfach, das NCS zu erweitern, aber dies kann auch dazu führen, dass die verfügbare Bandbreite nicht mehr ausreicht. Die Folge ist dann eine Überlastung des Netzwerkes.
- **Netzwerktotzeiten:** Beispielsweise können durch eine Überlastung des Netzwerks Totzeiten in das Regelungssystem eingebracht werden, die zu einer schlechteren Regelgüte und sogar zu Instabilität führen können (Tipsuwan und Chow, 2003).

- **Netzwerk-Scheduling:** Der Datenverkehr muss verwaltet werden, um die bestmögliche Netzwerkauslastung zu erzielen.

Ein aus Sicht der Regelungstechnik ideales Netzwerk besitzt nach Litz *et al.* (2008) einen ausreichend hohen Datendurchsatz bei passender Nutzdatenlänge, eine konstante Latenz - damit einen Jitter von 0% - sowie 0% Verlustrate. Allerdings ist dies in der Realität nicht gegeben, so dass sich durch das Netzwerk generierte limitierende Effekte zeigen. Ursächlich dafür sind im Wesentlichen eine *beschränkte Bandbreite, variable Übertragungszeiten, sporadische Telegrammverluste* und *Vertauschungen der Telegramm-Reihenfolge*.

1.1.2 Einteilung der Networked Control Systems

Ein NCS ist ein Regelungssystem, bei welchem mindestens ein Teil des Regelkreises über ein Kommunikationsnetzwerk geschlossen wird. Nach Zampieri (2008) kann man das Forschungsgebiet der NCS in die folgenden Hauptbereiche unterteilen:

a) **Regelung von Netzwerken**

Digitale Kommunikationsnetzwerke sind das Rückgrat der NCS. Zuverlässigkeit, Netzwerksicherheit, einfache Nutzung und eine hohe Verfügbarkeit sind bei der Auswahl des Kommunikationstypus entscheidend. Daher konzentriert sich dieser Forschungsbereich auf den Entwurf effizienter und echtzeitfähiger Kommunikationsnetzwerke. Dabei spielt u. a. das Netzwerkprotokoll, die Vermeidung von Überlastungen sowie das Routing eine entscheidende Rolle. Das Ziel ist es nach Litz *et al.* (2008), eine entsprechende QoS (Quality of Service) und eine optimale Nutzung der Netzwerkressourcen zu erreichen. [Vgl. Gupta und Chow (2010)]

Netzwerkbasierte Regelung ist ein großes Forschungsgebiet. Um ein Netzwerk regeln zu können, ist es notwendig dessen Parameter messen und modifizieren zu können. Die gegenwärtigen layerbasierten Kommunikationsarchitekturen sind nicht für sogenannte Cross-Layer-Entwürfe ausgelegt. Bei diesen müssen Informationen der unteren dem Anwendungslayer zur Verfügung gestellt werden. Ferner müssen die Protokolle der unteren Layer vom Anwendungslayer dynamisch verändert werden können. Hierfür sind neue Protokolle und Protokollmodelle notwendig. (Zampieri, 2008)

Ausführliche Übersichten über grundlegende Themen, aktuelle Forschungsrichtungen und künftige Entwicklungen im Bereich der Regelung von Netzwerken finden sich in Zampieri (2008) sowie Gupta und Chow (2010). Obgleich netzwerkbasierte Regelung ein interdisziplinärer Forschungsbereich ist, der die Regelungstechnik, die Kommunikationstechnik und Computerwissenschaften vereint, soll im Folgenden hauptsächlich auf die Sicht des Regelungstechnikers Bezug genommen werden. Die Regelung von Netzwerken wird dabei in einem entsprechenden Kontext betrachtet.

b) **Regelung über Netzwerke**

Wie der Name schon sagt, ist die entscheidende Komponente eines NCS das Kommunikationsnetzwerk im Regelkreis [Hespanha *et al.* (2007), Gupta und Chow (2010)]. Eine grundlegende Annahme bei „konventionellen“ Regelungssystemen ist die Verlustfreiheit des Datenaustausches unter den Komponenten. In einem NCS müssen die Daten über das Kommunikationsnetzwerk ausgetauscht werden. Dieses kann einen solchen perfekten Datenaustausch aber nicht ermöglichen, was zu den sogenannten **Netzwerkeinschränkungen** führt. Diese sind z. B. netzwerkinduzierte Totzeiten, Datenpaketverluste und Themen der Zeitsynchro-

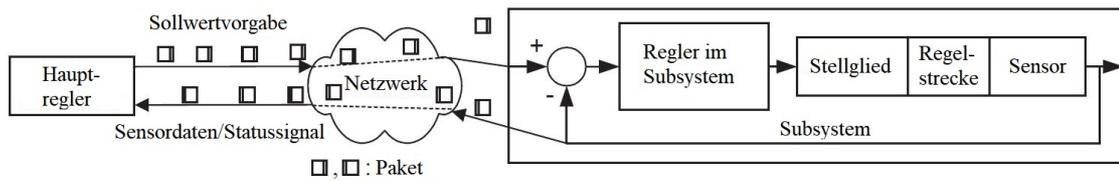


Abbildung 1.1: NCS mit hierarchischer Struktur (Tipsuwan und Chow, 2003)

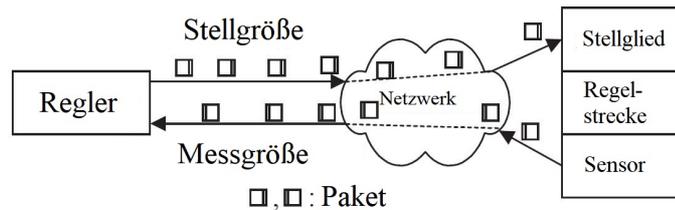


Abbildung 1.2: NCS mit direkter Struktur (Tipsuwan und Chow, 2003)

nisation. Die Netzwerkeinschränkungen können nach Tipsuwan und Chow (2003) die Leistungsfähigkeit des Regelkreises herabsetzen oder sogar zur Instabilität des Systems führen. Einfache Erweiterungen konventioneller regelungstechnischer Ansätze sind in der Regel bei der Betrachtung von NCS nicht ausreichend. In diesem Forschungsbereich ist es daher wesentlich, in der Analyse und beim Design solcher Systeme die Grenzen von Regelungstheorie und Kommunikationstechnologie zu überwinden. (Zhao *et al.*, 2015b)

Nach Chow und Tipsuwan (2001) sowie Tipsuwan und Chow (2003) gibt es im Allgemeinen zwei Möglichkeiten eine Regelungssystem über ein Netzwerk zu konzipieren. Die erste ist eine *hierarchische Struktur* (Abbildung 1.1) mit mehreren Subsystemen zu bilden, bei der jedes Subsystem aus einem Satz Sensoren, Aktuatoren und Reglern besteht. Diese sind jeweils mit derselben Regelstrecke verbunden. In diesem Fall erhält der Regler im Subsystem über das Netzwerk einen Sollwert vom Hauptregler. Das Subsystem regelt dann selbsttätig diesen Sollwert ein. Die Sensordaten oder ein Statussignal werden im Anschluss an den Hauptregler über das Netzwerk versendet. Die Struktur in Abbildung 1.2 wird als *direkte Struktur* bezeichnet, da die Sensoren und Aktuatoren direkt mit dem Netzwerk verbunden sind. Der Regler ist räumlich getrennt von der Regelstrecke mit dem Netzwerk gekoppelt, an das auch die Sensorik und Aktuatorik angeschlossen sind. Er muss die folgenden Arbeitsschritte ausführen:

- (a) Die Messsignale der Sensoren über das Netzwerk einlesen.
- (b) Die Stellgrößen berechnen und
- (c) die Stellgrößen über das Netzwerk an die Aktuatoren schicken.

Beide Strukturen haben ihre Vorteile. Die hierarchische Struktur ist modularer aufgebaut und der Regelkreis ist leichter rekonfigurierbar. Die direkte Struktur ermöglicht eine bessere Interaktion unter den Komponenten, da die Daten direkt übertragen werden. Ein Regler in der direkten Struktur kann jede Messung auswerten und verarbeiten, wohingegen ein Hauptregler in der hierarchischen Struktur warten muss, bis der Sollwert erreicht wird, bevor Mess-, Status- oder Alarmsignale versendet werden. (Chow und Tipsuwan, 2001)

Die strukturelle Unterscheidung hat sowohl theoretische als auch praktische Aspekte; die hierarchische Struktur kann als Kombination eines direkt strukturierten NCS mit einem konventionellen lokalen Regelkreis verstanden werden. Es ist daher nicht erforderlich, diese separat zu untersuchen. Die meisten Arbeiten zum Thema NCS konzentrieren sich somit auf die direkte Struktur. (Zhao *et al.*, 2015b)

c) **Regelung vernetzter Systeme**

Hierbei ist die Frage der Verteilung der Regelungsaufgabe entscheidend. Die Architektur eines Regelungssystems beschreibt, welche Komponenten der Strecke, des Zustandsschätzers und des Reglers zusammenarbeiten und welche Informationen unter diesen Komponenten ausgetauscht werden. Die Wahl dieser Architektur hängt von verschiedenen Aspekten ab, u. a. von der Verfügbarkeit von Rechnerressourcen, von den Eigenschaften der Regelstrecke sowie von der für die Implementierung von Regler und Beobachter verwendeten Software.

Die klassische Regelungstheorie geht vom Ansatz der eingebetteten Systeme („*Embedded Systems*“) aus, bei dem der Regler auf einem einzelnen Rechner implementiert und mit der ganzen Strecke verbunden ist. Alle Sensorinformationen werden zu einer einzigen Instanz übertragen, die für die Schätzung des gesamten Systemzustands und die Berechnung aller Stellgrößen verantwortlich ist. Man bezeichnet dies als zentralisierten Regelkreis mit *zentralisiertem Regler* (Lunze, 2013). Des Weiteren unterscheidet man die folgenden wesentlichen Regelungsarchitekturen hinsichtlich des Informationsaustauschs unter den lokalen Reglern [Jin (2007), Lunze (2013)]:

- **Dezentralisierte Regelung:** Die Subsysteme werden von unabhängigen Reglern gesteuert, die keine Informationen austauschen.
- **Koordinierte Regelung:** Wenn es starke Kopplungen zwischen den Subsystemen gibt, hat eine dezentralisierte Regelungsarchitektur Schwierigkeiten, eine entsprechende Regelgüte des Gesamtsystems zu erreichen. Die Interaktion der Subsysteme kann dabei nicht durch die Regler kompensiert werden. In diesem Fall wird ein Koordinator verwendet, der die lokalen Regler mit den notwendigen Informationen über die benachbarten Subsysteme versorgt.
- **Verteilte Regelung:** Bei der verteilten Regelung entscheiden die lokalen Regler autonom, welche Information an welchen anderen lokalen Regler gesendet werden. Es gibt keine „höhere“ Instanz, wie einen Koordinator, der diese Entscheidung beeinflusst. Die verteilte Regelung bietet eine hohe Flexibilität hinsichtlich der Regelungsarchitektur, um auf Reduzierungen oder Erweiterungen der Gesamtstrecke zu reagieren.

Die beste Regelgüte kann von der koordinierten oder der verteilten Regelung erzielt werden, da die lokalen Regler in diesen Strukturen die benötigten Informationen, direkt oder indirekt, austauschen können. Dies ermöglicht es, den Einfluss der physikalischen Kopplungen zu kompensieren. Die dezentralisierte Architektur hat den Vorteil, dass sie nicht auf eine Kommunikationsinfrastruktur angewiesen ist.

Als eine Sonderform der vernetzten/verteilten Regelungssysteme sind die sogenannten **Multi-Agent-Systeme** (MAS) anzusehen. Bei diesen werden die Kopplungen zwischen den Subsystemen durch einen vernetzten Regler¹ erzeugt. Dieser besteht aus den lokalen Reglern und

¹ Auch bei *physikalisch gekoppelten Systemen* können vernetzte Regler verwendet werden, welche zusätzliche Kopplungen in das Gesamtsystem einbringen. Ein Beispiel für diese Systeme sind Elektrizitätsnetze.

dem Kommunikationsnetzwerk. Die Verfügbarkeit leistungsstarker (funkbasierter) Kommunikationsnetzwerke hat das Interesse an der Regelung dieser Systeme verstärkt. Hierbei sollen physikalisch nicht verbundene Subsysteme ein gemeinsames Ziel erreichen oder die Kopplung über das Netzwerk soll die Regelgüte des Gesamtsystems verbessern. Ein Beispiel für MAS ist die Fahrzeugkolonnenregelung als Teil des autonomen Fahrens, bei der die Fahrzeuge einem Führungsfahrzeug mit gleicher Geschwindigkeit und vorgegebenem Abstand folgen sollen (Lunze, 2017).

Ein wichtiger Aspekt der gegenwärtigen Forschung zum Thema „MAS“ ist die Koordination der Subsysteme ohne einen „Kordinator“ zu realisieren. Viele Regelungsaufgaben in diesem Bereich lassen sich daher auf Konsens- oder Synchronisationsprobleme zurückführen. Wie in Olfati-Saber *et al.* (2007) wird in den meisten Arbeiten davon ausgegangen, dass die Subsysteme identische dynamische Eigenschaften aufweisen. Hier lässt sich eine Synchronisation unter bestimmten Bedingungen mit einer statischen Rückführung erreichen. Haben die Subsysteme allerdings unterschiedliche dynamische Eigenschaften, existiert eine gemeinsame Trajektorie nur, wenn es eine gewisse Überschneidung bei diesen gibt. (Lunze, 2013)

Die enge Verbindung der physischen Welt mit eingebetteten (Regelungs-)Systemen, die global vernetzt sind, wird gegenwärtig unter dem Begriff der „**Cyber-Physical Systems**“ (CPS) untersucht. Diese stellen Erweiterungen von (eingebetteten) Computersystemen durch globale Netzwerke dar. Man nimmt an, dass sich die Bandbreite moderner digitaler Kommunikationsnetzwerke alle zwei Jahre verdoppelt. Aus globaler Sicht geht man ferner davon aus, dass alle Computernetzwerke in Zukunft verbunden sein werden und das sogenannte „*Internet of Things and Services*“ bilden. NCS können als solche CPS angesehen werden. Die künftige Weiterentwicklung der Netzwerktechnologie macht aus den aktuellen „*Netzwerken der Informationen*“ „*Netzwerke der Aktionen*“. Im Netzwerk der Informationen ist der Informationsfluss vom physikalischen System zu einer überwachenden Einheit oder einem Operator gerichtet. Im Netzwerk der Aktionen kommunizieren die Subsysteme untereinander und mit dem Operator in einem über das Netzwerk geschlossenen Regelkreis. (Lunze, 2013)

1.1.3 Modellbildung, Analyse und Regelungsentwurf von NCS

Hierbei werden die NCS nur im Sinne der Regelung über Netzwerke betrachtet, auch wenn die aufgezeigten Ansätze (teilweise) für die Regelung vernetzter Systeme relevant und somit Teil der Forschung auf diesem Gebiet sind.

a) Phänomenologische Ansätze

Die nachfolgenden Ansätze, auf deren Basis die Modellbildung, die Stabilitätsanalyse und der Regelungsentwurf erfolgt, werden als „phänomenologisch“ bezeichnet, da sie aus der Betrachtung der durch das Kommunikationsnetzwerk in den Regelkreis eingebrachten Phänomene [Totzeiten, Daten(paket)verluste usw.] hervorgegangen sind.

- **Totzeitsysteme**, z. B. in Branicky *et al.* (2000), Tipsuwan und Chow (2003), Yu *et al.* (2004), Yue *et al.* (2004), Naghshtabrizi und Hespanha (2005), Zhong (2006) sowie Hespanha *et al.* (2007);
- **Schaltende Systeme/Hybride Systeme**, z. B. in Xiao *et al.* (2000), Hristu-Varsakelis und Levine (2007), Naghshtabrizi *et al.* (2007), Naghshtabrizi (2007), Blind *et al.* (2008) sowie Zhao *et al.* (2015b);

- **Ereignisbasierte Abtastung**, z. B. in Åström und Bernhardsson (2002), Lehmann und Lunze (2009), Yu und Antsaklis (2011), Romero *et al.* (2012), Lunze (2013) sowie Molin (2014);
- **Optimale Regelung**², z. B. in Nilsson (1998), Nilsson *et al.* (1998), Shousong und Qixin (2003), Tipsuwan und Chow (2003), Seiler und Sengupta (2005) sowie Georgiev und Tilbury (2006);
- **Fuzzy-Regelung**, z. B. in Almutairi *et al.* (2001).

b) Modellbasierte Ansätze

Die modellbasierten Ansätze werden als solche bezeichnet, da sich diese auf die Verwendung geeigneter Modelle (z. B. für die Prädiktion des Systemzustands) stützen und sie nicht (allein) an den jeweiligen Phänomenen bei der Regelung über Netzwerke ausgerichtet sind.

- **Erweitertes deterministisches zeitdiskretes Modell**, z. B. in Halevi und Ray (1988), Liou und Ray (1990), Chow und Tipsuwan (2001) sowie Tipsuwan und Chow (2003);
- **Störgrößenmodell**, z. B. in Walsh *et al.* (1999a), Walsh *et al.* (1999b) und Walsh *et al.* (1999c) sowie Tipsuwan und Chow (2003);
- **Warteschlangenmethode**, z. B. in Chan und Ozguner (1994), Luck und Ray (1990, 1994) sowie Chow und Tipsuwan (2001), Tipsuwan und Chow (2003);
- **Sequenzbasierte Regelung**³: Diese lässt sich wiederum unterteilen in
 - *Modellprädiktive Regelung (Model Predictive Control/MPC)*, z. B. in Bemporad (1998), Liu *et al.* (2006), Lunze (2013) sowie Fischer (2014);
 - *Methoden auf Basis des nominellen Reglers*, z. B. in Liu *et al.* (2007) sowie Hekler *et al.* (2012) und Lunze (2013) (Virtuelle Stellgrößen/Virtual Control Inputs);
 - *Methoden auf Basis der stochastischen Optimalregelung*, z. B. in Fischer (2014).

c) Weitere Ansätze

In der Literatur finden sich auch folgende Ansätze:

- **Netzwerkscheduling**, z. B. in Walsh *et al.* (1999b), Branicky *et al.* (2002) sowie Nešić und Teel (2004);
- **Abstratenadaption**, z. B. in Hong (1995) sowie Hong und Kim (2000);
- **Netzwerkadaptive Regelung**, z. B. in Tipsuwan und Chow (2001).

Eine übersichtliche Zusammenfassung dieses Abschnitts liefert Abbildung 1.3.

² Im Zusammenhang mit der optimalen Regelung bei NCS werden (auch) H_2 -optimale und H_∞ -optimale Ansätze verstanden.

³ Die sequenzbasierte Regelung gehört zu den sogenannten Co-Design-Ansätzen. Dies bedeutet, dass die paketbasierte Datenübertragung im verwendeten Kommunikationsnetzwerk für die Regelungstheorie ausgenutzt wird. Der Ansatz beruht im Wesentlichen darauf, nicht nur einen einzelnen Stellgrößenwert zu übertragen, sondern eine ganze Sequenz adäquater Stellgrößenwerte für künftige Zeitpunkte. Dabei wird die Eigenschaft moderner Netzwerke ausgenutzt, große Datenpakete mit Zeitstempel zu versenden. Die erfolgreich übertragene Sequenz wird in einem Puffer am Aktuator gespeichert und eine spezielle Auswahllogik entscheidet, welcher Stellgrößenwert zu welchem Zeitpunkt auf die Regelstrecke angewendet wird.

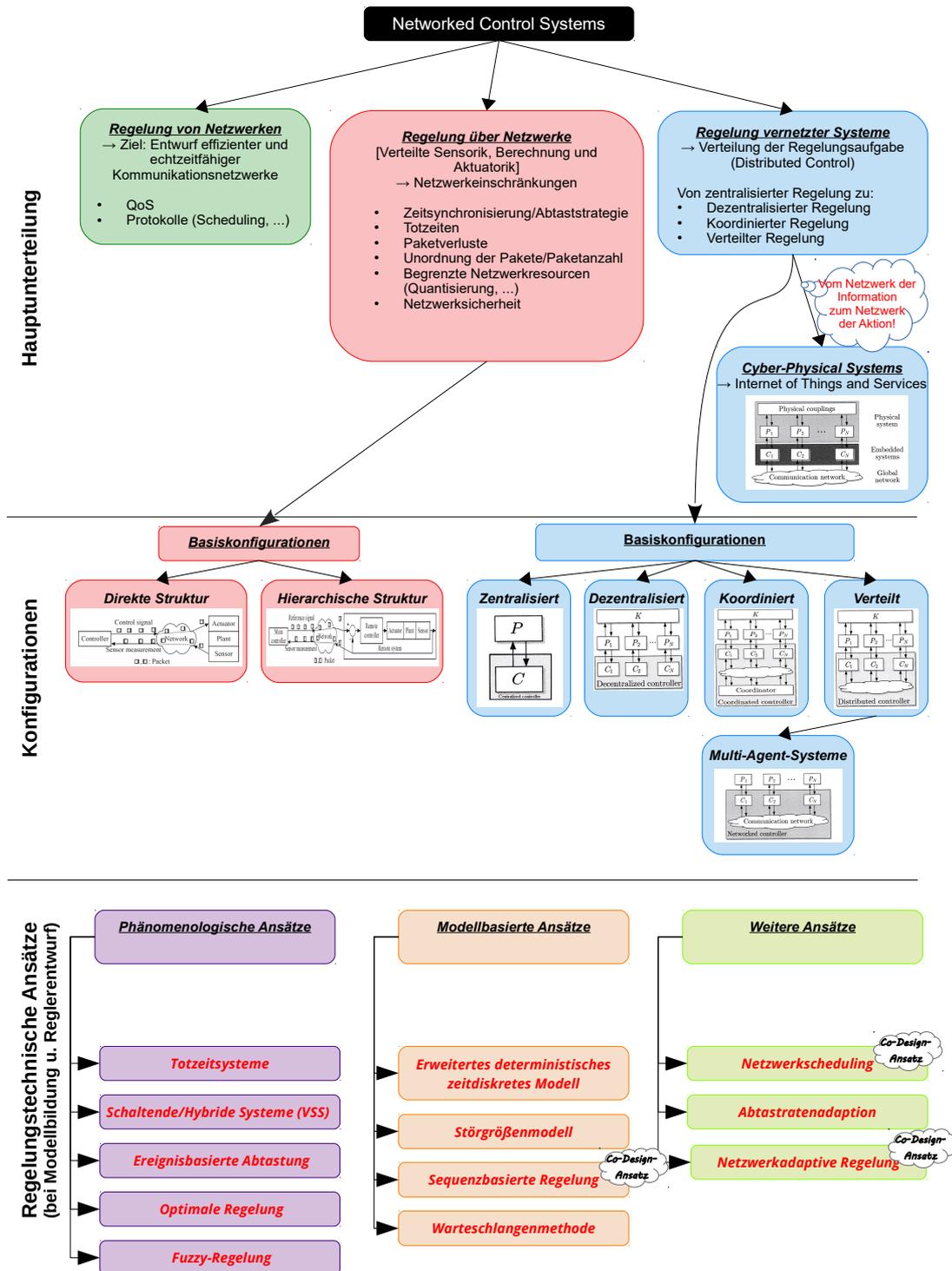


Abbildung 1.3: Überblick über das Forschungsgebiet der NCS (Einschlägige Literatur zu den einzelnen Bereichen kann dem vorausgehenden Abschnitt entnommen werden.)

1.2 Systemidentifikation

Ein wesentlicher Teil bei der Lösung einer Regelungsaufgabe ist die Modellbildung. Hierbei wird das Verhalten eines Systems auf Basis zugrunde liegender Gesetzmäßigkeiten analysiert und mathematisch beschrieben. Um ein reales System als mathematische Modell entsprechend abstrahieren zu können, müssen zum einen die Modellstruktur und zum anderen auch die zugehörigen Parameter ermittelt (identifiziert) werden. Nach Bohn und Unbehauen (2016) [S. 5 f.] existieren hierzu im Wesentlichen zwei Vorgehensweisen.

- Bei der **theoretischen Modellbildung** eines Systems wird auf Basis der physikalisch-technischen Zusammenhänge des Prozesses (z. B. Erhaltungssätze) das mathematische Modell gewonnen. Vorausgesetzt die inneren und äußeren Bedingungen sind bekannt, kann das System rechnerisch identifiziert werden. Man spricht dann auch von sogenannten White-Box-Modellen.
- Die **experimentelle Modellbildung** wird auch als Systemidentifikation bezeichnet und basiert auf dem zeitlichen Verhalten der Eingangs- und Ausgangsgrößen, das entsprechend ausgewertet wird. Ermittelt wird dabei entweder ein nichtparametrisches oder ein parametrisches Modell. Für diese Form der Modellbildung sind keine spezifischen A-priori-Kenntnisse erforderlich. Im Ergebnis erhält man ein Black-Box-Modell, das lediglich das Eingangs- und Ausgangsverhalten des Systems beschreibt⁴.

Isermann (1992) [S. 8] definiert den Begriff *Identifikation* und die zugehörigen Aufgaben folgendermaßen:

„Identifikation ist die experimentelle Ermittlung des zeitlichen Verhaltens eines Prozesses oder Systems. Man verwendet gemessene Signale und ermittelt das zeitliche Verhalten innerhalb einer Klasse von mathematischen Modellen. Die Fehler zwischen dem wirklichen Prozess oder System und seinem mathematischen Modell sollen dabei so klein wie möglich sein.“

1.2.1 Grundlagen der experimentellen Modellbildung

Das Gelingen der Systemidentifikation ist von mehreren Faktoren abhängig. Die wichtigsten vier, das Identifikationsexperiment beeinflussenden Faktoren sind nachfolgend dargelegt. Sie werden den weiteren Ausführungen zugrunde gelegt.

a) Das System

Die physikalische Realität, die die experimentellen Daten liefert, wird im Allgemeinen als Prozess verstanden. Um eine Identifikation theoretisch analysieren zu können, ist es nötig, Annahmen über die Daten einzuführen. In solchen Fällen benutzt man das Wort „System“, um eine mathematische Beschreibung des Prozesses zu kennzeichnen. In der Praxis, bei der Benutzung realer Daten, ist das System unbekannt und kann sogar eine Idealisierung sein. Benutzt man simulierte Daten, so ist das System nicht nur bekannt, sondern wird direkt für die Erzeugung der Daten verwendet. Zu bemerken ist ferner, dass für die Anwendung

⁴ Eine Zwischenform von theoretischer und experimenteller Modellbildung liefern Gray-Box-Modelle. Hierbei liegt ein theoretisches Modell mit teilweise unbekanntem physikalischen Parametern zugrunde. Diese werden dann experimentell anhand der Eingangs- und Ausgangssignale ermittelt. Dieses Vorgehen nutzt entsprechende A-priori-Kenntnisse über das zu identifizierende System bei der experimentellen Auswertung.

von Identifikationstechniken die Kenntnis des Systems nicht nötig ist. Das Systemkonzept wird daher verwandt, um die Güte eines Identifikationsverfahrens zu analysieren. Die *Definition des dynamischen Systems* findet sich in Unbehauen (2008) [S. 1]. Danach stellt ein dynamisches System eine Funktionseinheit zur Verarbeitung und Übertragung von Signalen dar, wobei die Systemeingangsgrößen als Ursache und die Systemausgangsgrößen als deren zeitliche Auswirkungen zueinander in Relation gebracht werden.

b) **Die Modellstruktur**

Man unterscheidet hierbei:

- *Nichtparametrische Modelle* - Diese basieren auf Kurvenverläufen (Sprungantworten, Impulsantworten, Frequenzgängen), Funktionen oder Tabellen, die Informationen über die charakteristischen Eigenschaften des Systems beinhalten.
- *Parametrische Modelle* - Das Modell wird durch einen Parametervektor θ charakterisiert. Ein konkretisiertes Modell entstammt dann der Menge aller Modelle derselben Struktur, die durch θ parametrisiert werden.

c) **Das Identifikationsverfahren**

In der Literatur wird eine große Anzahl von Methoden dargestellt. Mehrere Identifikationsverfahren können und sollen als verschiedene Versionen desselben Ansatzes angesehen werden, die mit verschiedenen Modellstrukturen korreliert sind. Dabei können die verschiedenen Versionen auch unter unterschiedlichen Namen bekannt sein.

d) **Die experimentellen Randbedingungen**

Im Allgemeinen beschreiben diese, wie die Identifikation ausgeführt wird. Dies beinhaltet die Auswahl und Erzeugung von Anregungssignalen, mögliche Rückführungen im Prozess, die Abtastrate, die Vorfilterung der Daten zwecks späterer Identifikation usw.

Von den vier genannten Faktoren ist das System als fest zu betrachten. Es ist in dem Sinne gegeben, als der Benutzer seine Eigenschaften nicht ändern kann. Die experimentellen Randbedingungen sind festgelegt, sobald die Daten aus dem Prozess ausgelesen werden. Häufig sind die experimentellen Randbedingungen bis zu einem gewissen Grad vom Benutzer beeinflussbar. Jedoch kann es Einschränkungen - Sicherheitserwägungen oder Erfordernisse eines „fast normalen“ Betriebes - geben, die die freie Wahl der experimentellen Randbedingungen verhindern. Sobald man die Daten aufgezeichnet hat, steht dem Benutzer die Wahl der Identifikationsmethode und Modellstruktur frei. Es kann erforderlich sein, mehrere Methoden und Strukturen zum Einsatz zu bringen, bis man für einen Datensatz ein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt. [Söderström und Stoica (1989), S. 9 f.]

In dieser Arbeit soll die Identifikation mit parametrischen Modellen betrachtet werden.

1.2.2 Parameteridentifikation in Echtzeit

Bei den Parameterschätzverfahren unterscheidet man rekursive Identifikationsmethoden, die auch Onlinemethoden genannt werden, und Offlinevarianten. Letztere werden ferner als Block-Methoden bezeichnet, bei denen die aufgezeichneten Datensätze komplett verarbeitet werden. [Ljung (1999); Söderström und Stoica (1989)]

Online- oder Echtzeit-Verfahren wie zum Beispiel der rekursive Least-Squares-Algorithmus (RLS) ermöglichen das Tracking zeitvariabler Parameter. Auch das Kalmanfilter (auf einem unendlichen Zeithorizont) ist im Zuge der Prädiktionsfehlerverfahren für die Parameteridentifika-

tion etabliert [Bohn und Unbehauen (2016), Cao und Schwartz (2003), Guo (1990)]. Ferner kommt das erweiterte Kalmanfilter (Extended Kalman filter/EKF) nach Simon (2006) bei der experimentellen Modellbildung zur Anwendung. Die rekursiven Verfahren zeichnen sich nach Söderström und Stoica (1989) [S. 320 ff.] u. a. durch folgende Punkte aus:

- Sie sind ein zentraler Bestandteil adaptiver Regelungssysteme [Åström und Wittenmark (2008), Ioannou und Sun (1996)]. Hierbei wird zu jedem Zeitpunkt ein aktuell geschätztes Modell verwendet, um die Regelparameter zu bestimmen. Damit hängt der Regler vom vergangenen Prozessverhalten ab. Bei Verwendung eines geeigneten Verfahrens passt sich der Regler dann an die veränderte Charakteristik der zu regelnden Strecke an. Wie man beispielsweise in Sonntag (2017) nachlesen kann, ist die Verwendung eines geeigneten Identifikationsverfahrens für die adaptive Regelung unentbehrlich, da bei fehlender Echtzeitfähigkeit der adaptive Regler in seiner Leistungsfähigkeit nachhaltig einschränkt wird.
- Zumal nicht alle Daten gespeichert werden müssen, haben die rekursiven Verfahren einen geringeren Speicherbedarf, der sich über die Zeit wenig oder überhaupt nicht ändert.
- Die rekursiven Identifikationsverfahren sind der erste Schritt zur Fehlerdiagnose, in dem sie eine deutliche Veränderung des Systemverhaltens aufzeigen [Ding (2013), Petković *et al.* (2012)]. Bei der Parameteridentifikation in Echtzeit kann eine solche Fehlerdiagnose auch genutzt werden, um den Identifikationsalgorithmus selbst entsprechend zu variieren.

1.3 Filter mit endlicher Impulsantwort

1.3.1 Allgemeines

Grundsätzlich kann man zwei verschiedene Arten von Filtern unterscheiden: nichtrekursive Filter mit endlicher Impulsantwort (Finite Impulse Response/FIR), auch Transversalfilter genannt, und Rekursivfilter mit unendlicher Impulsantwort (Infinite Impulse Response/IIR). Der Entwurf von FIR-Filtern im Frequenzbereich ist sehr häufig untersucht worden, da nichtrekursive Filter einige wichtige Eigenschaften besitzen [Schröder (1998), S. 309 f. und Hashimoto *et al.* (2003), S. 45 f.]:

- Ein streng linearer Phasengang kann leicht realisiert werden. Dieser bedeutet eine reine Signalverzögerung ohne Verzerrungen.
- Die Stabilität der FIR-Filter ist prinzipiell gegeben und es entfallen somit entsprechende Prüfungen.
- FIR-Filter können relative einfach mit vorgegebenen Eigenschaften im Frequenz- und Zeitbereich entworfen werden. „Fensterentwurfstechniken“ ermöglichen eine rasche übersichtliche Approximation mit vertretbaren (wenn auch nicht optimalen) Koeffizientenanzahlen.
- Steilflankige Filterfrequenzgänge erfordern größere Koeffizientenanzahlen, d.h. mehr Aufwand, als bei IIR-Filtern.
- Es existieren „schnelle“ Faltungsalgorithmen auf der Basis der schnellen Fourier-Transformation (FFT), die den FIR-Filteraufwand drastisch reduzieren können.

- FIR-Filter eignen sich gut für eine unmittelbare Umsetzung von Eigenschaften mit vorgeschriebenem Impuls- oder Sprungantwortverhalten.

1.3.2 Das FIR-Filter im Zustandsraum

Im Gegensatz zum Frequenzbereich ist die Anwendung von FIR-Filtern im Zustandsraum weniger verbreitet. Hier dominiert das Kalmanfilter (Kalman, 1960) mit seinen diversen Weiterentwicklungen und in vielseitigen Anwendungen. Es stellt ein Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR) dar und basiert auf allen Messungen, die vom initialen bis zum aktuellen Zeitpunkt vorliegen (Kwon und Han, 2005).

Ein FIR-Filter nutzt im Gegensatz dazu eine endliche Anzahl an Messungen auf dem aktuellsten Zeithorizont. Nach Kwon *et al.* (2002) sowie Shmaliy (2010) hat die FIR-Struktur folgende Vorteile gegenüber IIR-Filtern:

- Jazwinski (1970) sieht Filter mit begrenztem Speicher als einzige Möglichkeit, um Divergenz bei einer unbegrenzten Störung zu vermeiden.
- Kwon *et al.* (2002) betont die inhärente BIBO-Stabilität (bounded input/bounded output) und Robustheit gegenüber Rundungsfehlern.
- Ferner zeigt sich eine Unempfindlichkeit gegen temporäre Modellunsicherheiten (Jazwinski, 1970).

Jazwinski untersucht in seinem initialem Vorschlag mit zwei Kalmanfiltern und einem Prädiktor ein Filter mit begrenztem Speicher. Dabei erfolgt die Zustandsschätzung auf Basis eines „bewegten Fenster“ von N verrauschten Messungen (Jazwinski, 1968). Diverse Weiterentwicklungen führen auf die Ergebnisse von Bruckstein und Kailath (1985). Darin wird die beste lineare Schätzung eines Prozesssignals zum Zeitpunkt k basierend auf verrauschten Messungen von $k - N + 1$ bis k durch ein Filter mit begrenztem Speicher definiert. Ferner wird in dieser Arbeit auch Prozessrauschen in die Betrachtung einbezogen. Das Transversalfilter in Cioffi und Kailath (1985) ist dabei eng verwandt mit den Filtern mit begrenztem Speicher. Eine weitere Forschungsrichtung ist als Schätzung auf bewegtem Horizont (Moving-horizon estimation/MHE) bekannt. Darüber hinaus können FIR-Schätzer in vernetzten Systemen als „dual“ zur modellprädiktiven Regelung (Model Predictive Control/MPC) angesehen werden [Lunze (2013) und Abschnitt 1.1.3].

Filter mit endlicher Impulsantwort kommen ferner auch in der algebraischen Ableitungsschätzung zum Einsatz. Hierbei zeigen Reger und Jouffroy (2008, 2009), dass das algebraische Verfahren nach Fliess und Sira-Ramírez (2003) ein Sonderfall der Zustandsrekonstruktion mit Hilfe der Rekonstruierbarkeits-Gramschen ist. Die *Deadbeat*-Zustandsrekonstruktion liefert einen Schätzwert in endlicher Zeit und stellt ein FIR-Filter dar.

In Jouffroy und Reger (2015) wird auf Basis sogenannter Modulationsfunktionen ein Verfahren zur gleichzeitigen Schätzung von Parametern und Systemzuständen (auch bei nichtlinearen Systemen) vorgestellt. Die Methode der Modulationsfunktionen geht dabei auf Shinbrot (1957) zurück. Sie wird in einem deterministischen und zeitkontinuierlichen Rahmen verwendet. Die Parameterschätzungen gehen aus einem Integrationsprozess hervor und es werden keine (expliziten) zeitlichen Ableitungen von (verrauschten) Signalen benötigt. Die FIR-Struktur führt ferner zu einer Schätzung in endlicher Zeit.

Weitere Entwicklungen, die diese Methode zur Parameter- bzw. Zustandsschätzung nutzen, finden sich u. a. in Liu *et al.* (2014), Liu und Laleg-Kirati (2015) sowie Asiri *et al.* (2021).

Die Nutzung von FIR-Filtern in der Zustandsschätzung hat bis heute einige hervorzuhebende Ergebnisse erzielt. Das in Shmaliy (2011) entworfene erwartungstreue FIR-Filter (Unbiased FIR-Filter/UFIR) benötigt keine A-priori-Informationen. Es kommt ohne die Kenntnis der Rauscheigenschaften und ohne Anfangsbedingungen aus. Eine rekursive Variante begrenzt auch den gegenüber einem Kalmanfilter erhöhten Berechnungsaufwand. Durch die Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung (Mean Square Error/MSE) unter Einhaltung der Erwartungstreue wird in Kwon *et al.* (2002) ein Filter auf bewegtem Horizont entworfen, dessen Äquivalenz mit dem Kalmanfilter auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Kalman Filter/RHKF) nach Kwon *et al.* (1999) bewiesen wird. Ein Minimax-Schätzer mit FIR-Struktur wird in Han *et al.* (2002) vorgestellt. Ahn *et al.* (2016) nutzen verschiedene robuste Gütekriterien zur Generierung von FIR-Filtern in Blockform. Zhao *et al.* (2015a) zeigen, dass die Korrektur-Verstärkung des optimalen FIR-Filters (OFIR) der Kalmanverstärkung entspricht. Erstere benötigt dabei bestimmte Initialwerte. Ein Bayes-Ansatz auf endlichem Horizont zur Anwendung als FIR-Filter wird in Zhao *et al.* (2017a) vorgestellt und es wird gezeigt, dass der Maximum-Likelihood-FIR-Filter (ML-FIR) die Kalmanverstärkungen, korrigiert mit einem additiven Term, verwendet. Weitere Details zu den verschiedenen Ausführungen von FIR-Filtern im Zustandsraum (Zeitbereich) finden sich in Shmaliy *et al.* (2017) und der darin genannten Literatur.

1.4 Einordnung dieser Arbeit

1.4.1 Beschreibung der Aufgabenstellung

Durch den Vormarsch der NCS (Abschnitt 1.1) in nahezu allen Bereiche der Regelungstechnik, ist es entsprechend auch auf diesem Gebiet wichtig, eine experimentelle Modellbildung (Abschnitt 1.2) durchführen zu können. Insbesondere die Parameteridentifikation in Echtzeit (Abschnitt 1.2.2) als eine Form der „Regelung über Netzwerke“ ist für die Praxis relevant. Neben unerwünschten Totzeiten ist eine weitere wesentliche Einschränkung, die mit der Nutzung eines Netzwerks in einem Regelkreis einhergeht, der stochastische Datenverlust bei der Übertragung. Dessen Einfluss auf die Online-Identifikation von Modellparametern steht in dieser Arbeit im Mittelpunkt.

Abbildung 1.4 zeigt den schematischen Aufbau der grundsätzlichen Aufgabenstellung: Die Strecke ist durch ein zeitdiskretes lineares Eingrößensystem (Single-Input-Single-Output/SISO) gegeben. Die Abtastwerte des Systemausgangs y_k werden über ein (TCP-basiertes) Kommunikationsnetzwerk an den zur Systemidentifikation eingesetzten Parameterschätzer übertragen. Diese beinhalten ferner ein Messrauschen v_k . Das Anregungssignal u_k steht dem Schätzer direkt zur Verfügung. Hervorzuheben ist der Parameterprozess, der einen additiven Rauschanteil w_k enthält. Dieses Prozessrauschen bleibt bei vielen Arbeiten zur Parameteridentifikation außen vor. Eine Ausnahme bilden hier z. B. Ljung (1988) sowie Söderström und Stoica (1989)[, S. 325].

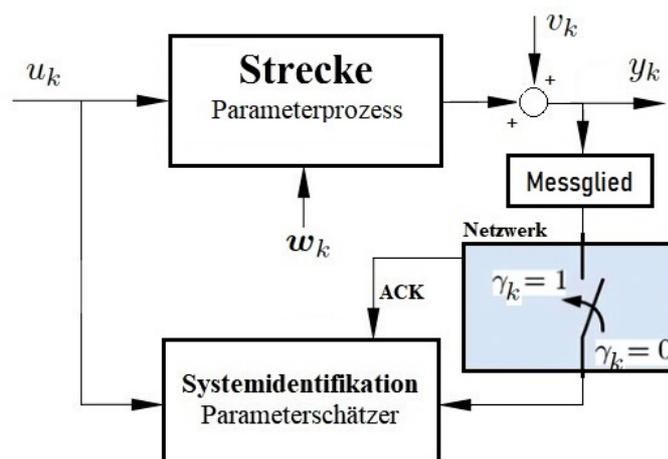


Abbildung 1.4: Parameterschätzung über ein (TCP-basiertes) Netzwerk mit Paketverlusten

1.4.2 Stand der Technik

Parameteridentifikation in Echtzeit auf Basis gängiger Schätzverfahren

Wie bereits im Abschnitt 1.2.2 erwähnt, können zeitvariable Parameter mit dem RLS-Algorithmus geschätzt werden. Auch das Kalmanfilter [Bohn und Unbehauen (2016), Cao und Schwartz (2003), Guo (1990)] und das EKF (Simon, 2006) kommen bei der Systemidentifikation zur Anwendung.

Ein FIR-Filter im Zeitbereich zur Parameteridentifikation wird in Hashimoto *et al.* (2003) auf S. 55 f. untersucht. Hierbei wird eine endliche Anzahl an Messungen auf dem aktuellsten Zeithorizont verwendet. Entsprechende Ansätze zur Schätzung von Parametern sind nicht neu; so werden z. B. in Cioffi und Kailath (1985) Transversalfilteralgorithmen auf Basis des rekursiven LS-Verfahrens beschrieben. In Söderström und Stoica (1989) sowie Young (2011) wird die Verwendung eines bewegten Horizonts als besonders geeignet zur Identifikation zeitvarianter Parameter herausgestellt, da dieser ein „Einschlafen des Schätzalgorithmus“ (Bohn und Unbehauen, 2016) verhindert. Auch Robertson *et al.* (1996) verweist darauf, LS-Verfahren auf bewegtem Horizont zur Parameteridentifikation einzusetzen.

Schätzverfahren bei Messungsverlusten

Bei fehlenden Messwerten können beispielsweise das RLS-Verfahren oder das Kalmanfilter nicht mehr direkt angewendet werden [Shi und Fang (2009), S. 538]. Bei den Lösungsansätzen zu diesem Problem, die relativ einfach realisierbar sind, unterscheidet man zwei Arten des Messungsverlusts:

- (I) **Regelmäßige Verluste:** In diesem Fall werden sogenannte „Dual“- bzw. „Multirate“-Verfahren verwendet (Ding und Chen, 2004*a,b*).
- (II) **Stochastische Verluste:** In Kommunikationsnetzwerken können Pakete nach einem zufälligen Muster verloren gehen. Zur Kompensation der verlorenen Messungen wird dann eine Prädiktion des Systemausgangs genutzt [Albertos *et al.* (1999); Shi und Fang (2009)]. Bei der Verwendung eines Kalmanfilters ist die Annahme üblich, dass die Varianz des Messrauschens im Falle eines Verlustes gegen unendlich geht. Damit wird bei einem Mes-

sungsverlust nur der Prädiktionsschritt zur Bestimmung des Schätzwertes ausgeführt (Sinopoli *et al.*, 2004).

Basierend auf der zweiten Art untersuchen Schenato (2006, 2008), Sinopoli *et al.* (2004) sowie Yang *et al.* (2018) Schätzungen des Systemzustands mit einem Kalmanfilter, bei dem Messwerte verloren gehen. Dabei liegt die Annahme zugrunde, dass der Sensor an der Regelstrecke einen einzelnen Abtastwert über das Netzwerk versendet und sich dabei ein potentieller Datenverlust einstellt. Shi und Fang (2009) zeigen einen Algorithmus zur Parameteridentifikation auf Basis des Kalmanfilters in einem Netzwerkkumfeld, in dem sowohl die Eingangs- als auch die Ausgangsgrößen stochastisch verloren gehen können. Auf die Verwendung von Parameterrauschen wird dabei verzichtet. Neben dem Nachweis der Konvergenzeigenschaften ihres Algorithmus liefern ihre Ausführungen in Verbindung mit der angegebenen Literatur eine gute Übersicht über die Verfahren zur Parameteridentifikation mit unvollständigen Daten. Kluge *et al.* (2010) übertragen die Ergebnisse von Sinopoli *et al.* (2004) auf nichtlineare Systeme.

Ein „intelligenter Sensor“ (Smart Sensor), der eine Zustandsschätzung lokal an der Regelstrecke ausführt und diese dann (über das verlustbehaftete Netzwerk) an einen sogenannten Remote-Schätzer versendet, wird z. B. in Hespanha *et al.* (2007), in Schenato (2006, 2008), im Übersichtsbuch von Lunze (2013) sowie bei Vazquez-Olguin *et al.* (2017) beschrieben. Letzterer zeigt dabei auch eine Möglichkeit, verlorene Messwerte bei der Zustandsschätzung mit einem FIR-Filter zu kompensieren. Uribe-Murcia *et al.* (2020) greift diese auf und nutzt die Methode der multiplen Imputation (MI) zur FIR-Zustandsschätzung über ein verlustbehaftetes Netzwerk. Ein anderer Ansatz zur Verwendung eines UFIR-Zustandsschätzers bei fehlenden Messungen wird in Ryu *et al.* (2020) beschrieben. Das darin verwendete Filter in Blockform prädiziert fehlende Messungen nicht, sondern es adaptiert diese bis zu einem Verlusthorizont (maximale Anzahl aufeinander folgender Messungsverluste), der geringer ist als die Horizontlänge des Filters, auf Basis der vergangenen erfolgreich übertragenen Messwerte des Systemausgangs. „Adaption“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die vorausgehende am Schätzer verfügbare Größe erneut verarbeitet wird. Beim Überschreiten des Verlusthorizonts ist das vorgeschlagene Verfahren nicht verwendbar. Im Rahmen der experimentellen Analyse der Schätzgüte wird deutlich, dass der in Ryu *et al.* (2020) vorgeschlagene Ansatz bei einer geringeren Verarbeitungszeit eine höhere Robustheit gegenüber Messungsverlusten und temporären Modellfehlern hat, wenn man ihn mit UFIR-Verfahren vergleicht, die eine Prädiktion des Systemausgangssignals verwenden [z. B. Vazquez-Olguin *et al.* (2017) oder Abschnitt 4.2].

1.4.3 Beitrag der Arbeit

Es werden FIR-Filter basierte Algorithmen zur Parameteridentifikation in Echtzeit bei Messungsverlusten untersucht. Dabei liegt ein Aufbau gemäß Abbildung 1.4 zugrunde. Die originären Beiträge dieser Arbeit gliedern sich im Einzelnen folgendermaßen:

a) **Entwurf von Algorithmen zur Parameteridentifikation in Echtzeit mit FIR-Struktur** (Abschnitt 3):

Zunächst wird ohne Berücksichtigung der Verwendung in einem Netzwerkkumfeld das Least-Squares-Verfahren (LS) auf bewegtem Horizont hergeleitet. Dieses entspricht einem erwartungstreuen Filter mit endlicher Impulsantwort (Unbiased Finite Impulse Response/**UFIR**) und wird in Shmaliy (2011) für eine Zustandsschätzung erläutert. Es kommt ohne die Kennt-

nis von Anfangsbedingungen und ohne A-priori-Informationen über das Parameter- und Messrauschen aus. Als Ergebnis erhält man eine suboptimale Schätzung. Durch eine Optimierung der Horizontlänge kann dennoch eine hohe Schätzungsgüte bei guter Robustheit erreicht werden. Da das UFIR-Verfahren keine A-priori-Informationen und keine Anfangsbedingungen benötigt, ist es für die praktische Anwendung von hoher Relevanz. Herauszustellen ist des Weiteren, dass eine neue ressourcenschonende rekursive UFIR-Variante entwickelt wird, die keine Verarbeitungen in Blockform nutzt und damit auch numerisch stabiler ist. Ferner werden zur Plausibilisierung und für Best-Case-/Worst-Case- Betrachtungen Schranken der Schätzungsgüte abgeleitet. Darüber hinaus erfolgt eine ausführliche Stabilitätsanalyse, die viele Autoren, die sich mit FIR-Zustandsschätzungen beschäftigen, häufig außer Acht lassen. Dabei liefert eine ebensolche Analyse auch wichtige Hinweise zur Bestimmung der optimalen Horizontlänge und beweist die erfolgreiche Übertragung der vornehmlich für zeitinvariante Systeme entwickelten UFIR-Ansätze auf die Parameteridentifikation.

b) **Co-Design-Ansatz auf Basis des UFIR-Algorithmus zur Parameteridentifikation über ein Netzwerk** (Abschnitt 4.1):

Bei der Verwendung des UFIR-Parameterschätzers in einem Netzwerkkumfeld gemäß Abbildung 1.4 erhöht sich die Komplexität des Entwurfs und der Analyse der Schätzungsgüte, wenn bei einem Paketverlust verlorene Messungen kompensiert werden müssen (Uribe-Murcia *et al.*, 2020, Vazquez-Olguin *et al.*, 2018). Um dies zu umgehen und die Vorteile der FIR-Struktur trotzdem für die Parameteridentifikation nutzen zu können, wird ein neuer Co-Design-Ansatz vorgeschlagen. Eine Messdatensequenz, die ein „intelligenter Sensor“ mit einem Puffer generiert, wird von der Strecke über das Netzwerk zum Parameterschätzer übertragen. Dieses arbeitet hierbei nach einem dem Transmission Control Protocol (TCP) vergleichbaren Schema, so dass eine Empfangsbestätigung (ACK) für die Datenpakete zur Verfügung steht. Eine Schätzung erfolgt nur dann, wenn ein neues Paket beim Schätzer eintrifft. Der Paketverlust wird dabei mit einem Bernoulli-Prozess modelliert. Dessen Einfluss auf die Schätzungsgüte wird untersucht sowie Konvergenz- und Stabilitätsbetrachtungen abgeleitet. Diese Ergebnisse wurden bereits in Siegl und Svaricek (2020) veröffentlicht.

c) **Der UFIR-Parameterschätzer mit multiplen Imputationen bei Messungsverlusten** (Abschnitt 4.2):

Der oben genannte Co-Design-Ansatz erfordert keine Anpassungen des Schätzalgorithmus. Liegt wie beispielsweise in Schenato (2006, 2008), Shi und Fang (2009), Sinopoli *et al.* (2004) sowie Yang *et al.* (2018) jedoch die Annahme zugrunde, dass der Sensor an der Regelstrecke nur einen einzelnen Abtastwert des Ausgangssignals über das Netzwerk versendet und sich dabei ein potentieller Datenverlust einstellt, dann muss der Schätzalgorithmus an das Kommunikationsnetzwerk (TCP) bzw. den Paketverlust (Bernoulli-Prozess) angepasst werden:

- Um die mathematische Beschreibung zu vereinfachen und den Einfluss der stochastischen Messungsverluste auf die Schätzverfahren selbst zu reduzieren, wird nach Ding und Chen (2004a) sowie Ding und Ding (2009) im Regressionsvektor das rauschfreie Ausgangssignal eines **Hilfsmodells** verwendet.
- Bei einem Paketverlust nimmt der Wert, der dem Schätzalgorithmus vorliegt, beliebige Werte an. Damit das UFIR-Filter für die Parameterschätzung verwendet werden kann, erfolgt die Kompensation der verlorenen Messungen mit Hilfe **multipler Imputati-**

on. Diese Methode aus der Statistik geht auf Rubin (1978) zurück. Dabei wird jeder fehlende Wert durch zwei oder mehrere Imputationen ersetzt, die auf diese Weise eine Wahrscheinlichkeitsverteilung repräsentieren. Um dieses Vorgehen echtzeitfähig zu machen, erfolgt eine **Prädiktion des Systemausgangssignals** wie in Albertos *et al.* (1999) oder Uribe-Murcia *et al.* (2020).

- Sinopoli *et al.* (2004) stellen als Performance-Vorteil ihres Ansatzes bei der Verwendung eines Kalmanfilters die Verarbeitung der gesamten Ankunftssequenz gegenüber den Ansätzen von Nilsson *et al.* (1998) sowie Costa und Guerra (2002) heraus, die nur das Wissen über die letzte Ankunft verarbeiten. Der in diesem Abschnitt verwendete FIR-Parameterschätzer verarbeitet die Ankunftssequenz des aktuellsten Zeithorizonts und nutzt für diese auch einen **Speicher**.

Durch die Verwendung die Ausgangssignalprädiktion im Rahmen der Methode der multiplen Imputation (MI) wird somit der **MI-UFIR-Parameterschätzer** bei Messungsverlusten entwickelt. Eine Vorstufe ohne die MI bezeichnet Vazquez-Olguin *et al.* (2017) als prädiktiven UFIR-Schätzer. Eine Analyse der Schätzgüte des MI-UFIR-Verfahrens sowie Stabilitätsbetrachtungen werden für diesen Ansatz erstmals ausgeführt, insbesondere findet erstmalig eine theoretische Analyse der Schätzfehler des UFIR-Verfahrens bei fehlenden Messungen statt. Die ermittelten Ergebnisse dieses Abschnitts sind in Siegl und Svaricek (2021) zu finden.

1.5 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

- In **Abschnitt 2** werden das Identifikationsmodell sowie die Modellierung des Netzwerkverhaltens erläutert. Ferner werden Voraussetzungen und Randbedingungen der weiteren Betrachtung beschrieben.
- In **Abschnitt 3** wird der UFIR-Parameterschätzer unabhängig von der Verwendung in einem Netzwerk oder bei fehlenden Messungen hergeleitet und analysiert. Zunächst wird die Blockform des Schätzverfahrens beschrieben, um auf deren Basis eine rekursive Variante zu bestimmen, die den Berechnungsaufwand reduziert. Da hierbei weiterhin eine Startschätzung in Blockform zu Beginn des Horizontes nötig ist, wird zur weiteren Ressourcenschonung ein rekursiver UFIR-Parameterschätzer entwickelt, der diese Startschätzung nicht verwendet. Daran anschließend wird die Berechnung der Schätzfehlerkovarianzmatrix zur Bestimmung der Schätzgüte des Verfahrens in Blockform und als rekursive Variante hergeleitet. Mit einer oberen und unteren Schranke der UFIR-Schätzfehlerkovarianz lassen sich die Berechnungen zur Schätzgüte plausibilisieren und Best-Case-/Worst-Case-Analysen durchführen. Ausführungen zum einzigen Einstellparameter des UFIR-Schätzers, der optimalen Horizontlänge, und zur sogenannten „Deadbeat-Eigenschaft“ folgen. Ein Vergleich mit der Parameteridentifikation auf Basis des (Standard-)Kalmanfilters auf unendlichem Horizont soll die Vorteile des UFIR-Verfahrens bei praktischen Anwendungen verdeutlichen. Eine ausführliche Stabilitätsanalyse sowie ein numerisches Beispiel in Form einer Simulation beschließen diesen Abschnitt.
- Der Co-Design-Ansatz zur Parameteridentifikation über das Netzwerk auf Basis des UFIR-Algorithmus wird in **Abschnitt 4.1** beschrieben. Die Genauigkeit des neuen Ansatzes bei

dessen Verwendung mit dem beschriebenen Netzwerk wird untersucht. Hierzu werden obere und untere Schranken der Schätzfehlerkovarianz für den betrachteten Co-Design-Ansatz bestimmt. Es folgt eine Analyse der Stabilitätseigenschaften mit Hilfe eines Ersatzsystems für Schätzungen über das Netzwerk. An einem numerischen Beispiel werden abschließend die gewonnenen Erkenntnisse verdeutlicht.

- **Abschnitt 4.2** befasst sich mit einem phänomenologischen Ansatz zur Parameteridentifikation über das Netzwerk bei Messungsverlusten. Als wesentliches Ergebnis wird der MI-UFIR-Parameterschätzer entwickelt, der nicht auf die Verwendung eines „intelligenten Sensors“ angewiesen ist. Für diesen erfolgt eine Analyse der Schätzgüte und eine Untersuchung der Stabilitätseigenschaften. Bei letzterer wird sowohl die Stabilität des Schätzfehlers als auch die Stabilität der Prädiktion des Systemausgangssignals betrachtet. Die wesentlichen Eigenschaften und Defizite des MI-UFIR-Verfahrens werden erläutert. Ein numerisches Beispiel verdeutlicht abschließend die gewonnenen Erkenntnisse.
- Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick auf zukünftige Forschungsaktivitäten ist **Abschnitt 5** zu entnehmen. Insbesondere Lösungsansätze zur Verbesserung des MI-UFIR-Verfahrens werden aufgezeigt und können somit Grundlage für weitere Untersuchungen sein.

2 Problembeschreibung

Das Schema des untersuchten Problems einer Parameteridentifikation in einem TCP-basierten Netzwerkkumfeld lässt sich Abbildung 1.4 entnehmen. Im Folgenden wird dazu zunächst das verwendete Identifikationsmodell hergeleitet. Es folgt eine Erläuterung der Eigenschaften des Parameter- und Messrauschens. Ferner werden die Bedingungen zur Persistenz der Anregung und damit verbunden der vollständigen Beobachtbarkeit aufgezeigt. Abschließend werden das zwischen Systemausgang und Schätzer verwendete Kommunikationsmodell und der Verlustprozess beschrieben.

2.1 Das Parameteridentifikationsmodell

Das zeitdiskrete lineare dynamische (zeitinvariante) Eingrößensystem sei durch die Differenzgleichung

$$y_k + e_1 \cdot y_{k-1} + e_2 \cdot y_{k-2} + \dots + e_{n_E} \cdot y_{k-n_E} = b_0 \cdot u_k + b_1 \cdot u_{k-1} + b_2 \cdot u_{k-2} + \dots + b_{n_B} \cdot u_{k-n_B} \quad (2.1)$$

beschrieben. y_k bezeichnet dabei den Systemausgang und u_k den Systemeingang. Die Koeffizienten der Linearkombination der vergangenen Ausgangsabtastwerte lauten e_i . Die diskreten Eingangswerte werden mit b_j gewichtet. Eine übersichtlichere Darstellung liefert

$$y_k = - \sum_{i=1}^{n_E} e_i \cdot y_{k-i} + \sum_{j=0}^{n_B} b_j \cdot u_{k-j} . \quad (2.2)$$

Nach Einführung des Shift-Operators q folgt

$$(1 + e_1 q^{-1} + e_2 q^{-2} + \dots + e_{n_E} q^{-n_E}) y_k = (b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B}) u_k .$$

Mit den Polynomen

$$\begin{aligned} E(q^{-1}) &= 1 + e_1 q^{-1} + e_2 q^{-2} + \dots + e_{n_E} q^{-n_E} , \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ist auch die Schreibweise

$$E(q^{-1}) y_k = B(q^{-1}) u_k \quad (2.4)$$

üblich. Ferner kann man die folgende Übertragungsfunktion (im Zeitbereich)

$$G(q^{-1}) := \frac{B(q^{-1})}{E(q^{-1})} . \quad (2.5)$$

definieren. Der Regressionsvektor $\varphi_k \in \mathbb{R}^p$ und der Parametervektor $\theta \in \mathbb{R}^p$ ($p = n_E + n_B + 1$) werden mit

$$\varphi_k := \begin{bmatrix} -y_{k-1} & -y_{k-2} & \dots & -y_{k-n_E} \\ u_k & u_{k-1} & \dots & u_{k-n_B} \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

sowie

$$\boldsymbol{\theta} := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n_E} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n_B} \end{bmatrix}^T . \quad (2.7)$$

eingeführt. Damit lässt sich für Gleichung (2.2)

$$y_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}, \quad y_k \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

schreiben.

Der lineare zeitdiskrete Parameterprozess wird mit der Prädiktionsgleichung

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.9)$$

erfasst. Hierbei steht $\{\mathbf{w}_k\}$ ($\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$) für das Prozess-, Parameter- oder auch Systemrauschen. Nutzt man Gleichung (2.8) als Messgleichung und ergänzt diese um das Messrauschen $\{v_k\}$ ($v_k \in \mathbb{R}$), so erhält man für die Identifikation das lineare ARX-Modell („Autoregressive Model with Exogeneous Input“) [Bohn und Unbehauen (2016), S. 64]

$$y_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k . \quad (2.10)$$

Ein linear parameterabhängiges Modell, beschrieben durch die lineare Regression (2.10), und die Parametervariation (2.9) bilden die Zustandsraumdarstellung der Parameterschätzung [Bohn und Unbehauen (2016), S. 119]. Diese liegt den nachfolgenden Ausführungen zugrunde.

Anmerkung: Es sei an dieser Stelle explizit auf die Linearität des Prozesses und der Regression verwiesen. Diese ermöglicht es, die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der weißen Rauschprozesse (Abschnitt 2.1.1) zu erhalten.

2.1.1 Rauscheigenschaften

Die beiden Rauschprozesse $\{\mathbf{w}_k\}$ und $\{v_k\}$ seien mittelwertfrei, weiß und unkorreliert:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_k] &= \mathbf{0} \quad , \quad E[v_k] = 0 \quad , \quad E[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q} \cdot \delta_{ij} \quad , \\ E[v_i v_j] &= R \cdot \delta_{ij} \quad \text{und} \quad E[\mathbf{w}_i v_j] = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hierbei gilt für das Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

Mit $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ wird die (zeitinvariante) Kovarianzmatrix des Parameterrauschens $\{\mathbf{w}_k\}$ bezeichnet und $R \in \mathbb{R}$ steht für die (zeitinvariante) Varianz⁵ des Messrauschens $\{v_k\}$.

⁵ Da das Messrauschen durch die skalare Größe v_k erfasst wird, ist es auch üblich, die Varianz mit σ^2 zu bezeichnen. Die Verwendung von R soll bewusst einen Bezug zum Kalmanfilter herstellen.

2.1.2 Persistente Anregung (Uniforme vollständige Beobachtbarkeit)

Für die Systemidentifikation mit Parametermodellen muss das Eingangssignal persistent anregend sein. Nach Söderström und Stoica (1989) [S. 120], Guo (1990) [S. 141] sowie Cao und Schwartz (2003) [S. 765] ist die Regressionsvektorsequenz $\varphi_k \in \mathbb{R}^p$ persistent anregend in N_{pe} Schritten, wenn die positiven Konstanten a , b und $N_{pe} > 0$ existieren, so dass

$$\mathbf{0} < a\mathbf{I} \leq \sum_{i=k}^{k+N_{pe}} \varphi_i \varphi_i^T \leq b\mathbf{I} < \infty, \quad \forall k \quad (2.12)$$

gilt.⁶ Dies bedeutet, dass der Raum \mathbb{R}^p durch φ_k uniform in N_{pe} Schritten aufgespannt wird, wenn φ_k aus einer persistenten Anregung resultiert.

Jazwinski (1970) [S. 231 f.] definiert eine dem Regressionsmodell entsprechende Informationsmatrix folgendermaßen:

$$\mathfrak{S}_{k,1} = \sum_{i=1}^k \varphi_i R^{-1} \varphi_i^T. \quad (2.13)$$

Er nutzt diese zur Beschreibung der (hinsichtlich der Zeit) uniformen vollständigen Beobachtbarkeit. Selbige ist gegeben, wenn eine positive ganze Zahl N_{pe} sowie die positiven Konstanten α und β existieren, so dass

$$\mathbf{0} < \alpha\mathbf{I} \leq \mathfrak{S}_{k,k-N_{pe}} \leq \beta\mathbf{I} \quad (2.14)$$

für alle $k \geq N_{pe}$ gilt.

Anmerkung: Bei uniformer oder gleichmäßiger (vollständiger) Beobachtbarkeit ist es möglich, den Zustand des Systems zu irgendeinem Zeitpunkt momentan aus dem Systemausgang zu bestimmen. Die Beobachtbarkeit hängt also nicht vom Anfangszeitpunkt ab. [Freund (1971), S. 11]

2.2 Das Netzwerkmodell

Ein Netzwerk (vgl. Abschnitt 1.1) soll die Kommunikation zwischen System und Parameterschätzer sicherstellen. Die vom Messglied an der Regelstrecke erzeugten Daten werden damit paketbasiert versendet. Das Kommunikationsnetzwerk arbeitet nach einem dem Transmission Control Protocol (TCP) vergleichbaren Schema. Somit steht eine Empfangsbestätigung (ACK) für die erfolgreiche Übertragungen der Datenpakete zur Verfügung. Wie beispielsweise in Schemato (2006, 2008), Shi und Fang (2009), Sinopoli *et al.* (2004) sowie Yang *et al.* (2018) werden die stochastischen Paketverluste durch die *Kommunikationsvariable* γ_k erfasst:

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{bei Paketempfang} \\ 0 & \text{bei Paketverlust} \end{cases}.$$

$\{\gamma_k\}$ wird durch einen Bernoulli-Prozess beschrieben. Dies bedeutet, dass für die *Kommunikationsrate* $\gamma = E[\gamma_k]$ gilt. Der Paketempfang ist also ein zeitdiskreter stochastischer Prozess, der

⁶ Für zwei symmetrische Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} bedeutet $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$), dass $\mathbf{A} - \mathbf{B} > \mathbf{0}$ ($\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$) positiv definit (positiv semidefinit) ist.

durch eine Folge von unabhängigen Versuchen mit Bernoulli-Verteilung zum selben Parameter $\gamma \in [0, 1]$ gegeben ist.

Phänomene, die auf Netzwerktotzeiten zurückzuführen sind, wie z. B. vakante Abtastung und Vertauschung der Paketreihenfolge, bleiben hier unberücksichtigt. Eine Paketlaufzeit, die ein Abtastintervall überschreitet, führt zu einem Paketverlust.

Alle weiteren Netzwerkeinschränkungen, die unter der Rubrik „Regelung über Netzwerke“ in der Abbildung 1.3 benannt werden, sind für die weitere Betrachtung nicht relevant.

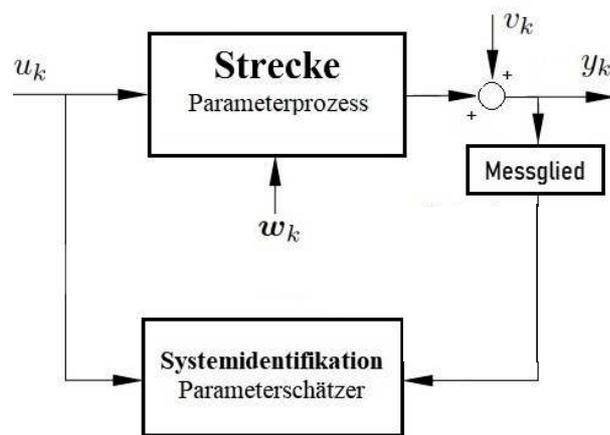


Abbildung 3.1: Parameterschätzung in Echtzeit

3 UFIR-Parameteridentifikation in Echtzeit

Beim UFIR-Parameterschätzer handelt es sich um ein LS-Verfahren auf bewegtem Horizont, das ohne die Kenntnis von Anfangsbedingungen und Rauscheigenschaften, also ohne A-priori-Information auskommt. In Gegenwart von Prozess- und Messrauschen erhält man eine suboptimale Schätzung. Die Aussagen dieses Kapitels erfolgen unabhängig von der Verwendung in einem Netzwerk oder bei fehlenden Messungen. Daher liegt den folgenden Ausführungen eine Konfiguration gemäß Abbildung 3.1 zugrunde.

Zunächst wird die Blockform des Schätzverfahrens beschrieben, um auf deren Basis eine rekursive Variante zu bestimmen, die den Berechnungsaufwand reduziert. Hierbei ist zu Beginn des Horizontes weiterhin eine Startschätzung in Blockform nötig. Zur weiteren Ressourcenschonung wird daher ein rekursiver UFIR-Parameterschätzer entwickelt, der diese Startschätzung nicht verwendet. Daran anschließend wird die Schätzfehlerkovarianzmatrix zur Bestimmung der Schätzgüte des Verfahrens in Blockform und als rekursive Variante hergeleitet. Eine obere und untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz werden für die UFIR-Parameterschätzung bestimmt. Damit lassen sich die Berechnungen zur Schätzgüte plausibilisieren und Best-Case-/Worst-Case-Analysen durchführen. Ausführungen zum einzigen Einstellparameter des UFIR-Schätzers, der optimalen Horizontlänge, und zur sogenannten „Deadbeat-Eigenschaft“ folgen. Ein Vergleich mit der Parameteridentifikation auf Basis des Kalmanfilters soll die Vorteile des UFIR-Verfahrens bei praktischen Anwendungen verdeutlichen. Eine ausführliche Stabilitätsanalyse sowie ein numerisches Beispiel in Form einer Simulation beschließen diesen Abschnitt.

3.1 Die Blockform des UFIR-Parameterschätzers

Erweitert man in Anlehnung an Shmaliy (2011) [S. 2466 f.] die Gleichungen (2.9) und (2.10) auf dem Horizont der Länge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k , dann ergeben sich, zeitlich vorwärts

betrachtet, folgende Lösungen für die Parametervariation:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_k &= \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \\
\boldsymbol{\theta}_{k-1} &= \boldsymbol{\theta}_{k-2} + \mathbf{w}_{k-2}, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\theta}_{m+2} &= \boldsymbol{\theta}_{m+1} + \mathbf{w}_{m+1}, \\
\boldsymbol{\theta}_{m+1} &= \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{w}_m, \\
\boldsymbol{\theta}_m &= \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{w}_{m-1}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Und für das lineare Regressionsmodell folgt:

$$\begin{aligned}
y_k &= \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k, \\
y_{k-1} &= \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T \boldsymbol{\theta}_{k-1} + v_{k-1}, \\
&\vdots \\
y_m &= \boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{\theta}_m + v_m.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Eine kompaktere Form liefern die folgenden Gleichungen:

$$\boldsymbol{\Theta}_{k,m} = \mathbf{A}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{B}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} \tag{3.3}$$

und

$$\mathbf{Y}_{k,m} = \boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{G}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} + \mathbf{V}_{k,m}. \tag{3.4}$$

Hierbei sind $\boldsymbol{\Theta}_{k,m} \in \mathbb{R}^{(p \cdot N)}$, $\mathbf{Y}_{k,m} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{W}_{k-1,m-1} \in \mathbb{R}^{(p \cdot N)}$ und $\mathbf{V}_{k,m} \in \mathbb{R}^N$ durch

$$\boldsymbol{\Theta}_{k,m} = [\boldsymbol{\theta}_k^T \quad \boldsymbol{\theta}_{k-1}^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_m^T]^T, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{Y}_{k,m} = [y_k \quad y_{k-1} \quad \cdots \quad y_m]^T, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{W}_{k-1,m-1} = [\mathbf{w}_{k-1}^T \quad \mathbf{w}_{k-2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{m-1}^T]^T \tag{3.7}$$

und

$$\mathbf{V}_{k,m} = [v_k \quad v_{k-1} \quad \cdots \quad v_m]^T \tag{3.8}$$

gegeben. Für $\mathbf{A}_{k,m} \in \mathbb{R}^{(p \cdot N) \times p}$, $\mathbf{B}_{k,m} \in \mathbb{R}^{(p \cdot N) \times (p \cdot N)}$, $\boldsymbol{\Phi}_{k,m} \in \mathbb{R}^{N \times p}$ und $\mathbf{G}_{k,m} \in \mathbb{R}^{N \times (p \cdot N)}$ gilt mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} (der Dimension $p \times p$)

$$\mathbf{A}_{k,m} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \cdots \quad \mathbf{I}]^T, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{B}_{k,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{k,m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_k^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_m^T \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{G}_{k,m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_k^T & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_k^T & \boldsymbol{\varphi}_k^T \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_m^T \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Anmerkung: Aus der letzten Gleichung in (3.1) geht hervor, dass zum initialen Zeitpunkt ($k = m$) folgender Zusammenhang gilt: $\boldsymbol{\theta}_m = \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{w}_{m-1}$. Dies ist nur eindeutig mit $\mathbf{w}_{m-1} = \mathbf{0}$. Der initiale Parametervektor $\boldsymbol{\theta}_m$ zu Beginn des Horizonts muss also a priori bekannt sein, oder a posteriori optimal geschätzt werden. [Shmaliy (2010), S. 3089]

Durch eine diskrete Faltung wird die Parameterschätzung $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ von $\boldsymbol{\theta}_k$ festgelegt:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{H}_{k,m} \mathbf{Y}_{k,m}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{H}_{k,m} (\boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{G}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} + \mathbf{V}_{k,m}). \quad (3.13)$$

Dabei ist $\mathbf{H}_{k,m}$ eine $p \times N$ -Verstärkungsmatrix. Für eine erwartungstreue Schätzung (3.12) bzw. (3.13) gilt:

$$E[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}] = E[\boldsymbol{\theta}_k].$$

Dies bedeutet, dass die mittelwertfreien Rauschmatrizen wegfallen und man erhält:

$$E[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}] = \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m. \quad (3.14)$$

Dabei steht $\bar{\mathbf{H}}_{k,m}$ für die Verstärkung des erwartungstreuen FIR-Filters. Aus der ersten Reihe von (3.3) ergibt sich ferner

$$E[\boldsymbol{\theta}_k] = \boldsymbol{\theta}_m. \quad (3.15)$$

Für eine erwartungstreue Schätzung muss demnach gelten

$$\bar{\mathbf{H}}_{k,m} \boldsymbol{\Phi}_{k,m} = \mathbf{I}. \quad (3.16)$$

Unter Berücksichtigung des Fehlens bzw. Außer-Acht-Lassens von A-priori-Informationen erhält man als Ergebnis für die Verstärkungsmatrix $\bar{\mathbf{H}}_{k,m}$ die Pseudoinverse von $\boldsymbol{\Phi}_{k,m}$,

$$\bar{\mathbf{H}}_{k,m} = (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T. \quad (3.17)$$

Beweis. Der Beweis wird über die Minimierung der Summe der kleinsten Fehlerquadrate nach Otto (1988) [S. 4 ff.] erbracht. Für den additiven Fehler aus Gleichung (3.4) soll gelten⁷:

$$\mathbf{D}_{k,m} := [d_k \ d_{k-1} \ \cdots \ d_m]^T = \mathbf{Y}_{k,m} - \boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.18)$$

⁷ Der Zeitindex k wird bei $\boldsymbol{\theta}$ aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

Über den wahren Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ und $\mathbf{D}_{k,m}$ seien keine A-priori-Informationen vorhanden. Als bester Schätzwert wird $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ angesehen, für den die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Dazu wird die Verlustfunktion

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=m}^k d_i^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D}_{k,m}^T \mathbf{D}_{k,m} = \frac{1}{2} \|\mathbf{D}_{k,m}\|^2 \quad (3.19)$$

eingeführt. Durch die Minimierung von $\phi(\boldsymbol{\theta})$ erhält man die Parameterschätzung auf dem Horizont:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \phi(\boldsymbol{\theta}).$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum ergibt sich mit Hilfe der ersten Ableitung:

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \left[-(\mathbf{Y}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^T - \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \mathbf{Y}_{k,m} + 2\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta} \right] = -\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \mathbf{Y}_{k,m} + \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.20)$$

Die zweite Ableitung wird für die hinreichende Bedingung benötigt:

$$\frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m}.$$

$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ ist die notwendige und $\frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} > \mathbf{0}$ die hinreichende Bedingung des betrachteten Minimierungsproblems. Wenn $N \geq p$ und Rang $\boldsymbol{\Phi}_{k,m} = p$ ist, folgt $\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m} > \mathbf{0}$. Ist also die Anregung persistent (vgl. Abschnitt 2.1.2), so ist $\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m}$ nicht singulär und die hinreichende Bedingung erfüllt. Mit $\frac{\partial \phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ und Gleichung (3.20) ergibt sich der Schätzwert des Parametervektors zu

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \mathbf{Y}_{k,m}. \quad (3.21)$$

Somit erhält man für die Verstärkungsmatrix $\bar{\mathbf{H}}_{k,m}$:

$$\bar{\mathbf{H}}_{k,m} = (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T.$$

□

Aufgrund der gegebenen Rauscheigenschaften (2.11) ist (auch) der additive Fehler mittelwertfrei ($E[\mathbf{D}_{k,m}] = \mathbf{0}$). Für den Fall der stochastischen Unabhängigkeit⁸ der Matrix $\boldsymbol{\Phi}_{k,m}$ und des Fehlers $\mathbf{D}_{k,m}$ ergibt sich damit eine erwartungstreue Schätzung:

$$\begin{aligned} E[\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}] &= E[(\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T (\boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}_{k,m})] \\ &= E[\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \mathbf{D}_{k,m}] \\ &= \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T E[\mathbf{D}_{k,m}] = \boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Eine Zusammenfassung der obigen Ausführungen und damit die Blockform des UFIR-Parameterschätzers liefert das folgende Theorem.

⁸ Bei einem ARX-Modell liegt beispielsweise keine stochastische Unabhängigkeit zwischen den Regressoren und der Störgröße vor. Die nicht vorhandene Exogenität führt zu einer fehlenden Erwartungstreue. Aus der dennoch vorhandenen kontemporären Exogenität folgt allerdings die Konsistenz der LS-Schätzung. [Bohn und Unbehauen (2016), S. 71 ff.]

Theorem 1. Gegeben sei das Identifikationsmodell nach (2.9) und (2.10) mit den mittelwertfreien unkorrelierten Rauschprozessen $\{\mathbf{w}_k\}$ ($\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$) und $\{v_k\}$ ($v_k \in \mathbb{R}$). Diese haben **beliebige Verteilungen und bekannte Kovarianzen**. Die Parameterschätzung durch das Block-UFIR-Filter auf dem Horizont $m = k - N + 1$ ($N \geq p$) bis k lautet dann bei persistenter Anregung

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{Y}_{k,m} = (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \mathbf{Y}_{k,m} \quad (3.22)$$

mit

$$\boldsymbol{\Phi}_{k,m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_k^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_m^T \end{bmatrix}$$

und dem Datenvektor $\mathbf{Y}_{k,m}$.

3.2 Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers

Die Lösung in Block-Form gemäß Theorem 1 ist berechnungstechnisch aufwendig, wenn $N \gg 1$ ist. Dieser Aufwand lässt sich mit einer rekursiven Variante reduzieren. Dazu wird zunächst in Gleichung (3.22) k durch eine rekursive Variable l ersetzt:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = (\boldsymbol{\Phi}_{l,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{l,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{l,m}^T \mathbf{Y}_{l,m} , \quad (3.23)$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \left[\sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} \left[\sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i y_i \right] . \quad (3.24)$$

Aus

$$\mathbf{M}_l^{-1} = \boldsymbol{\Phi}_{l,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{l,m} = \sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \quad (3.25)$$

und

$$\mathbf{M}_l^{-1} = \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \quad (3.26)$$

erhält man mit dem Matrixinversionslemma [Sherman-Morrison-Formel/Matrizenidentität nach Simon (2006), S. 11 f.]

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{M}_{l-1} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1}}{1 + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l} . \quad (3.27)$$

Dabei gilt $1 + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l \neq 0$. Die Gleichung (3.24) führt ferner auf

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} &= \mathbf{M}_l \left[\sum_{i=m}^{l-1} \boldsymbol{\varphi}_i y_i + \boldsymbol{\varphi}_l y_l \right] \\ &= \mathbf{M}_l \left[\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l y_l \right] \\ &= \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l (y_l - \boldsymbol{\varphi}_l^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1}) \end{aligned}$$

und es ergibt sich die **rekursive** Variante des UFIR-Parameterschätzers auf dem Horizont. Der nachfolgende Algorithmus fasst das Vorgehen zusammen.

Algorithmus 3.1 Rekursiver UFIR-Parameterschätzer

Gegeben:

- a) Identifikationsmodell nach (2.9) und (2.10)
- b) Rauscheigenschaften gemäß Gleichung (2.11)
- c) Theorem 1 mit $\Phi_{k,m}$ und $Y_{k,m}$
- d) Persistente Anregung (Abschnitt 2.1.2)
- e) Horizontlänge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k

Gesucht:

- a) Parameterschätzung $\bar{\theta}_{k|k}$ von θ_k

- 1: **begin**
- 2: **for** $k = N - 1 : \infty$ **do**
- 3: $m = k - N + 1$ und $s = m + p - 1$
- 4:

$$M_s = (\Phi_{s,m}^T \Phi_{s,m})^{-1} = \left[\sum_{i=m}^s \varphi_i \varphi_i^T \right]^{-1} \quad (3.28)$$

Hierbei ist $s = l - 1$ und l läuft von $\max(m + p, m + 2)$ bis k , so dass M_s existiert.

- 5: Bestimmung der *Startschätzung in Block-Form*

$$\bar{\theta}_{s|s} = M_s \Phi_{s,m}^T Y_{s,m} \quad (3.29)$$

- 6: **for** $l = s + 1 : k$ **do**
- 7: Bestimmung des *generalisierten Noise-Power-Gain* (GNPG) nach Shmaliy und Ibarra-Manzano (2011) [S. 208 ff.], Shmaliy und Simon (2013) [S. 4] sowie Shmaliy *et al.* (2017) [S. 75 ff.]

$$M_l = (M_{l-1}^{-1} + \varphi_l \varphi_l^T)^{-1} = M_{l-1} - \frac{M_{l-1} \varphi_l \varphi_l^T M_{l-1}}{1 + \varphi_l^T M_{l-1} \varphi_l} \quad (3.30)$$

- 8: Rekursive Bestimmung des Schätzwertes

$$\bar{\theta}_{l|l} = \bar{\theta}_{l-1|l-1} + M_l \varphi_l (y_l - \varphi_l^T \bar{\theta}_{l-1|l-1}) \quad (3.31)$$

- 9: **end for**
 - 10: Die *Parameterschätzung* folgt aus $\bar{\theta}_{k|k} = \bar{\theta}_{l|l}$ für $l = k$.
 - 11: **end for**
 - 12: **end**
-

Es lässt sich feststellen, dass die Startschätzung (3.29) für kleine p nur geringen Rechenaufwand benötigt. Es wird ferner deutlich, dass es sich um die **rekursive Form der Methode der kleinsten Quadrate** [rekursives LS-Verfahren, z. B. Söderström und Stoica (1989)] **auf dem**

Horizont handelt. Die Korrektur-Verstärkung $\mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l$ in Gleichung (3.31) hängt weder von den Anfangsbedingungen noch von den Rauscheigenschaften ab. Im Gegensatz zum Kalmanfilter, das die Kenntnis der Anfangsbedingungen und der Kovarianzen der (weißen) Rauschprozesse voraussetzt, benötigt das UFIR-Filter also beides nicht [Kim und Lee (2007), Shmaliy (2009)]. Stattdessen nutzt es eine **optimale Horizontlänge** N_{opt} , um die mittlere quadratische Abweichung (Schätzfehlerkovarianz) zu minimieren [Kim (2010), Shmaliy *et al.* (2008), Shmaliy (2010)]. Die rekursive Variante beginnt bei $m = k - N + 1$ und arbeitet sich zur Schätzung zum Zeitpunkt k vor. Der Algorithmus kann mit beliebigem Rauschen umgehen und ist daher einfach anzuwenden, obgleich der Rechenaufwand um das N -fache höher ist als beispielsweise beim (Standard-)Kalmanfilter.

3.3 Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers ohne Startschätzung

Wie Algorithmus 3.1 zu entnehmen ist, benötigt auch die rekursive Variante des UFIR-Verfahrens eine Startschätzung in Blockform. Dabei gilt

$$\mathbf{M}_s^{-1} = \boldsymbol{\Phi}_{s,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{s,m} > \mathbf{0} .$$

Die Anzahl der verwendeten Messungen muss dazu größer oder gleich p sein, so dass $\text{Rang } \boldsymbol{\Phi}_{s,m} = p$ ist. Mit den Messungen von m bis s ($\mathbf{Y}_{s,m}$) ergibt sich die Startschätzung aus

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{s|s} = \mathbf{M}_s \boldsymbol{\Phi}_{s,m}^T \mathbf{Y}_{s,m} .$$

Um nun den erhöhten Rechenaufwand der Startschätzung in Blockform zu vermeiden und numerische Instabilitäten bei der Matrizeninversion zu umgehen, bietet sich ein Vorgehen analog Kwon *et al.* (1999) [S. 1788 f.] an, das vollständig auf diese verzichtet (Es wird entsprechend auch im Anhang A.3 beschrieben.):

Betrachtet man die Blockform des GNPG

$$\mathbf{M}_{k(m)} = (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} = \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} , \quad (3.32)$$

so zeigt sich, dass $\mathbf{M}_{m-1(m)}^{-1}$ durch eine **leere Summe** [Heuser (2000), S. 90 f.] gegeben ist

$$\mathbf{M}_{m-1}^{-1} = \sum_{i=m}^{m-1} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T = \mathbf{0} . \quad (3.33)$$

Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers nach Gleichung (3.31) lässt sich mit (3.30) folgendermaßen umformen;

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} &= \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l (y_l - \boldsymbol{\varphi}_l^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l y_l \\ &= \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l y_l . \end{aligned}$$

Mit der Definition $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{l|l} := \mathbf{M}_l^{-1} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}$ erhält man daraus:

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_{l|l} = \bar{\boldsymbol{\xi}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l y_l . \quad (3.34)$$

Für den Anfangswert des Horizonts gilt dabei $\bar{\xi}_{m-1|m-1} = \mathbf{M}_{m-1}^{-1} \bar{\theta}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$.

Das rekursive UFIR-Verfahren ohne Startschätzung ist im nachfolgenden Algorithmus zusammengefasst.

Algorithmus 3.2 Rekursiver UFIR-Parameterschätzer ohne Startschätzung

Gegeben:

- a) Identifikationsmodell nach (2.9) und (2.10)
- b) Rauscheigenschaften gemäß Gleichung (2.11)
- c) Theorem 1 mit $\Phi_{k,m}$ und $\mathbf{Y}_{k,m}$
- d) Persistente Anregung (Abschnitt 2.1.2)
- e) Horizontlänge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k

Gesucht:

- a) Parameterschätzung $\bar{\theta}_{k|k}$ von θ_k

1: **begin**

2: **for** $k = N - 1 : \infty$ **do**

3: $m = k - N + 1$

4: *Initialisierung* der Anfangsbedingung des Horizonts:

$$\bar{\xi}_{l-1|l-1} = \bar{\xi}_{m-1|m-1} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_{l-1}^{-1} = \mathbf{M}_{m-1}^{-1} = \mathbf{0}$$

5: **for** $l = m : k$ **do**

6: Rekursive Bestimmung von $\bar{\xi}_{k|k}$ und \mathbf{M}_k :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{l|l} &= \bar{\xi}_{l-1|l-1} + \varphi_l y_l \\ \mathbf{M}_l^{-1} &= \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + \varphi_l \varphi_l^T \end{aligned} \quad (3.35)$$

7: **end for**

8: $\bar{\xi}_{k|k} = \bar{\xi}_{l|l}$ (für $l = k$)

9: $\mathbf{M}_k^{-1} = \mathbf{M}_l^{-1}$ (für $l = k$)

10: Die *Parameterschätzung* folgt aus

$$\bar{\theta}_{k|k} = \mathbf{M}_k \bar{\xi}_{k|k}. \quad (3.36)$$

11: Das *generalisierte Noise-Power-Gain* (GNPG/\mathbf{M}_k) ergibt sich durch Inversion.

12: **end for**

13: **end**

Das Vorgehen in Algorithmus 3.2 wird in Abbildung 3.2 näher erläutert.

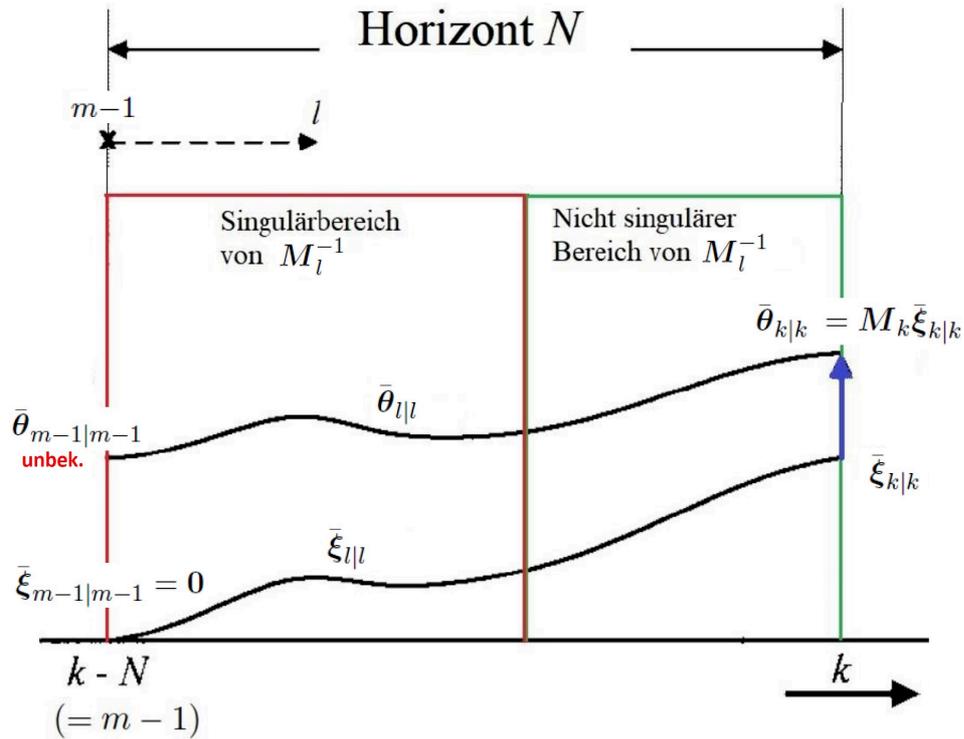


Abbildung 3.2: Rekursiver UFIR-Parameterschätzer ohne Startschätzung

3.4 Schätzfehler und Schätzfehlerkovarianz

Für den Schätzfehler einer Parameterschätzung soll im Folgenden

$$\epsilon_k := \theta_k - \tilde{\theta}_{k|k} \quad (3.37)$$

gelten. Für die mittlere quadratische Abweichung (Mean Square Error/MSE) ergibt sich nach Simon (2006) [S. 85]

$$J_k := E[\epsilon_k^T \epsilon_k] = E[\text{tr}\{\epsilon_k \epsilon_k^T\}] = \text{tr}\{P_{k|k}\}. \quad (3.38)$$

Und die Schätzfehlerkovarianzmatrix ist durch $P_{k|k} = E[\epsilon_k \epsilon_k^T]$ gegeben.

3.4.1 Schätzfehlerkovarianz des UFIR-Parameterschätzers in Blockform

In Blockform lässt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix des UFIR-Parameterschätzers nach folgenden Lemmata bestimmen.

Lemma 1. Für den UFIR-Parameterschätzer, beschrieben durch die Gleichungen (3.28) bis (3.31), ergibt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix zu

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k|k} &= E[\epsilon_k \epsilon_k^T] \\ &= M_{k,m} \left[\sum_{j=m}^{k-1} \left(\sum_{i=m}^j \varphi_i \varphi_i^T \right) Q \left(\sum_{i=m}^j \varphi_i \varphi_i^T \right) \right] M_{k,m} + R \cdot M_{k,m}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Beweis. Mit der Blockform nach Gleichung (3.22)

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i y_i \right]. \quad (3.40)$$

und der Festlegung des GNPG auf dem Horizont

$$\mathbf{M}_{k,m} := \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} = \frac{1}{R} \cdot \mathfrak{S}_{k,m}^{-1} \quad (3.41)$$

folgt

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{M}_{k,m} \cdot \sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i y_i. \quad (3.42)$$

Für $y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\theta}_i + v_i$ erhält man mit $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_k - \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j$:

$$y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\theta}_k + v_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j. \quad (3.43)$$

Aus Gleichung (3.42) folgt dann:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{M}_{k,m} \sum_{i=m}^k (\boldsymbol{\varphi}_i v_i - \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j). \quad (3.44)$$

Und der Schätzfehler ergibt sich zu

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \boldsymbol{\theta}_k - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{M}_{k,m} \sum_{i=m}^k (\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j - \boldsymbol{\varphi}_i v_i). \quad (3.45)$$

Nach einigen Umformungen und unter Berücksichtigung der Rauscheigenschaften nach Gleichung (2.11) erhält man hieraus die Schätzfehlerkovarianzmatrix:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\ &= \mathbf{M}_{k,m} \left[\sum_{j=m}^{k-1} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right] \mathbf{M}_{k,m} + R \cdot \mathbf{M}_{k,m}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

[Vgl. auch Deyst und Price (1968), S. 703 sowie Deyst (1973), S. 562 f.] □

Alternativ lässt sich auch eine Blockform bestimmen, die auf den Gleichungen (3.3) bis (3.22) beruht (Shmaliy, 2010, 2011).

Lemma 2. Für den UFIR-Parameterschätzer nach Theorem 1, basierend auf den Gleichungen (3.3) und (3.4), ergibt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m}) \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m})^T + \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{H}}_{k,m}^T. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Hierbei ist $\bar{\mathbf{B}}_{k,m}$ die erste Reihe in $\mathbf{B}_{k,m}$ und es gilt

$$\bar{\mathbf{Q}} := E[\mathbf{W}_{k-1,m-1} \mathbf{W}_{k-1,m-1}^T] = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q}}_N) \quad (3.48)$$

sowie

$$\bar{\mathbf{R}} := E[\mathbf{V}_{k,m} \mathbf{V}_{k,m}^T] = \text{diag}(\underbrace{R, R, \dots, R}_N). \quad (3.49)$$

Beweis. Die erste Gleichung in (3.3) lautet mit $\bar{\mathbf{B}}_{k,m}$ als erste Reihe in $\mathbf{B}_{k,m}$:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_m + \bar{\mathbf{B}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1}. \quad (3.50)$$

In Kombination mit Gleichung (3.22) ergibt sich der Schätzfehler zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_k &= \boldsymbol{\theta}_k - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} \\ &= \boldsymbol{\theta}_m + \bar{\mathbf{B}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{Y}_{k,m}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.4) und (3.17), eingesetzt in den Subtrahenden, führen auf

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_k &= \boldsymbol{\theta}_m + \bar{\mathbf{B}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} \\ &\quad - (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T (\boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{G}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} + \mathbf{V}_{k,m}) \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m}) \mathbf{W}_{k-1,m-1} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{V}_{k,m}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für die Schätzfehlerkovarianzmatrix ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m}) E[\mathbf{W}_{k-1,m-1} \mathbf{W}_{k-1,m-1}^T] (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m})^T \\ &\quad + \bar{\mathbf{H}}_{k,m} E[\mathbf{V}_{k,m} \mathbf{V}_{k,m}^T] \bar{\mathbf{H}}_{k,m}^T \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m}) \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{G}_{k,m})^T + \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{H}}_{k,m}^T. \end{aligned}$$

□

3.4.2 Rekursive Berechnung der Schätzfehlerkovarianz des UFIR-Verfahrens

Nach Zhao *et al.* (2017b) [Theorem 1, S. 556] lässt sich die Schätzfehlerkovarianz mit Hilfe der Joseph-stabilisierten Version der Schätzfehlerkovarianz-Korrektorgleichung bestimmen. Das folgende Lemma fasst das Vorgehen zusammen:

Lemma 3. *Für den UFIR-Parameterschätzer, beschrieben durch die Gleichungen (3.28) bis (3.31), ergibt sich für den Startwert der Schätzfehlerkovarianzmatrix*

$$\bar{\mathbf{P}}_s = \mathbf{M}_{s,m} \left[\sum_{j=m}^{s-1} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right] \mathbf{M}_{s,m} + R \cdot \mathbf{M}_{s,m}. \quad (3.52)$$

Mit der Korrektur-Verstärkung und dem GNPG nach Gleichung (3.30)

$$\bar{\mathbf{K}}_l = \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \quad (3.53)$$

folgt die Schätzfehlerkovarianz rekursiv aus

$$\bar{\mathbf{P}}_l = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_l^- (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T. \quad (3.54)$$

Für die A-priori-Schätzfehlerkovarianz $\bar{\mathbf{P}}_l^- := \bar{\mathbf{P}}_{|l-1}$ gilt dabei

$$\bar{\mathbf{P}}_l^- = \bar{\mathbf{P}}_{l-1} + \mathbf{Q}. \quad (3.55)$$

$s = l - 1$ und l läuft von $\max(m + p, m + 2)$ bis k .

Beweis. Siehe Zhao *et al.* (2017b): Beweis zu Theorem 1 [S. 556]. \square

Eine untere Grenze kann ohne Prozessrauschen für den Fall $N \leq N_{opt}$ abgeschätzt werden. Sie folgt aus Gleichung (3.54), in dem man \mathbf{Q} unberücksichtigt lässt [Shmaliy und Simon (2013), S. 6]:

$$\mathbf{P}_l^{UG} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{P}_{l-1}^{UG} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T. \quad (3.56)$$

Hierbei wird der Anfangswert analog Lemma 3 ermittelt.

3.4.3 Optimierung des UFIR-Parameterschätzers

Die Berechnung der Schätzfehlerkovarianzmatrix lässt sich nach Uribe-Murcia *et al.* (2020) [S. 2158] in Anlehnung an das Kalmanfilter vereinfachen: Zufallsfehler werden vernachlässigbar, wenn $\mathbf{M}_{k,m}$ für große N gegen Null geht. Da dies von einem steigenden Fehleranteil durch das Parameterrauschen begleitet wird, muss $\mathbf{M}_{k,m}$ optimiert werden. Für eine optimale Horizontlänge N_{opt} (vgl. Abschnitt 3.5), ergibt sich dann $\mathbf{M}_{k,m}^{opt}$. Dieses kann mit $\bar{\mathbf{P}}_l^-$ verknüpft werden, wie nachfolgend gezeigt wird. Angenommen die Iterationen enden bei $l = k$ mit einem Minimum der mittleren quadratischen Abweichung [MSE/Gleichung (3.38)] auf $[m, k]$. Aus Gleichung (3.54) folgt dann mit $\mathbf{M}_{k,m} = \mathbf{M}_k$ und unter Berücksichtigung der Symmetrie:

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \bar{\mathbf{P}}_k^- - \bar{\mathbf{P}}_k^- \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_k^- + \mathbf{M}_k \boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_k^- \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{R}) \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M}_k. \quad (3.57)$$

Mit Hilfe von $\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T\}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}$, $\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{A}\mathbf{B}\}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B}^T$ und $\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{A}^T\}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B}$ wird die Spur $\text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_k\}$ hinsichtlich \mathbf{M}_k minimiert:

$$\frac{\partial \text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_k\}}{\partial \mathbf{M}_k} = -2\bar{\mathbf{P}}_k^- \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T + 2\mathbf{M}_k \boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_k^- \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{R}) \boldsymbol{\varphi}_k^T.$$

Setzt man diese Gleichung zu Null, erhält man für $\boldsymbol{\varphi}_k \neq \mathbf{0}$ die optimale Korrekturverstärkung für den UFIR-Schätzer:

$$\bar{\mathbf{K}}_k^{opt} = \mathbf{M}_k^{opt} \boldsymbol{\varphi}_k = \bar{\mathbf{P}}_k^- \boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_k^- \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{R})^{-1}. \quad (3.58)$$

Eingesetzt in den letzten Term von Gleichung (3.57), führt dies auf

$$\bar{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{M}_k^{opt} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T) \bar{\mathbf{P}}_k^- = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k^{opt} \boldsymbol{\varphi}_k^T) \bar{\mathbf{P}}_k^-. \quad (3.59)$$

Somit kann $\bar{\mathbf{P}}_k = \bar{\mathbf{P}}_{k|k}$ entsprechend des Kalmanfilters bestimmt werden. [Vgl. Simon (2006), S. 128 f.]

3.4.4 Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz bei UFIR-Schätzungen

In diesem Abschnitt werden für UFIR-Parameterschätzungen eine obere und untere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix bestimmt. Damit lassen sich die Berechnungen zur Schätzungsgüte plausibilisieren und Best-Case-/Worst-Case-Analysen durchführen. Die untere Schranke hat die Besonderheit, dass sie unabhängig von der Gramschen Beobachtbarkeits-/Steuerbarkeitsmatrix (vgl. Abschnitt 2.1.2) ist. Im Folgenden gilt

Annahme 1. *Es existiert ein $h \neq 0$ und $\underline{q}, \bar{q}, \underline{r} > 0$, so dass*

$$\begin{aligned} \varphi_k^T \varphi_k &\leq h^2 \\ \underline{q} \mathbf{I} &\leq \mathbf{Q} \leq \bar{q} \mathbf{I} \\ \underline{r} &\leq R \end{aligned} \tag{3.60}$$

ist.

Nach Li *et al.* (2018) [S. 310] ist dies für die Praxis angemessen.

3.4.4.1 Die untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz

In Anlehnung an Li *et al.* (2018) kann in Verbindung mit dem folgenden Lemma eine untere Schranke für die Schätzfehlerkovarianzmatrix bestimmt werden.

Lemma 4. *Mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ sowie $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ gilt*

$$\mathbf{A}^{-1} \geq (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \tag{3.61}$$

Beweis. Siehe Xiong *et al.* (2006) [S. 264 und Anhang A]. □

Das nachfolgende Theorem liefert dann die untere Schranke:

Theorem 2. *Bei einer UFIR-Parameterschätzung nach den Abschnitten 3.2 und 3.3 ergibt sich mit der Annahme 1 die folgende untere Schranke (S^u) der Schätzfehlerkovarianzmatrix:*

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k} \geq S^u \cdot \mathbf{I} \text{ mit } S^u = \left(\frac{1}{\underline{q}} + \frac{h^2}{\underline{r}} \right)^{-1}. \tag{3.62}$$

Sie ist zeitinvariant.

Beweis. Für eine minimalvariante Parameterschätzung (mit einem Kalmanfilter) gilt folgender Zusammenhang auf dem Horizont ($l \in [m, k]$)⁹:

$$\mathbf{P}_{l|l}^{-1} = \mathbf{P}_{l|l-1}^{-1} + \frac{1}{R} \varphi_l \varphi_l^T. \tag{3.63}$$

Aus $\mathbf{P}_{l|l-1} = \mathbf{P}_{l-1|l-1} + \mathbf{Q}$ folgt mit (3.61)

$$\mathbf{P}_{l|l-1}^{-1} \leq \mathbf{Q}^{-1}$$

⁹ Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier die Problematik, des Singulärbereichs von $\mathbf{P}_{l|l}^{-1}$ außer Acht gelassen, da es für die Abschätzung der Schranke nicht relevant ist.

und damit

$$\mathbf{P}_{l|l}^{-1} \leq \mathbf{Q}^{-1} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \leq \left(\frac{1}{\underline{q}} + \frac{h^2}{\underline{r}} \right) \mathbf{I}.$$

Es ergibt sich also die untere Schranke auf dem Horizont zu:

$$\mathbf{P}_{l|l} \geq \left(\frac{1}{\underline{q}} + \frac{h^2}{\underline{r}} \right)^{-1} \mathbf{I}. \quad (3.64)$$

Diese gilt entsprechend auch für $l = k$.

Da dieser Beweis der unteren Schranke auf einer minimalvarianten Parameterschätzung basiert, gilt er auch für den suboptimalen UFIR-Parameterschätzer. \square

3.4.4.2 Die obere Schranke der Schätzfehlerkovarianz

Das folgende Theorem liefert eine obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix:

Theorem 3. *Es gelte die Annahme 1. Bei einer UFIR-Parameterschätzung nach den Abschnitten 3.2 und 3.3 ergibt sich folgende obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix:*

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k} \leq S^o \cdot \mathbf{I} \text{ mit } S^o = \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{b^2}{a^2} (N-1) \bar{q} \right]. \quad (3.65)$$

Sie ist u. a. von der Horizontlänge N abhängig und zeitinvariant.

Beweis. Nach Jazwinski (1970) [S. 234 f.] erhält man eine obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix auf Basis einer suboptimalen (nichtminimalvarianten) Schätzung, die das Prozessrauschen ignoriert und auf den aktuellsten N Messungen beruht. Eine ebensolche Schätzung liefert der hier untersuchte UFIR-Parameterschätzer. Insofern wird im Folgenden für diesen eine obere Schranke bestimmt.

Die Schätzfehlerkovarianz ergibt sich gemäß Lemma 1 zu:

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k} = \mathbf{M}_{k,m} \left[\sum_{j=m}^{k-1} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right] \mathbf{M}_{k,m} + R \cdot \mathbf{M}_{k,m}.$$

Diese lässt sich nach Deyst und Price (1968) [S. 703] sowie Deyst (1973) [S. 562 f.] in Verbindung mit den Gleichungen (2.12) und (2.14) folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k} \leq \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{b^2}{a^2} (N-1) \bar{q} \right] \cdot \mathbf{I} = S^o \cdot \mathbf{I}. \quad (3.66)$$

\square

Anmerkung: Die obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix ist zeitinvariant, steigt aber proportional zur Horizontlänge N an.

3.5 Die optimale Horizontlänge

Die Horizontlänge N spielt als einziger Einstellparameter des UFIR-Parameterschätzers eine entscheidende Rolle. Sie muss optimiert werden, um die Schätzfehlerkovarianz zu minimieren und damit einen optimierten UFIR-Parameterschätzer zu generieren. Bei der Wahl dieses Einstellparameters gibt es einen Zielkonflikt. Wenn $N < N_{opt}$ ist, dann ist die Rauschunterdrückung ineffizient. Die Abweichung ist allerdings vernachlässigbar. Im umgekehrten Fall ($N > N_{opt}$) ist die Unterdrückung des Rauschens stark, aber die Abweichung durch das Parameterrauschen bestimmt die Schätzung. Obwohl eine mathematisch geschlossene Bestimmung von N_{opt} ein herausforderndes Problem ist, ist eine Abschätzung der optimalen Horizontlänge immer noch einfacher als R und Q für die Verwendung im Kalmanfilter zu ermitteln. [Shmaliy und Simon (2013), S. 11 f.]

Vorgehensweisen zur Bestimmung der optimalen Horizontlänge sind nachfolgend aufgeführt.

3.5.1 Bandbegrenzte Signale

In realen Anwendungen sind gemessene Signale kausal und bandbegrenzt mit einer maximalen Frequenz (f_{max}). Durch das Shannon-Theorem ist festgelegt, dass das maximale Abtastintervall, das Frequenzfaltung (Aliasing) verhindert, durch $T_A = \frac{1}{2f_{max}}$ gegeben ist. Normalerweise gilt für die Abtastzeit T : $T < T_A$ oder $T \ll T_A$. N_{opt} kann somit folgendermaßen bestimmt werden

$$N_{opt} = \left\lceil \frac{1}{2f_{max}T} + 1 \right\rceil. \quad (3.67)$$

Wenn $N > N_{opt}$ ist, verursacht die Frequenzfaltung eine Abweichung und wenn $N < N_{opt}$ ist, ist die Rauschunterdrückung ineffizient. [Shmaliy (2010), S. 3089 f.]

3.5.2 Die Festlegung von N_{opt}

Die allgemeine Abhängigkeit der Schätzfehlerkovarianz des UFIR-Verfahrens von der Horizontlänge zeigt Abbildung 3.3. Darin werden verschiedene Verhältnisse des Parameterrauschens zum Messrauschen, dargestellt durch σ_w^2/σ_v^2 , berücksichtigt. Die Abnahme der Höhe des Minimums ergibt sich aus der Durchschnittsbildung über N . Dadurch reduziert sich die Varianz des weißen Rauschens um den Faktor $\frac{1}{N}$. Die Dimension des Parametervektors p bildet die untere Grenze des Wertebereichs auf dem N_{opt} definiert ist. Ist das Messrauschen vernachlässigbar ($\sigma_w^2/\sigma_v^2 \gg 1$), dann wird keine Rauschunterdrückung benötigt und für die UFIR-Schätzung nutzt man $N_{opt} = p$. Im gegenteiligen Fall eines nahezu deterministischen Parameterverhaltens ($\sigma_w^2/\sigma_v^2 \approx 0$) werden lange Horizonte ($N_{opt} \gg 1$) zur Rauschunterdrückung verwendet. [Ramirez-Echeverria *et al.* (2014), S. 558]

Im Folgenden sind drei Methoden beschrieben, mit denen die Horizontlänge optimiert werden kann. Dabei nutzt man das UFIR-Schätzverfahren auf der gesamten Horizontlänge ($N = k + 1$) nach Abschnitt A.1 im Anhang.

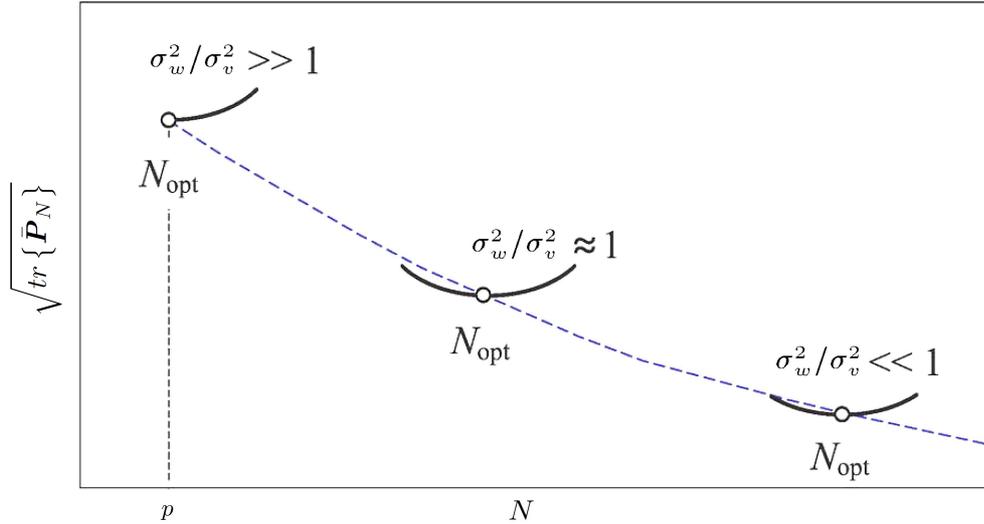


Abbildung 3.3: Verallgemeinerte Abhängigkeit der Schätzfehlerkovarianz von N und σ_w^2/σ_v^2 (Ramirez-Echeverria *et al.*, 2014)

- **Bekanntes Zustandsraummodell (Identifikationsmodell) und bekannte Rauscheigenschaften:**

Mit Hilfe von Lemma 3 ergibt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix¹⁰ des UFIR-Schätzverfahrens auf der gesamten Horizontlänge ($N = k + 1$) aus

$$\bar{\mathbf{P}}_k = E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T]. \quad (3.68)$$

Der Schätzfehler $\boldsymbol{\epsilon}_k = \boldsymbol{\theta}_k - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ ist dabei analog Gleichung (3.37) gegeben. Die so ermittelte **Schätzfehlerkovarianz** wird nun über k minimiert, um k_{opt} und damit $N_{opt} = k_{opt} + 1$ zu erhalten. Man kann entweder die Spur von $\bar{\mathbf{P}}_k$ [MSE nach Gleichung (3.38)] minimieren, wenn N_{opt} auf alle Parameterkomponenten angewendet werden soll oder nur das (ii) -te Element ($\bar{P}_{(ii)k}$) von $\bar{\mathbf{P}}_k$, das zum i -ten Parameter gehört.

$$N_{opt} = \arg \min_k (tr\{\bar{\mathbf{P}}_k\}) + 1 \quad (3.69)$$

oder

$$N_{i\ opt} = \arg \min_k (\bar{P}_{(ii)k}) + 1 \quad (3.70)$$

In Ramirez-Echeverria *et al.* (2014) [S. 558 f.] sowie Zhao *et al.* (2017b) [S. 557] und Zhao *et al.* (2018a) [S. 6395] wird gezeigt, dass mit zunehmendem k das erste Minimum nach (3.69) bzw. (3.70) für die Bestimmung von N_{opt} maßgeblich ist.

- **Unbekanntes Zustandsraummodell (Identifikationsmodell) und unbekanntes Rauscheigenschaften:**

Dies ist in der Praxis häufiger der Fall. Die optimale Horizontlänge N_{opt} kann dann mit

¹⁰ Anstelle der Bezeichnung $\bar{\mathbf{P}}_{k|k}$ wird hier zur Vereinfachung $\bar{\mathbf{P}}_k$ verwendet.

Hilfe der **Prädiktionsfehlerkovarianz** des UFIR-Schätzverfahrens auf der gesamten Horizontlänge ($N = k + 1$) abgeschätzt werden.

$$V_k^y = E[(y_k - \varphi_k^T \bar{\theta}_{k|k})^2] \quad (3.71)$$

y_k und $\bar{\theta}_{k|k}$ sind bekannte Größen und damit kann nach Shmaliy und Simon (2013) [S. 11 f.] sowie Ramirez-Echeverria *et al.* (2014) [S. 559] die Abschätzung \hat{N}_{opt} von N_{opt} mittels

$$\hat{N}_{opt} \approx \arg \min_k \left(\frac{\partial}{\partial k} V_k^y \right) + 1 \quad (3.72)$$

gefunden werden. Die Minimierung über k beginnt mit $p - 1$ und läuft bis zum ersten Minimum. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, sollte die Erwartungswertbildung mit einer ausreichenden Anzahl von Messungen und gegebenenfalls eine Glättung erfolgen.

- **Nutzung der Korrektur-Verstärkung:**

Eine weitere Möglichkeit basiert auf der Korrektur-Verstärkung nach Gleichung (3.53) bzw. dem darin enthaltenen GNPG (3.30) und wird in Zhao *et al.* (2018a, 2017b) beschrieben. Das GNPG konvergiert mit zunehmender Horizontlänge gegen die Nullmatrix [Bohn und Unbehauen (2016), S. 92]:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} M_l = \mathbf{0} . \quad (3.73)$$

Ebenso verschwindet dann auch die Korrektur-Verstärkung $\bar{K}_l = M_l \varphi_l$ und führt so zu einer vollständigen Rauschunterdrückung. Dies ist jedoch verbunden mit einer wachsenden Abweichung durch das Parameterrauschen. N_{opt} kann ohne Kenntnis der Rauscheigenschaften mit Hilfe der Korrektur-Verstärkung des oben bereits erwähnten UFIR-Schätzverfahrens auf der gesamten Horizontlänge aus nachfolgender Bedingung ermittelt werden:

$$\Delta \bar{K}_l := |\bar{K}_l - \bar{K}_{l-1}| \leq \delta_N . \quad (3.74)$$

Hierbei ist $\bar{K}_l > \mathbf{0}$ und δ_N ein gegebener Schwellwert, der für die jeweilige Anwendung speziell festgelegt wird. [Zhao *et al.* (2017b), S. 557]

3.6 Ergänzende Punkte zum UFIR-Parameterschätzer

3.6.1 Das generalisierte Noise-Power-Gain (GNPG)

Nach Shmaliy und Simon (2013) [S. 4] sowie Shmaliy *et al.* (2017) [S. 75 ff.] ist die Rauschleistungsverstärkung (Noise Power Gain/NPG) ein Maß für die Unterdrückung des Messrauschen am Ausgang eines FIR-Filters. Das generalisierte Noise-Power-Gain (GNPG) wird ausgehend von (3.22) folgendermaßen für die UFIR-Parameterschätzung bestimmt:

$$M_{k(m)} = (\Phi_{k,m}^T \Phi_{k,m})^{-1} . \quad (3.75)$$

Damit ergibt sich die UFIR-Filter-Verstärkung zu

$$\bar{H}_{k,m} = M_{k(m)} \Phi_{k,m}^T , \quad (3.76)$$

was Gleichung (3.17) entspricht.

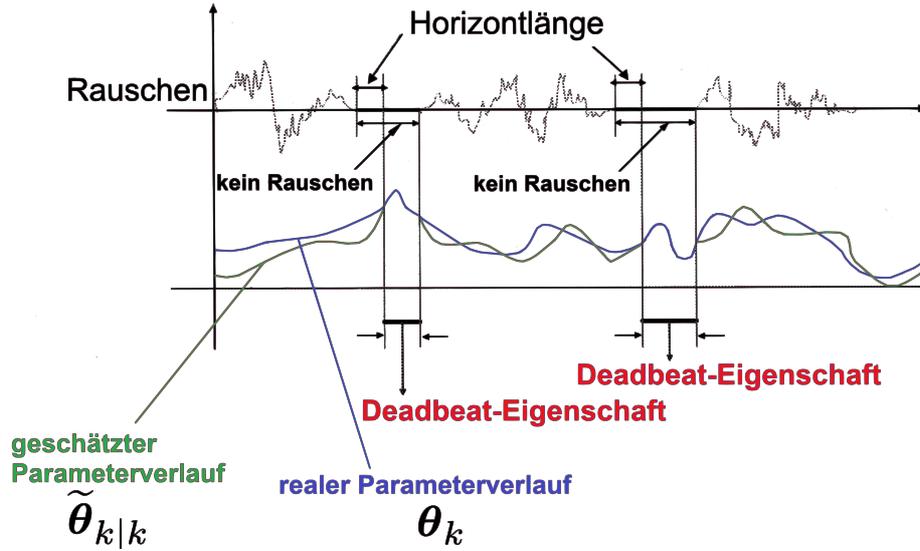


Abbildung 3.4: Die Deadbeat-Eigenschaft (Kwon und Han, 2005)

3.6.2 Die Deadbeat-Eigenschaft des UFIR-Parameterschätzers

Das oben beschriebene UFIR-Parameterschätzverfahren kann auch mit dem rauschfreien Identifikationsmodell

$$\begin{aligned}\theta_k &= \theta_{k-1} \\ y_k &= \varphi_k^T \theta_k\end{aligned}\tag{3.77}$$

verwendet werden. Aus Gleichung (3.4) folgt dann

$$\mathbf{Y}_{k,m} = \Phi_{k,m} \theta_m.\tag{3.78}$$

Lemma 5. Wenn die Anregung persistent ist und $N \geq p$, dann ist der UFIR-Parameterschätzer für die rauschfreie Regression (3.77) exakt. (**Deadbeat-Eigenschaft**)

Beweis. Aus der Blockform des UFIR-Parameterschätzers (3.22) folgt mit (3.77) und (3.78)

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{k|k} &= (\Phi_{k,m}^T \Phi_{k,m})^{-1} \Phi_{k,m}^T \mathbf{Y}_{k,m} \\ \bar{\theta}_{k|k} &= (\Phi_{k,m}^T \Phi_{k,m})^{-1} \Phi_{k,m}^T \Phi_{k,m} \theta_m \\ \bar{\theta}_{k|k} &= \theta_m = \theta_k.\end{aligned}\tag{3.79}$$

□

Anmerkung: Sofern (3.77) analog (2.9) und (2.10) verrauscht ist, kompensiert der UFIR-Parameterschätzer das Rauschen (suboptimal). Ist kein Rauschen vorhanden, dann liefert er die exakte Schätzung der Parameter (siehe Abbildung 3.4).

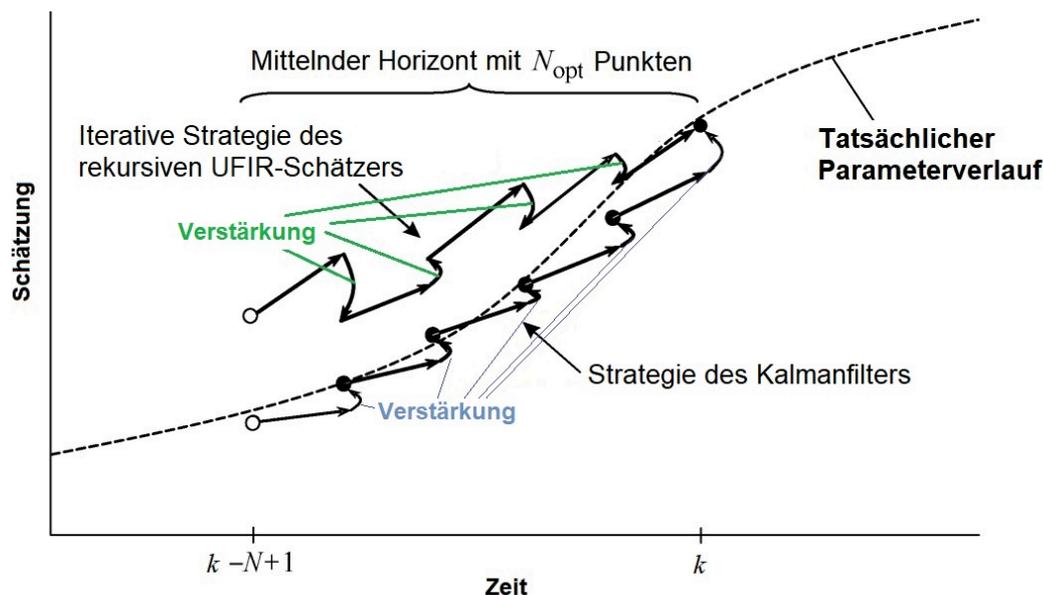


Abbildung 3.5: Vergleich der Ablaufstrategien von UFIR-Verfahren und Kalmanfilter (Shmaliy, 2011)

3.7 Vergleich des UFIR- mit dem Kalmanfilter

Ein guter Schätzer ist optimal, robust, universell und einfach. Wie das Kalmanfilter ist das UFIR-Filter ein universelles lineares Filter und einfach aufgebaut. Abbildung 3.5 zeigt einen Vergleich der Ablaufstrategien beider Verfahren zur Ermittlung einer Schätzung zum Zeitpunkt k . Nachfolgend soll die optimale Kalmanschätzung mit der erwartungstreuen des UFIR-Verfahrens verglichen werden. Dabei wird deutlich gemacht, dass das Kalmanfilter zwar in der Theorie der beste lineare Schätzer ist, aber in der Praxis das UFIR-Verfahren die besseren Resultate liefert.

a) Struktur

Das Kalmanfilter hat eine rekursive Struktur, in der die Rückkopplung eine entscheidende Rolle spielt. Es weist eine unendliche Impulsantwort (Infinite Impulse Response/IIR) auf. Das UFIR-Filter hingegen basiert auf einer Faltung und hat eine Eingangs-Ausgangs-Relation ohne Rückkopplung. [Shmaliy *et al.* (2017), S. 80]

b) Erwartungstreue und Optimalität

Erwartungstreue ist eine notwendige Bedingung einer guten Schätzung. Jedoch kann eine erwartungstreue Schätzung zusätzlich verrauscht sein, da die hinreichende Bedingung minimaler Varianz nicht angewendet wird. Die optimale Schätzung wird durch die Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung erzielt, um einen Kompromiss zwischen Abweichung und Varianz zu erreichen. Die Optimalität im Kalmanfilter resultiert in sehr konsistenten Ausgangswerten. Das UFIR-Filter hingegen liefert etwas andere und weniger präzise Schätzungen, wenngleich der Unterschied zwischen erwartungstreuer und optimaler Schätzung praktisch unbedeutend wird, wenn $N \gg 1$ ist. [Shmaliy *et al.* (2016), S. 239]

c) Parametermodell/Identifikationsmodell

Das Kalmanfilter kann nur auf stochastische Modelle angewendet werden. Wenn der Parameterverlauf deterministisch **und** kein Messrauschen vorhanden ist ($\mathbf{Q} = \mathbf{0} \wedge R = 0$), dann

kann das Kalmanfilter nicht arbeiten. Im Gegensatz dazu ist das UFIR-Verfahren sowohl auf stochastische als auch deterministische Identifikationsprobleme anwendbar, da das Filter die Rauscheigenschaften nicht verwendet und die sogenannte Deadbeat-Eigenschaft (Abschnitt 3.6.2) besitzt. [Shmaliy *et al.* (2016), S. 239 sowie Shmaliy *et al.* (2017), S. 81]

d) **Anfangsbedingungen**

Das UFIR-Filter benötigt keine Anfangsbedingungen und erzeugt die erste Schätzung bei $N - 1$. Dies ist gleichzeitig bekannt als „Tote-Zone-Problem“ [Pak *et al.* (2016), S. 1052], welches bei der Bestimmung der optimalen Horizontlänge in der Regel ignoriert wird. Das Kalmanfilter benötigt entsprechende Anfangswerte des Zustandsvektors/Parametervektors und der Schätzfehlerkovarianz zum Zeitpunkt $k = 0$ und aktualisiert diese bei jedem Zeitschritt. In der Theorie gibt es unter idealen Bedingungen keine Transienten im Kalmanfilter, aber in der Praxis können diese sogar länger dauern als beim UFIR-Verfahren. [Shmaliy *et al.* (2017), S. 81]

e) **Anforderungen an das Rauschen**

Eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Ableitung des Kalmanfilter als Bayes-Schätzer ist das Vorhandensein von gaußischem unkorreliertem Rauschen sowohl im Prozess als auch im Messsignal. Das Kalmanfilter ist auch beim Fehlen der Gaußannahme das optimale lineare Filter [Simon (2006), S. 130], allerdings müssen die Rauscheigenschaften exakt bekannt sein. Im Gegensatz dazu ist das UFIR-Verfahren nur darauf angewiesen, dass das Rauschen mittelwertfrei ist, um eine erwartungstreue Schätzung zu erzeugen. \mathbf{Q} und \mathbf{R} werden vom Kalmanfilter direkt benötigt, woran es in der praktischen Anwendung zumeist hapert. Somit ist das Kalmanfilter für diese Fälle nicht optimal. Das UFIR-Verfahren benötigt eine optimale Horizontlänge N_{opt} zur Minimierung der MSE, welche in der Regel einfacher bestimmt werden kann als die Rauscheigenschaften. [Shmaliy *et al.* (2016), S. 239 f. sowie Shmaliy *et al.* (2017), S. 81 ff.]

f) **Stabilität**

Nach Deyst und Price (1968), Jazwinski (1970) sowie Deyst (1973) ist das Kalmanfilter asymptotisch stabil. Wie in Abschnitt 3.8 gezeigt wird, ist das UFIR-Filter stabil im zweiten Moment. Das faltungsbasierte UFIR-Verfahren ist zusätzlich BIBO-stabil (bounded input/bounded output; Abschnitt 3.8.1). Für nichtlineare Systeme/Anwendungen können beide Filter jedoch auch instabil sein. [Shmaliy *et al.* (2016), S. 240 sowie Shmaliy *et al.* (2017), S. 84]

g) **Berechnungskomplexität und Berechnungszeit**

Hinsichtlich des Berechnungsaufwands hat das Kalmanfilter eine geringe Komplexität ($o(1)$) und ist somit ein schneller Schätzer. Das UFIR-Schätzverfahren auf der gesamten Horizontlänge (Abschnitt A.1 im Anhang) hat in rekursiver Form eine ebenso geringe Komplexität ($o(1)$) und ist damit genauso schnell wie das Kalmanfilter. Der iterative UFIR-Algorithmus hat eine mittlere Komplexität ($o(N)$). Also arbeitet dieser viel schneller als die Blockform, ist aber schlechter als das Kalmanfilter. Das UFIR-Verfahren in Blockform hat eine hohe Komplexität ($o(N^2)$) und ist typischerweise kein echtzeitfähiger Schätzer, wenn $N \gg 1$ ist. [Shmaliy *et al.* (2016), S. 240 sowie Shmaliy *et al.* (2017), S. 84]

h) **Speicherbedarf**

Der Speicherbedarf ist zumeist mit der Berechnungskomplexität korreliert. Das Block-UFIR-Verfahren, das N Messungen simultan verarbeitet, benötigt N^2 mehr Speicher als das Kal-

manfilter. Der iterative UFIR-Schätzer benötigt N -mal mehr und das UFIR-Schätzverfahren auf der gesamten Horizontlänge (Abschnitt A.1 im Anhang) ungefähr denselben Speicher wie das Kalmanfilter. [Shmaliy *et al.* (2016), S. 240 sowie Shmaliy *et al.* (2017), S. 84]

i) **Robustheit**

Es ist bekannt, dass das Kalmanfilter mehr Zufallsfehler erzeugt, wenn die Kalmanverstärkung einen optimalen Wert überschreitet. Im entgegengesetzten Fall erzeugt es mehr Fehler durch die Abweichung. Die Korrektur-Verstärkung wird nach Vazquez-Olguin *et al.* (2018) [S. 358 f.] am deutlichsten von drei Faktoren beeinflusst:

- Fehler in den Rauscheigenschaften,
- temporäre Fehler in der Prozessmodellierung und
- Fehler im Identifikationsmodell.

Daher wird im Folgenden die Robustheit von Kalmanfilter und UFIR-Verfahren hinsichtlich dieser Faktoren untersucht:

• **Robustheit gegen Fehler in den Rauscheigenschaften:**

Es ist augenscheinlich, dass im Kalmanfilter die Korrektur-Verstärkung direkt von den Rauscheigenschaften abhängig ist:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \cdot (\mathbf{R} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1}, \quad (3.80)$$

mit der A-Priori-Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}. \quad (3.81)$$

Entsprechende Abweichungen von \mathbf{Q} oder \mathbf{R} führen somit dazu, dass die tatsächlich verwendete Korrektur-Verstärkung entweder größer ist als die optimale nach Gleichung (3.80), was zu einer stärker verrauschten Schätzung führt, oder dass die genutzte Verstärkung kleiner ist. Dann dominieren die Abweichungsfehler. Fehler in \mathbf{Q} und \mathbf{R} können sich unter günstigen Bedingungen auch ganz oder teilweise kompensieren.

Das UFIR-Filter ist nicht von den Rauscheigenschaften (außer der Mittelwertfreiheit) abhängig, so dass sich entsprechende Fehler nicht auswirken. [Vazquez-Olguin *et al.* (2017), S. 1822 sowie Vazquez-Olguin *et al.* (2018), S. 358 f.]

• **Robustheit gegen temporäre Fehler in der Modellierung des Parameterprozesses:**

Der Effekt eines temporären Fehlers im Parameterprozess kann mit

$$\boldsymbol{\theta}_k = \chi \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}. \quad (3.82)$$

für $\chi \neq 1$ untersucht werden. χ hat dann mit

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \chi^2 \cdot \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q} \quad (3.83)$$

Einfluss auf die Kalmanverstärkung

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &\approx \chi^2 \cdot \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \cdot (\mathbf{R} + \chi^2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \cdot \left(\frac{1}{\chi^2} \mathbf{R} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.84)$$

und auf das GNPG bzw. die Korrektur-Verstärkung des UFIR-Filters (Shmaliy und Ibarra-Manzano (2011), Shmaliy (2011) und Abschnitt 3.6.1)

$$\bar{\mathbf{K}}_l = \mathbf{M}_l \cdot \boldsymbol{\varphi}_l = [\boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T + (\chi^2 \mathbf{M}_{l-1})^{-1}]^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_l = [\boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T + \frac{1}{\chi^2} \mathbf{M}_{l-1}^{-1}]^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_l. \quad (3.85)$$

Hieraus erkennt man, dass die Robustheit für beide Filter nahezu identisch von χ abhängig ist. Es ist aber wichtig anzumerken, dass Fehler in den Rauscheigenschaften beim Kalmanfilter mit den Prozessmodellfehlern kumulieren. [Vazquez-Olguin *et al.* (2018), S. 359 f.]

• **Robustheit gegen Fehler im Identifikationsmodell/Regressionsmodell:**

Das gewählte Identifikationsmodell bildet sich prominent im Regressionsvektor $\boldsymbol{\varphi}_k$ ab. Um potentielle Fehler an dieser Stelle zu untersuchen, wird $\boldsymbol{\varphi}_k$ durch $\mu \cdot \boldsymbol{\varphi}_k$ ersetzt, wobei $\mu = 1$ den fehlerfreien Fall darstellt. Für die Kalman-Verstärkung erhält man damit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mu \cdot \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k (R + \mu^2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \\ &= \frac{1}{\mu} \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \left(\frac{1}{\mu^2} R + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Für das GNPG ergibt sich

$$\mathbf{M}_l = [\mu^2 \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T + \mathbf{M}_{l-1}^{-1}]^{-1} = \frac{1}{\mu^2} [\boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T + \frac{1}{\mu^2} \mathbf{M}_{l-1}^{-1}]^{-1} \quad (3.87)$$

und die Korrekturverstärkung des UFIR-Filters lautet

$$\bar{\mathbf{K}}_l = \mu \cdot \mathbf{M}_l \cdot \boldsymbol{\varphi}_l = \frac{1}{\mu} [\boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T + \frac{1}{\mu^2} \mathbf{M}_{l-1}^{-1}]^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_l. \quad (3.88)$$

Hierbei erkennt man eine vergleichbare Robustheit, wobei der Effekt der Kumulation von Fehlern in den Rauschannahmen im Kalmanfilter verstärkt werden kann, was beim UFIR-Verfahren nicht der Fall ist [Vazquez-Olguin *et al.* (2018), S. 360]. Nach Shmaliy *et al.* (2018) [S. 3455 f.] kann auf die oben beschriebene Weise auch die Robustheit gegen das Fehlen von Messungen untersucht werden.

3.8 Stabilität und Konvergenzeigenschaften

In diesem Abschnitt sollen die Stabilität und Konvergenzeigenschaften des UFIR-Parameterschätzers untersucht werden. Hierbei wird auf die BIBO-Stabilität des Filters und die Stabilität des Schätzfehlers im zweiten Moment eingegangen. Zur späteren Verwendung wird zunächst in Anlehnung an Kozin (1969) die Stabilität im zweiten Moment analog Xu (2006) [S. 21 f.] definiert:

Definition 1. (Stabilität im zweiten Moment) Für einen zeitdiskreten Zufallsprozess \mathbf{x}_k gibt es ein $\delta > 0$, so dass initial $E[\|\mathbf{x}_0\|^2] < \delta$ gilt. Der Zufallsprozess \mathbf{x}_k ist stabil im zweiten Moment, wenn für ein $k_0 > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $k > k_0$

$$E[\|\mathbf{x}_k\|^2] < \varepsilon$$

gilt.

Ferner werden zum Nachweis der Stabilität der UFIR-Schätzungen die folgenden Lemmata benötigt:

Lemma 6. Für (3.30) und (3.31) gilt folgende Ungleichung:

$$\varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l \leq 1 \quad (3.89)$$

Beweis. Aus

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{M}_{l-1} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \varphi_l \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1}}{1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l}$$

folgt nach einfachen Umformungen

$$\varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l = \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l (1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l)^{-1}$$

und

$$1 - \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l = (1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l)^{-1} \geq 0.$$

□

Lemma 7. Für $\varphi_k \in \mathbb{R}^p$ und $r_l = \text{tr}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}$ gilt

$$\sum_{l=s}^{\infty} \frac{\varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l}{r_l^\varepsilon} < \infty \text{ a. s./fast sicher } \forall \varepsilon > 0. \quad (3.90)$$

Beweis. Aus

$$\mathbf{M}_{l-1}^{-1} = \mathbf{M}_l^{-1} - \varphi_l \varphi_l^T = \mathbf{M}_l^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_l \varphi_l \varphi_l^T)$$

folgt mit Lin und Sra (2014) [S. 2] und der Determinantenidentität nach Sylvester (Weinstein-Aronszajn)

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_{l-1}^{-1}| &\leq |\mathbf{M}_l^{-1}| \cdot |(\mathbf{I} - \mathbf{M}_l \varphi_l \varphi_l^T)| \\ &= |\mathbf{M}_l^{-1}| \cdot |(1 - \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l)| \\ &= |\mathbf{M}_l^{-1}| - |\mathbf{M}_l^{-1}| \cdot \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann

$$\frac{|\mathbf{M}_l^{-1}| - |\mathbf{M}_{l-1}^{-1}|}{|\mathbf{M}_l^{-1}|} \geq \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l.$$

Mit Hilfe der Relation $|\mathbf{M}_l^{-1}| \leq \lambda_{max}^p \{\mathbf{M}_l^{-1}\} \leq r_l^p$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{l=s+1}^{\infty} \frac{\varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l}{r_l^\varepsilon} &\leq \sum_{l=s+1}^{\infty} \frac{|\mathbf{M}_l^{-1}| \cdot |\mathbf{M}_{l-1}^{-1}|}{|\mathbf{M}_l^{-1}|^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} = \sum_{l=s+1}^{\infty} \frac{|\mathbf{M}_l^{-1}|}{|\mathbf{M}_{l-1}^{-1}|} \frac{dx}{|\mathbf{M}_l^{-1}|^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} \\
&\leq \sum_{l=s+1}^{\infty} \frac{|\mathbf{M}_l^{-1}|}{|\mathbf{M}_{l-1}^{-1}|} \int x^{-1-\frac{\varepsilon}{p}} dx = \frac{|\mathbf{M}_\infty^{-1}|}{|\mathbf{M}_s^{-1}|} \int x^{-1-\frac{\varepsilon}{p}} dx \\
&= -\frac{p}{\varepsilon} \cdot x^{-\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_{|\mathbf{M}_s^{-1}|}^{|\mathbf{M}_\infty^{-1}|} = \frac{p}{\varepsilon} \left(\frac{1}{|\mathbf{M}_s^{-1}|^{\frac{\varepsilon}{p}}} - \frac{1}{|\mathbf{M}_\infty^{-1}|^{\frac{\varepsilon}{p}}} \right) \\
&< \infty \quad \text{a. s./fast sicher}
\end{aligned}$$

Anmerkung: Dies gilt unter der Voraussetzung, dass das GNPG der Startschätzung \mathbf{M}_s groß, aber dennoch endlich ist. \square

3.8.1 BIBO-Stabilität

Da es sich bei dem Schätzalgorithmus um ein FIR-Filter handelt, weist dieses nach Kwon *et al.* (2002) sowie Shmaliy (2011) eine inhärente BIBO-Stabilität (bounded input/bounded output) auf.

Beweis. Aus der Blockform des UFIR-Schätzers nach den Gleichungen (3.22) bzw. (3.40) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}\| &= \left\| \sum_{i=m}^k \mathbf{M}_{k,m} \cdot \varphi_i y_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=m}^k \|\mathbf{M}_{k,m}\| \cdot \|\varphi_i\| \cdot \|y_i\|,
\end{aligned}$$

Mit $\|y_i\| \leq y_{max}$ und $\|u_i\| \leq u_{max} \forall k \geq 0$ ($y_{max}, u_{max} > 0$) folgt für das Modell in Abschnitt 2.1 die Abschätzung

$$\|\varphi_i\|^2 \leq n_E \cdot y_{max}^2 + (n_B + 1) \cdot u_{max}^2.$$

Unter Berücksichtigung einer persistenten Anregung (2.12) erhält man somit

$$\begin{aligned}
\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}\| &\leq \sum_{i=m}^k a^{-1} \cdot \|\varphi_i\| \cdot \|y_i\| \\
&\leq y_{max} \cdot a^{-1} \sum_{i=m}^k \|\varphi_i\|.
\end{aligned}$$

Alle FIR-Filter sind BIBO-stabil, da nur eine **endliche Anzahl** der Werte der Impulsantwort ungleich Null sind. Somit ist auch die letzte Ungleichung gültig. \square

3.8.2 Die Stabilität des UFIR-Parameterschätzers

Für den Schätzfehler auf dem Horizont von m bis k ergibt sich ausgehend von der Startschätzung bei $s = m + p - 1$ folgender Zusammenhang

$$\boldsymbol{\epsilon}_l = \boldsymbol{\theta}_l - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1} + (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{w}_{l-1} - \bar{\mathbf{K}}_l v_l. \quad (3.91)$$

a) Die Stabilität des homogenen Anteils des Schätzfehlers:

Zunächst wird die Stabilität des homogenen Anteils der Gleichung (3.91) analog Jazwinski (1970) [S. 234 ff.], Johnstone *et al.* (1982) [S. 79] sowie Zhang (2017) [S. 8 ff.] untersucht. Es gilt

$$\boldsymbol{\epsilon}_l^h = (\mathbf{I} - \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h = \mathbf{M}_l (\mathbf{M}_l^{-1} - \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h = \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h. \quad (3.92)$$

Als Lyapunov-Funktion wird

$$V_l^h := (\boldsymbol{\epsilon}_l^h)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^h \quad (3.93)$$

gewählt. Mit

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{M}_{l-1} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1}}{1 + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l} \Leftrightarrow \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T}{1 + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} V_l^h - V_{l-1}^h &= (\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h - (\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h \\ &= (\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h)^T (\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_l^{-1} - \mathbf{M}_{l-1}^{-1}) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h \\ &= (\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h)^T (\mathbf{M}_{l-1}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T}{1 + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l} - \mathbf{M}_{l-1}^{-1}) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h \\ &= -(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h)^T \frac{\boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T}{1 + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_{l-1} \boldsymbol{\varphi}_l} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^h \leq 0. \end{aligned}$$

$V_l^h \leq V_{l-1}^h \leq V_s = \boldsymbol{\epsilon}_s^T \mathbf{M}_s^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_s$ liefert mit Gleichung (2.12) schließlich:

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^h\|^2 \leq \frac{(\boldsymbol{\epsilon}_l^h)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^h}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}} \leq \frac{\lambda_{\max}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}} \|\boldsymbol{\epsilon}_s\|^2 = \frac{\lambda_{\max}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}}{a} \|\boldsymbol{\epsilon}_s\|^2 \quad (3.94)$$

Bei persistenter Anregung ist \mathbf{M}_l begrenzt und damit ist der homogene Anteil stabil.

b) Zerlegung des Schätzfehlers und der Schätzfehlerkovarianzmatrix:

Analog Markley und Carpenter (2009) [S. 235] sowie Simon (2006) [S. 314 f.] kann Gleichung (3.91) in folgende Bestandteile zerlegt werden:

$$\boldsymbol{\epsilon}_l = \boldsymbol{\epsilon}_l^v + \boldsymbol{\epsilon}_l^w. \quad (3.95)$$

Dabei gilt für den Anteil aus dem Messrauschen

$$\boldsymbol{\epsilon}_l^v = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v - \bar{\mathbf{K}}_l v_l, \quad \boldsymbol{\epsilon}_s^v = \boldsymbol{\epsilon}_s$$

und für den Bestandteil des Parameterrauschens

$$\boldsymbol{\epsilon}_l^w = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w + (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{w}_{l-1}, \boldsymbol{\epsilon}_s^w = \mathbf{0}.$$

Dem entsprechend lässt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix in Anteile aus dem Messrauschen und dem Parameterrauschen zerlegen

$$\bar{\mathbf{P}}_l = \bar{\mathbf{P}}_l^v + \bar{\mathbf{P}}_l^w, \quad (3.96)$$

mit

$$\bar{\mathbf{P}}_l^v = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^v (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l R \bar{\mathbf{K}}_l^T, \bar{\mathbf{P}}_s^v = \bar{\mathbf{P}}_s$$

und

$$\bar{\mathbf{P}}_l^w = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^w (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T, \bar{\mathbf{P}}_s^w = \mathbf{0}.$$

Ferner lässt sich für die Lyapunov-Funktion $V_l := \boldsymbol{\epsilon}_l^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l$ zeigen, dass deren Erwartungswert unter den Rauscheigenschaften nach (2.11) ebenfalls in zum Mess- und Parameterrauschen gehörige Anteile zerlegt werden kann.

Mit der Abkürzung $\tilde{z}_l := \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_l &= \boldsymbol{\epsilon}_l^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l \\ &= V_{l-1} - \|\tilde{z}_l\|^2 (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l) \\ &\quad - 2\tilde{z}_l v_l (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l) + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l v_l^2 \\ &\quad + 2\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{w}_{l-1} \\ &\quad + 2\mathbf{w}_{l-1}^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l (-\tilde{z}_l - v_l) \\ &\quad + \mathbf{w}_{l-1}^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{w}_{l-1}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Unter Beachtung von Lemma 6 folgt:

$$\begin{aligned} V_l &\leq V_{l-1} - 2\tilde{z}_l v_l (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l) + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l v_l^2 \\ &\quad + 2\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{w}_{l-1} \\ &\quad + 2\mathbf{w}_{l-1}^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l (-\tilde{z}_l - v_l) \\ &\quad + \text{tr}\{\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{w}_{l-1} \mathbf{w}_{l-1}^T\}. \end{aligned}$$

Bildet man den Erwartungswert und berücksichtigt, dass $\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}$ mit \mathbf{w}_{l-1} , \tilde{z}_l mit v_l , \tilde{z}_l mit \mathbf{w}_{l-1} und v_l mit \mathbf{w}_{l-1} unkorreliert sind, dann erhält man

$$E[V_l] \leq E[V_{l-1}] + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \cdot R + \text{tr}\{\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\}. \quad (3.98)$$

Durch die Zerlegung gemäß Gleichung (3.95) lässt sich schreiben

$$V_l = (\boldsymbol{\epsilon}_l^v + \boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \mathbf{M}_l^{-1} (\boldsymbol{\epsilon}_l^v + \boldsymbol{\epsilon}_l^w) = (\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v + 2(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^w + (\boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^w.$$

Beachtet man, dass ϵ_l^v und ϵ_l^w (auch zum Zeitpunkt s) nicht korreliert sind, so ergibt sich mit der Zerlegung des Schätzfehlers

$$\begin{aligned} E[(\epsilon_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \epsilon_l^v] &= E[(\epsilon_{l-1}^v)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^v] + \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l \cdot R, \\ E[(\epsilon_l^w)^T \mathbf{M}_l^{-1} \epsilon_l^w] &= E[(\epsilon_{l-1}^w)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^w] + \text{tr}\{\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\}. \end{aligned}$$

und

$$E[(\epsilon_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \epsilon_l^w] = 0.$$

Damit lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} E[V_l] &= E[(\epsilon_{l-1}^v)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^v - (\epsilon_{l-1}^v)^T \varphi_l \varphi_l^T \epsilon_{l-1}^v (1 - \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l)] + \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l \cdot R \\ &+ E[(\epsilon_{l-1}^w)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^w - (\epsilon_{l-1}^w)^T \varphi_l \varphi_l^T \epsilon_{l-1}^w (1 - \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l)] + \text{tr}\{\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\} \\ &= E[V_{l-1}^v] - E[(\epsilon_{l-1}^v)^T \varphi_l \varphi_l^T \epsilon_{l-1}^v (1 - \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l)] + \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l \cdot R \\ &+ E[V_{l-1}^w] - E[(\epsilon_{l-1}^w)^T \varphi_l \varphi_l^T \epsilon_{l-1}^w (1 - \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l)] + \text{tr}\{\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\} \\ &= E[V_l^v] + E[V_l^w]. \end{aligned}$$

Analog Gleichung (3.98) ergibt sich also für den Fehleranteil aus dem Messrauschen

$$E[V_l^v] \leq E[V_{l-1}^v] + \varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l \cdot R \quad (3.99)$$

und für den Anteil aus dem Parameterrauschen

$$E[V_l^w] \leq E[V_{l-1}^w] + \text{tr}\{\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\}. \quad (3.100)$$

c) **Konvergenz des Schätzfehleranteils aus dem Messrauschen:**

Zunächst soll wie in Liu und Ding (2013) für den Anteil des Messrauschens (V_l^v) gezeigt werden, dass dieser Fehleranteil im zweiten Moment gegen Null konvergiert:

Aus Gleichung (3.99) lässt sich mit $r_l = \text{tr}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}$ ein Martingal unter Voraussetzung einer gültigen σ -Algebra des Messrauschens definieren:

$$U_l := \frac{V_l^v}{r_l^d}, \quad 0 < d < 1.$$

Und es folgt:

$$E[U_l] \leq E[U_{l-1}] + \frac{\varphi_l^T \mathbf{M}_l \varphi_l}{r_l^d} \cdot R$$

Mit Hilfe von Lemma 7 und dem Doobschen Martingalkonvergenzsatz ergibt sich dann, dass U_l fast sicher gegen einen endlichen Wert konvergiert (U_∞):

$$U_l = \frac{V_l^v}{r_l^d} \rightarrow U_\infty, \quad \text{a. s./fast sicher}$$

oder

$$V_l^v = O(r_l^d). \quad (3.101)$$

Aus der Definition von V_l^v als quadratische Form folgt

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}\|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 \leq (\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}\|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2.$$

Somit gilt für den Fehleranteil aus dem Messrauschen

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 \leq \frac{(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}} = \frac{V_l^v}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}$$

und unter Beachtung von Gleichung (3.101)

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 = O\left(\frac{(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}\right) = O\left(\frac{r_l^d}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}\right). \quad (3.102)$$

Aus der Annahme einer persistenten Anregung nach Abschnitt 2.1.2 lässt sich in leichter Abwandlung folgender Zusammenhang bilden:

Es existieren positive Konstanten c_1 , c_2 und l_0 für

$$c_1 \cdot \mathbf{I} \leq \frac{1}{l} \sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \leq c_2 \cdot \mathbf{I}, \text{ a. s. } \forall l \geq l_0 \quad (3.103)$$

Hieraus erhält man mit dem in der Startschätzung verwendeten GNPG \mathbf{M}_s

$$c_1 \cdot l \cdot \mathbf{I} \leq \mathbf{M}_l^{-1} \leq c_2 \cdot l \cdot \mathbf{I} + \mathbf{M}_s^{-1}.$$

Ferner ist

$$r_l = \text{tr}\{\mathbf{M}_l^{-1}\} \leq p \cdot c_2 \cdot l + \text{tr}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}$$

und

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\} \geq c_1 \cdot l.$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 &= O\left(\frac{r_l^d}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}\right) = O\left(\frac{[p \cdot c_2 \cdot l + \text{tr}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}]^d}{c_1 \cdot l}\right) = O\left(\frac{1}{l^{1-d}}\right) \\ &\rightarrow 0 \text{ a. s., wenn } l \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Der Schätzfehleranteil aus dem Messrauschen konvergiert also für einen unendlichen Horizont gegen Null. Er ist nach Gleichung (3.104) eine konvexe Funktion über dem Horizont.

d) Untersuchung des Schätzfehleranteils aus dem Parameterrauschen:

Aus Gleichung (3.100) lassen sich nicht ohne Weiteres Aussagen über den Verlauf des Fehleranteils aus dem Parameterrauschen ableiten. Stattdessen soll die Schätzfehlerkovarianz

$$\bar{\mathbf{P}}_l = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)(\bar{\mathbf{P}}_{l-1} + \mathbf{Q})(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T.$$

bzw. die Zerlegung (3.96) analysiert werden. $\bar{\mathbf{P}}_l^w$ ist über $\text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_l^w\} = E[(\boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \boldsymbol{\epsilon}_l^w] = E[\|\boldsymbol{\epsilon}_l^w\|^2]$ mit dem entsprechenden Fehler im zweiten Moment verknüpft. Nach Gleichung (3.95) gilt zu Beginn des Horizonts: $\boldsymbol{\epsilon}_s^w = \mathbf{0}$.

Mit zunehmender Horizontlänge konvergiert das GNPG gegen die Nullmatrix [Bohn und Unbehauen (2016), S. 92],

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{M}_l = \mathbf{0} .$$

(Gemäß der Persistenz der Anregung nach Abschnitt 2.1.2 ist das GNPG nach unten allerdings beschränkt.) Ebenso verschwindet dann auch die Korrektur-Verstärkung $\bar{\mathbf{K}}_l = \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l$ und die Schätzfehlerkovarianzmatrix wird nur durch das Parameterrauschen bestimmt,

$$\bar{\mathbf{P}}_l = \bar{\mathbf{P}}_{l-1} + \mathbf{Q} .$$

Sie wächst mit zunehmender Horizontlänge über alle Grenzen. Die Komponente der Schätzfehlerkovarianz, die aus dem Messrauschen resultiert, bleibt konstant:

$$\bar{\mathbf{P}}_l^v = \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^v .$$

Dem gegenüber wächst $\bar{\mathbf{P}}_l^w$ entsprechend

$$\bar{\mathbf{P}}_l^w = \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^w + \mathbf{Q} .$$

Daraus lässt sich schließen, dass der Schätzfehleranteil aus dem Parameterrauschen divergiert;

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^w\|^2 \rightarrow \infty \text{ a. s., wenn } l \rightarrow \infty$$

Er läuft also von Null bis ∞ und wird nur durch die begrenzte Horizontlänge beschränkt. Aus der Betrachtung des Faktors

$$\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T = \mathbf{I} - \left[\sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T$$

erkennt man ferner, dass der Anstieg zu Beginn des Horizonts geringer ist, da der Subtrahend entsprechend größer ist. Über die Horizontlänge vergrößert sich dann der Zuwachs dieses Fehleranteils.

e) **Zusammenfassung:**

Durch den konvergierenden Anteil des Messrauschens und den divergierenden des Parameterrauschens ist die MSE (J_l) eine konvexe Funktion. Sie hat auf dem Definitionsbereich der Horizontlänge $p \leq N < N_{max}$ mindestens ein Minimum bei N_{opt} [Zhao *et al.* (2018a), S. 6393]. (N_{max} resultiert dabei aus der Beschränkung durch die Persistenz der Anregung.) Der UFIR-Parameterschätzfehler ist also für Horizontlängen $N \leq N_{opt}$ (oder generell bei begrenztem Horizont¹¹) stabil im zweiten Moment.

Folgendes Theorem fasst die Ergebnisse zusammen und beschreibt die Stabilität der UFIR-Parameterschätzung bzw. des Schätzfehlers:

Theorem 4. Stabilität des UFIR-Schätzfehlers im zweiten Moment: Gegeben seien die Zustandsraumdarstellung der Parameterschätzung [Gleichungen (2.9) und (2.10)] sowie die Eigenschaften des Parameter- und Messrauschens nach (2.11). Unter der Voraussetzung einer persistenten Anregung ist der Schätzfehler des UFIR-Verfahrens im zweiten Moment stabil, wenn die Horizontlänge kleiner oder gleich der optimalen ist ($N \leq N_{opt}$).

Beweis. Der Beweis resultiert aus den obigen Ausführungen a) bis e). □

¹¹ Nach Theorem 3 besitzt die Schätzfehlerkovarianz eine obere Schranke, die von der Horizontlänge N abhängig ist.

3.8.3 Konvergenz der UFIR-Parameterschätzung

Beide Schätzalgorithmen erfüllen die Deadbeat-Eigenschaft nach Abschnitt 3.6.2. Dies bedeutet, dass die Schätzungen im rauschfreien Fall ($\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$, $v_k = 0$) exakt sind: $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \boldsymbol{\theta}_k$. Nach Kwon *et al.* (1999) [S. 1790] sowie Kwon *et al.* (2002) [S. 548] deutet diese Deadbeat-Eigenschaft auf eine endliche Konvergenzzeit und eine schnelle Nachführung der Schätzung hin.

3.9 Numerische Simulation

Zur Verdeutlichung der obigen Ausführungen, wird eine Simulation mit MATLAB/Simulink[®] durchgeführt, der ein Versuchsaufbau nach Abbildung 3.1 zugrunde liegt. Der UFIR-Parameterschätzer wird dabei mit einer Parameteridentifikation durch ein diskretes Kalmanfilter nach Shi und Fang (2009) sowie Sinopoli *et al.* (2004) (DKF) verglichen. [Siehe Anhang A.2 ohne Netzwerkeinfluss ($\gamma = 1$).]

3.9.1 Strecke und Modell

Gegeben sei das lineare zeitdiskrete SISO-System zweiter Ordnung mit der z -Übertragungsfunktion

$$G_S(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2}}.$$

Für den wahren Parametervektor gilt dabei

$$\boldsymbol{\theta} = [b_0 \ b_1 \ e_1 \ e_2]^T = [0,45 \ 0,75 \ 0,50 \ 0,35]^T.$$

Die Strecke wird persistent über eine Dauer von 1000 s mit einem bandbegrenzten weißen Rauschen angeregt und mit $T = 0,1$ s abgetastet; $h^2 = 2279,0320$.

Das Prozessrauschen soll mittelwertfrei und weiß sein mit

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad \underline{q} = 0,6 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{q} = 3,0 \cdot 10^{-4}.$$

Für das mittelwertfreie weiße Messrauschen gilt ferner: $R = 1,0$.

Um Modellungenauigkeiten in Form einer nicht modellierten Dynamik in die Simulation einzubeziehen, soll der Parameter e_1 zwischen 400 s und 600 s einen sprungförmigen Offset von 0,1 aufweisen. Hiermit wird die Fähigkeit des Schätzers aufgezeigt, einer Parameteränderung zu folgen. Für die Anfangsbedingungen der Simulation gilt darüber hinaus $\boldsymbol{\theta}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ und $\mathbf{P}_0 = 20 \cdot \mathbf{I}$.

3.9.2 Die Festlegung der optimale Horizontlänge

Um die Schätzfehlerkovarianz bei Verwendung des UFIR-Parameterschätzers zu minimieren, wird der optimale Horizont mit Hilfe der MSE gemäß Abschnitt 3.5.2 bestimmt. Der Verlauf von $\sqrt{\text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_k\}}$ über N ergibt sich aus Abbildung 3.6. Um die Abhängigkeit der Schätzfehlerkovarianz des UFIR-Verfahrens $\bar{\mathbf{P}}_k$ vom Verhältnis des Parameterrauschens zum Messrauschen zu verdeutlichen, wird für die Bestimmung des Verlaufs einmal die nominelle Varianz des Parameterrauschens (\mathbf{Q}) verwendet und jeweils eine Faktorisierung mit 10 sowie 0,1. Dabei bestätigt sich

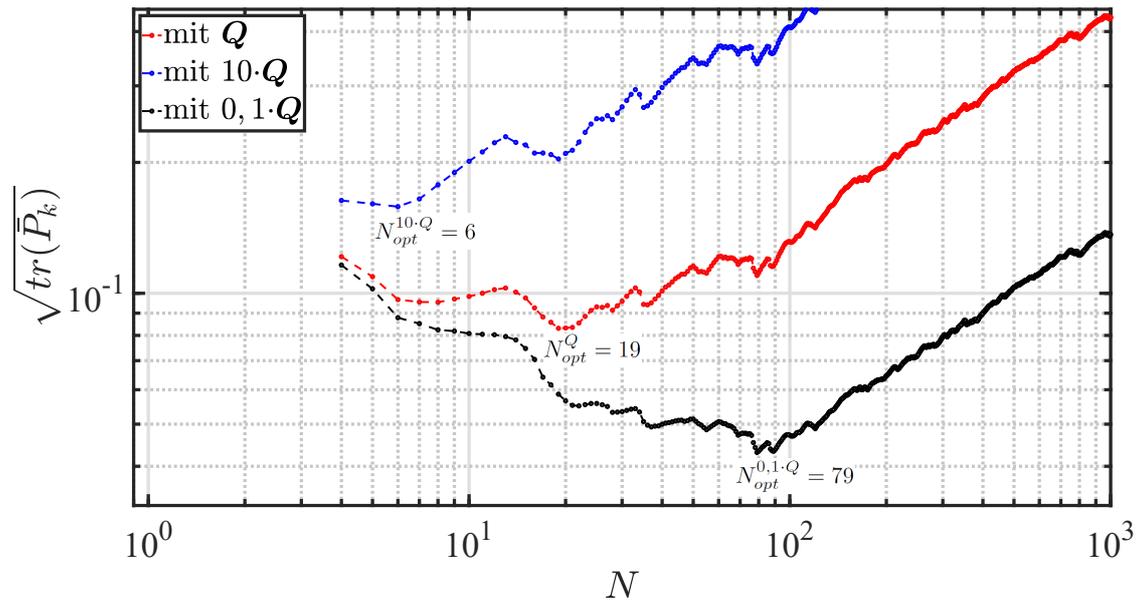


Abbildung 3.6: Bestimmung von N_{opt} für den UFIR-Parameterschätzer zur Identifikation von $G_S(z)$

die schematische Darstellung aus Abbildung 3.3. Die Höhe des Minimums nimmt mit einer Verschiebung des Rauschverhältnisses hin zum Messrauschen ab. Gleichzeitig erhöht sich zur Rauschunterdrückung die optimale Horizontlänge. Ist das Messrauschen vernachlässigbar, dann wird keine oder nur geringe Rauschunterdrückung benötigt und für die UFIR-Schätzung nutzt man ein kleines $N_{opt} \geq p$. Das Minimum für Q liegt bei $N_{opt} = 19$, für $10 \cdot Q$ gilt $N_{opt} = 6$ und bei $0,1 \cdot Q$ ergibt sich $N_{opt} = 79$. Im Folgenden wird $N_{opt} = 19$ für den UFIR-Parameterschätzer verwendet, um die Schätzfehlerkovarianz (für das in Abschnitt 3.9.1 beschriebene Q) zu minimieren.

3.9.3 Vergleich der Schätzungen

Aus den Abbildungen 3.7, 3.8 und 3.9 bzw. 3.10 lässt sich feststellen, dass das suboptimale FIR-Filter nur eine unwesentlich schlechtere Schätzgüte aufweist als das minimalvariante Kalmanfilter (DKF). Auch der Parameterverlauf und die Schätzfehler bestätigen diese Feststellung. Ferner liefert das UFIR-Verfahren mit Block-Startschätzung (BSS) (Algorithmus 3.1) identische Ergebnisse verglichen mit Algorithmus 3.2 ohne BSS. Darüber hinaus ist die Nachführung der Schätzung beim Sprung des Parameters e_1 (in Sekunde 400) bei den verglichenen Methoden identisch.

Ferner wird für $5500 \leq k \leq 6500$ der rauschfreie Fall ($\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$, $v_k = 0$) simuliert. Dabei wird deutlich, dass das UFIR-Verfahren die Deadbeat-Eigenschaft nach Abschnitt 3.6.2 besitzt. Dies bedeutet, dass die unter diesen Bedingungen ermittelten Schätzungen exakt sind. Auch das Kalmanfilter besitzt diese Eigenschaft. Dies wird für das RHKF im Anhang A.3.2 bewiesen. Auffällig ist bei einem Vergleich der exakten Schätzungen in den Abbildungen 3.7 und 3.8, dass das UFIR-Verfahren sowohl beim Abschalten des Rauschens als auch bei der Nachführung der Schätzung in Sekunde 600 den wahren Wert des Parameters e_1 schneller erreicht als das DKF.

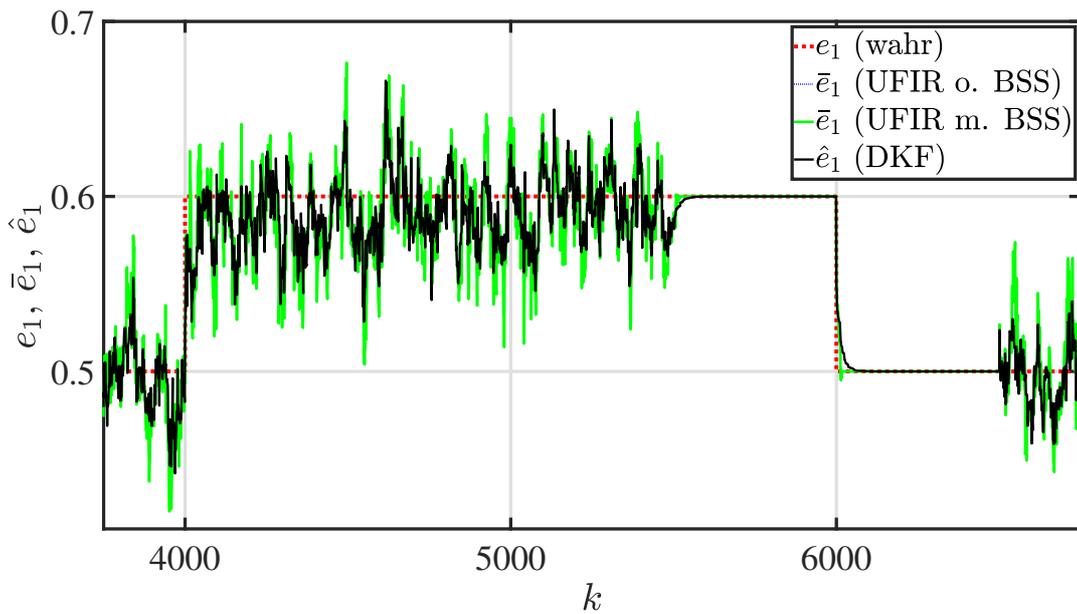


Abbildung 3.7: Echter und geschätzter Parameterverlauf des Parameters e_1 (Die Verläufe der UFIR-Schätzung mit und ohne BSS sind identisch und liegen aufeinander.)

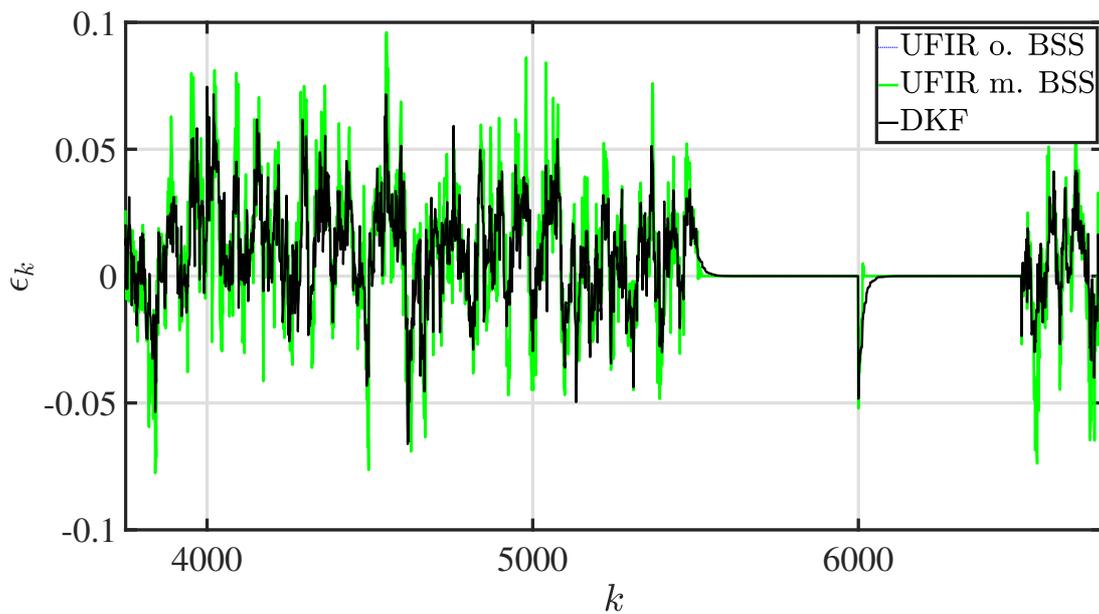


Abbildung 3.8: Schätzfehler des Parameters e_1 (Die UFIR-Schätzfehler mit und ohne BSS sind identisch und liegen aufeinander.)

3.9.4 Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz

Für die untere Schranke S^u ergibt sich nach Gleichung (3.62) der Wert $S^u = 5,2782 \cdot 10^{-5}$. Aus Gleichung (4.8) folgt für $S^o = 28,9317$. Im Rahmen der Simulation werden die tatsächlichen Schätzfehlerkovarianzmatrizen mit den Schranken $S^o \cdot \mathbf{I}$ und $S^u \cdot \mathbf{I}$ verglichen. Zusätzlich wird die Abschätzung \mathbf{P}_k^{UG} [Gl. (3.56)] in die Betrachtung einbezogen. Zur Veranschaulichung zei-

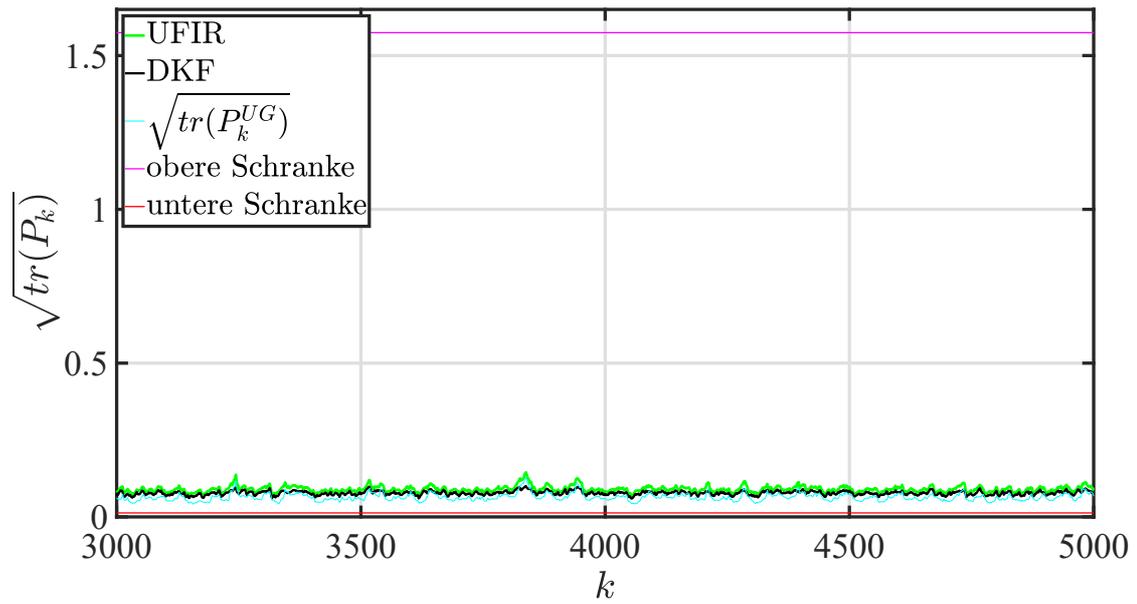


Abbildung 3.9: Schätzgüte

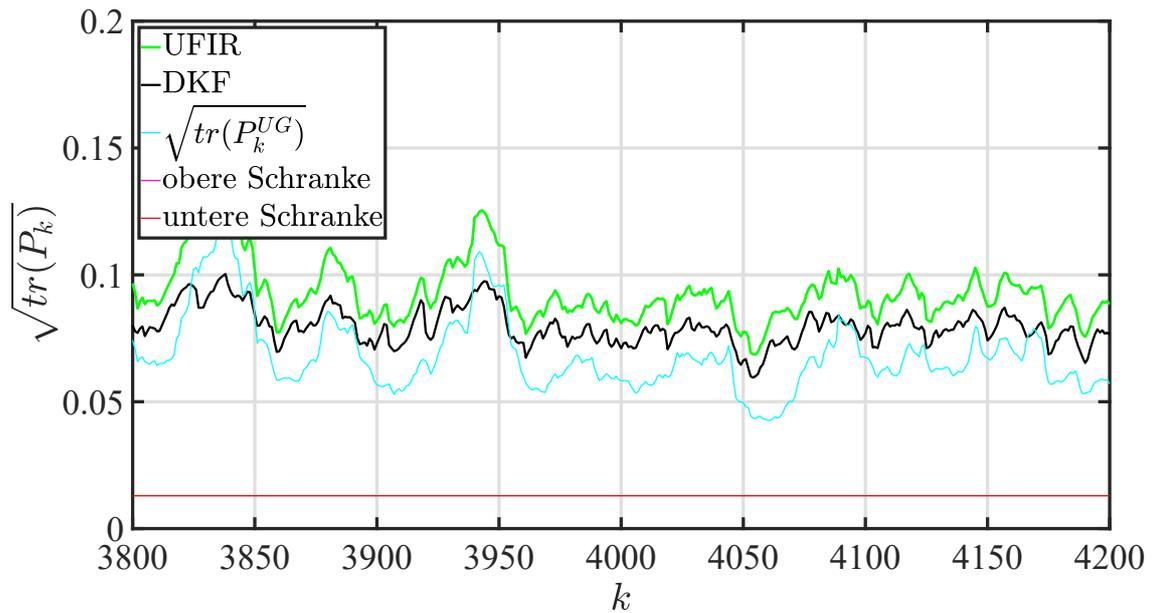


Abbildung 3.10: Schätzgüte (vergrößert/Die obere Schranke wird nicht abgebildet.)

gen die Abbildungen 3.9 und 3.10 die Quadratwurzel der Spur der jeweiligen Matrix. Es wird deutlich, dass die bestimmten Schranken S^o und S^u eingehalten werden. Vor allem die obere erscheint dabei etwas zu konservativ zu sein. Die untere Schranke hat zum minimalvarianten Schätzer einen relativ großen Abstand, so dass es sich auch bei dieser um eine eher konservative Schranke handelt. Die in den Theoremen 2 und 3 beschriebenen Schranken werden aber grundsätzlich im Rahmen der Simulation bestätigt. Im Allgemeinen erscheinen beide Schranken für das betrachtete Beispiel zu konservativ. Insbesondere die obere ist sehr weit gefasst.

Anmerkung: Bei der Bestimmung der Schätzungsgüte für $5500 \leq k \leq 6500$ werden sowohl für das DKF als auch für das UFIR-Filter die Rauscheigenschaften gemäß Abschnitt 3.9.1 verwendet ($\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$, $R \neq 0$), da das DKF sonst nicht arbeiten kann. Wie bereits beim Vergleich des UFIR mit dem Kalmanfilter (in Abschnitt 3.7) beschrieben wurde, ist das UFIR-Verfahren nicht auf die Kenntnis der Rauscheigenschaften angewiesen und kann auch im deterministischen Fall (mit $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, $R = 0$) genutzt werden. Der Schätzfehler ist dann gleich null.

4 UFIR-Parameteridentifikation in Echtzeit über das Netzwerk

Im vorausgehenden Kapitel 3 wurde zur Parameteridentifikation in Echtzeit das bisher wenig verwendete UFIR-Verfahren beschrieben. Die vom Netzwerk in den Identifikationsprozess eingebrachte Einschränkung fehlender Messungen blieb dabei außen vor. Ebenso wie die verbreiteten Echtzeitverfahren (RLS, Kalmanfilter usw.) kann der UFIR-Parameterschätzer bei fehlenden Messwerten nicht mehr direkt angewendet werden. Für die IIR-Filter wurden abhängig von den zwei Arten des Messungsverlusts die folgenden Lösungsansätze entwickelt:

- (I) **Regelmäßige Verluste:** In diesem Fall werden sogenannte „Dual“- bzw. „Multirate“-Verfahren verwendet (Ding und Chen, 2004*a,b*).
- (II) **Stochastische Verluste:** In Kommunikationsnetzwerken können Pakete nach einem zufälligen Muster verloren gehen. Zur Kompensation der verlorenen Messungen wird dann eine Prädiktion des Systemausgangs genutzt [Albertos *et al.* (1999) sowie Shi und Fang (2009)]. Bei der Verwendung eines Kalmanfilters ist die Annahme üblich, dass die Varianz des Messrauschen im Falle eines Verlustes gegen unendlich geht. Damit wird bei einem Messungsverlust nur der Prädiktionsschritt zur Bestimmung des Schätzwertes ausgeführt (Sinopoli *et al.*, 2004). Dies wird auch im Anhang A.3.4 erläutert.

Die Parameteridentifikationsverfahren basierend auf IIR-Filtern haben allerdings Nachteile: So werden sie durch eine falsche Modellierung oder temporäre Modellunsicherheiten stark beeinflusst. Ferner spielt die Wahl der Anfangswerte eine entscheidende Rolle. Das Kalmanfilter hängt darüber hinaus von der Kenntnis der Rauscheigenschaften ab (vgl. Abschnitt 3.7). Das rekursive Least-Squares-Verfahren ohne entsprechende Anpassungen unterliegt dem Effekt des „Einschlafens des Schätzalgorithmus“ und ist daher zur Schätzung zeitvarianter Parameter nicht geeignet [Bohn und Unbehauen (2016), S. 93]. Diese ungünstigen Eigenschaften hat das UFIR-Verfahren nicht. Daher soll auch dieses mit fehlenden Messungen umgehen können, wie sie bei der Einbindung eines Kommunikationsnetzwerks in den Identifikationsprozess auftreten können. Aufgrund der FIR-Struktur mit begrenztem Zeithorizont und des Aufbaus der in Kapitel 3 beschriebenen Algorithmen können die oben genannten Lösungsansätze für stochastische Verluste nicht ohne Weiteres auf den UFIR-Parameterschätzer übertragen werden. Durch den Einsatz in einem Netzwerkumfeld gemäß Abbildung 1.4 erhöht sich die Komplexität des Entwurfs und der Analyse der Schätzgüte, wenn bei einem Paketverlust verlorene Messungen kompensiert werden müssen [Ryu *et al.* (2020), Uribe-Murcia *et al.* (2020), Vazquez-Olguin *et al.* (2018) sowie Abschnitt 4.2]. Um dies zu umgehen und mit einfachen Mitteln die Vorteile der FIR-Struktur trotzdem für die Parameteridentifikation nutzen zu können, wird daher zunächst ein neuer Co-Design-Ansatz vorgeschlagen und dessen Eigenschaften analysiert.

Dieser Co-Design-Ansatz, der synergetische Eigenschaften von Netzwerk und Filter nutzt, ist auf einen „intelligenten“ Sensor an der Regelstrecke und eine entsprechende Netzwerkkapazität angewiesen. Da dies in der Praxis nicht immer gewährleistet werden kann, wird die UFIR-Parameteridentifikation mit multiplen Imputationen entworfen. Diese Anpassung des UFIR-Verfahrens beruht auf einem statistischen Verfahren, das bisher wenig in der Regelung über Netzwerke verwendet wurde und durch eine Vereinfachung echtzeitfähig wird (Uribe-Murcia *et al.*, 2020). Eine entsprechende Analyse der Schätzgüte und Stabilität sollen die Verwendbarkeit des UFIR-Parameterschätzers im Netzwerkumfeld verdeutlichen.

4.1 Co-Design-Ansatz zur Nutzung synergetischer Eigenschaften von Netzwerk und Filter

Wie beispielsweise in Schenato (2006, 2008), Shi und Fang (2009), Sinopoli *et al.* (2004) sowie in Yang *et al.* (2018) ist die Annahme üblich, dass der Sensor an der Regelstrecke einen einzelnen Abtastwert über das Netzwerk versendet und sich dabei ein potentieller Datenverlust einstellt. Im Gegensatz dazu wird in diesem Abschnitt ein neuer Co-Design-Ansatz verfolgt, der mit Hilfe eines intelligenten Messglieds die FIR-Struktur des Schätzverfahrens mit der paketbasierten Arbeitsweise des Netzwerks verknüpft. Der Begriff des „intelligenten Sensors“ im Zusammenhang mit NCS und Zustandsschätzung wird z. B. auch in Hespanha *et al.* (2007), in Schenato (2006, 2008), im Übersichtsbuch von J. Lunze (2013) sowie bei Vazquez-Olguin *et al.* (2017) verwendet. Diesen allen gemein ist allerdings, dass umfangreichere Algorithmen lokal ausgeführt werden. Hier beschränkt sich die „Intelligenz“ des Sensors darauf, die Abtastwerte des Horizontes in einem Puffer zu speichern und als komplette Sequenz in einem Paket über das Netzwerk an den FIR-Schätzer zu schicken. Die Idee ist von der sequenzbasierten modellprädiktiven Regelung bei NCS übernommen, wird aber in diesem Kontext für das Versenden von Stellsignalsequenzen genutzt. Als Schätzverfahren in den obigen Quellen werden ferner Moving Horizon Estimation-, Kalman- und andere Filter-Ansätze eingesetzt. Diese unterscheiden sich vom hier verwendeten FIR-Filter, v. a. hinsichtlich der Anfangsbedingungen des Horizonts und der Berücksichtigung von Rauscheigenschaften.

Der beschriebene Co-Design-Ansatz hat folgende **Nachteile** gegenüber den Entwürfen in den oben genannten Quellen:

- a) Durch die größere Datenmenge entsteht gegenüber der Einzelmessung eine höhere Netzwerklast. Diese kann unter Umständen die negativen Eigenschaften des Netzwerks verstärken.
- b) Die Verwendung von FIR-Filtern hat einen höheren Berechnungsaufwand zur Folge (vgl. Abschnitt 3.7). Ferner besteht das „Tote Zone“-Problem zu Beginn der Berechnung [Pak *et al.* (2016), S. 1052]. So kann das UFIR-Verfahren erst nach dem Ablauf einer Horizontlänge die erste Schätzung generieren.

Dem stehen allerdings die nachfolgenden **Vorteile** gegenüber:

- a) Die (quasi-)ereignisgesteuerte Arbeitsweise des UFIR-Filters sorgt für eine stabile Schätzung (Theorem 7).
- b) Eine Prädiktion fehlenden Messungen des Systemausgangssignals aus vergangenen Daten ist nicht erforderlich. Die FIR-Struktur des Schätzers bleibt dadurch erhalten [vgl. Abschnitt 4.2.5 Punkt b)].
- c) Ferner ergibt sich ggf. eine effizientere Nutzung des Netzwerks, indem die Nutzdatenlänge ausgeschöpft wird.
- d) Ein wesentlicher Vorteil besteht des Weiteren darin, dass Messungen nur dann nicht in die Parameterschätzung eingehen, wenn es zu aufeinanderfolgenden Paketverlusten kommt, deren Anzahl der Horizontlänge entspricht oder diese überschreitet. Der Informationsverlust ist also geringer und damit die Schätzungsgüte höher.
- e) Der Co-Design-Ansatz ist generisch. Er kann in Verbindung mit jedem FIR-Filter verwendet werden. So kann auch das RHKF, das nach Kwon *et al.* (2002) ein optimales FIR-Filter ist und im Anhang A.3 beschrieben wird, genutzt werden.
- f) Der verwendete FIR-Parameterschätzer und der „intelligente Sensor“ sind unabhängig von

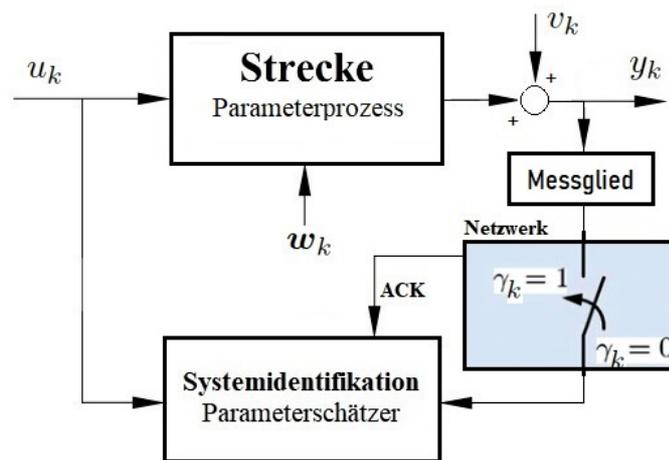


Abbildung 4.1: Parameterschätzung über ein (TCP-basiertes) Netzwerk mit Paketverlusten

der Verarbeitung der gesamten Ankunftssequenz und benötigen somit für diese auch keinen Speicher.

Nachfolgend wird die Verwendung der UFIR-Parameterschätzung gemäß Kapitel 3 im Rahmen des Co-Design-Ansatzes erläutert. Dann wird die Genauigkeit des Verfahrens bei dessen Verwendung mit dem beschriebenen Netzwerk untersucht. Hierzu erfolgt auch die Bestimmung von oberen und unteren Schranken der Schätzfehlerkovarianz für den betrachteten Co-Design-Ansatz. Mit Hilfe eines Ersatzsystems werden die Stabilitätseigenschaften der Schätzungen über das Netzwerk analysiert. Ein numerisches Beispiel verdeutlicht abschließend die gewonnenen Erkenntnisse.

4.1.1 Die UFIR-Parameterschätzung über das Netzwerk im Co-Design-Ansatz

Das (TCP-basierte) Netzwerk nach Abschnitt 2.2 soll die Kommunikation zwischen Strecke und Parameterschätzer sicherstellen. Der verwendete „intelligente Sensor“ als Messglied erzeugt eine Messungssequenz analog der Horizontlänge $\mathbf{Y}_{k,m}$ [siehe Gl. (3.6)] und versendet diese über das Netzwerk. Dabei treten stochastische Paketverluste auf. Das Anregungssignal wird dabei mit einer direkten Verbindung dem Parameterschätzer zur Verfügung gestellt. Abbildung 4.1 zeigt den schematischen Aufbau.

Das Netzwerk arbeitet TCP-basiert, also mit Bestätigungen (ACK) für erfolgreiche Übertragungen. Daher erfolgen Parameterschätzungen bezüglich $\tilde{\mathbf{Y}}_{k,m} = \gamma_k \cdot \mathbf{Y}_{k,m}$ nur, wenn auch ein Paket beim Schätzer eintrifft. Bei einem Paketverlust gibt es keine neue Schätzung, so dass auf die Prädiktion von Ersatzwerten verzichtet werden kann. Die Phänomene, die aufgrund von Netzwerkzeiten auftreten, wie z. B. vakante Abtastung und Vertauschung der Paketreihenfolge, bleiben hier unberücksichtigt. Eine Paketlaufzeit, die ein Abtastintervall überschreitet, führt zu einem Paketverlust.

Ein wesentlicher Vorteil der hier untersuchten Anordnung ist der folgende:

In der oben beschriebenen Anordnung mit einem „intelligenten Sensor“ kommt es erst dann zu einem Informationsverlust für die Parameterschätzung, wenn die Anzahl aufeinanderfolgender Paketverluste der Horizontlänge entspricht oder diese überschreitet.

Hinweis: Die Horizontlänge bzw. Größe der Messungssequenz ist nicht nur nach den in Abschnitt 3.5 beschriebenen Vorgehensweisen bestimmbar, sondern unterliegt weiteren Einschränkungen durch die Nutzdatenlänge des Netzwerks bzw. die Netzwerklast.

Erfolgt die Parameterschätzung über das Netzwerk auf Basis des Co-Design-Ansatzes, dann erhält man für die Schätzung und die Schätzfehlerkovarianz folgende Zusammenhänge auf Basis bedingter Erwartungswerte¹²:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw} := E[\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{Y}_{k,m}; \gamma_k], \quad (4.1)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{nw} := E[(\boldsymbol{\theta}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k})(\boldsymbol{\theta}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k})^T | \mathbf{Y}_{k,m}; \gamma_k]. \quad (4.2)$$

Die nachfolgenden Lemmata liefern die konkrete Berechnungsvorschrift für Schätzungen über das Netzwerk mit Hilfe des neuen Co-Design-Ansatzes:

Lemma 8. *Für die Schätzung des Parametervektors ergibt sich in Abhängigkeit der Paketankunft γ_k*

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw} = (1 - \gamma_k)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \gamma_k\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}. \quad (4.3)$$

Beweis. Dieser folgt direkt aus der Struktur des Ansatzes. \square

Anmerkung: Bei einem Paketverlust ($\gamma_k = 0$) kommt somit die Schätzung des vorherigen Zeitschritts zur Anwendung.

Lemma 9. *Die Schätzfehlerkovarianzmatrix lässt sich im Co-Design-Ansatz folgendermaßen bestimmen:*

$$\mathbf{P}_{k|k}^{nw} = (1 - \gamma_k)(\mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}) + \gamma_k\mathbf{P}_{k|k}. \quad (4.4)$$

Anmerkung: Bei einem Paketverlust ($\gamma_k = 0$) wird nur ein Prädiktionsschritt ausgeführt, während bei der Ankunft des Pakets ($\gamma_k = 1$) die Schätzfehlerkovarianzmatrix auf Basis der nun verfügbaren aktuellsten N Messungen neu bestimmt wird.

Beweis. Für den UFIR-Schätzfehler über das Netzwerk erhält man mit den Gleichungen (4.3) sowie (3.43) bis (3.45) den folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_k^{nw} &= \boldsymbol{\theta}_k - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw} \\ &= \boldsymbol{\theta}_k - (1 - \gamma_k)\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} - \gamma_k\mathbf{M}_{k,m} \sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i y_i \\ &= (1 - \gamma_k)(\boldsymbol{\theta}_{k-1} - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \mathbf{w}_{k-1}) + \gamma_k\mathbf{M}_{k,m} \sum_{i=m}^k (\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j - \boldsymbol{\varphi}_i v_i). \end{aligned}$$

¹² Zur Verdeutlichung des Netzwerkeinflusses wird hier der Index „nw“ eingeführt. Er wird weggelassen, wenn der Kontext eindeutig ist.

Hierdurch ergibt sich dann analog zu Gleichung (3.39) die Schätzfehlerkovarianzmatrix zu:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{P}}_{k|k}^{nw} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k^{nw}(\boldsymbol{\epsilon}_k^{nw})^T | \mathbf{Y}_{k,m}; \gamma_k] \\
 &= (1 - \gamma_k)(E[\boldsymbol{\epsilon}_{k-1} \boldsymbol{\epsilon}_{k-1}^T] + \mathbf{Q}) + \gamma_k \{ \mathbf{M}_{k,m} [\sum_{j=m}^{k-1} (\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T) \mathbf{Q} (\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T)] \mathbf{M}_{k,m} \\
 &\quad + R \cdot \mathbf{M}_{k,m} \} \\
 &= (1 - \gamma_k)(\bar{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}) + \gamma_k \bar{\mathbf{P}}_{k|k} .
 \end{aligned}$$

□

Anmerkung: Bei den Größen $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw}$ (bzw. $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw}$) und $\mathbf{P}_{k|k}^{nw}$ (bzw. $\bar{\mathbf{P}}_{k|k}^{nw}$) handelt es sich um **Zu-
fallsvariablen**, da sie von γ_k abhängen.

4.1.2 Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz bei UFIR-Schätzungen über das Netzwerk

In diesem Abschnitt werden für den Co-Design-Ansatz der UFIR-Parameterschätzung eine obere und untere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix bestimmt. Damit lassen sich die Berechnungen zur Schätzgüte plausibilisieren und Best-Case-/Worst-Case-Analysen durchführen. Die untere Schranke hat die Besonderheit, dass sie unabhängig von der Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix/Steuerbarkeitsmatrix (vgl. Abschnitt 2.1.2) sowie dem Netzwerkverhalten ist.

Wie in Abschnitt 3.4.4 sei die Annahme 1 gültig.

4.1.2.1 Die untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz

In Anlehnung an Theorem 2 gilt für die untere Schranke:

Theorem 5. *Bei einer Parameterschätzung über das Netzwerk im Co-Design-Ansatz ergibt sich für den UFIR-Parameterschätzer mit der Annahme 1 (S. 35) die folgende untere Schranke (S^u) der Schätzfehlerkovarianzmatrix:*

$$\mathbf{P}_{k|k}^{nw} \geq S^u \cdot \mathbf{I} \text{ mit } S^u = \left(\frac{1}{q} + \frac{h^2}{r} \right)^{-1} . \quad (4.5)$$

Sie ist unabhängig vom Paketverlust und zeitinvariant.

Beweis. Bei der Ankunft eines Pakets ($\gamma_k = 1$) gilt für eine minimalvariante Parameterschätzung (mit einem Kalmanfilter) folgender Zusammenhang auf dem Horizont ($l \in [m, k]$)¹³:

$$\mathbf{P}_{l|l}^{-1} = \mathbf{P}_{l|l-1}^{-1} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T . \quad (4.6)$$

Aus $\mathbf{P}_{l|l-1} = \mathbf{P}_{l-1|l-1} + \mathbf{Q}$ folgt mit Lemma 4

$$\mathbf{P}_{l|l-1}^{-1} \leq \mathbf{Q}^{-1}$$

¹³ Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier die Problematik, des Singulärbereichs von $\mathbf{P}_{l|l}^{-1}$ außer Acht gelassen, da es für die Abschätzung der Schranke nicht relevant ist.

und damit

$$\mathbf{P}_{l|l}^{-1} \leq \mathbf{Q}^{-1} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \leq \left(\frac{1}{\underline{q}} + \frac{h^2}{\underline{r}} \right) \mathbf{I}.$$

Es ergibt sich also die untere Schranke auf dem Horizont zu:

$$\mathbf{P}_{l|l} \geq \left(\frac{1}{\underline{q}} + \frac{h^2}{\underline{r}} \right)^{-1} \mathbf{I}. \quad (4.7)$$

Diese gilt entsprechend auch für $l = k$. Wie in Lemma 9 beschrieben, wird bei einem Paketverlust die Schätzfehlerkovarianz (nur) aus der Prädiktion

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}$$

ermittelt. Somit gilt Ungleichung (4.7) auch für $\gamma_k = 0$.

Da dieser Beweis der unteren Schranke auf einer minimalvarianten Parameterschätzung basiert, gilt er auch für den suboptimalen UFIR-Parameterschätzer. \square

4.1.2.2 Die obere Schranke der Schätzfehlerkovarianz

Das folgende Theorem liefert eine obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix und basiert auf Theorem 3:

Theorem 6. *Es gelte die Annahme 1 auf Seite 35. Bei einer Parameterschätzung über das Netzwerk im Co-Design-Ansatz ergibt sich für den UFIR-Parameterschätzer folgende obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix in Abhängigkeit der Paketankunft:*

- $\gamma_k = 1$ (Paketankunft):

$$\mathbf{P}_{k|k}^{nw} \leq S^o \cdot \mathbf{I} \quad (4.8)$$

mit

$$S^o = \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{b^2}{a^2} (N-1) \bar{q} \right].$$

- $\gamma_k = 0$ (Paketverlust):

$$\mathbf{P}_{k|k}^{nw} \leq S_k^o \cdot \mathbf{I} \quad (4.9)$$

mit

$$S_k^o = S_{k-1}^o + \bar{q}$$

und dem Anfangswert S^o bei der letzten Paketankunft.

Beweis. Nach Jazwinski (1970) erhält man eine obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix auf Basis einer suboptimalen (nichtminimalvarianten) Schätzung, die das Prozessrauschen ignoriert und auf den aktuellsten N Messungen beruht. Eine ebensolche Schätzung liefert der in diesem Bericht untersuchte UFIR-Parameterschätzer. Insofern wird im Folgenden für diesen eine obere Schranke bestimmt. Dabei wird eine Fallunterscheidung hinsichtlich γ_k vollzogen.

a) **Paketankunft** ($\gamma_k = 1$): In diesem Fall folgt die Schätzfehlerkovarianz aus Lemma 1:

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k}^{nw} = \mathbf{M}_{k,m} \left[\sum_{j=m}^{k-1} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right] \mathbf{M}_{k,m} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{k,m} .$$

Diese lässt sich nach Deyst und Price (1968) [S. 703] sowie Deyst (1973) [S. 562 f.] in Verbindung mit den Gleichungen (2.12) und (2.14) folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k}^{nw} \leq \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{b^2}{a^2} (N-1) \bar{q} \right] \cdot \mathbf{I} = \mathbf{S}^o \cdot \mathbf{I} . \quad (4.10)$$

b) **Paketverlust** ($\gamma_k = 0$): Bei einem Paketverlust erfolgt wie in Lemma 9 beschrieben, nur der Prädiktionsschritt zur Bestimmung der Schätzfehlerkovarianz:

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q} .$$

Damit ergibt sich für die obere Schranke die folgende Abschätzung:

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k}^{nw} \leq \bar{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}^{nw} + \bar{q} \cdot \mathbf{I} \leq (\mathbf{S}_{k-1}^o + \bar{q}) \cdot \mathbf{I} . \quad (4.11)$$

Der Wert der Schranke kann dabei aus

$$\mathbf{S}_k^o = \mathbf{S}_{k-1}^o + \bar{q}$$

und dem Anfangswert \mathbf{S}^o bei der letzten Paketankunft rekursiv bestimmt werden.

□

Anmerkung: Bei aufeinanderfolgenden Paketverlusten steigt die obere Schranke also entsprechend \bar{q} linear an, um dann wieder bei einer Paketankunft auf den Wert aus Gleichung (4.10) zurückzuspringen. Die obere Schranke der Schätzfehlerkovarianzmatrix ist somit zeitvariant und die untere Grenze der oberen Schranke ist durch \mathbf{S}^o gegeben.

4.1.3 Stabilität der UFIR-Parameterschätzung im Netzwerk bei Verwendung des Co-Design-Ansatzes

Wie bereits in Abschnitt 3.8 dargelegt wurde, ist das UFIR-Filter zum einen BIBO-stabil und zum anderen ist der Fehler der UFIR-Parameterschätzung im zweiten Moment stabil. Ferner indiziert die Deadbeat-Eigenschaft eine endliche Konvergenzzeit und eine schnelle Nachführung der Schätzung [Kwon *et al.* (1999), S. 1790 sowie Kwon *et al.* (2002), S. 548].

Der Co-Design-Ansatz mit der Verbindung aus paketbasierter Arbeitsweise und intelligentem Messglied führt zu einer (quasi-)ereignisgetriggerten Arbeitsweise, bei der eine Schätzung nur dann erfolgt, wenn auch ein Paket empfangen wird. Für die Stabilitätsanalyse des gewählten Ansatzes kann daher ein Ersatzsystem gemäß Abbildung 4.2 verwendet werden. Ein lokaler UFIR-Parameterschätzer erzeugt bei jedem Abtastschritt den Schätzwert $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^L$. Dieser wird dann über das Netzwerk zu einem Remote-UFIR-Schätzer übertragen. Die Schätzung $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^R$ wird bei einer Paketankunft entsprechend dem Ergebnis der lokalen Verarbeitung nachgeführt.

Das nachfolgende Theorem gibt somit Auskunft über die Stabilität dieser UFIR-Parameterschätzung im zweiten Moment.

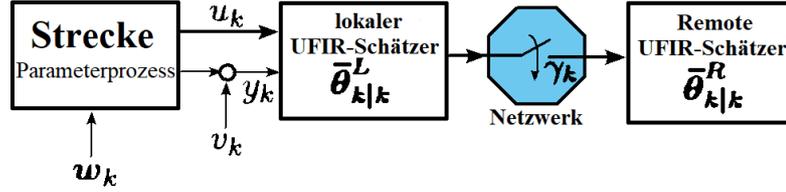


Abbildung 4.2: Ersatzsystem [Schenato (2006, 2008)]

Theorem 7. *Ist die UFIR-Parameterschätzung bei einer Paketankunft ($\gamma_k = 1$) im zweiten Moment stabil (Theorem 4), dann genügen sporadische Paketankünfte ($\gamma > 0$), damit der Fehler der Parameterschätzung des Co-Design-Ansatzes im zweiten Moment stabil ist.*

Beweis. In Anlehnung an Xu und Hespanha (2005) [S. 843 f.], Gupta *et al.* (2005) [S. 364] sowie Schenato (2006, 2008) [S. 1315 f.] wird der Nachweis mit Hilfe des oben beschriebenen Ersatzsystems erbracht. Für den lokalen und Remote-Schätzfehler gelten $\epsilon_k^L = \theta_k - \bar{\theta}_{k|k}^L$ bzw. $\epsilon_k^R = \theta_k - \bar{\theta}_{k|k}^R$ sowie der folgende Zusammenhang

$$\epsilon_k^R = (1 - \gamma_k)(\epsilon_{k-1}^R + \mathbf{w}_{k-1}) + \gamma_k \epsilon_k^L. \quad (4.12)$$

Bezogen auf die Kommunikationsrate γ gilt entsprechend:

$$\epsilon_k^R = (1 - \gamma)\epsilon_{k-1}^R + (1 - \gamma)\mathbf{w}_{k-1} + \gamma \epsilon_k^L. \quad (4.13)$$

Für die Stabilität des Schätzfehlers im zweiten Moment (also die Stabilität der MSE) muss die Matrix $\sqrt{1 - \gamma} \cdot \mathbf{I}$ stabil sein [Sinopoli *et al.* (2004), S. 1462 f. sowie Schenato (2006, 2008), S. 1315 f.]. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{1 - \gamma} \cdot \|\lambda_{\max}\{\mathbf{I}\}\| < 1 \iff \gamma > 1 - \frac{1}{\|\lambda_{\max}\{\mathbf{I}\}\|^2} = 0.$$

□

4.1.4 Numerische Simulation

Zur Verdeutlichung der obigen Ausführungen, wird eine Simulation mit MATLAB/Simulink[®] durchgeführt, der ein Versuchsaufbau nach Abbildung 4.1 zugrunde liegt. Der UFIR-Parameterschätzers wird dabei mit einer Parameteridentifikation durch ein diskretes Kalmanfilter nach Sinopoli *et al.* (2004) sowie Shi und Fang (2009) (DKF/Abschnitt A.2 im Anhang) verglichen.

4.1.4.1 Strecke, Modell und Netzwerkverhalten

Gegeben sei das lineare zeitdiskrete SISO-System zweiter Ordnung mit der z -Übertragungsfunktion

$$G_S(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2}}.$$

Für den wahren Parametervektor gilt dabei

$$\theta = [b_0 \ b_1 \ e_1 \ e_2]^T = [0, 45 \ 0, 75 \ 0, 50 \ 0, 35]^T.$$

Die Strecke wird persistent über eine Dauer von 1000 s mit einem bandbegrenzten weißen Rauschen angeregt und mit $T = 0,1$ s abgetastet; $h^2 = 2263,3126$.

Das Prozessrauschen soll mittelwertfrei und weiß sein mit

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,9 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}, \quad \underline{q} = 4,9 \cdot 10^{-5}, \quad \bar{q} = 22,5 \cdot 10^{-5}.$$

Für das mittelwertfreie weiße Messrauschen gilt ferner: $R = 0,64$.

Um Modellungenauigkeiten in Form einer nicht modellierten Dynamik in die Simulation einzubeziehen, soll der Parameter e_1 zwischen 400 s und 600 s einen sprungförmigen Offset von 0,1 aufweisen. Hiermit wird die Fähigkeit des Schätzers aufgezeigt, einer Parameteränderung zu folgen. Für die Anfangsbedingungen der Simulation gilt darüber hinaus $\boldsymbol{\theta}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ und $\mathbf{P}_0 = 20 \cdot \mathbf{I}$.

In der Simulation werden eine hohe *Kommunikationsrate* ($\gamma = E[\gamma_k] = 0,8$) und eine geringe ($\gamma = 0,1$) angenommen.

4.1.4.2 Die Festlegung der optimale Horizontlänge

Um die Schätzfehlerkovarianz bei Verwendung des UFIR-Parameterschätzers zu minimieren, wird der optimale Horizont mit Hilfe der MSE gemäß Abschnitt 3.5.2 bestimmt. Der Verlauf von $\sqrt{\text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_k\}}$ über N ergibt sich aus Abbildung 4.3.

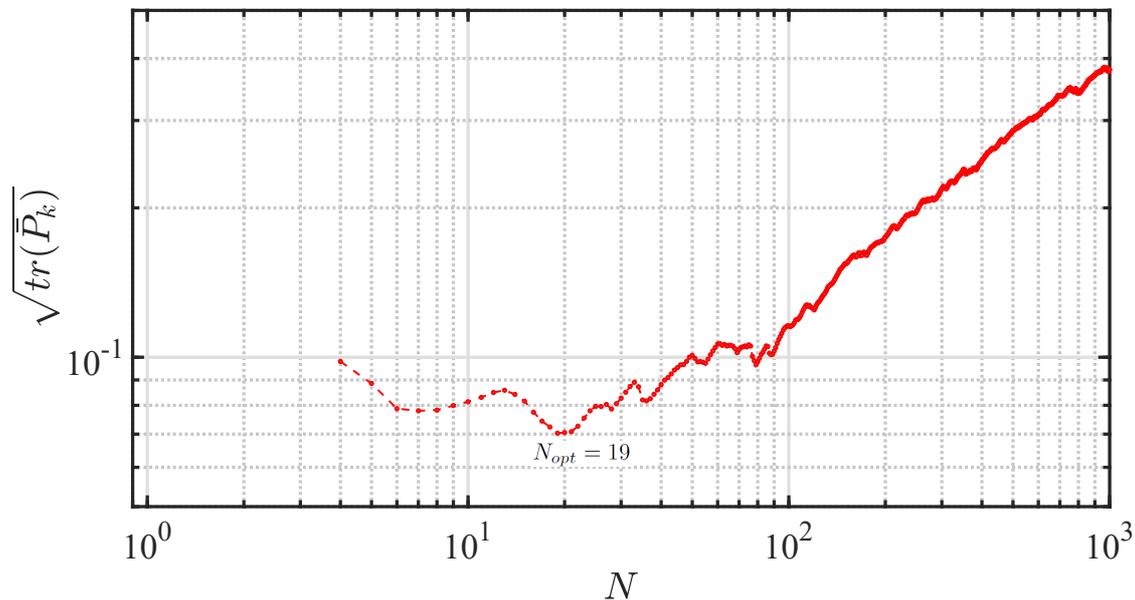


Abbildung 4.3: Bestimmung von N_{opt} für den UFIR-Parameterschätzer zur Identifikation von $G_S(z)$

Das Minimum liegt bei $N_{opt} = 19$. Diese Horizontlänge wird im Folgenden für den UFIR-Parameterschätzer verwendet, um die Schätzfehlerkovarianz zu minimieren.

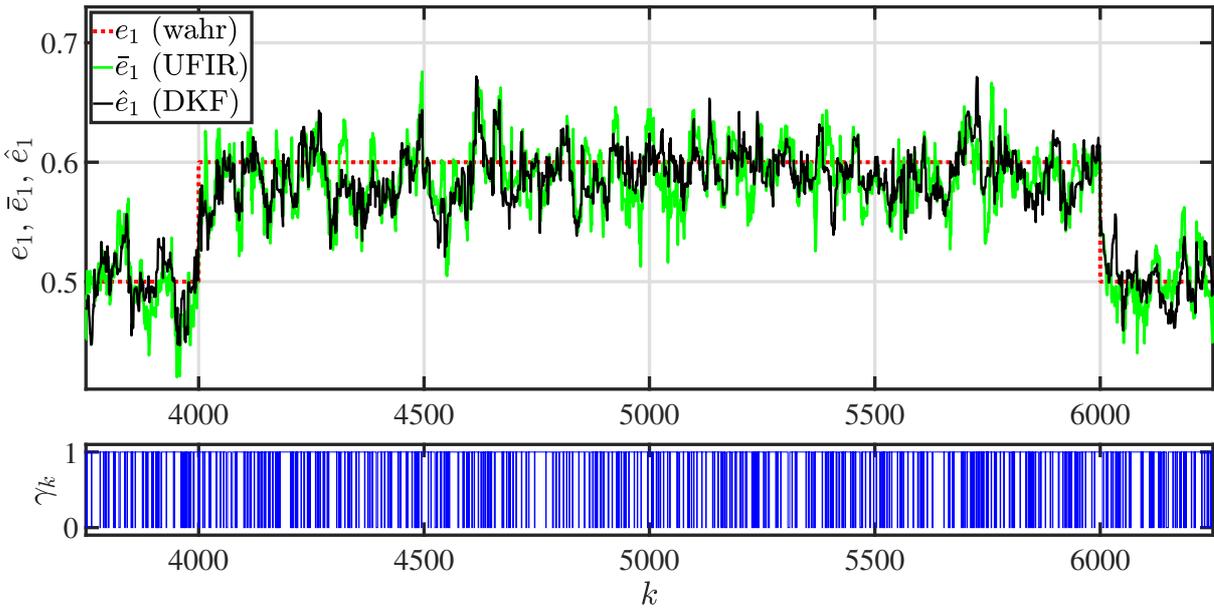


Abbildung 4.4: Echter und geschätzter Parameterverlauf des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,8$

4.1.4.3 Vergleich der Schätzungen

a) Hohe Kommunikationsrate

Zunächst wird eine Kommunikationsrate von $\gamma = E[\gamma_k] = 0,8$ verwendet. Aus den Abbildungen 4.4, 4.5 und 4.8 erkennt man, dass der Verlust von 20 Prozent der Messungen keine Auswirkungen auf die Parameterschätzung mit dem DKF hat, bei dem einzelne Messwerte verloren gehen. In diesem Fall wird der Schätzwert im DKF konstant gehalten. Der Co-Design-Ansatz mit der UFIR-Methode hat somit keine wesentlichen Vorteile. Hinsichtlich der Schätzgüte lässt sich feststellen, dass das suboptimale FIR-Filter nur unwesentlich schlechter ist als das minimalvariante Kalmanfilter, und dies ohne die Kenntnis der Rauscheigenschaften oder entsprechende Anfangsbedingungen. Auch die Nachführung der Schätzung beim Sprung des Parameters e_1 in Sekunde 400 und 600 ist bei den verglichenen Methoden identisch.

b) Niedrige Kommunikationsrate

Das Ergebnis der Simulation mit einer niedrigen Kommunikationsrate ($\gamma = 0,1$), also einem häufigen Paketverlust, ist den Abbildungen 4.6, 4.7 und 4.9 zu entnehmen: Die Nutzung von Synergien zwischen UFIR-Filter und der paketbasierten Arbeitsweise liefert bei hohen Verlustraten bessere Ergebnisse bzw. exaktere Schätzungen als der DKF, da weniger Informationen im Netzwerk verloren gehen (siehe Abschnitt 4.1.1).

4.1.4.4 Die Schranken der Schätzfehlerkovarianz

Für die untere Schranke S^u ergibt sich nach Gleichung (4.5) folgender Wert

$$S^u = \left(\frac{1}{\underline{q}} + \frac{h^2}{\underline{r}} \right)^{-1} = 4,1763 \cdot 10^{-4}.$$

Aus Gleichung (4.8) folgt für S^o bei Paketankunft ($\gamma_k = 1$):

$$S^o = \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{b^2}{a^2}(N-1)\bar{q} \right] = 0,6198.$$

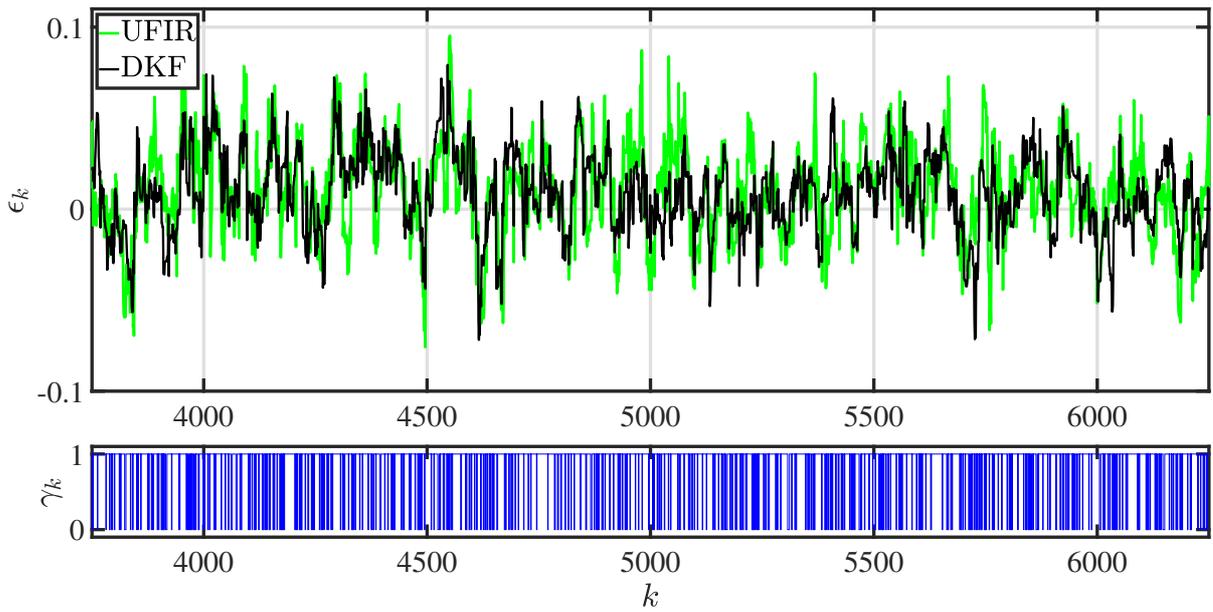


Abbildung 4.5: Schätzfehler des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,8$

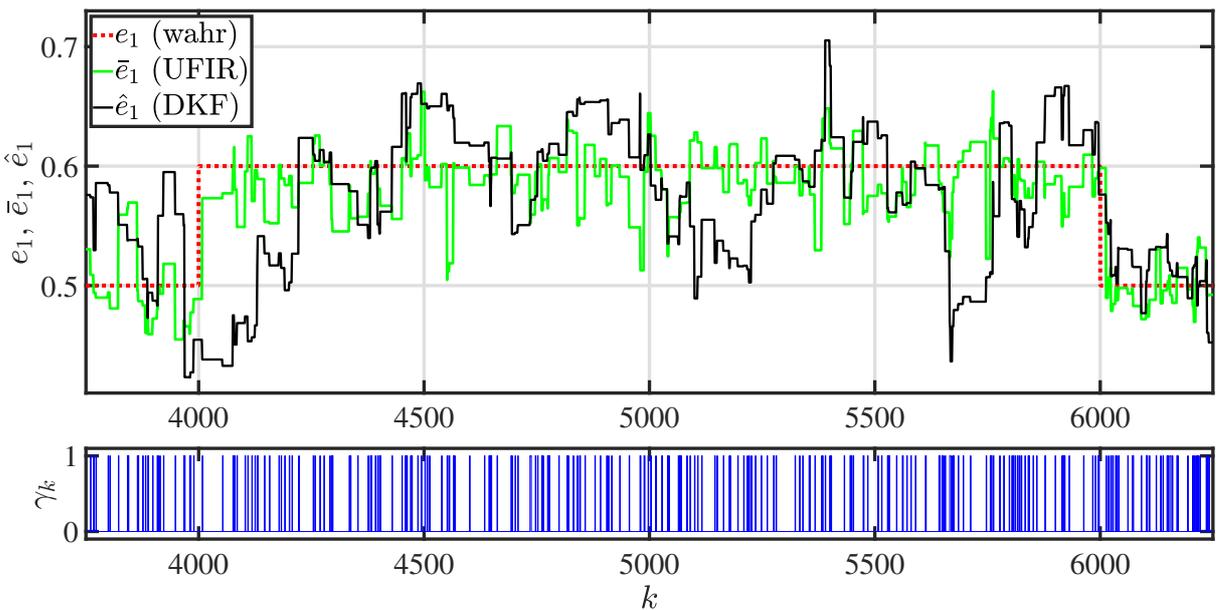


Abbildung 4.6: Echter und geschätzter Parameterverlauf des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,1$

Im Rahmen der Simulation werden die tatsächlichen Schätzfehlerkovarianzmatrizen mit den Schranken $S_k^o \cdot I$ und $S^u \cdot I$ verglichen. Zusätzlich wird die Abschätzung \mathbf{P}_k^{UG} [Gl. (3.56)] in die Betrachtung einbezogen. Zur Veranschaulichung zeigen die Abbildungen 4.8 und 4.9 die Quadratwurzel der Spur der jeweiligen Matrix.

Es wird deutlich, dass die bestimmten Schranken S_k^o und S^u eingehalten werden. Vor allem die obere erscheint dabei etwas zu konservativ zu sein. Ihre Abhängigkeit von der Paketankunft ist daher im Wesentlichen irrelevant. Die untere Schranke, die unabhängig vom Netzwerkverhalten

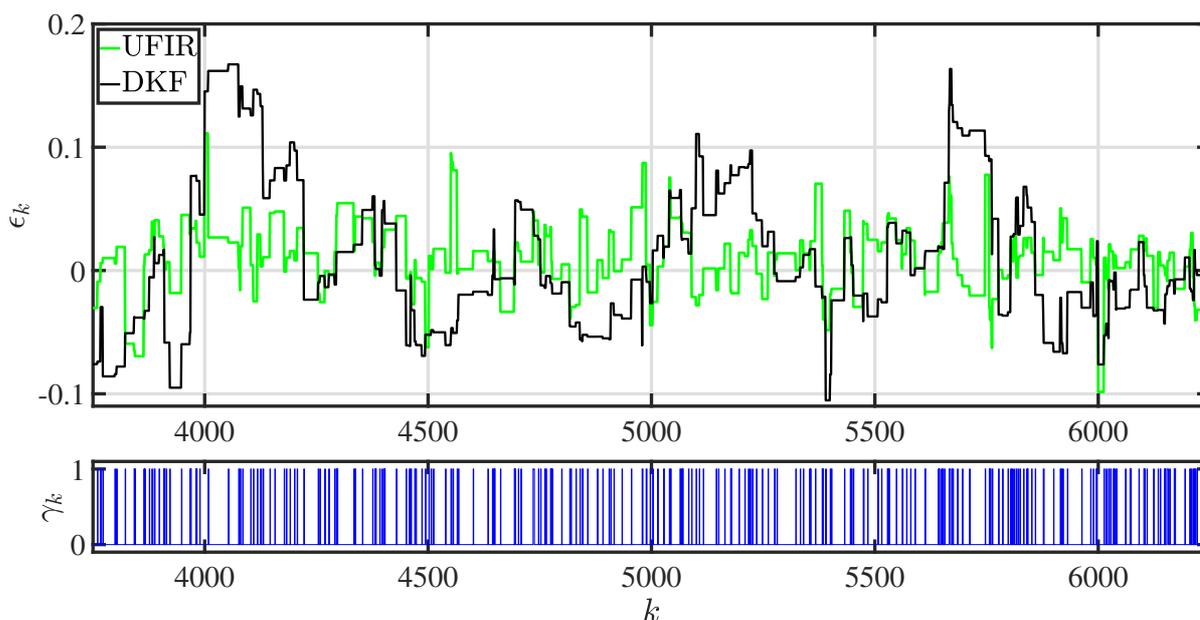


Abbildung 4.7: Schätzfehler des Parameters e_1 bei $\gamma = 0, 1$

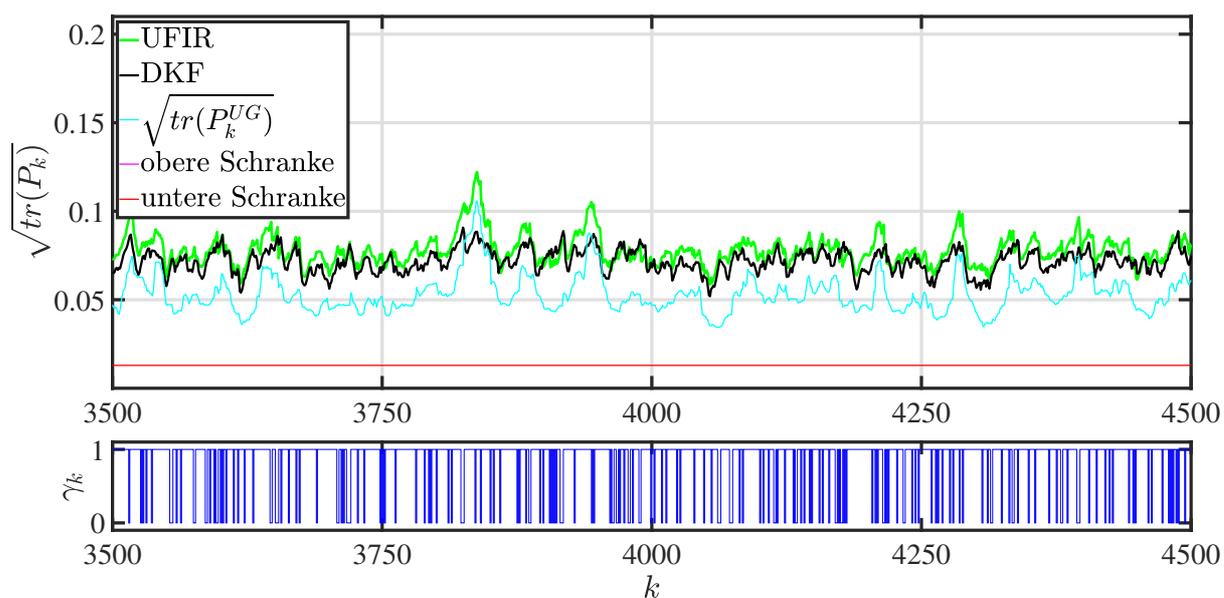


Abbildung 4.8: Schätzgüte bei $\gamma = 0, 8$ (Die obere Schranke wird nicht abgebildet.)

ist, hat selbst zum minimalvarianten Schätzer einen relativ großen Abstand, so dass es sich auch bei dieser um eine eher konservative Schranke handelt. Die in den Theoremen 5 und 6 beschriebenen Schranken werden aber grundsätzlich im Rahmen der Simulation für den verwendeten Ansatz bestätigt. Im Allgemeinen erscheinen beide Schranken für das betrachtete Beispiel zu konservativ. Insbesondere die obere ist sehr weit gefasst.

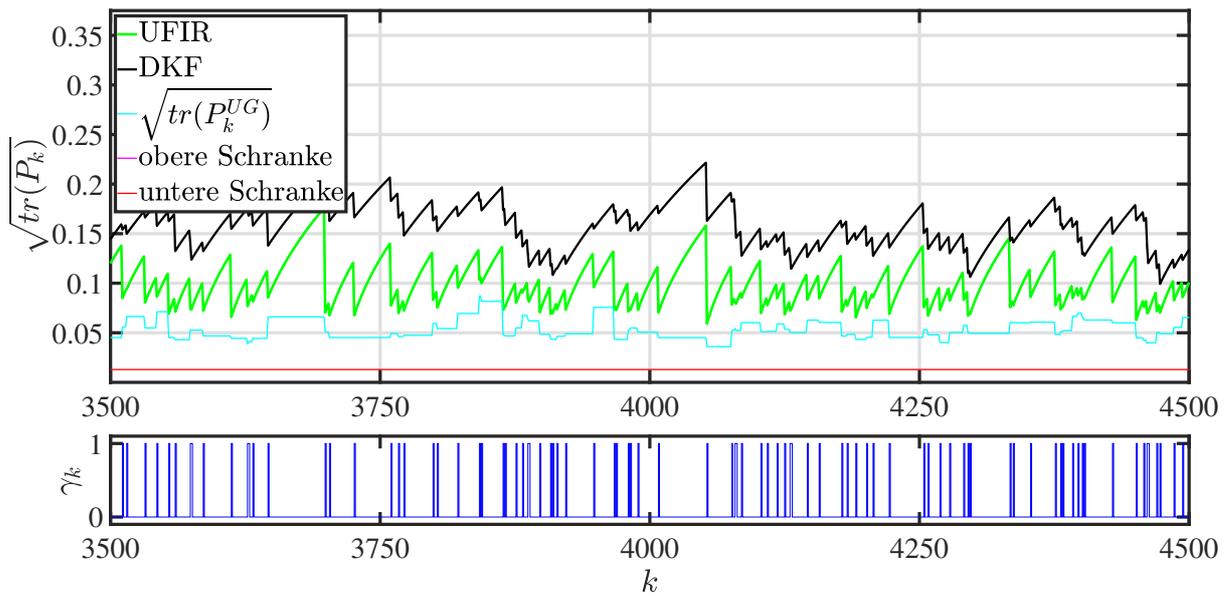


Abbildung 4.9: Schätzgüte bei $\gamma = 0, 1$ (Die obere Schranke wird nicht abgebildet.)

4.2 UFIR-Parameteridentifikation mit multiplen Imputationen bei fehlenden Messungen

In Siegl und Svaricek (2020) sowie im Abschnitt 4.1 wird ein Co-Design-Ansatz zur UFIR-Parameteridentifikation in einer Netzwerkumgebung gewählt. Ein „intelligenter Sensor“ erzeugt dabei eine Messdatensequenz entsprechend der Horizontlänge und versendet diese in einem Paket über das Netzwerk. In diesem Abschnitt liegt wie beispielsweise Schenato (2006, 2008), Shi und Fang (2009), Sinopoli *et al.* (2004) sowie Yang *et al.* (2018) die Annahme zugrunde, dass der Sensor an der Regelstrecke einen einzelnen Abtastwert des Ausgangssignals über das Netzwerk verschickt und sich dabei ein potentieller Datenverlust einstellt. Dies ist in der Praxis gegeben, wenn der Co-Design-Ansatz nicht möglich ist, z. B. wenn die Netzwerkkapazität nicht ausreicht oder ein intelligentes Messglied nicht implementiert werden kann. Das Kommunikationsnetzwerk arbeitet hierbei entsprechend der Beschreibung in Abschnitt 2.2. Die untersuchte Problemstellung zeigt Abbildung 4.10. Aufgrund der beschriebenen Kommunikationsstruktur mit einzelnen Messungsverlusten sind folgende Maßnahmen für die Verwendung des UFIR-Parameterschätzers über das Netzwerk erforderlich:

- Um die mathematische Beschreibung zu vereinfachen und den Einfluss der stochastischen Messungsverluste auf die Schätzverfahren selbst zu reduzieren, wird nach Ding und Chen (2004a) sowie Ding und Ding (2009) im Regressionsvektor das rauschfreie Ausgangssignal eines **Hilfsmodells** verwendet.
- Bei einem Paketverlust nimmt der Wert, der dem Schätzalgorithmus vorliegt, beliebige Werte an. Damit das UFIR-Filter für die Parameterschätzung verwendet werden kann, erfolgt die Kompensation der verlorenen Messungen mit Hilfe **multipler Imputation**. Diese Methode aus der Statistik geht auf Rubin (1978) zurück. Dabei wird jeder fehlende Wert durch zwei oder mehrere Imputationen ersetzt, die wie in Albertos *et al.* (1999) oder Uribe-Murcia *et al.* (2020) auf einer **Prädiktion des Systemausgangs** basieren.

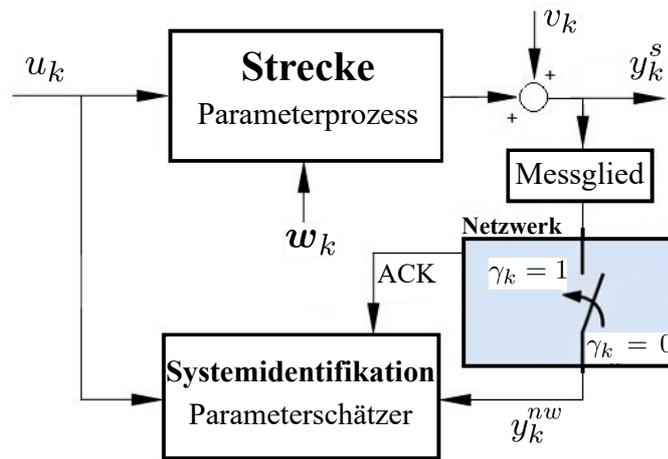


Abbildung 4.10: Parameterschätzung über ein (TCP-basiertes) Netzwerk mit Paketverlusten

c) Sinopoli *et al.* (2004) stellen als Performance-Vorteil ihres Ansatzes bei der Verwendung eines Kalman-Filters mit unendlicher Impulsantwort die Verarbeitung der gesamten Ankunftssequenz einzelner Messgrößen gegenüber den Ansätzen von Nilsson *et al.* (1998) sowie Costa und Guerra (2002) heraus, die nur das Wissen über die letzte Ankunft verarbeiten. Der UFIR-Parameterschätzer verwendet in diesem Abschnitt die Ankunftssequenz des aktuellsten Zeithorizonts und nutzt für diese auch einen **Speicher**.

Durch die Verwendung der Ausgangssignalprädiktion im Rahmen der Methode der multiplen Imputation (MI) entsteht somit der **MI-UFIR-Parameterschätzer** bei Messungsverlusten. Eine Vorstufe ohne die MI bezeichnet Vazquez-Olguin *et al.* (2017) als prädiktiven UFIR-Zustandsschätzer. Für das **MI-UFIR-Verfahren** werden in diesem Abschnitt die Schätzgüte analysiert (Lemmata 12, 13 und 14) sowie der Nachweis der Stabilität des MI-UFIR-Parameterschätzers und der Ausgangssignalprädiktion (Theoreme 8 und 9) erbracht. Nach einer Diskussion der Eigenschaften des beschriebenen Ansatzes verdeutlicht ein numerisches Beispiel die gewonnenen Erkenntnisse.

4.2.1 Die MI-UFIR-Parameterschätzung bei Messungsverlusten im Netzwerk

Das (TCP-basierte) Netzwerk nach Abschnitt 2.2 soll die Kommunikation zwischen Strecke und Parameterschätzer sicherstellen. Es wird angenommen, dass der Sensor an der Regelstrecke einen einzelnen Abtastwert des Ausgangssignals über das Netzwerk versendet. Dabei treten stochastische Paketverluste auf. Das Anregungssignal wird dabei mit einer direkten Verbindung dem Parameterschätzer zur Verfügung gestellt. Abbildung 4.10 zeigt den schematischen Aufbau. Wie in Vazquez-Olguin *et al.* (2017) [S. 1821], Vazquez-Olguin *et al.* (2018) [S. 358] sowie Uribe-Murcia *et al.* (2020) [S. 2157] soll die nachfolgende Annahme gültig sein:

Annahme 2. *Es wird angenommen, dass die ersten N Messungen ohne Paketverlust beim Schätzer ankommen. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass eine erste Schätzung (bei $k = N - 1$) ohne Netzwerkeinfluss vorliegt.*

Anmerkung: Annahme 2 ist eine notwendige Bedingung für die Prädiktion des Systemausgangssignals in Abschnitt 4.2.1.3 und damit zur Verwendung der MI. Außerdem spielt sie bei

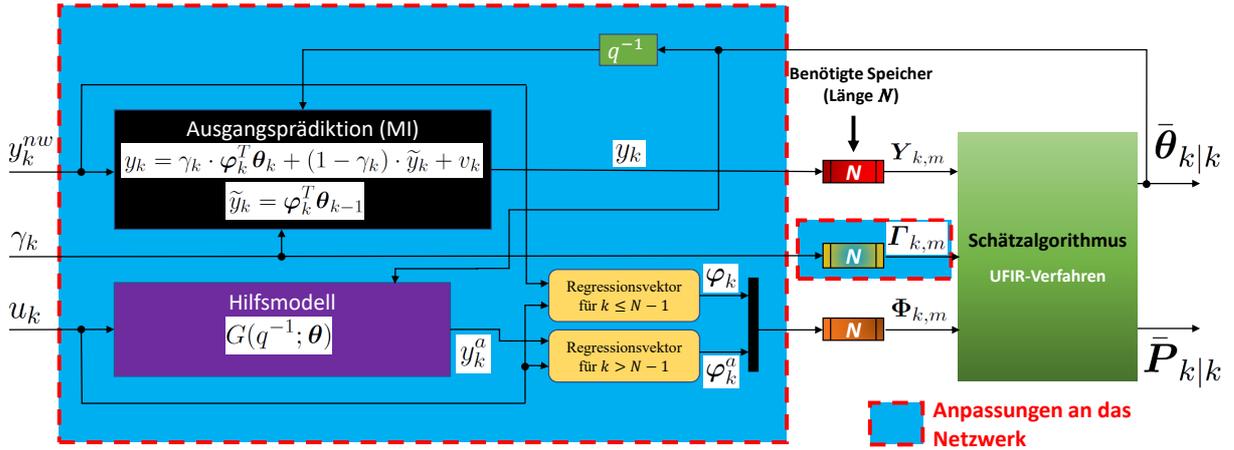


Abbildung 4.11: Anpassungen an die Kommunikationsstruktur

der Nutzung des Hilfsmodells (für $k \leq N - 1$) eine entscheidende Rolle (Abschnitt 4.2.1.2).

Die in den nachfolgenden Abschnitten erläuterten Anpassungen sollen es ermöglichen, das UFIR-Verfahren nach Kapitel 3 auch bei einzelnen Messungsverlusten zu verwenden und bilden somit die Grundbestandteile des im Weiteren als **MI-UFIR-Parameteridentifikation** bezeichneten Schätzalgorithmus. Die einzelnen Modifikationen können Abbildung 4.11 entnommen werden.

4.2.1.1 Benötigte Speicher

Der MI-UFIR-Parameterschätzer nutzt die Information über Paketankünfte der letzten N Abtastschritte auf dem aktuellsten Horizont der Länge N , von $m = k - N + 1$ bis k . Es werden daher folgende **Speicher** am Parameterschätzer eingeführt:

- Für die Systemausgangswerte nach Gleichung (2.10) wird der Speicher

$$\mathbf{Y}_{k,m} := [y_k \quad y_{k-1} \quad \cdots \quad y_m]^T \quad (4.14)$$

verwendet.

- Der Regressionsvektor wird in

$$\mathbf{\Phi}_{k,m} := [\varphi_k \quad \varphi_{k-1} \quad \cdots \quad \varphi_m]^T \quad (4.15)$$

abgelegt und

- für die Kommunikationsvariable γ_k wird der Speicher:

$$\mathbf{\Gamma}_{k,m} := [\gamma_k \quad \gamma_{k-1} \quad \cdots \quad \gamma_m]^T \quad (4.16)$$

definiert. Er wird für die Bestimmung der Schätzgüte benötigt.

Die Parameterschätzung über das Netzwerk und deren Schätzfehlerkovarianzmatrix erhält man auf Basis bedingter Erwartungswerte:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw} := E[\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{Y}_{k,m}; \boldsymbol{\Gamma}_{k,m}], \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{nw} := E[(\boldsymbol{\theta}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k})(\boldsymbol{\theta}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k})^T | \mathbf{Y}_{k,m}; \boldsymbol{\Gamma}_{k,m}]. \quad (4.18)$$

Anmerkungen:

- a) $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}^{nw}$ und $\mathbf{P}_{k|k}^{nw}$ sind Zufallsvariablen, da sie von γ_k respektive der Ankunftssequenz über dem Horizont $\boldsymbol{\Gamma}_{k,m}$ abhängen.
- b) Da die Schätzgüte beim UFIR-Verfahren über die Horizontlänge und damit die Speichergröße optimiert wird, kann ein begrenzter Speicher die Genauigkeit der Schätzung negativ beeinflussen. Hierbei sind Abweichungen von der optimalen Horizontlänge (Abschnitt 3.5) von $\pm 30\%$ noch akzeptabel [Zhao *et al.* (2018a), S. 6398].

4.2.1.2 Die Hilfsmodellmethode

Um eine stochastische Abhängigkeit des Regressionsvektors $\boldsymbol{\varphi}_k$ von der Kommunikationsvariablen γ_k bzw. vom Paketverlust zu vermeiden, wird entsprechend Ding und Chen (2004a) sowie Ding und Ding (2009) eine auf einem Hilfsmodell (Auxiliary Model/AM) basierende Identifikationsmethode eingesetzt. Diese bezeichnen Ding und Chen (2004a) [S. 1741] auch als Ausgangsfehlermethode (Output-Error-Methode/OEM) oder Referenzmodellmethode.

Lemma 10. Hilfsmodellmethode (AMM): *Es gelte Annahme 2. Für die Bildung des Regressionsvektors ($\boldsymbol{\varphi}_k$) im Identifikationsmodell werden die Ausgangswerte des folgenden Hilfsmodells*

$$y_k^a = G_a(q^{-1}; \boldsymbol{\theta}) \cdot u_k \quad (4.19)$$

verwendet und es folgt

$$\boldsymbol{\varphi}_k^a = \begin{bmatrix} -y_{k-1}^a & -y_{k-2}^a & \cdots & -y_{k-n_E}^a \\ u_k & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_E} \end{bmatrix}^T \quad (4.20)$$

als Regressionsvektor. Für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}_k$ wird dabei die Schätzung $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ verwendet.

Beweis. In Gleichung (2.10) wird der Regressionsvektor

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \begin{bmatrix} -y_{k-1} & -y_{k-2} & \cdots & -y_{k-n_E} \\ u_k & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_E} \end{bmatrix}^T \quad (4.21)$$

mit den gemessenen Abtastwerten des Systemausgangs y_{k-i} gebildet. Diese sind allerdings von der Kommunikationsvariablen γ_k abhängig. Daher kann das UFIR-Schätzverfahren nicht direkt angewandt werden. Aus diesem Grund wird der Ausgang des Hilfsmodells

$$y_k^a = G_a(q^{-1}; \boldsymbol{\theta}) \cdot u_k \quad \text{bzw.} \quad y_k^a = (\boldsymbol{\varphi}_k^a)^T \boldsymbol{\theta}_k$$

genutzt und

$$\varphi_k^a = \begin{bmatrix} -y_{k-1}^a & -y_{k-2}^a & \cdots & -y_{k-n_E}^a \\ u_k & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_B} \end{bmatrix}^T .$$

Die Übertragungsfunktion des Hilfsmodells $G_a(q^{-1}; \boldsymbol{\theta})$ folgt dabei aus Gleichung (2.5), wobei für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}_k$ die Schätzung $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ verwendet wird. Das Hilfsmodell kann unter der Prämisse, dass das UFIR-Verfahren nicht auf Anfangsbedingungen angewiesen ist nur verwendet werden, wenn die Annahme 2 gültig ist und somit für $k \leq N - 1$ der Regressionsvektor ohne AM gebildet wird. Nach Ding und Chen (2004a) [S. 1741 ff.] sowie Ding und Ding (2009) [S. 544 ff.] kann auf

$$y_k = (\varphi_k^a)^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k \quad (4.22)$$

das Least-Squares-Verfahren (und damit auch der UFIR-Algorithmus) angewendet werden. In Ding und Chen (2004a) [S. 1741 ff.] wird dies Hilfsmodell-Least-Squares-Algorithmus (Auxiliary Model Least Squares/AMLS) genannt und dessen Konvergenz bewiesen. Adams *et al.* (1994) [S. 164 f.] betrachten dieselbe Thematik für ARX-Modelle. \square

Hinweis: Um die Notation zu vereinfachen, wird im Folgenden der Regressionsvektor weiterhin mit φ_k bezeichnet. Ein Verweis auf dessen Bildung mit einem Hilffsystem erfolgt nur, wenn dies aus dem Kontext nötig ist.

Anmerkungen:

- a) Durch die Anwendung der AMM erfolgt der Übergang zu einem Ausgangsfehlermodell (Output-Error-Modell/OE). Für den Modellfehler gilt dabei

$$\zeta_k := y_k - G_a(q^{-1}; \boldsymbol{\theta}) \cdot u_k . \quad (4.23)$$

Dies ist die Differenz zwischen dem gemessenen Ausgangssignal und dem des rauschfreien (Hilfs-)Modells [Söderström und Stoica (1989), S. 198].

- b) Die Bedingung der Persistenz der Anregung gemäß Abschnitt 2.1.2 gelten ebenso für die Anwendung des AMLS und damit der AMM im UFIR-Algorithmus. Ferner muss die Varianz des Messrauschens nach oben beschränkt sein ($R \leq R^{oG} < \infty$). [Ding und Chen (2004a), S. 1741 ff. sowie Ding und Ding (2009), S. 544 ff.]

4.2.1.3 Prädiktion des Systemausgangssignals und multiple Imputation

Bei einem Paketverlust ($\gamma_k = 0$) kommt keine Messung beim Schätzalgorithmus an. Laut Zhang *et al.* (2015) können fehlende Daten Abweichungen im statistischen Schätzprozess verursachen, deren Existenz und Schwere vom Verlustmechanismus abhängig sind. Dieser steht für die Analyse aber in der Regel nicht zur Verfügung. Wie weiter oben beschrieben, erfolgt bei IIR-Filtern die Kompensation stochastisch fehlender Messungen durch eine Prädiktion des Systemausgangs [Albertos *et al.* (1999) sowie Shi und Fang (2009)]. Wird ein Kalmanfilter genutzt, so ist ferner die Annahme üblich, dass die Varianz des Messrauschens im Falle eines Verlustes gegen unendlich geht. Damit wird bei einem Messungsverlust nur der Prädiktionsschritt zur Bestimmung des Schätzwertes ausgeführt (Sinopoli *et al.*, 2004). Bei der Verwendung von FIR-Filtern, wie sie

dieser Arbeit zugrunde liegen (Kapitel 3 und Abschnitt A.3 im Anhang), kann eine Prädiktion des Signalausgangswerts nicht während der Rekursion auf dem Horizont erfolgen, d. h.

$$y_l = \varphi_l^T \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1}$$

sollte nicht als Ersatzwert für eine verlorene Messung in Gleichung (3.31) genutzt werden. Dies hat folgende Gründe:

- Beruht der prädierte Systemausgang auf $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1}$, so ist dessen Schätzgüte schlechter als bei Verwendung von $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}$, denn letzterer basiert auf der Anzahl Messungen N_{opt} , für die die Schätzfehlerkovarianz optimiert wurde (siehe Abschnitt 3.5).
- Ferner können sich numerische Probleme bei der Implementierung ergeben. Beim UFIR-Verfahren benötigt u. a. die Startschätzung (3.29) p Messwerte. Auch der Schätzer ohne Startschätzung benötigt alle N Messungen. Da dieser Algorithmus dem Kalmanfilter auf bewegtem Horizont nach Kwon *et al.* (1999) [S. 1788 f.] nachempfunden ist, lässt sich hierbei das Problem des beschränkten Horizonts verdeutlichen. In Abschnitt A.3.4 nutzt dieses Kalmanfilter die prädierte Ausgangswerte nicht. Dadurch kann es passieren, dass der singuläre Bereich in Abbildung A.1 nicht verlassen wird.

Zur Kompensation von Messungsverlusten beim UFIR-Parameterschätzer werden im Folgenden multiple Imputationen (MI) verwendet. Nach Wilson *et al.* (2018) kann die Methode der multiplen Imputation ein interdisziplinärer Ansatz zur Kompensation fehlender Daten in Regelungssystemen sein. In Rubin (1978) wird vorgeschlagen, fehlende Werte in Umfragen durch mehrere Imputationen zu ersetzen. Für jeden dieser simulierten Werte erfolgt dann die statistische Auswertung, deren Ergebnis am Ende wieder zusammengeführt wird.

Die Netzwerkmodellierung gemäß Abschnitt 2.2 vorausgesetzt, muss der Verlustmechanismus für die Schätzung nicht bekannt sein: Es ergibt sich eine identische A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung des Parametervektors für den verlustbehafteten und den komplettierten Datensatz [Rubin (1987), S. 102 ff.]. Der Satz von Bayes macht dies deutlich,

$$Pr(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{Y}_{k,m}, \boldsymbol{\Gamma}_{k,m}) = Pr(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{Y}_{k,m}) \cdot \frac{Pr(\boldsymbol{\Gamma}_{k,m} | \mathbf{Y}_{k,m}, \boldsymbol{\theta}_k)}{Pr(\boldsymbol{\Gamma}_{k,m} | \mathbf{Y}_{k,m})}. \quad (4.24)$$

Hierbei bezeichnet $Pr(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{Y}_{k,m}, \boldsymbol{\Gamma}_{k,m})$ die A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung des Parametervektors basierend auf der verlustbehafteten Messungssequenz, während sich $Pr(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{Y}_{k,m})$ auf den mit MI komplettierten Datensatz bezieht.¹⁴ Die Modellierung des Paketverlusts im Netzwerk mit Hilfe eines Bernoulli-Prozesses führt dazu, dass der Quotient in Gleichung (4.24) zu eins wird und so mit den komplettierten Daten dieselbe Parameterschätzung erfolgt, wie mit der verlustbehafteten Messungssequenz. Uribe-Murcia *et al.* (2020) betrachten den Messungsverlust und dessen Kompensation durch die MI bei der Analyse der Schätzgüte nicht. Intuitiv hat aber ein Informationsverlust Auswirkungen auf die Genauigkeit einer Schätzung. Dem entsprechend wird dieser in der vorliegenden Arbeit berücksichtigt (siehe Abschnitt 4.2.3).

Die Methode der multiplen Imputationen ist nicht echtzeitfähig, da die drei oben beschriebenen Schritte in deren Anwendung nicht online ausgeführt werden können. Somit wird nur der Imputationsschritt auf Basis einer Prädiktion des Ausgangssignals verwendet [Uribe-Murcia *et al.*

¹⁴ In leicht missbräuchlicher Verwendung der Notation steht $\mathbf{Y}_{k,m}$ hierbei für alle Abtastwerte des Systemausgangs.

(2020), S. 2156]. Die multiplen Imputationen werden mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells und der Ergänzung von weißem Rauschen generiert [Rubin (1987), S. 166 f. und van Buuren (2018), online]. Die Verwendung des prädizierten Systemausgangs erfolgt dabei in Anlehnung an Albertos *et al.* (1999) [S. 1672 f.] sowie Shi und Fang (2009) [S. 541].

Lemma 11. *Annahme 2 auf Seite 70 sei gültig. Bei der Verwendung eines Netzwerks mit den Eigenschaften nach Abschnitt 2.2 wird bei einem Paketverlust der Sensorwert durch eine (System-) Ausgangsprädiktion ersetzt. Für $\gamma_k = 0$ gilt*

$$y_k = \tilde{y}_k + v_k$$

mit

$$\tilde{y}_k = \varphi_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} = \varphi_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}. \quad (4.25)$$

Beweis. Siehe Shi und Fang (2009) [S. 543, 551] sowie Abschnitt 4.2.4.2. \square

Unter Einbeziehung der *Kommunikationsvariable* γ_k wird also für die Identifikation das lineare Regressionsmodell

$$y_k = \gamma_k \cdot \varphi_k^T \boldsymbol{\theta}_k + (1 - \gamma_k) \cdot \tilde{y}_k + v_k \quad (4.26)$$

verwendet. Hierbei ist

$$\tilde{y}_k = \varphi_k^T \boldsymbol{\theta}_{k-1}. \quad (4.27)$$

Steht ein Messwert zur Verfügung ($\gamma_k = 1$), folgt aus (4.26) $y_k = \varphi_k^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k$. Im Falle eines Messungsverlusts ($\gamma_k = 0$) werden die fehlende Daten mit Hilfe von MI über $y_k = \tilde{y}_k + v_k$ bereitgestellt. Dabei gilt die Annahme, dass $\boldsymbol{\theta}_{k-1}$ bekannt ist. Somit kann $\boldsymbol{\theta}_{k-1}$ in (4.27) auch durch den Schätzwert $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}$ ersetzt werden. [Uribe-Murcia *et al.* (2020), S. 2156]

Anmerkungen:

- a) Die Gültigkeit der Annahme 2 ist erforderlich, um das Lemma 11 auf Basis eines prädizierten Systemausgangs verwenden zu können.
- b) Die Bildung der MI basierend auf der Prädiktion des Systemausgangssignals und der Ergänzung des (weißen) Messrauschens ist eine Vereinfachung, um die Implementierung in einem Online-Algorithmus ressourcenschonend zu ermöglichen. Durch die Verwendung des mittelwertfreien Messrauschens in der MI wird zur Bestimmung der Parameterschätzung nur der prädizierte Wert nach Gleichung (4.27) benötigt [vgl. Abschnitt 3.1 und Uribe-Murcia *et al.* (2020)]. Für die Ermittlung der Schätzfehlerkovarianz hingegen wird die verrauschte Prädiktion verwendet. Da hierbei die Parameterunsicherheit unberücksichtigt bleibt, führt dies bei häufigen Paketverlusten zu einer fälschlicherweise zu hohen Schätzgüte (van Buuren, 2018). Die Kompensation verlorener Messungen nach Lemma 11 ist also nur für geringe Verlustwahrscheinlichkeiten anwendbar.

4.2.2 Die MI-UFIR-Algorithmen

Mit den Anpassungen nach Abschnitt 4.2.1.3 erhält man aus den in Kapitel 3 beschriebenen UFIR-Parameterschätzverfahren die Algorithmen 4.1 und 4.2. Hierbei werden die MI bei Messungsverlusten ($\gamma_k = 0$) mit der Ausgangssignalprädiktion gemäß Lemma 11 in den Schritten 4 bis 6 umgesetzt [vgl. auch Uribe-Murcia *et al.* (2020), S. 2157].

Algorithmus 4.1 Rekursiver MI-UFIR-Parameterschätzer**Gegeben:**

- a) Identifikationsmodell nach (2.9) und (2.10)
- b) Rauscheigenschaften gemäß Gleichung (2.11)
- c) Theorem 1
- d) Persistente Anregung (Abschnitt 2.1.2)
- e) Horizontlänge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k
- f) Netzwerkverhalten nach 2.2 mit Annahme 2
- g) Speicher $\Phi_{k,m}$ mit den Regressionsvektoren aus dem Hilfsmodell nach Lemma 10
- h) Kommunikationsvariable γ_k und Systemausgangssignal y_k

Gesucht:

- a) Parameterschätzung $\bar{\theta}_{k|k}$ von θ_k

1: **begin**2: **for** $k = N - 1 : \infty$ **do**3: $m = k - N + 1$ und $s = m + p - 1$ 4: **if** $\gamma_k = 0$ **then**

5:

$$y_k = \varphi_k^T \bar{\theta}_{k-1|k-1} \quad (4.28)$$

6: **end if**

7:

$$\mathbf{M}_s = (\Phi_{s,m}^T \Phi_{s,m})^{-1} = \left[\sum_{i=m}^s \varphi_i \varphi_i^T \right]^{-1} \quad (4.29)$$

Hierbei ist $s = l - 1$ und l läuft von $\max(m + p, m + 2)$ bis k , so dass \mathbf{M}_s existiert.

8: Bestimmung der *Startschätzung in Block-Form*

$$\bar{\theta}_{s|s} = \mathbf{M}_s \Phi_{s,m}^T \mathbf{Y}_{s,m} \quad (4.30)$$

9: **for** $l = s + 1 : k$ **do**10: Bestimmung des *generalisierten Noise-Power-Gain* (GNPG)

$$\mathbf{M}_l = (\mathbf{M}_{l-1}^{-1} + \varphi_l \varphi_l^T)^{-1} = \mathbf{M}_{l-1} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \varphi_l \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1}}{1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l} \quad (4.31)$$

11: Rekursive Bestimmung des Schätzwertes

$$\bar{\theta}_{l|l} = \bar{\theta}_{l-1|l-1} + \mathbf{M}_l \varphi_l (y_l - \varphi_l^T \bar{\theta}_{l-1|l-1}) \quad (4.32)$$

12: **end for**13: Die *Parameterschätzung* folgt aus $\bar{\theta}_{k|k} = \bar{\theta}_{l|l}$ für $l = k$.14: **end for**15: **end**

Algorithmus 4.2 Rekursiver MI-UFIR-Parameterschätzer ohne Startschätzung**Gegeben:**

- a) Identifikationsmodell nach (2.9) und (2.10)
- b) Rauscheigenschaften gemäß Gleichung (2.11)
- c) Theorem 1
- d) Persistente Anregung (Abschnitt 2.1.2)
- e) Horizontlänge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k
- f) Netzwerkverhalten nach 2.2 mit Annahme 2
- g) Speicher $\Phi_{k,m}$ mit den Regressionsvektoren aus dem Hilfsmodell nach Lemma 10
- h) Kommunikationsvariable γ_k und Systemausgang y_k

Gesucht:

- a) Parameterschätzung $\bar{\theta}_{k|k}$ von θ_k

1: **begin**2: **for** $k = N - 1 : \infty$ **do**3: $m = k - N + 1$ 4: **if** $\gamma_k = 0$ **then**

5:

$$y_k = \varphi_k^T \bar{\theta}_{k-1|k-1} \quad (4.33)$$

6: **end if**7: *Initialisierung* der Anfangsbedingung des Horizonts:

$$\bar{\xi}_{l-1|l-1} = \bar{\xi}_{m-1|m-1} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_{l-1}^{-1} = \mathbf{M}_{m-1}^{-1} = \mathbf{0}$$

8: **for** $l = m : k$ **do**9: Rekursive Bestimmung von $\bar{\xi}_{k|k}$ und \mathbf{M}_k :

$$\bar{\xi}_{l|l} = \bar{\xi}_{l-1|l-1} + \varphi_l y_l \quad (4.34)$$

$$\mathbf{M}_l^{-1} = \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + \varphi_l \varphi_l^T$$

10: **end for**11: $\bar{\xi}_{k|k} = \bar{\xi}_{l|l}$ (für $l = k$)12: $\mathbf{M}_k^{-1} = \mathbf{M}_l^{-1}$ (für $l = k$)13: Die *Parameterschätzung* folgt aus

$$\bar{\theta}_{k|k} = \mathbf{M}_k \bar{\xi}_{k|k}. \quad (4.35)$$

14: Das *generalisierte Noise-Power-Gain* (GNPG/\mathbf{M}_k) ergibt sich durch Inversion.15: **end for**16: **end**

4.2.3 Schätzfehler und Schätzfehlerkovarianz des MI-UFIR-Parameterschätzers

Obwohl das UFIR-Filter BIBO-stabil ist und nicht zur Divergenz neigt (Shmaliy *et al.*, 2017), verursacht der Messungsverlust bei der Übertragung über das Netzwerk zusätzliche Fehler, die im Folgenden analysiert werden sollen. Dabei muss die MI zur Kompensation des Informationsdefizits berücksichtigt werden.

Hinweis: Die Lemmata 12 bis 14 beschreiben die Bestimmung der Schätzfehlerkovarianz für das MI-UFIR-Verfahren. Dabei wird die optimale Horizontlänge N_{opt} als bekannt vorausgesetzt bzw. es wird angenommen, dass diese, wie in Abschnitt 3.5 beschrieben wird, bereits ermittelt wurde.

4.2.3.1 Schätzfehlerkovarianz des MI-UFIR-Parameterschätzers in Blockform

In Blockform lässt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix des MI-UFIR-Parameterschätzers nach folgenden Lemmata bestimmen.

Lemma 12. *Für den MI-UFIR-Parameterschätzer, beschrieben durch die Gleichungen (4.28) bis (4.32) bzw. (4.33) bis (4.35), ergibt sich in Verbindung mit der Modellbeschreibung aus Abschnitt 4.2.1 die Schätzfehlerkovarianzmatrix zu*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\
&= \mathbf{M}_{k,m} \cdot \left\{ \sum_{j=m}^{k-1} \left[\left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right. \right. \\
&\quad + (1 - \gamma_{j+1}) \left(\boldsymbol{\varphi}_{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) + \left. \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}_{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^T \right] \\
&\quad + \sum_{i=m}^k (1 - \gamma_i) \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \left. \right\} \cdot \mathbf{M}_{k,m} + R \cdot \mathbf{M}_{k,m}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Beweis. Mit der Blockform nach Gleichung (3.22)

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i y_i \right]. \tag{4.37}$$

und der Festlegung des GNPG auf dem Horizont

$$\mathbf{M}_{k,m} := \left[\sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} = \frac{1}{R} \cdot \mathfrak{S}_{k,m}^{-1} \tag{4.38}$$

folgt

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{M}_{k,m} \cdot \sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i y_i. \tag{4.39}$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 11 und Gleichung (4.27) gilt dabei

$$y_i = \gamma_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\theta}_i + (1 - \gamma_i) \cdot \tilde{y}_i + v_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\theta}_i + v_i - (1 - \gamma_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{w}_{i-1}.$$

Mit $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_k - \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j$ erhält man:

$$y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\theta}_k + v_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j - (1 - \gamma_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{w}_{i-1}. \tag{4.40}$$

Aus Gleichung (4.39) folgt dann:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{M}_{k,m} \sum_{i=m}^k [\boldsymbol{\varphi}_i v_i - \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j - (1 - \gamma_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{w}_{i-1}]. \quad (4.41)$$

Und der Schätzfehler ergibt sich zu

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \boldsymbol{\theta}_k - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{M}_{k,m} \sum_{i=m}^k [\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{w}_j - \boldsymbol{\varphi}_i v_i + (1 - \gamma_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{w}_{i-1}]. \quad (4.42)$$

Unter Berücksichtigung der Rauscheigenschaften (2.11) erhält man hieraus nach einigen Umformungen die Schätzfehlerkovarianzmatrix:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\ &= \mathbf{M}_{k,m} \cdot \left\{ \sum_{j=m}^{k-1} \left[\left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) + (1 - \gamma_{j+1}) (\boldsymbol{\varphi}_{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^T \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}_{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^T \right) \right] + \sum_{i=m}^k (1 - \gamma_i) \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right\} \cdot \mathbf{M}_{k,m} + R \cdot \mathbf{M}_{k,m}. \end{aligned}$$

[Vgl. auch Deyst und Price (1968), S. 703 sowie Deyst (1973), S. 562 f.] □

Alternativ lässt sich auch eine Blockform bestimmen, die auf den Gleichungen (3.3) bis (3.22) beruht (Shmaliy, 2010, 2011).

Lemma 13. Für die UFIR-Parameterschätzer nach Theorem 1, basierend auf den Gleichungen (3.3) und (3.4) sowie den Modifikationen nach Abschnitt 4.2.1, ergibt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m}) \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m})^T + \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{H}}_{k,m}^T. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Hierbei ist $\bar{\mathbf{B}}_{k,m}$ die erste Reihe in $\mathbf{B}_{k,m}$ und es gilt

$$\bar{\mathbf{Q}} := E[\mathbf{W}_{k-1,m-1} \mathbf{W}_{k-1,m-1}^T] = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q}}_N), \quad (4.44)$$

$$\bar{\mathbf{R}} := E[\mathbf{V}_{k,m} \mathbf{V}_{k,m}^T] = \text{diag}(\underbrace{R, R, \dots, R}_N) \quad (4.45)$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{G}}_{k,m} := \begin{bmatrix} \gamma_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T & \boldsymbol{\varphi}_k^T & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_k^T \\ \mathbf{0} & \gamma_{k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \gamma_m \cdot \boldsymbol{\varphi}_m^T \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Beweis. Die erste Gleichung in (3.3) lautet mit $\bar{\mathbf{B}}_{k,m}$ als erste Reihe in $\mathbf{B}_{k,m}$:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_m + \bar{\mathbf{B}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1}. \quad (4.47)$$

In Kombination mit Gleichung (3.22) ergibt sich der Schätzfehler zu

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \boldsymbol{\theta}_k - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \boldsymbol{\theta}_m + \bar{\mathbf{B}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{Y}_{k,m}. \quad (4.48)$$

Aus Gleichung (3.4) erhält man unter der Ausgangssignalprädiktion und MI bei fehlenden Messungen

$$\mathbf{Y}_{k,m} = \boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m + \tilde{\mathbf{G}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} + \mathbf{V}_{k,m} \quad (4.49)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{G}}_{k,m} = \begin{bmatrix} \gamma_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T & \boldsymbol{\varphi}_k^T & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_k^T \\ \mathbf{0} & \gamma_{k-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \gamma_m \cdot \boldsymbol{\varphi}_m^T \end{bmatrix}.$$

Werden (4.49) und (3.17) in den Subtrahenden von (4.48) eingesetzt, erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_k &= \boldsymbol{\theta}_m + \bar{\mathbf{B}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} \\ &\quad - (\boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T \boldsymbol{\Phi}_{k,m})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{k,m}^T (\boldsymbol{\Phi}_{k,m} \boldsymbol{\theta}_m + \tilde{\mathbf{G}}_{k,m} \mathbf{W}_{k-1,m-1} + \mathbf{V}_{k,m}) \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m}) \mathbf{W}_{k-1,m-1} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \mathbf{V}_{k,m}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Für die Schätzfehlerkovarianzmatrix ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m}) E[\mathbf{W}_{k-1,m-1} \mathbf{W}_{k-1,m-1}^T] (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m})^T \\ &\quad + \bar{\mathbf{H}}_{k,m} E[\mathbf{V}_{k,m} \mathbf{V}_{k,m}^T] \bar{\mathbf{H}}_{k,m}^T \\ &= (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m}) \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{B}}_{k,m} - \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \tilde{\mathbf{G}}_{k,m})^T + \bar{\mathbf{H}}_{k,m} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{H}}_{k,m}^T. \end{aligned}$$

□

4.2.3.2 Rekursive Berechnung der Schätzfehlerkovarianz des MI-UFIR-Parameterschätzers

Nach Zhao *et al.* (2017b) [S. 556 f.] lässt sich die Schätzfehlerkovarianz mit Hilfe der Joseph-stabilisierten Version der Schätzfehlerkovarianz-Korrektorgleichung bestimmen. Unter Berücksichtigung der Messungsverluste und deren Kompensation mittels MI beschreibt das folgende Lemma die rekursive Bestimmung der Schätzfehlerkovarianz:

Lemma 14. *Für den MI-UFIR-Parameterschätzer, beschrieben durch die Gleichungen (4.28) bis (4.32) bzw. (4.33) bis (4.35), ergibt sich der Startwert der Schätzfehlerkovarianzmatrix $\bar{\mathbf{P}}_s$ nach Lemma 12 in Blockform, in dem man k durch $s = m + p - 1$ ersetzt.*

Mit der Korrektur-Verstärkung und dem GNPG (3.30)

$$\bar{\mathbf{K}}_l = \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \quad (4.51)$$

folgt die Schätzfehlerkovarianz dann rekursiv aus

$$\bar{\mathbf{P}}_l = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T. \quad (4.52)$$

Dabei gilt $s = l - 1$ und l läuft von $\max(m + p, m + 2)$ bis k .

Beweis. Ausgehend von Gleichung (4.32) erhält man mit der Korrektur-Verstärkung $\bar{\mathbf{K}}_l = \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l$ und dem GNPG (3.30)

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \bar{\mathbf{K}}_l (y_l - \boldsymbol{\varphi}_l^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1}).$$

Unter Berücksichtigung von (4.27) ergibt sich mit der Horizontindizierung l

$$y_l = \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\theta}_l + v_l - (1 - \gamma_l) \cdot \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{w}_{l-1}.$$

Nach einer Vereinfachung der Indizierung folgt daraus

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_l = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1} + \bar{\mathbf{K}}_l [\boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\theta}_l + v_l - (1 - \gamma_l) \cdot \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{w}_{l-1} - \boldsymbol{\varphi}_l^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_{l-1}].$$

Der Schätzfehler ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_l &= \boldsymbol{\theta}_l - \bar{\boldsymbol{\theta}}_l \\ &= \boldsymbol{\epsilon}_{l-1} + \mathbf{w}_{l-1} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1} - \bar{\mathbf{K}}_l v_l - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{w}_{l-1} \\ &= (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1} + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{w}_{l-1} - \bar{\mathbf{K}}_l v_l. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Rauscheigenschaften (2.11) erhält man hieraus die Schätzfehlerkovarianzmatrix:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_l &= E[\boldsymbol{\epsilon}_l \boldsymbol{\epsilon}_l^T] \\ &= (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T. \end{aligned}$$

□

Nach Shmaliy und Simon (2013) [S. 6] kann eine untere Grenze der Schätzfehlerkovarianz ohne Prozessrauschen für den Fall $N \leq N_{opt}$ abgeschätzt werden. Sie folgt aus Gleichung (4.52), in dem man \mathbf{Q} unberücksichtigt lässt;

$$\mathbf{P}_l^{UG} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{P}_{l-1}^{UG} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T. \quad (4.53)$$

Hierbei wird der Anfangswert analog Lemma 14 ermittelt.

Anmerkung: Aufgrund der Erkenntnisse zur Aussagekraft der Schranken der Schätzfehlerkovarianz, die in den Abschnitten 3 und 4.1 gewonnen wurden, wird für den MI-UFIR-Parameterschätzer auf deren Bestimmung verzichtet.

4.2.4 Stabilitätsanalyse des MI-UFIR-Parameterschätzverfahrens

4.2.4.1 Stabilität des MI-UFIR-Schätzfehlers im zweiten Moment

In diesem Abschnitt soll die Stabilität des MI-UFIR-Parameterschätzers untersucht werden. Hierbei wird auf die Stabilität des Schätzfehlers im zweiten Moment (gemäß Definition 1 auf Seite 44) eingegangen.

Für den Schätzfehler auf dem Horizont von m bis k ergibt sich ausgehend von der Startschätzung bei $s = m + p - 1$ folgender Zusammenhang (die Herleitung findet sich im Beweis zu Lemma 14):

$$\epsilon_l = \theta_l - \bar{\theta}_{l|l} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \varphi_l^T) \epsilon_{l-1} + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \varphi_l^T) \mathbf{w}_{l-1} - \bar{\mathbf{K}}_l v_l. \quad (4.54)$$

a) Die Stabilität des homogenen Anteils des Schätzfehlers:

Zunächst wird die Stabilität des homogenen Anteils der Gleichung (4.54) analog Jazwinski (1970) [S. 234 ff.], Johnstone *et al.* (1982) [S. 79] sowie Zhang (2017) [S. 8 ff.] analysiert. Es gilt

$$\epsilon_l^h = (\mathbf{I} - \mathbf{M}_l \varphi_l \varphi_l^T) \epsilon_{l-1}^h = \mathbf{M}_l (\mathbf{M}_l^{-1} - \varphi_l \varphi_l^T) \epsilon_{l-1}^h = \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^h. \quad (4.55)$$

Als Lyapunov-Funktion wird

$$V_l^h := (\epsilon_l^h)^T \mathbf{M}_l^{-1} \epsilon_l^h \quad (4.56)$$

gewählt. Mit

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{M}_{l-1} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \varphi_l \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1}}{1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l} \Leftrightarrow \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}_{l-1} \varphi_l \varphi_l^T}{1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} V_l^h - V_{l-1}^h &= (\epsilon_{l-1}^h)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^h - (\epsilon_{l-1}^h)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \epsilon_{l-1}^h \\ &= (\epsilon_{l-1}^h)^T (\mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_l^{-1} - \mathbf{M}_{l-1}^{-1}) \epsilon_{l-1}^h \\ &= (\epsilon_{l-1}^h)^T (\mathbf{M}_{l-1}^{-1} - \frac{\varphi_l \varphi_l^T}{1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l} - \mathbf{M}_{l-1}^{-1}) \epsilon_{l-1}^h \\ &= -(\epsilon_{l-1}^h)^T \frac{\varphi_l \varphi_l^T}{1 + \varphi_l^T \mathbf{M}_{l-1} \varphi_l} \epsilon_{l-1}^h \leq 0. \end{aligned}$$

$V_l^h \leq V_{l-1}^h \leq V_s = \epsilon_s^T \mathbf{M}_s^{-1} \epsilon_s$ liefert mit Gleichung (2.12) schließlich:

$$\|\epsilon_l^h\|^2 \leq \frac{(\epsilon_l^h)^T \mathbf{M}_l^{-1} \epsilon_l^h}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}} \leq \frac{\lambda_{\max}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}} \|\epsilon_s\|^2 = \frac{\lambda_{\max}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}}{a} \|\epsilon_s\|^2 \quad (4.57)$$

Bei persistenter Anregung ist \mathbf{M}_l begrenzt und damit ist der homogene Anteil stabil.

b) Zerlegung des Schätzfehlers und der Schätzfehlerkovarianzmatrix:

Analog Markley und Carpenter (2009) [S. 235] sowie Simon (2006) [S. 314 f.] kann Gleichung (4.54) in folgende Bestandteile zerlegt werden:

$$\epsilon_l = \epsilon_l^v + \epsilon_l^w. \quad (4.58)$$

Dabei gilt für den Anteil aus dem Messrauschen

$$\boldsymbol{\epsilon}_l^v = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v - \bar{\mathbf{K}}_l v_l, \boldsymbol{\epsilon}_s^v = \boldsymbol{\epsilon}_s$$

und für den Bestandteil des Parameterrauschens

$$\boldsymbol{\epsilon}_l^w = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{w}_{l-1}, \boldsymbol{\epsilon}_s^w = \mathbf{0}.$$

Dementsprechend lässt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix in Anteile aus dem Messrauschen und dem Parameterrauschen zerlegen

$$\bar{\mathbf{P}}_l = \bar{\mathbf{P}}_l^v + \bar{\mathbf{P}}_l^w, \quad (4.59)$$

mit

$$\bar{\mathbf{P}}_l^v = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^v (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l R \bar{\mathbf{K}}_l^T, \bar{\mathbf{P}}_s^v = \bar{\mathbf{P}}_s$$

und

$$\bar{\mathbf{P}}_l^w = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^w (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T, \bar{\mathbf{P}}_s^w = \mathbf{0}.$$

Ferner lässt sich für die Lyapunov-Funktion $V_l := \boldsymbol{\epsilon}_l^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l$ zeigen, dass deren Erwartungswert unter den Rauscheigenschaften nach (2.11) ebenfalls in zum Mess- und Parameterrauschen gehörige Anteile zerlegt werden kann.

Mit der Abkürzung $\tilde{z}_l := \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_l &= \boldsymbol{\epsilon}_l^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l \\ &= V_{l-1} - \|\tilde{z}_l\|^2 (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l) \\ &\quad - 2\tilde{z}_l v_l (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l) + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l v_l^2 \\ &\quad + 2\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^T [\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \mathbf{w}_{l-1} \\ &\quad + 2\mathbf{w}_{l-1}^T [\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l (-\tilde{z}_l - v_l) \\ &\quad + \mathbf{w}_{l-1}^T [\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \mathbf{w}_{l-1}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Unter Beachtung von Lemma 6 folgt:

$$\begin{aligned} V_l &\leq V_{l-1} - 2\tilde{z}_l v_l (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l) + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l v_l^2 \\ &\quad + 2\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^T [\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \mathbf{w}_{l-1} \\ &\quad + 2\mathbf{w}_{l-1}^T [\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l (-\tilde{z}_l - v_l) \\ &\quad + \text{tr}\{[\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \mathbf{w}_{l-1} \mathbf{w}_{l-1}^T\}. \end{aligned}$$

Bildet man den Erwartungswert und berücksichtigt, dass $\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}$ mit \mathbf{w}_{l-1} , \tilde{z}_l mit v_l , \tilde{z}_l mit \mathbf{w}_{l-1} und v_l mit \mathbf{w}_{l-1} unkorreliert sind, dann erhält man

$$E[V_l] \leq E[V_{l-1}] + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \cdot R + \text{tr}\{[\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \cdot \mathbf{Q}\}. \quad (4.61)$$

Durch die Zerlegung gemäß Gleichung (4.58) lässt sich schreiben

$$V_l = (\boldsymbol{\epsilon}_l^v + \boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \mathbf{M}_l^{-1} (\boldsymbol{\epsilon}_l^v + \boldsymbol{\epsilon}_l^w) = (\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v + 2(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^w + (\boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^w .$$

Beachtet man, dass $\boldsymbol{\epsilon}_l^v$ und $\boldsymbol{\epsilon}_l^w$ (auch zum Zeitpunkt s) nicht korreliert sind, so ergibt sich durch das Einsetzen der jeweiligen Schätzfehleranteile

$$E[(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v] = E[(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v] + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \cdot R ,$$

$$E[(\boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^w] = E[(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w] + \text{tr}\{[\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \cdot \mathbf{Q}\}$$

und

$$E[(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^w] = 0 .$$

Damit lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} E[V_l] &= E[(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v - (\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v)^T \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l)] + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \cdot R \\ &+ E[(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w)^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w - (\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w)^T \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l)] \\ &+ \text{tr}\{[\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \cdot \mathbf{Q}\} \\ &= E[V_{l-1}^v] - E[(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v)^T \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^v (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l)] + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \cdot R \\ &+ E[V_{l-1}^w] - E[(\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w)^T \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \boldsymbol{\epsilon}_{l-1}^w (1 - \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l)] \\ &+ \text{tr}\{[\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \cdot \mathbf{Q}\} \\ &= E[V_l^v] + E[V_l^w] . \end{aligned}$$

Analog Gleichung (4.61) ergibt sich also für den Fehleranteil aus dem Messrauschen

$$E[V_l^v] \leq E[V_{l-1}^v] + \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l \cdot R \quad (4.62)$$

und für den Anteil aus dem Parameterrauschen

$$E[V_l^w] \leq E[V_{l-1}^w] + \text{tr}\{[\gamma_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} + (1 - \gamma_l) \mathbf{M}_l^{-1}] \cdot \mathbf{Q}\} . \quad (4.63)$$

c) **Konvergenz des Schätzfehleranteils aus dem Messrauschen:**

Zunächst soll wie in Liu und Ding (2013) für den Anteil des Messrauschens (V_l^v) gezeigt werden, dass dieser Fehleranteil im zweiten Moment gegen Null konvergiert:

Aus Gleichung (4.62) lässt sich mit $r_l = \text{tr}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}$ ein Martingal unter Voraussetzung einer gültigen σ -Algebra des Messrauschens definieren:

$$U_l := \frac{V_l^v}{r_l^d} , \quad 0 < d < 1 .$$

Und es folgt:

$$E[U_l] \leq E[U_{l-1}] + \frac{\boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l}{r_l^d} \cdot R$$

Mit Hilfe von Lemma 7 und dem Doobschen Martingalkonvergenzatz ergibt sich dann, dass U_l fast sicher gegen einen endlichen Wert konvergiert (U_∞):

$$U_l = \frac{V_l^v}{r_l^d} \rightarrow U_\infty, \text{ a. s./fast sicher}$$

oder

$$V_l^v = O(r_l^d). \quad (4.64)$$

Aus der Definition von V_l^v als quadratischer Form lässt sich

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\} \|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 \leq (\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{M}_l^{-1}\} \|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2.$$

bestimmen. Somit gilt für den Fehleranteil aus dem Messrauschen

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 \leq \frac{(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}} = \frac{V_l^v}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}$$

und unter Beachtung von Gleichung (4.64) folgt

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 = O\left(\frac{(\boldsymbol{\epsilon}_l^v)^T \mathbf{M}_l^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_l^v}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}\right) = O\left(\frac{r_l^d}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}\right). \quad (4.65)$$

Unter der Annahme einer persistenten Anregung nach Abschnitt 2.1.2 lässt sich in leichter Abwandlung folgender Zusammenhang bilden:

Es existieren positive Konstanten c_1 , c_2 und l_0 , so dass Folgendes gilt:

$$c_1 \cdot \mathbf{I} \leq \frac{1}{l} \sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \leq c_2 \cdot \mathbf{I}, \text{ a. s. } \forall l \geq l_0 \quad (4.66)$$

Hieraus erhält man mit dem in der Startschätzung verwendeten GNPG \mathbf{M}_s

$$c_1 \cdot l \cdot \mathbf{I} \leq \mathbf{M}_l^{-1} \leq c_2 \cdot l \cdot \mathbf{I} + \mathbf{M}_s^{-1}.$$

Ferner ist

$$r_l = \text{tr}\{\mathbf{M}_l^{-1}\} \leq p \cdot c_2 \cdot l + \text{tr}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}$$

und

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\} \geq c_1 \cdot l.$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\epsilon}_l^v\|^2 &= O\left(\frac{r_l^d}{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}_l^{-1}\}}\right) = O\left(\frac{[p \cdot c_2 \cdot l + \text{tr}\{\mathbf{M}_s^{-1}\}]^d}{c_1 \cdot l}\right) = O\left(\frac{1}{l^{1-d}}\right) \\ &\rightarrow 0 \text{ a. s., wenn } l \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Der Schätzfehleranteil aus dem Messrauschen konvergiert also für einen unendlichen Horizont gegen Null. Er ist nach Gleichung (4.67) eine konvexe Funktion über dem Horizont.

Es wird in Shi und Fang (2009) [S. 549 ff.] bewiesen, dass diese Konvergenzeigenschaften auch für den Fall gelten, dass zur Bildung des Regressionsvektors nicht das Hilfsmodell (AMM) nach Abschnitt 4.2.1.2 verwendet wird, sondern das (nicht messbare) Ausgangssignal der Strecke ohne Rauschen.

d) **Untersuchung des Schätzfehleranteils aus dem Parameterrauschen:**

Aus Gleichung (4.63) lassen sich nicht ohne Weiteres Aussagen über den Verlauf des Fehleranteils aus dem Parameterrauschen ableiten. Stattdessen soll die Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\bar{\mathbf{P}}_l = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \bar{\mathbf{P}}_{l-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T) \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T)^T + \bar{\mathbf{K}}_l \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}_l^T$$

bzw. die Zerlegung (4.59) analysiert werden:

$\bar{\mathbf{P}}_l^w$ ist über $\text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_l^w\} = E[(\boldsymbol{\epsilon}_l^w)^T \boldsymbol{\epsilon}_l^w] = E[\|\boldsymbol{\epsilon}_l^w\|^2]$ mit dem entsprechenden Fehler im zweiten Moment verknüpft. Nach Gleichung (4.58) gilt zu Beginn des Horizonts: $\boldsymbol{\epsilon}_s^w = \mathbf{0}$.

Mit zunehmender Horizontlänge konvergiert das GNPG gegen die Nullmatrix [Bohn und Unbehauen (2016), S. 92],

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{M}_l = \mathbf{0} .$$

(Gemäß der Persistenz der Anregung nach Abschnitt 2.1.2 ist das GNPG allerdings nach unten beschränkt.)

Ebenso verschwindet dann auch die Korrektur-Verstärkung $\bar{\mathbf{K}}_l = \mathbf{M}_l \boldsymbol{\varphi}_l$ und die Schätzfehlerkovarianzmatrix wird nur durch das Parameterrauschen bestimmt,

$$\bar{\mathbf{P}}_l = \bar{\mathbf{P}}_{l-1} + \mathbf{Q} .$$

Sie wächst mit zunehmender Horizontlänge über alle Grenzen. Die Komponente der Schätzfehlerkovarianz, die aus dem Messrauschen resultiert, bleibt dabei konstant:

$$\bar{\mathbf{P}}_l^v = \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^v .$$

Dem gegenüber wächst $\bar{\mathbf{P}}_l^w$ entsprechend

$$\bar{\mathbf{P}}_l^w = \bar{\mathbf{P}}_{l-1}^w + \mathbf{Q} .$$

Das mögliche Fehlen einer Messung ist mit zunehmender Horizontlänge nicht mehr relevant. Man kommt also zu folgender Schlussfolgerung:

Der Schätzfehleranteil aus dem Parameterrauschen divergiert;

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_l^w\|^2 \rightarrow \infty \text{ a. s., wenn } l \rightarrow \infty .$$

Er läuft von Null bis ∞ und wird nur durch die begrenzte Horizontlänge beschränkt. Aus der Betrachtung des Faktors im Parameterrauschanteil

$$\mathbf{I} - \gamma_l \bar{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T = \mathbf{I} - \gamma_l \left[\sum_{i=m}^l \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T$$

erkennt man, dass der Anstieg dieses Anteils bei verlorenen Messungen größer wird, da der Subtrahend entsprechend verschwindet. Wie oben bereits beschrieben, ist dies aber nur in dem Bereich des Horizonts relevant, in dem das GNPG noch nicht eine Umgebung der Nullmatrix erreicht hat.

e) **Zusammenfassung:**

Durch den konvergierenden Anteil des Messrauschens und den divergierenden des Parameterrauschens ist die MSE J_l eine konvexe Funktion. Sie hat auf dem Definitionsbereich der Horizontlänge $p \leq N < N_{max}$ mindestens ein Minimum bei N_{opt} [Zhao *et al.* (2018a), S. 6393]. (N_{max} resultiert dabei aus der Beschränkung durch die Persistenz der Anregung.) Der MI-UFIR-Parameterschätzfehler ist also für Horizontlängen $N \leq N_{opt}$ (oder generell bei begrenztem Horizont) stabil im zweiten Moment.

Es fällt auf, dass mit zunehmender Horizontlänge die Bedeutung des Paketverlusts in den Hintergrund rückt, da die Korrekturverstärkung \bar{K}_l gegen den Nullvektor strebt. Im Bereich bis und um N_{opt} erhöht sich durch kompensierte Messungsverluste der Anteil des Prozessrauschens, wenn mehr Pakete verloren gehen. Daher erfolgt, wie in Abbildung 3.3 ersichtlich, eine Verschiebung von N_{opt} zu kleineren Werten.

Folgendes Theorem fasst die Ergebnisse zusammen und beschreibt die Stabilität der MI-UFIR-Parameterschätzung bzw. dessen Schätzfehlers:

Theorem 8. Stabilität des MI-UFIR-Schätzfehlers im zweiten Moment: Gegeben seien die Zustandsraumdarstellung der Parameterschätzung [Gleichungen (2.9) und (2.10)] sowie die Eigenschaften des Parameter- und Messrauschens nach (2.11). Unter der Voraussetzung einer persistenten Anregung und der Netzwerkmodellierung nach Abschnitt 4.2.1 (Annahme 2) ist der Schätzfehler des MI-UFIR-Verfahrens im zweiten Moment stabil, wenn die Horizontlänge kleiner oder gleich der optimalen ist ($N \leq N_{opt}$).

Beweis. Der Beweis resultiert aus den obigen Ausführungen a) bis e). □

Anmerkung: Da das MI-UFIR-Verfahren nur für eine geringe Verlustrate plausible Ergebnisse der Schätzfehlerkovarianz liefert, gilt diese Bedingung insbesondere auch für Theorem 8.

4.2.4.2 Stabilität der Prädiktion des Systemausgangssignals

Die Ausgangssignalprädiktion nach Gleichung (4.27) erfolgt in den Algorithmen 4.1 und 4.2 auf Basis der prädizierten MI-UFIR-Parameterschätzung des vorausgehenden Abtastschrittes und wird im Folgenden mit \bar{y}_k bezeichnet.

$$\bar{y}_k := \varphi_k^T \bar{\theta}_{k|k-1} = \varphi_k^T \bar{\theta}_{k-1|k-1} \quad (4.68)$$

Der Prädiktionsfehler des Systemausgangs y_k^s wird folgendermaßen festgelegt

$$\epsilon_k^y := y_k^s - \bar{y}_k. \quad (4.69)$$

Näher ausgeführt gilt für ϵ_k^y dann:

$$\epsilon_k^y = y_k^s - \bar{y}_k = \varphi_k^T \theta_k + v_k - \varphi_k^T \bar{\theta}_{k-1|k-1} = \varphi_k^T (\epsilon_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}) + v_k. \quad (4.70)$$

Basierend auf Definition 1 auf Seite 44 lässt sich die Stabilität der Ausgangssignalprädiktion durch folgendes Theorem beschreiben [Shi und Fang (2009) S. 543, 551]:

Theorem 9. Mit den Rauscheigenschaften nach Gleichung (2.11), einer persistenten Anregung ($\|u_k\| \leq u_{max} < \infty, \forall k \geq 0$) und einem stabilen System ist die Ausgangssignalprädiktion auf Basis der MI-UFIR-Parameterschätzung stabil im zweiten Moment, wenn der Schätzfehler der MI-UFIR-Schätzung stabil ist (Theorem 8).

Beweis. Aus

$$\|\epsilon_k^y\|^2 = \|\varphi_k^T \epsilon_{k-1} + \varphi_k^T \mathbf{w}_{k-1} + v_k\|^2$$

folgt mit der Näherung¹⁵ $E[\cdot] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\cdot]$ [Söderström und Stoica (1989), S. 547 f.] und der Unkorreliertheit der Rauschprozesse

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\epsilon_i^y\|^2 &= \frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\varphi_i^T \epsilon_{i-1} + \varphi_i^T \mathbf{w}_{i-1} + v_i\|^2 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\varphi_i^T \epsilon_{i-1}\|^2 + \frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\varphi_i^T \mathbf{w}_{i-1}\|^2 + R \end{aligned}$$

Für ein stabiles System ist der Regressionsvektor begrenzt, d. h. $\exists k_0 > 0$ und $\kappa > 0$, so dass

$$\|\varphi_k\|^2 \leq \kappa < \infty \quad \forall k \geq k_0$$

gilt. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\epsilon_i^y\|^2 \leq \frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\varphi_i^T\|^2 \|\epsilon_{i-1}\|^2 + \kappa \cdot \text{tr}\{\mathbf{Q}\} + R.$$

Daher erhält man

$$\frac{1}{k} \sum_{i=k_0}^k \|\epsilon_i^y\|^2 = O(\kappa \cdot \|\epsilon_{i-1}\|^2).$$

Für den Fall, dass der Schätzfehler stabil im zweiten Moment ist (Theorem 8) sowie R und \mathbf{Q} einer oberen Beschränkung unterliegen (vgl. Annahme 1 auf Seite 35), ist der Prädiktionsfehler des Systemausgangssignals ebenfalls stabil im zweiten Moment. \square

4.2.5 Diskussion der Eigenschaften der MI-UFIR-Parameteridentifikation

Wie die vorausgehenden Abschnitte gezeigt haben, lässt sich das UFIR-Verfahren nach Abschnitt 3 mit geringfügigem Aufwand an fehlende Messungen anpassen und so eine Schätzung von zeitvariablen Parametern realisieren.

Aufgrund der bisherigen Analyse des MI-UFIR-Ansatzes kann man nachfolgende Aussagen zu den Eigenschaften der Schätzungen und zur Anwendung des Verfahrens ableiten:

a) Die optimale Horizontlänge bei fehlenden Messungen

Die Horizontlänge N ist auch beim MI-UFIR-Parameterschätzer der einzige Einstellparameter. Sie muss optimal gewählt werden, um die Schätzfehlerkovarianz zu minimieren und damit einen optimierten UFIR-Parameterschätzer zu generieren. Messungen des Systemausgangs, die dem Schätzverfahren nicht zur Verfügung stehen, haben Einfluss auf die Schätzgüte, wie aus den Lemmata 12, 13 und 14 ersichtlich wird. Im Rahmen der Stabilitätsanalyse (Abschnitt 4.2.4) wird ferner deutlich, dass sich bei Verwendung der AMM und der MI zur

¹⁵ Für einen ergodischen stochastischen Prozess gilt die Gleichheit für $N \rightarrow \infty$. Bei einer hinreichend großen Anzahl an Datenpunkten N wird die Näherung als gültig angenommen.

Kompensation fehlender Messwerte, die optimale Horizontlänge N_{opt} zu kleineren Werten verschiebt. Dies liegt darin begründet, dass das Parameterrauschen dominanter wird.

Für die MI-UFIR-Verfahren kann in der Regel die Festlegung der optimale Horizontlänge für den Fall ohne Messungsverluste ($\gamma = 1$) gemäß Abschnitt 3.5 Anwendung finden. Wenn man den Verlauf der Schätzfehlerkovarianz (z. B. in Abbildung 4.12) im Bereich um N_{opt} betrachtet, ist dieser relativ „flach“ und zeugt damit von einer gewissen Robustheit des UFIR-Verfahrens bei der Festlegung der optimalen Länge des Horizonts. Daher erscheint die Annahme vollständiger Messungssequenzen zu diesem Zweck zulässig.

b) Die Prädiktion von Systemausgangssignalen konterkariert die FIR-Struktur des Schätzers

Wenn Messungsdaten verloren gehen, dann werden verlorene Signalwerte durch eine Prädiktion auf Basis des Schätzwertes des vorausgehenden Zeitschritts ersetzt (Lemma 11):

$$\tilde{y}_k = \varphi_k^T \tilde{\theta}_{k|k-1} = \varphi_k^T \tilde{\theta}_{k-1|k-1} .$$

Da hierbei vorausgehende Schätzergebnisse verwendet werden, enthält die Schätzung zum Zeitpunkt k Messungen vor $m = k - N + 1$. Angenommen die Messung zum Zeitpunkt $k - N + 1$ geht verloren, dann wird der folgende Ersatzwert genutzt:

$$\tilde{y}_{k-N+1} = \varphi_{k-N+1}^T \tilde{\theta}_{k-N|k-N} .$$

Die MI-UFIR-Parameterschätzung bei $k - N$ basiert auf Messungen des Intervalls $[k - 2N + 1, k - N]$. Da die Schätzung zum Zeitpunkt k ($\tilde{\theta}_{k|k}$) die Messung \tilde{y}_{k-N+1} beinhaltet, basiert der geschätzte Parametervektor auf Daten von $k - 2N + 1$ an. Treten zusätzliche Verluste auf dem Horizont $[k - 2N + 1, k - N]$ auf, dann kann es sein, dass eine Parameterschätzung zum aktuellen Zeitpunkt Messwerte nutzt, die sogar über zwei Horizontlängen zurückliegen. Es ist also möglich, dass durch Datenverluste Ergebnisse des Schätzalgorithmus zum (aktuellen) Zeitpunkt k auch initiale Messungen enthalten, womit ein IIR-Filter gegeben wäre und somit die FIR-Struktur des MI-UFIR-Parameterschätzers unterlaufen würde. [Ryu *et al.* (2020), S. 333]

c) Plausibilität der Schätzgüte bei fehlenden Messungen

Im Rahmen der MI nach Lemma 11 wird davon ausgegangen, dass im Falle eines Messungsverlusts ($\gamma_k = 0$) die fehlenden Daten durch $y_k = \varphi_k^T \theta_{k-1} + v_k$ kompensiert werden. Dabei gilt die Annahme, dass θ_{k-1} bekannt ist und somit durch den Schätzwert $\tilde{\theta}_{k-1|k-1}$ ersetzt werden kann. Die so „entstandene“ Messung enthält dabei dasselbe Messrauschen v_k wie eine Sensormessung. Dies ist eine Vereinfachung, die einer simplen Implementierbarkeit geschuldet ist. Für die Ermittlung der Schätzfehlerkovarianz ist diese Einschränkung allerdings wesentlich. Da die Parameterunsicherheit in der verwendeten MI unberücksichtigt bleibt, führt dies dazu, dass die nach Abschnitt 4.2.3 für den MI-UFIR-Parameterschätzer ermittelte Schätzfehlerkovarianz vor allem bei hohen Verlustraten nicht mit dem tatsächlichen Schätzfehlern plausibilisiert werden kann (van Buuren, 2018). Der endliche Horizont der FIR-Struktur und die Prämisse keiner A-priori-Informationen (über den Anfangswert des

Horizonts) führen dann dazu, dass $\bar{P}_{k|k}$ für jedes beliebige k durch

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k|k}^{OG}(\gamma = 0) &= \mathbf{M}_{k,m} \cdot \left\{ \sum_{j=m}^{k-1} \left[\left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) + \left(\boldsymbol{\varphi}_{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^T \mathbf{Q} \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left(\sum_{i=m}^j \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}_{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^T \right) \right] + \sum_{i=m}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right\} \cdot \mathbf{M}_{k,m} + R \cdot \mathbf{M}_{k,m} . \end{aligned}$$

nach oben begrenzt ist; wenn überhaupt keine Sensormessung auf dem Horizont verfügbar ist ($\gamma = 0$). Da die Schätzfehlerkovarianz die „Unsicherheit“ einer Schätzung beschreibt, ist diese Beschränkung nicht plausibel. Ferner ist somit ein Anstieg der Unsicherheit über mehrere Zeitschritte hinweg nicht möglich und steht im Widerspruch zu den Ergebnissen, die ein IIR-Filter, z. B. ein Kalmanfilter erzielen würde, der nur den Prädiktionschritt ausführt und das Messrauschen für fehlende Messwerte gegen Unendlich gehen lässt.

Die Kompensation verlorener Messungen durch MI nach Lemma 11 ist also nur für geringe Verlustwahrscheinlichkeiten anwendbar, wenn die Aussagekraft der ermittelten Schätzfehlerkovarianz gegeben bleiben soll.

d) Beobachtbarkeit bei fehlenden Messungen

Mit der Annahme 2 auf Seite 70 ist der Parameterprozess zum Zeitpunkt $k = N - 1$ unter den Voraussetzungen einer persistenten Anregung nach 2.1.2 vollständig beobachtbar. Sollten für die Zeitpunkte $k > N - 1$ sehr viele Messungen verloren gehen, stellt sich die Frage, ob dies weiterhin gilt. Die Kriterien in den Gleichungen (2.12) und (2.14) bleiben im MI-UFIR-Verfahren aufgrund der Nutzung der AMM (Abschnitt 4.2.1.2) erfüllt, auch wenn der Prozess ohne einen Informationstransfer zum Schätzer nicht beobachtbar sein kann. Die Definition einer modifizierten Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix, wie dies von Kluge *et al.* (2010) [S. 516] für das EKF getan wird, kann hier eventuell Abhilfe schaffen.

4.2.6 Numerische Simulation

Zur Verdeutlichung der obigen Ausführungen, wird eine Simulation mit MATLAB/Simulink[®] durchgeführt, der ein Versuchsaufbau nach Abbildung 4.10 zugrunde liegt. Der MI-UFIR-Parameterschätzer wird dabei mit einer Parameteridentifikation durch ein diskretes Kalmanfilter nach Sinopoli *et al.* (2004) sowie Shi und Fang (2009) (DKF/Abschnitt A.2 im Anhang) verglichen.

4.2.6.1 Strecke, Modell und Netzwerkverhalten

Gegeben sei das lineare zeitdiskrete SISO-System zweiter Ordnung mit der z -Übertragungsfunktion

$$G_S(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2}} .$$

Für den wahren Parametervektor gilt dabei

$$\boldsymbol{\theta} = [b_0 \ b_1 \ e_1 \ e_2]^T = [0, 45 \ 0, 75 \ 0, 50 \ 0, 35]^T .$$

Die Strecke wird persistent über eine Dauer von 1000 s mit einem bandbegrenzten weißen Rauschen angeregt und mit $T = 0,1$ s abgetastet.

Das Prozessrauschen soll mittelwertfrei und weiß sein mit

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,9 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}, \quad \underline{q} = 4,9 \cdot 10^{-5}, \quad \bar{q} = 22,5 \cdot 10^{-5}.$$

Für das mittelwertfreie weiße Messrauschen gilt ferner: $R = 0,64$.

Um Modellungenauigkeiten in Form einer nicht modellierten Dynamik in die Simulation einzubeziehen, soll der Parameter e_1 zwischen 400 s und 600 s einen sprungförmigen Offset von 0,1 aufweisen. Hiermit wird die Fähigkeit des Schätzers aufgezeigt, einer Parameteränderung zu folgen. Für die Anfangsbedingungen der Simulation gilt darüber hinaus $\boldsymbol{\theta}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ und $\mathbf{P}_0 = 20 \cdot \mathbf{I}$.

In der Simulation werden eine hohe *Kommunikationsrate* ($\gamma = E[\gamma_k] = 0,8$) und eine geringe ($\gamma = 0,1$) angenommen.

4.2.6.2 Die Festlegung der optimale Horizontlänge

Um die Schätzfehlerkovarianz bei Verwendung des MI-UFIR-Parameterschätzers zu minimieren, wird der optimale Horizont mit Hilfe der MSE bestimmt (Abschnitt 3.5.2). Der Verlauf von $\sqrt{\text{tr}\{\bar{\mathbf{P}}_k\}}$ über N ist in Abbildung 4.12 für verschiedene γ aufgetragen:

- $\gamma = 1$, d. h. ohne Paketverlust,
- $\gamma = 0,8$, d. h. mit 20% verlorenen Messungen und
- $\gamma = 0,1$, d. h. 90% Verlustwahrscheinlichkeit.

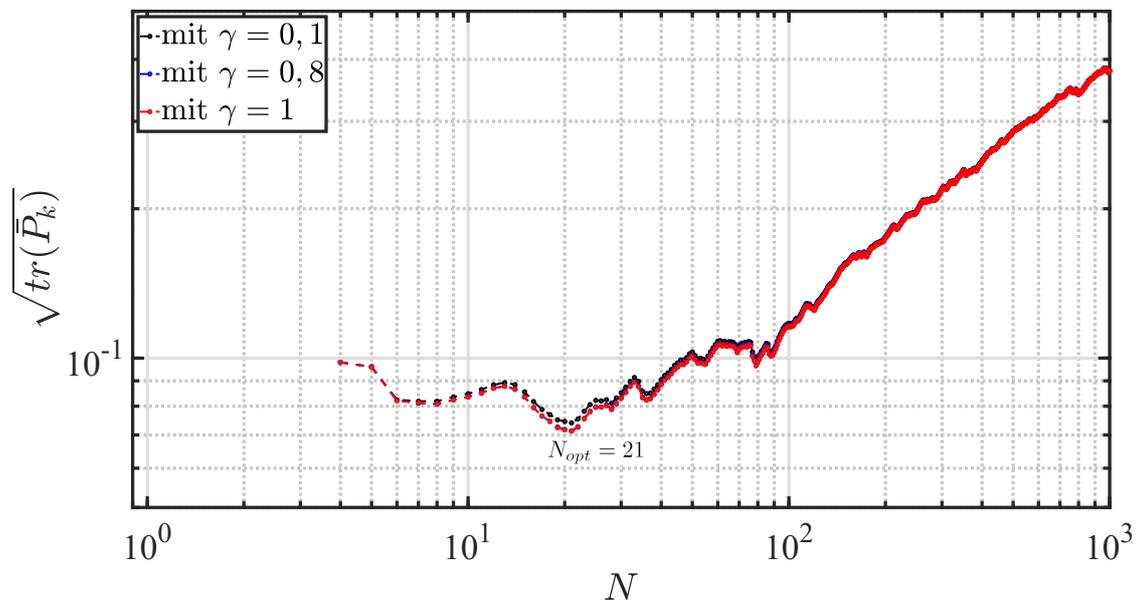


Abbildung 4.12: Bestimmung von N_{opt} für den UFIR-Parameterschätzer zur Identifikation von $G_S(z)$

Es zeigt sich, dass das Minimum zur Bestimmung von N_{opt} im vorliegenden Beispiel nicht vom Messungsverlust beeinflusst wird. Dies liegt vor allem an den gewählten Rauscheigenschaften. Die Verschiebung des Verhältnisses von Parameter- zu Messrauschen durch den Paketverlust, wie dies in Abschnitt 4.2.4.1 beschrieben wurde, ist so gering, dass es sich nicht auf das Minimum auswirkt. Selbiges liegt bei $N_{opt} = 21$. Damit muss der optimale Horizont etwas länger sein, als dies im Beispiel zum Co-Design-Ansatz (Abschnitt 4.1.4) der Fall war. Die Ursache hierfür ist in der Verwendung der AMM begründet.

Die so ermittelte Horizontlänge wird im Folgenden für den MI-UFIR-Parameterschätzer verwendet, um die Schätzfehlerkovarianz zu minimieren.

4.2.6.3 Vergleich der Schätzungen

a) Hohe Kommunikationsrate

Zunächst wird eine Kommunikationsrate von $\gamma = E[\gamma_k] = 0,8$ verwendet. Aus den Abbildungen 4.13, 4.14 und 4.15 erkennt man, dass der Verlust von 20 Prozent der Messungen keine Auswirkungen auf die Parameterschätzung mit dem DKF [Sinopoli *et al.* (2004) sowie Shi und Fang (2009)] hat. Beim Fehlen einzelner Messwerte wird der Schätzwert im DKF konstant gehalten. Das MI-UFIR-Verfahren, das die Messungsverluste mit Hilfe der MI kompensiert, zeigt einen vergleichbaren Verlauf der Schätzung des Parameters e_1 und des zugehörigen Schätzfehlers. Hinsichtlich der Schätzgüte lässt sich feststellen, dass der suboptimale FIR-Filter nur unwesentlich schlechter ist als das minimalvariante Kalmanfilter. Auch die Nachführung der Schätzung beim Sprung des Parameters e_1 in Sekunde 400 und 600 ist bei den verglichenen Methoden identisch. Es zeigt sich somit, dass die Verwendung der MI bei einer geringen Anzahl von Paketverlusten zum Kalmanfilter äquivalente Ergebnisse liefert. Auch die ermittelte Schätzgüte erscheint beim Vergleich mit den tatsächlichen Schätzfehlern und dem DKF plausibel.

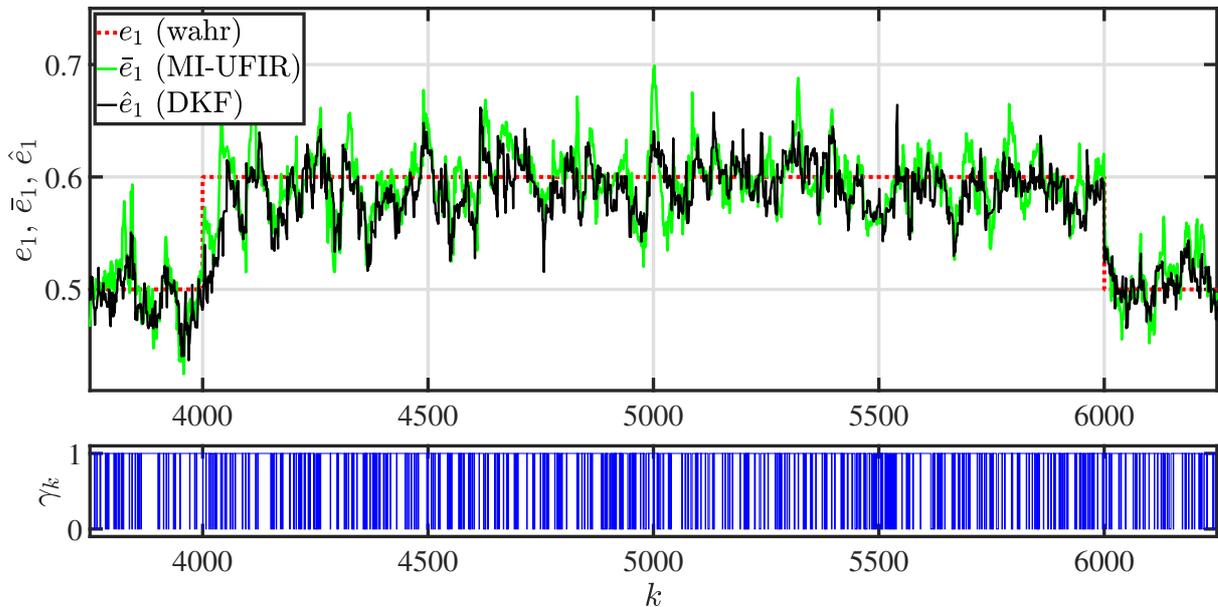
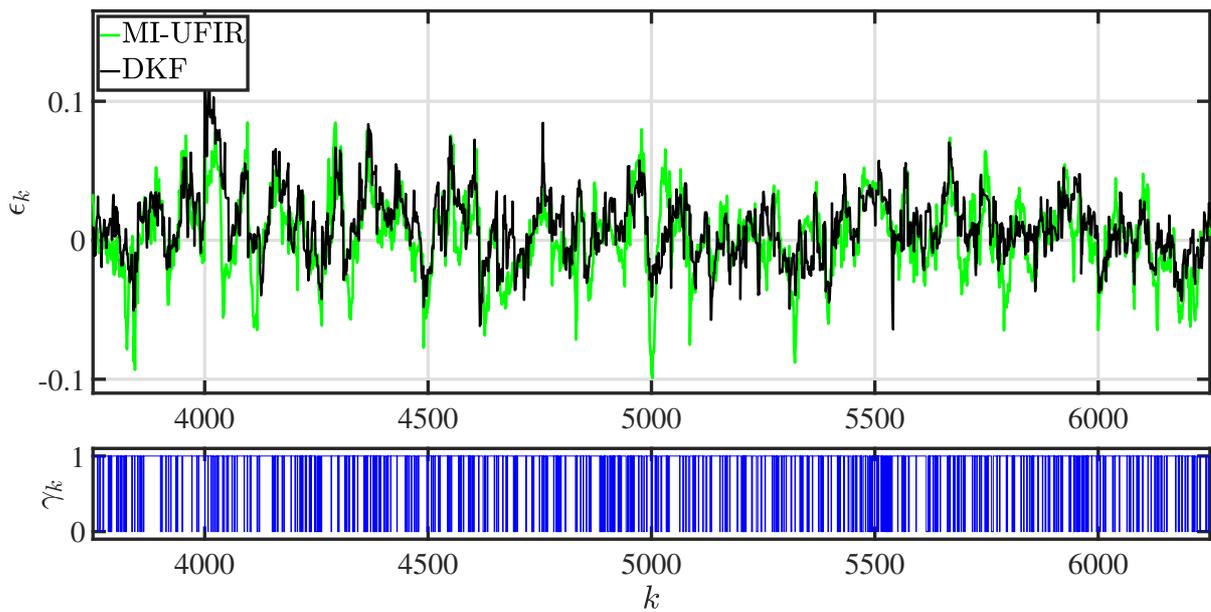
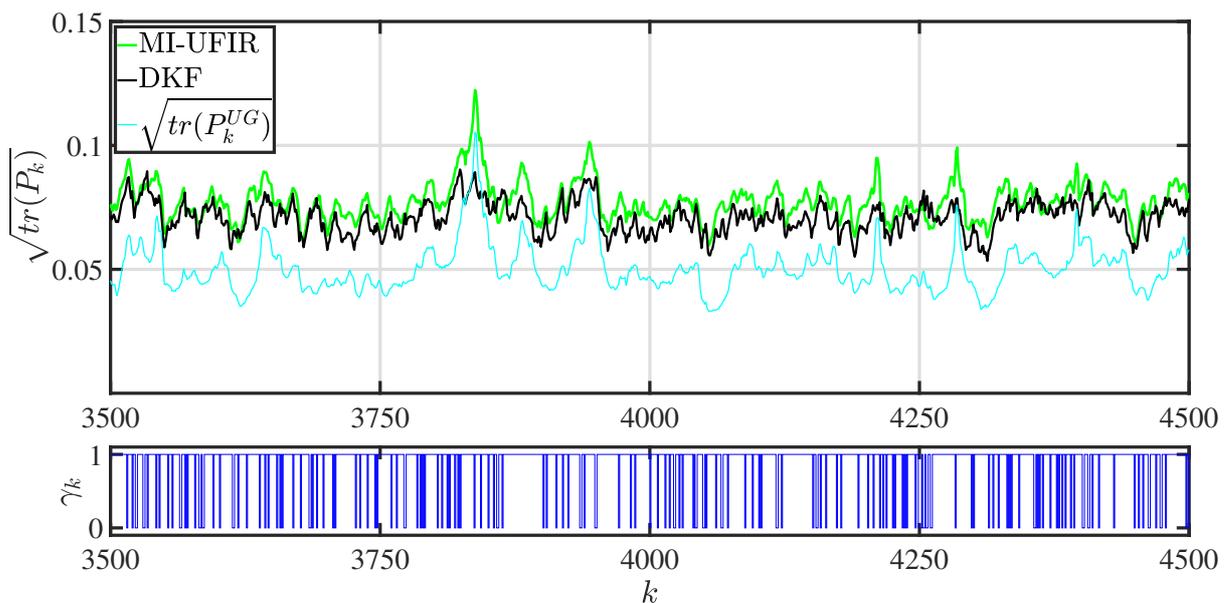


Abbildung 4.13: Echter und geschätzter Parameterverlauf des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,8$

Abbildung 4.14: Schätzfehler des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,8$ Abbildung 4.15: Schätzgüte bei $\gamma = 0,8$

b) Niedrige Kommunikationsrate

Das Ergebnis der Simulation mit einer niedrigen Kommunikationsrate ($\gamma = 0,1$), also einem häufigen Paketverlust, ist den Abbildungen 4.16, 4.17 und 4.18 zu entnehmen: Die Nutzung der MI auf Basis der Ausgangssignalprädiktion führt auf eine etwas bessere Schätzung durch das MI-UFIR-Verfahren, wenn man den geschätzten Parameterverlauf und den zugehörigen Schätzfehler mit denen des DKF vergleicht. Dessen Schätzfehlerkovarianz steigt durch die Erhöhung der Verlustrate deutlich an. Beim MI-UFIR-Filter bleibt diese aufgrund der Vereinfachung bei der Bildung der MI durch eine Vernachlässigung der Parameterunsicherheit

nahezu auf demselben Niveau wie für $\gamma = 0,8$. Da dies bei der Betrachtung der tatsächlichen Schätzfehler in Abbildung 4.17 nicht plausibilisiert werden kann, bestätigen sich die Aussagen im Rahmen der Analyse der Eigenschaften des MI-UFIR-Verfahrens (Abschnitt 4.2.5), wonach deren Anwendung auf geringe Verlustrate beschränkt bleiben muss, um Abweichungen bei der Bestimmung der Schätzgüte zu vermeiden. Die festgelegte Horizontlänge ($N_{opt} = 21$) zeigt sich gegenüber einem Anstieg der Verlusthäufigkeit robust. Dies wurde bereits in Abschnitt 4.2.6.2 ersichtlich.

Es sei ferner darauf verwiesen, dass so hohe Verlustraten bisher nicht in Experimenten und Simulationen im Bereich der FIR-Filter als Zustandsschätzer betrachtet wurden. So liegt z. B. die geringste Kommunikationsrate in den Anwendungen des Ansatzes von Ryu *et al.* (2020) bei $\gamma = 0,7$.

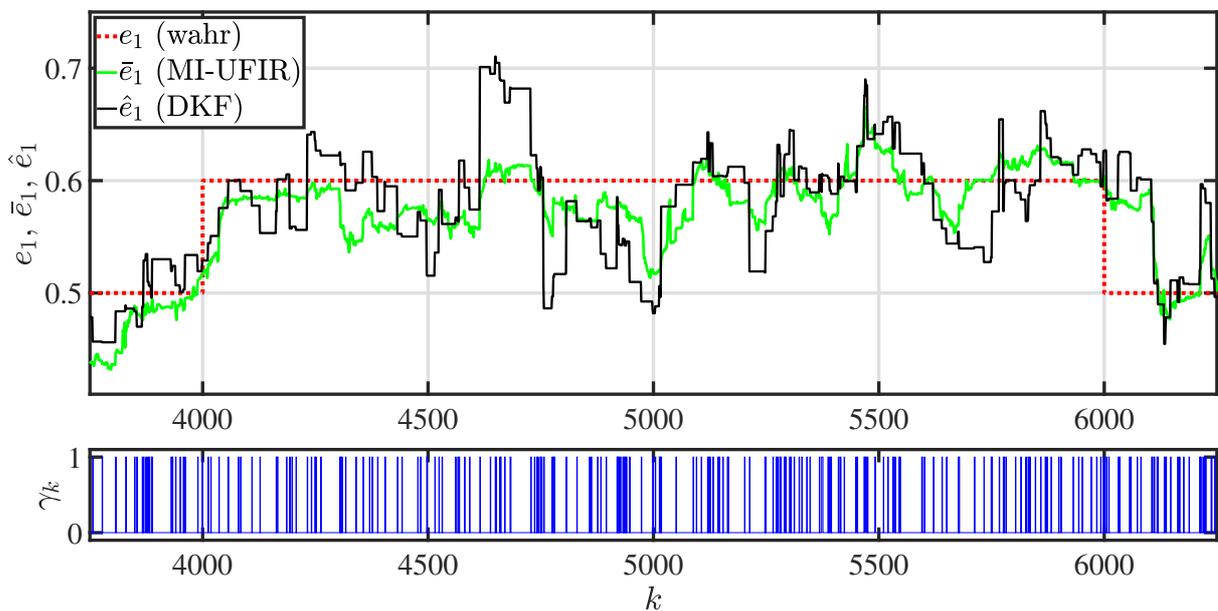
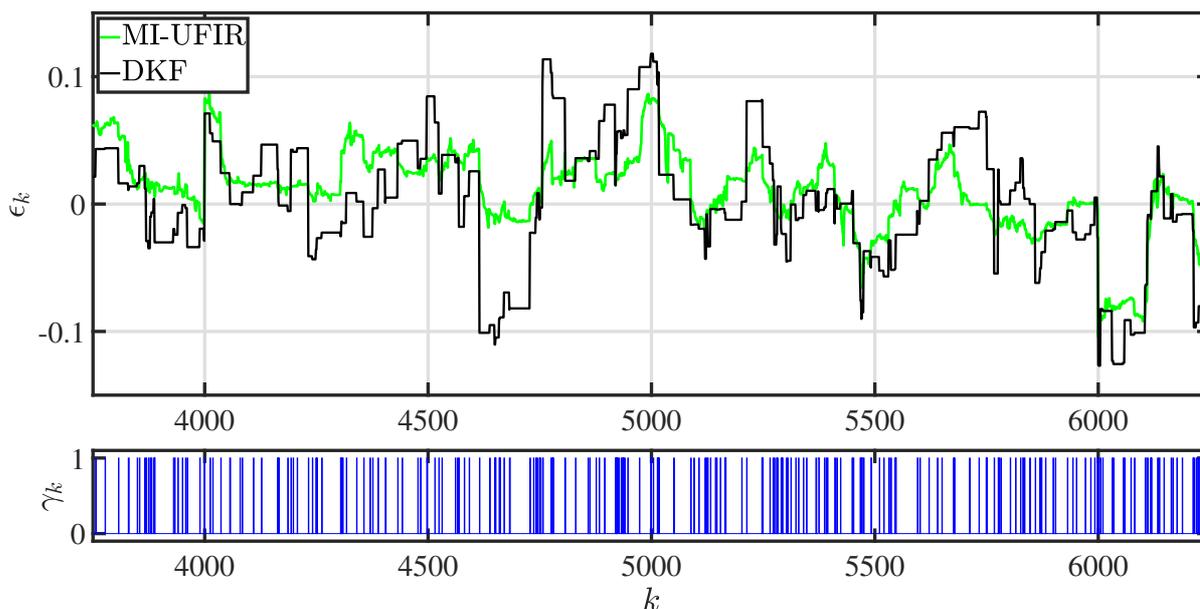
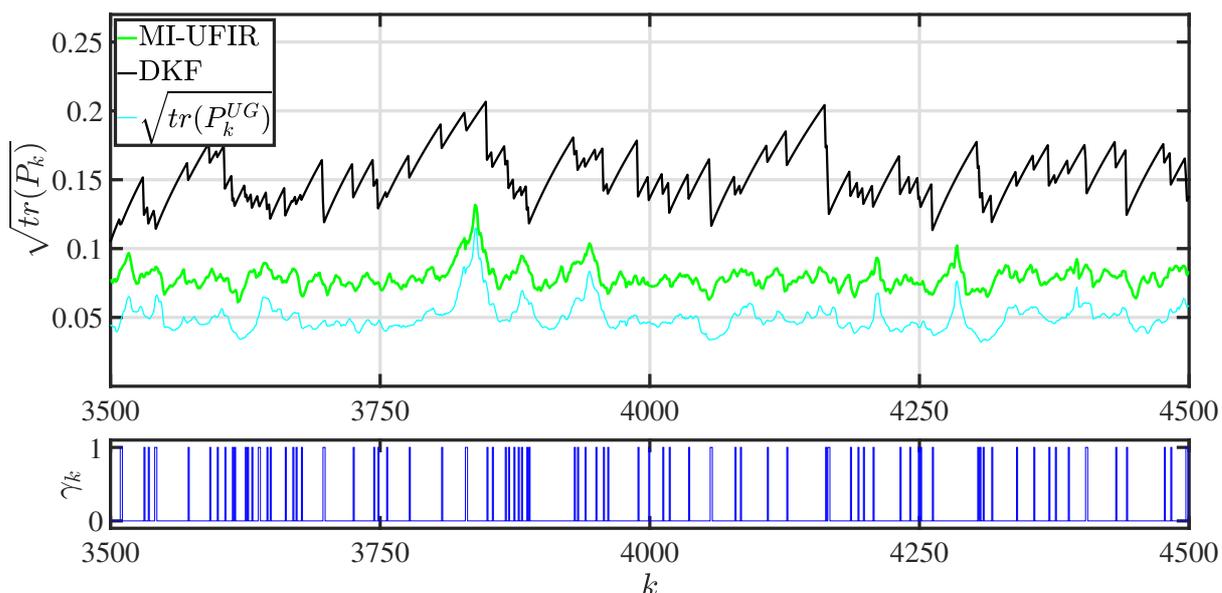


Abbildung 4.16: Echter und geschätzter Parameterverlauf des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,1$

Abbildung 4.17: Schätzfehler des Parameters e_1 bei $\gamma = 0,1$ Abbildung 4.18: Schätzgüte bei $\gamma = 0,1$

4.2.6.4 Die Stabilität der Ausgangssignalprädiktion

a) Hohe Kommunikationsrate

In den Abbildungen 4.19 und 4.20 wird für $\gamma = 0,8$ das vom Schätzverfahren verwendete Signal des Systemausgangs y_k mit dem tatsächlichen y_k^s verglichen. Aus dem Prädiktionsfehler $\epsilon_k^y = y_k^s - \bar{y}_k$ erkennt man, dass dieser (im abgebildeten Zeitintervall) stabil ist. Der Fehler im verwendeten Systemausgangssignal $\epsilon_k^* = y_k^s - y_k$ ist zu den Zeitpunkten, in denen sich ein Paketverlust ereignet, identisch mit dem Prädiktionsfehler ϵ_k^y , aber ansonsten gleich Null.

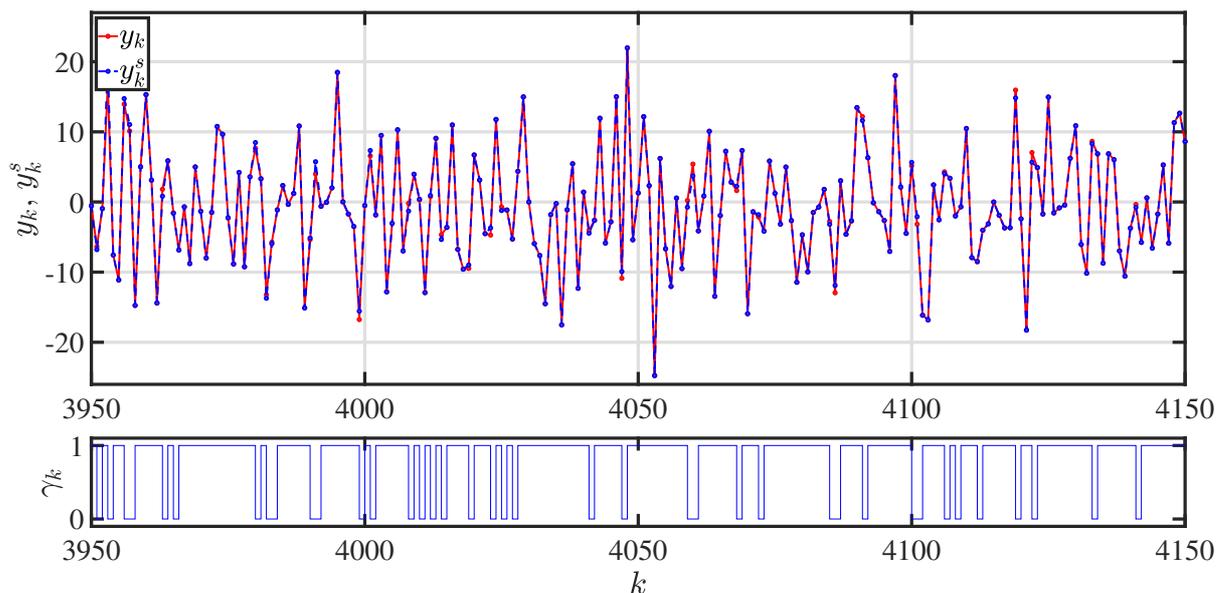


Abbildung 4.19: Ausgangssignalprädiktion bei $\gamma = 0,8$

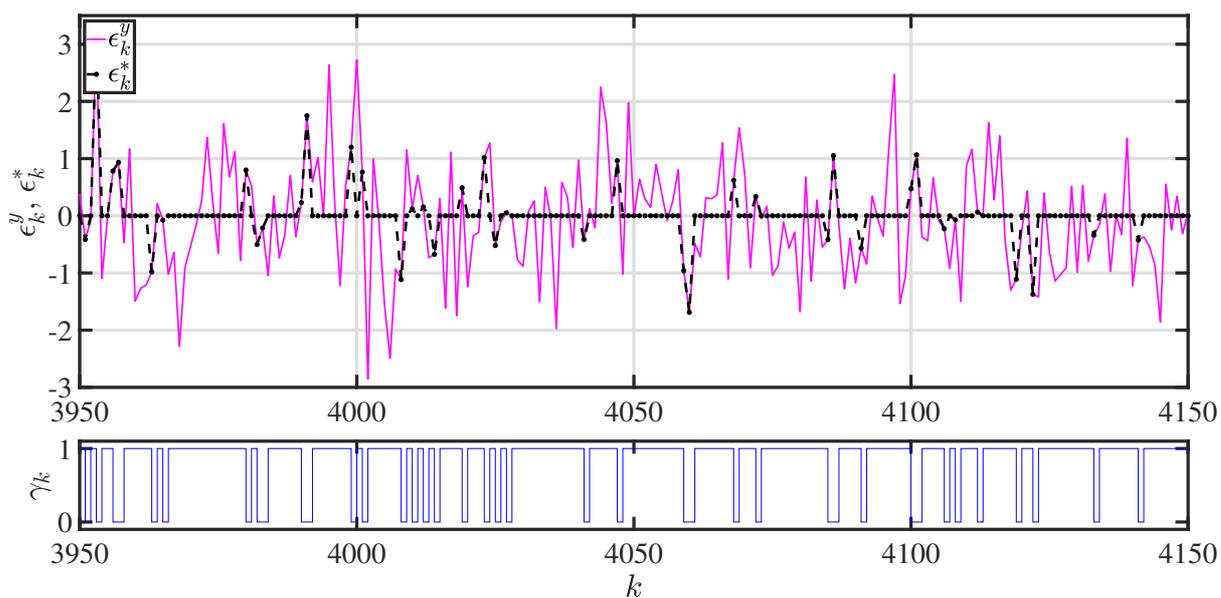


Abbildung 4.20: Prädiktionsfehler des Ausgangssignals bei $\gamma = 0,8$

b) Niedrige Kommunikationsrate

Die Abbildungen 4.21 und 4.22 zeigen die Verläufe von y_k und y_k^s bzw. die Fehler ϵ_k^y und ϵ_k^* für $\gamma = 0,1$. Auch bei häufigen Paketverlusten ist der Prädiktionsfehler $\epsilon_k^y = y_k^s - \bar{y}_k$ stabil. Allerdings arbeitet der Schätzalgorithmus deutlich häufiger mit dem prädizierten Wert des Systemausgangs. Daher ist der Fehler im verwendeten Signal $\epsilon_k^* = y_k^s - y_k$ häufiger identisch mit dem Prädiktionsfehler ϵ_k^y . Dieser kann als zusätzliches Messrauschen interpretiert werden, das entsprechend der Filterordnung ($N_{opt} = 21$) des UFIR-Schätzers gedämpft wird. Hinsichtlich der ermittelten Schätzwerte liefert der in diesem Beitrag beschriebene Ansatz

somit eine hohe Robustheit gegenüber Messungsverlusten.

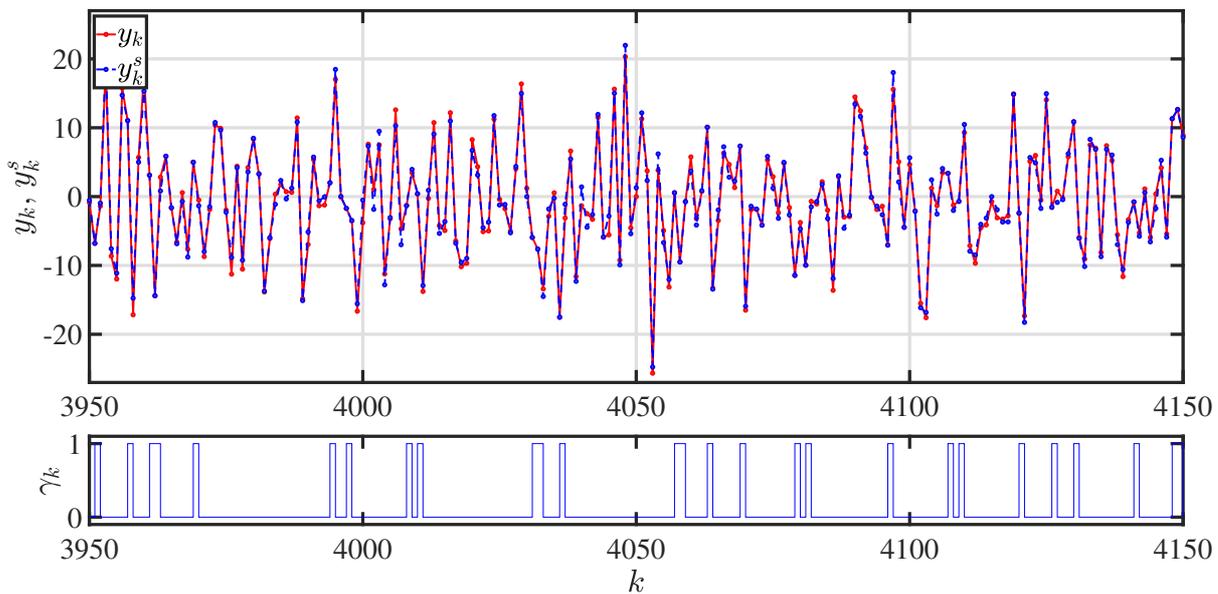


Abbildung 4.21: Ausgangssignalprädiktion bei $\gamma = 0, 1$

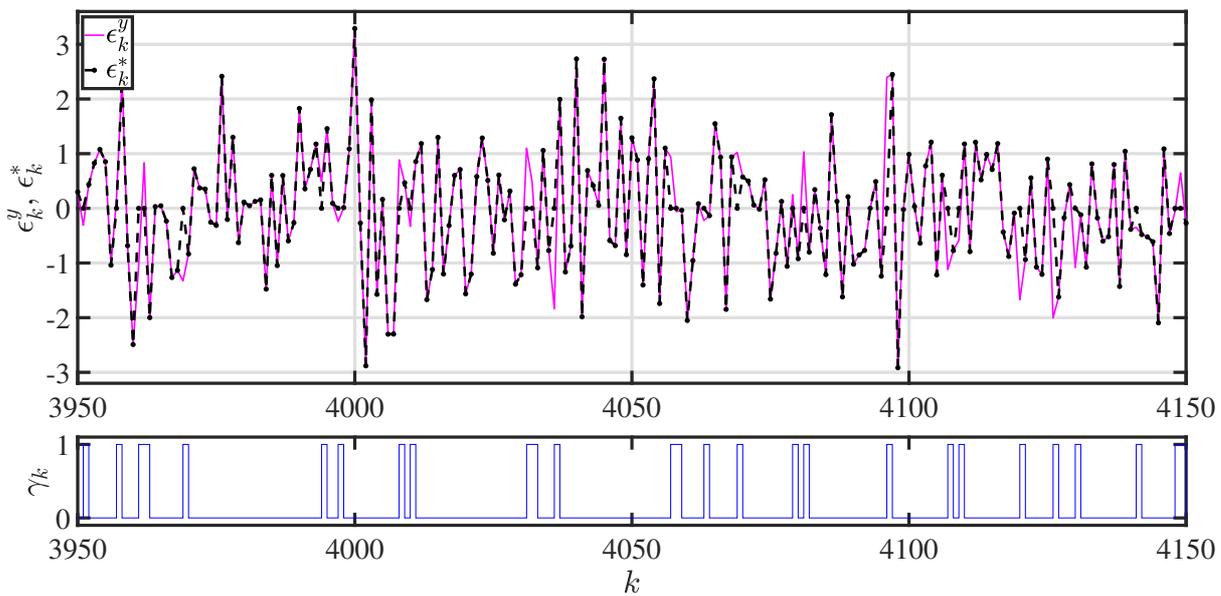


Abbildung 4.22: Prädiktionsfehler des Ausgangssignals bei $\gamma = 0, 1$

5 Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

Auch bei den sogenannten „Networked Control Systems“ (NCS) ist eine Modellbildung aus experimentellen Daten zur Lösung der Regelungsaufgabe angezeigt. Neben unerwünschten Totzeiten ist eine weitere wesentliche Einschränkung, die mit der Nutzung eines Netzwerks in einem Regelkreis einhergeht, der stochastische Datenverlust bei der Übertragung. Dessen Einfluss auf die Identifikation von Modellparametern stand in dieser Arbeit im Mittelpunkt. Es wurde ferner ein neues Verfahren auf Basis von FIR-Filtern zur Parameteridentifikation in Echtzeit vorgestellt. Zeitvariable Parameter können beispielsweise mit dem rekursive Least-Squares-Algorithmus (RLS) geschätzt werden. Auch das (erweiterte) Kalmanfilter kommt bei der Systemidentifikation zur Anwendung. Diese Echtzeitverfahren verarbeiten alle Messwerte des Systemausgangs vom initialen bis zum aktuellen Zeitpunkt. Es handelt sich um rekursive Filter mit unendlicher Impulsantwort. Parameteridentifikationsverfahren basierend auf IIR-Filtern haben allerdings folgende Nachteile: So werden sie durch eine falsche Modellierung oder temporäre Modellunsicherheiten stark beeinflusst. Ferner spielt die Wahl der Anfangswerte eine entscheidende Rolle. Das Kalmanfilter hängt darüber hinaus von der Kenntnis der Rauscheigenschaften ab und das RLS-Verfahren unterliegt dem Effekt des „Einschlafens des Schätzalgorithmus“. Zur Parameteridentifikation in Echtzeit kam daher ein bisher wenig verwendeter Algorithmus zum Einsatz: Das Least-Squares-Verfahren (LS) auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Least Squares/RHLS) entspricht einem erwartungstreuen Filter mit endlicher Impulsantwort (**Unbiased Finite Impulse Response/UFIR**). Hierbei wird eine endliche Anzahl an Messungen auf dem aktuellsten Zeithorizont verwendet. In Gegenwart von Parameter- und Messrauschen handelt es sich um einen suboptimalen Schätzer. Durch eine Optimierung der Horizontlänge erreicht man eine Minimierung der Schätzfehlerkovarianz und die Schätzgüte unterscheidet sich nur unwesentlich vom minimalvarianten/optimalen Kalmanfilter.

In **Abschnitt 3** wurde zunächst das UFIR-Parameterschätzverfahren in Echtzeit erläutert. Dieser Parameterschätzer kommt ohne A-priori-Informationen, d. h. ohne die Kenntnis von Anfangsbedingungen und Rauscheigenschaften aus. Die Verwendung in einem Netzwerk oder die Einschränkung fehlender Messungen wurde dabei zunächst ausgeklammert. Auf Basis der hergeleiteten Blockform des Schätzverfahrens konnte eine rekursive Variante bestimmt werden, die den Berechnungsaufwand reduziert. Da hierbei weiterhin eine Startschätzung in Blockform zu Beginn des Horizontes nötig ist, wurde zur weiteren Ressourcenschonung ein rekursive UFIR-Parameterschätzer entwickelt, der diese Startschätzung nicht benötigt. Daran anschließend erfolgte die Herleitung der Schätzfehlerkovarianzmatrix in Blockform und als rekursive Variante, um die Schätzgüte des Verfahrens bestimmen zu können. Eine obere und untere Schranke der Schätzfehlerkovarianz wurden für die UFIR-Parameterschätzung ermittelt. Damit ließen sich die Berechnungen zur Schätzgüte plausibilisieren und Best-Case-/Worst-Case-Analysen durchführen. Anmerkungen zum einzigen Einstellparameter des UFIR-Schätzers, der optimalen Horizontlänge, und zur sogenannten „Deadbeat-Eigenschaft“ folgten. Ein Vergleich mit der Parameteridentifikation auf Basis des (Standard-)Kalmanfilters auf unendlichem Horizont sollte die Vorteile des UFIR-Verfahrens bei praktischen Anwendungen verdeutlichen. Eine ausführliche Stabilitätsanalyse sowie eine numerisches Beispiel in Form einer Simulation bestätigten die vorangehenden Ausführungen.

Nachteilig an der FIR-Struktur ist v. a. das „Tote Zone“-Problem zu Beginn der Berechnung. Das UFIR-Verfahren kann erst nach dem Ablauf einer Horizontlänge die erste Schätzung generieren. Hierbei und beim Berechnungsaufwand sind die IIR-Verfahren überlegen. Ferner erhöht sich bei der Verwendung des UFIR-Parameterschätzers in einem Netzwerkkumfeld die Komplexität des Entwurfs und der Analyse der Schätzungsgüte, wenn bei einem Paketverlust verlorene Messungen kompensiert werden müssen. Um dies zu umgehen und die Vorteile der FIR-Struktur trotzdem für die Parameteridentifikation in einem NCS nutzen zu können, wurde in **Abschnitt 4.1** ein neuer Co-Design-Ansatz vorgeschlagen. Dabei wurden die Eigenschaften des UFIR-Verfahrens bei der Parameteridentifikation im Zusammenhang mit einer synergetischen Nutzung der paketbasierten Arbeitsweise von Kommunikationsnetzwerken untersucht. Die Modellierung eines potentiellen Datenverlusts in dem zwischen Sensor und Schätzer liegenden (TCP-basierten) Netzwerk erfolgte mit Hilfe eines Bernoulli-Prozesses. Den Synergieeffekt zwischen paketbasierter Arbeitsweise und den FIR-Filtern generierte ein intelligentes Messglied, indem dieses Messungssequenzen analog der Horizontlänge erzeugt und über das Kommunikationsnetzwerk versendet. Es wurde dabei deutlich, dass diese Konfiguration bei aufeinanderfolgenden Paketverlusten zu geringeren Informationseinbußen führt, was bei hohen Verlustraten deutlich bessere Resultate lieferte als die Ansätze von Schenato (2006, 2008), Shi und Fang (2009) sowie Sinopoli *et al.* (2004), bei denen einzelne Messungen im Netzwerk verloren gehen können. Im Rahmen der Analyse der Schätzfehlerkovarianz wurden neue (konservative) Schranken für selbige bestimmt, wobei die untere nicht vom Netzwerkverhalten abhängig ist. Bei der Untersuchung der Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften der UFIR-Parameterschätzung konnte gezeigt werden, dass bei einer optimalen Horizontlänge und sporadischen Paketankünften der beschriebene Co-Design-Ansatz stabile Ergebnisse liefert. Ein numerisches Beispiel verdeutlichte abschließend die gewonnenen Erkenntnisse. Ferner wurde ersichtlich, dass die Schätzungsgüte des UFIR-Verfahrens (auch in einem Netzwerkkumfeld) aufgrund der Optimierung der Horizontlänge nur unwesentlich hinter der des minimalvarianten Kalmanfilters zurücksteht.

Für den Fall, dass kein „intelligenter Sensor“ zu Verfügung steht und nur einzelne Messungen über das verlustbehaftete Netzwerk versendet werden können, erfolgte in **Abschnitt 4.2** eine entsprechende Anpassung des UFIR-Parameterschätzverfahrens. Die Eigenschaften des UFIR-Verfahrens bei der Parameteridentifikation im Zusammenhang mit stochastisch auftretenden Messungsverlusten in Kommunikationsnetzwerken wurden untersucht. Ein (TCP-basiertes) Netzwerk übertrug dabei die Abtastwerte des Systemausgangs von der Strecke zum Parameterschätzer. Die Modellierung eines potentiellen Datenverlusts erfolgte mit Hilfe eines Bernoulli-Prozesses. Ebendieser konnte mit Hilfe der Methode der multiplen Imputation (MI) kompensiert werden, die für Echtzeit-Schätzverfahren auf Basis einer Ausgangssignalprädiktion umgesetzt wurde. Das so entwickelte MI-UFIR-Schätzverfahren zur Parameteridentifikation über das beschriebene Netzwerk kann mit und ohne eine Startschätzung verwendet werden. Bei der Analyse der Schätzungsgüte des MI-UFIR-Verfahrens konnte die Schätzfehlerkovarianzmatrix in Blockform sowie rekursiv bestimmt werden. Ferner erfolgte ein Nachweis der Stabilität des MI-UFIR-Schätzers und der Ausgangssignalprädiktion. Eine Analyse des Verfahrens machte deutlich, dass die Schätzungsgüte bei hohen Verlustraten im MI-UFIR-Verfahren nicht plausibel ermittelt werden kann, da zur Vereinfachung bei der Bildung der MI die Parameterunsicherheit vernachlässigt wurde. Ferner zeigte sich, dass die Kriterien der Beobachtbarkeit des Parameterprozesses beim MI-UFIR-Schätzer nicht aussagekräftig sind. Der Einfluss von Paketverlusten bei der Ermittlung

der optimalen Horizontlänge stand ebenso zur Diskussion wie die Tatsache, dass eine Prädiktion des Systemausgangssignals die FIR-Struktur des Schätzers unterläuft. Ein numerisches Beispiel bestätigte abschließend die gewonnenen Erkenntnisse und machte deutlich, dass die Schätzungen des Parametervektors mit dem MI-UFIR-Verfahren eine gute Robustheit gegenüber Messungsverlusten zeigen. Bei einer hohen Kommunikationsrate wurde des Weiteren ersichtlich, dass die Ergebnisse des MI-UFIR-Verfahrens aufgrund der Optimierung der Horizontlänge nur unwesentlich hinter der des minimalvarianten Kalmanfilters zurückstehen.

5.2 Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnte eine neues echtzeitfähiges Parameterschätzverfahren basierend auf einem erwartungstreuen FIR-Filter entwickelt werden. Dabei wurden ferner zwei Ansätze aufgezeigt, die seine Verwendung in einem Netzwerkumfeld mit verlorenen Messungen ermöglicht. In diesem Zusammenhang werden die nachfolgend beschriebenen Vorschläge zur weiterführenden Forschung auf diesem Gebiet angeregt:

Netzwerkmodellierung:

- In der vorliegenden Arbeit wurde der Messungs- oder Paketverlust über einen Bernoulli-Prozess modelliert. Bei NCS greift dieser Ansatz aber zuweilen zu kurz: Betrachtet man z. B. die Paketverluste, so treten diese häufig bei einer Überlastung des Netzwerks auf. Daher ist beim Verlust eines Datenpaketes die Wahrscheinlichkeit groß, dass noch weitere verloren gehen. Dieses Verhalten, bei welchem die künftige Zufallsvariable von der gegenwärtigen abhängt, lässt sich mit Markov-Ketten modellieren (Blind *et al.*, 2008). Dabei kann der Verlustprozess wie in Shi und Fang (2009) auch auf das Anregungssignal angewendet werden.

Die Modellierung über einen Bernoulli-Prozess hat noch einen anderen Nachteil, der vor allem hinsichtlich der Beobachtbarkeit des MI-UFIR-Verfahrens relevant ist. Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen lässt sich schließen, dass auf einem unendlichen Zeithorizont fast sicher unendlich viele Messungen vom System zum Schätzer übertragen werden. Allerdings ist es unmöglich sicherzustellen, dass wenigstens eine Messung in einem endlichen Zeitintervall verfügbar ist. Dies hat erheblichen Einfluss auf die Festlegung von Beobachtbarkeitskriterien. [Kluge *et al.* (2010), S. 516]

- Ferner gehören Totzeiten zum Wesen der NCS und sollten einer entsprechenden Analyse im Rahmen des Co-Design-Ansatzes und des (MI-)UFIR-Parameteridentifikationsverfahrens unterzogen werden. Uribe-Murcia *et al.* (2020) liefert hierzu auf Basis einer UFIR-Zustandsschätzung erste Ansätze.
- In dieser Arbeit wurde ein TCP-basiertes Netzwerk mit Bestätigung für erfolgreiche Übertragungen zugrunde gelegt. Bei der Verwendung des „User Datagram Protocol“ (UDP) gibt es eine solche Bestätigung nicht. Es sollte also untersucht werden, wie das UFIR-Verfahren unter dieser Voraussetzung verwendet werden kann.
- Hinsichtlich der Nutzung von Netzwerken spielt auch deren Sicherheit gegen Angriffe eine vorrangige Rolle. So sollten die in dieser Arbeit beschriebenen Ansätze zur Parame-

terschätzung auf deren Angreifbarkeit untersucht werden. Beispielsweise analysieren Cheng *et al.* (2020) die Möglichkeiten eine netzwerkbasierte Zustandsschätzung zu kompromittieren.

Weiterführende Punkte zum MI-UFIR-Parameterschätzer bei Messungsverlusten:

- Eine eingehende Untersuchung der für den MI-UFIR-Parameterschätzer benötigten optimalen Horizontlänge in Verbindung mit Messungsverlusten sollte Gegenstand künftiger Forschung sein. Auch wäre zu prüfen, ob generell für das UFIR-Filter zur Parameterschätzung die optimale Ordnung numerisch und damit einfacher als in Abschnitt 3.5 ermittelt werden kann. Shmaliy *et al.* (2008) sowie You *et al.* (2017) können hier ggf. Ansätze liefern.
- Die Bildung der MI basiert auf der Prädiktion des Systemausgangssignals und der Ergänzung des (weißen) Messrauschens. Diese starke Vereinfachung ermöglicht die ressourcenschonende Implementierung des MI-UFIR-Parameterschätzers als Online-Algorithmus. Während die Bestimmung der Schätzwerte somit vereinfacht wird, führt die Vernachlässigung der Parameterunsicherheit dazu, dass die Schätzfehlerkovarianz bei hohen Verlusten nicht plausibel bestimmt werden kann. Um dieses Problem zu lösen, muss die Schätzfehlerkovarianz in der Prädiktion des Systemausgangssignals berücksichtigt werden. Hierzu wird der Rauschterm v_k^* in der Messgleichung

$$y_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k^*$$

an die Prädiktion angepasst:

$$v_k^* = \gamma_k \cdot v_k - (1 - \gamma_k) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T (\boldsymbol{\epsilon}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1}) .$$

Die Eigenschaften dieses Messrauschens sind dann durch

$$E[v_k^*] = 0$$

und

$$E[v_i^* v_j^*] = R_i^* \cdot \delta_{ij}$$

gegeben. Dabei gilt:

$$R_k^* = \gamma_k \cdot R + (1 - \gamma_k) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T (\bar{\boldsymbol{P}}_{k-1|k-1} + \boldsymbol{Q}) \boldsymbol{\varphi}_k .$$

Die Kovarianz des Messrauschens wird damit zeitvariant und benötigt einen entsprechenden Speicher. Offensichtlich weicht die Bestimmung der Schätzfehlerkovarianz in diesem Fall von der FIR-Struktur ab, da sich durch die Verwendung von $\bar{\boldsymbol{P}}_{k-1|k-1}$ eine Rückkopplung ergibt. Zumal die Ausgangssignalprädiktion selbst aber ebenfalls die FIR-Struktur unterläuft, muss untersucht werden, ob dies im Sinne einer genaueren Bestimmung der Schätzgüte (v. a. bei hohen Verlusten) in Kauf genommen werden kann. Die vorgeschlagene Verwendung rekursiver Anteile macht eine Analyse der Stabilität erforderlich. Des Weiteren sollte im Rahmen dieser Anpassung erforscht werden, inwieweit die optimale Horizontlänge an das zeitvariante Messrauschen anzupassen ist.

- Eine andere Möglichkeit, die Genauigkeit der MI-UFIR-Schätzung zu plausibilisieren, läge ggf. in der Modifikation und Nutzung der in Shmaliy und Ibarra-Manzano (2011) [S. 208 f.] sowie Shmaliy (2011) [S. 2468] beschriebenen Fehlergrenzen. Diese beruhen auf der Rauschverstärkung des FIR-Filters und liefern in den benannten Quellen einen guten Ansatz, die Schätzgüte zu plausibilisieren.
- Im Rahmen des MI-UFIR-Verfahrens ist eine weiterführende Analyse der vollständigen Beobachtbarkeit bzw. der Persistenz der Anregung in Betracht zu ziehen. Durch die verwendeten Anpassungen (AMM und MI) ist die Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix im Rahmen der Persistenz der Anregung nicht mehr als Kriterium zu gebrauchen und muss modifiziert werden.

Erhaltung der FIR-Struktur bei verlorenen Messungen:

- Der beschriebene Co-Design-Ansatz erhält die FIR-Struktur, da er auf eine Prädiktion des Systemausgangssignals verzichtet. Ebenso weist auch der Ansatz in Ryu *et al.* (2020) diese Eigenschaft auf, in dem verlorenen Messungen auf einem Verlusthorizont durch bereits am Schätzer vorhandene ersetzt werden. Der Verlusthorizont ist dabei geringer als die Filterordnung und impliziert somit indirekt auch eine Aussage zur Beobachtbarkeit. Das vorgeschlagene Block-FIR-Filter sollte in eine ressourcenschonendere Variante überführt und eine Anwendung als Parameterschätzer geprüft werden.

Übertragung auf die Schätzung von Systemzuständen:

- Darüber hinaus kann eine Ausweitung der in dieser Arbeit beschriebenen Ansätze auf Mehrgrößensysteme und die Zustandsschätzung linearer (zeitvarianter) und nichtlinearer Systeme erfolgen.

Einfluss des Regressionsmodells auf die UFIR-Parameteridentifikation:

- Dem in dieser Arbeit entwickelten UFIR-Parameterschätzer liegt ein lineares Regressionsmodell (Abschnitt 2.1) zugrunde. Weiterführende Untersuchungen sollten den Einfluss des gewählten Identifikationsmodells auf die vorgestellten UFIR-Ansätze zum Inhalt haben. Insbesondere gängige Modelle, wie z. B. das „Autoregressive Model with Moving Average and Exogeneous Input“ (ARMAX-Modell) oder das Ausgangsfehlermodell (Output-Error-/OE-Modell), wären hierbei zu berücksichtigen. Dabei ist die Unterscheidung zwischen linear parameterabhängigen und lediglich linear parametrisierten Modellen von besonderer Relevanz.

Literatur

- Adams, G. J., P. Albertos, G. C. Goodwin** und **A. J. Isaksson** (1994). Parameter Estimation for ARX Models with Missing Data. *IFAC Proceedings Volumes* **27**(8), 163–168.
- Ahn, Choon Ki, Peng Shi** und **Michael V. Basin** (2016). Deadbeat Dissipative FIR Filtering. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* **63**(8), 1210–1221.
- Albertos, P., R. Sanchis** und **A. Sala** (1999). Output prediction under scarce data operation: control applications. *Automatica* **35**(10), 1671–1681.
- Almutairi, N.B., Mo-Yuen Chow** und **Y. Tipsuwan** (2001). Network-based controlled DC motor with fuzzy compensation. In: *IECON 2001. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (Cat. No.37243)*. IEEE. Denver, CO, USA. 1844–1849.
- Asif, Seemal** und **Philip Webb** (2015). Networked control system an overview. *International Journal of Computer Applications* **115**(6), 26–30.
- Asiri, Sharefa, Da-Yan Liu** und **Taous-Meriem Laleg-Kirati** (2021). Selection of Modulating Functions' Design Parameters for Estimation Problems. *IEEE Control Systems Letters* **5**(1), 277–282.
- Åström, Karl Johan** und **Björn Wittenmark** (2008). *Adaptive Control (2 rev. Dover ed.)*: Dover Publications.
- Åström, Karl Johan** und **Bo M. Bernhardsson** (2002). Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*. IEEE. Las Vegas, NV, USA. 2011–2016.
- Bemporad, A.** (1998). Predictive control of teleoperated constrained systems with unbounded communication delays. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.98CH36171)*. IEEE. Tampa, FL, USA. 2133–2138.
- Bittner, M., M. Buhl** und **B. Lohmann** (2015). Zustandsschätzung nach Kalman auf einem bewegten Horizont variabler Länge. In: *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik* (B. Lohmann und G. Roppenecker, Eds.). Shaker-Verlag.
- Blind, Rainer, Ulrich Münz** und **Frank Allgöwer** (2008). Modeling, Analysis, and Design of Networked Control Systems using Jump Linear Systems (Modellierung, Analyse und Entwurf vernetzter Regelsysteme mithilfe schaltender Systeme). *at - Automatisierungstechnik* **56**(1/2008), 20 – 28.
- Bohn, Christian** und **Heinz Unbehauen** (2016). *Identifikation dynamischer Systeme*: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Branicky, M. S., S. M. Phillips** und **Wei Zhang** (2000). Stability of networked control systems: explicit analysis of delay. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*. IEEE. Chicago, IL, USA. 2352–2357.

- Branicky, M. S., S. M. Phillips** und **Wei Zhang** (2002). Scheduling and feedback co-design for networked control systems. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*. IEEE. Las Vegas, NV, USA. 1211–1217.
- Branicky, M. S.** und **S. M. Phillips** (2007). Networked control systems repository [online].
- Bruckstein, A.** und **T. Kailath** (1985). Recursive limited memory filtering and scattering theory (Corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory* **31**(3), 440–443.
- Cao, Liyu** und **Howard M. Schwartz** (2003). Exponential convergence of the Kalman filter based parameter estimation algorithm. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **17**(10), 763–783.
- Chan, H.** und **U. Ozguner** (1994). Closed-loop control of systems over a communication network with queues. In: *Proceedings of 1994 American Control Conference - ACC 1994*. IEEE. Baltimore, MD, USA. 493–510.
- Cheng, Peng, Zeyu Yang, Jiming Chen, Yifei Qi** und **Ling Shi** (2020). An Event-Based Stealthy Attack on Remote State Estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **65**(10), 4348–4355.
- Chow, Mo-Yuen** und **Yodyium Tipsuwan** (2001). Network-based control systems: a tutorial. In: *IECON 2001. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (Cat. No.37243)*. IEEE. Denver, CO, USA. 1593–1602.
- Cioffi, J.** und **T. Kailath** (1985). Windowed fast transversal filters adaptive algorithms with normalization. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **33**(3), 607–625.
- Costa, O.L.V.** und **S. Guerra** (2002). Stationary filter for linear minimum mean square error estimator of discrete-time Markovian jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(8), 1351–1356.
- Deyst, J.** (1973). Correction to Conditions for asymptotic stability of the discrete minimum-variance linear estimator". *IEEE Transactions on Automatic Control* **18**(5), 562–563.
- Deyst, J.** und **C. Price** (1968). Conditions for asymptotic stability of the discrete minimum-variance linear estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control* **13**(6), 702–705.
- Ding, Feng** und **Jie Ding** (2009). Least-squares parameter estimation for systems with irregularly missing data. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **24**, 540–553.
- Ding, Feng** und **Tongwen Chen** (2004a). Combined parameter and output estimation of dual-rate systems using an auxiliary model. *Automatica* **40**(10), 1739–1748.
- Ding, Feng** und **Tongwen Chen** (2004b). Identification of dual-rate systems based on finite impulse response models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **18**(7), 589–598.

- Ding, Steven X.** (2013). *Model-Based Fault Diagnosis Techniques*: Springer London.
- Fischer, J.** (2014). Optimal Sequence-Based Control of Networked Linear Systems. PhD thesis. Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Karlsruhe, Deutschland.
- Fliess, M.** und **H. Sira-Ramírez** (2003). State reconstructors: a possible alternative to asymptotic observers and Kalman filters. *Proceedings of CESA*.
- Freund, E.** (1971). *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*: Springer Berlin Heidelberg.
- Georgiev, Daniel** und **Dawn M. Tilbury** (2006). Packet-based control: the h2-optimal solution. *Automatica* **42**(1), 137–144.
- Guo, L.** (1990). Estimating time-varying parameters by the Kalman filter based algorithm: stability and convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(2), 141–147.
- Gupta, Rachana Ashok** und **Mo-Yuen Chow** (2010). Networked Control System: Overview and Research Trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **57**(7), 2527–2535.
- Gupta, V., D. Spanos, B. Hassibi** und **R. M. Murray** (2005). On LQG control across a stochastic packet-dropping link. In: *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005*. IEEE.
- Halevi, Yoram** und **Asok Ray** (1988). Integrated communication and control systems: Part I—analysis. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **110**(4), 367–373.
- Han, Soo Hee, Wook Hyun Kwon** und **Pyung Soo Kim** (2002). Quasi-deadbeat minimax filters for deterministic state-space models. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(11), 1904–1908.
- Hashimoto, Koichi, Yasuaki Oishi** und **Yutaka Yamamoto** (2003). *Control and Modeling of Complex Systems*: Birkhäuser Boston.
- Hekler, Achim, Jorg Fischer** und **Uwe D. Hanebeck** (2012). Sequence-based control for networked control systems based on virtual control inputs. In: *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. Maui, HI, USA. 7–13.
- Hespanha, Joo P., Payam Naghshtabrizi** und **Yonggang Xu** (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE* **95**(1), 138–162.
- Heuser, Harro** (2000). *Lehrbuch der Analysis*: Vieweg + Teubner Verlag.
- Hong, Seung Ho** (1995). Scheduling algorithm of data sampling times in the integrated communication and control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **3**(2), 225–230.
- Hong, S. H.** und **W.-H. Kim** (2000). Bandwidth allocation scheme in CAN protocol. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **147**(1), 37–44.
- Hristu-Varsakelis, Dimitrios** und **William S. Levine** (2007). *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*: Birkhäuser Boston.

- Ioannou, P. A.** und **J. Sun** (1996). *Robust Adaptive Control. Bd. 1 in: Control theory*: PTR Prentice-Hall.
- Isermann, Rolf** (1992). *Identifikation dynamischer Systeme 1*: Springer Berlin Heidelberg.
- Jazwinski, A.** (1968). Limited memory optimal filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control* **13**(5), 558–563.
- Jazwinski, A. H.** (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Mathematics in Science and Engineering: Elsevier Science.
- Jin, Zhipu** (2007). Coordinated control for networked multi-agent systems. PhD thesis. California Institute of Technology. Pasadena, USA.
- Johnstone, Richard, C. Johnson, Robert Bitmead** und **Brain O. Anderson** (1982). Exponential convergence of recursive least squares with exponential forgetting factor. In: *1982 21st IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE.
- Jouffroy, Jérôme** und **Johann Reger** (2015). Finite-time simultaneous parameter and state estimation using modulating functions. In: *2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE. 394–399.
- Kalman, R. E.** (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering* **82**(1), 35–45.
- Kim, Pyung-Soo** (2010). An alternative FIR filter for state estimation in discrete-time systems. *Digital Signal Processing* **20**(3), 935–943.
- Kim, Pyung-Soo** und **Myung-Eui Lee** (2007). A new FIR filter for state estimation and its application. *Journal of Computer Science and Technology* **22**(5), 779–784.
- Kim, Yong Ho, Wook Hyun Kwon** und **Hong Seong Park** (1996). Stability and a scheduling method for network-based control systems. In: *Proceedings of the 1996 IEEE (IECON). 22nd International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation*. IEEE. 934–939.
- Kluge, S., K. Reif** und **M. Brokate** (2010). Stochastic Stability of the Extended Kalman Filter With Intermittent Observations. *IEEE Transactions on Automatic Control* **55**(2), 514–518.
- Kozin, F.** (1969). A survey of stability of stochastic systems. *Automatica* **5**(1), 95–112.
- Kwon, Wook Hyun, Pyung Soo Kim** und **PooGyeon Park** (1999). A receding horizon Kalman FIR filter for discrete time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(9), 1787–1791.
- Kwon, Wook Hyun, Pyung Soo Kim** und **Soo Hee Han** (2002). A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state space models. *Automatica* **38**(3), 545–551.
- Kwon, Wook Hyun** und **Soo Hee Han** (2005). *Receding Horizon Control: Model Predictive Control for State Models (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing)*: Springer.

- Lehmann, Daniel** und **Jan Lunze** (2009). Event-based control: A state-feedback approach. In: *Proceedings of the 2009 European Control Conference*. Budapest, Ungarn. 1716–1721.
- Lin, Minghua** und **Suvrit Sra** (2014). Completely strong superadditivity of generalized matrix functions. *Functional Analysis (math.FA)*.
- Liou, Luen-Woei** und **A. Ray** (1990). Integrated communication and control systems: Part III—nonidentical sensor and controller sampling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **112**(3), 357–364.
- Litz, Lothar, Thomas Gabriel, Melanie Groß** und **Oliver Gabel** (2008). Networked Control Systems (NCS) – Stand und Ausblick (Networked Control Systems (NCS) – State of the Art and Future). *at - Automatisierungstechnik* **56**(1/2008), 4–19.
- Liu, Da-Yan** und **Taous-Meriem Laleg-Kirati** (2015). Robust fractional order differentiators using generalized modulating functions method. *Signal Processing* **107**, 395–406.
- Liu, D. Y., T. M. Laleg-Kirati, W. Perruquetti** und **O. Ghibaru** (2014). Non-asymptotic state estimation for a class of linear time-varying systems with unknown inputs. *IFAC Proceedings Volumes* **47**(3), 3732–3738.
- Liu, G. P., J. X. Mu, D. Rees** und **S. C. Chai** (2006). Design and stability analysis of networked control systems with random communication time delay using the modified MPC. *International Journal of Control* **79**(4), 288–297.
- Liu, Guo-Ping, Yuanqing Xia, Jie Chen, David Rees** und **Wenshan Hu** (2007). Networked predictive control of systems with random network delays in both forward and feedback channels. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **54**(3), 1282–1297.
- Liu, Yanjun** und **Feng Ding** (2013). Convergence properties of the least squares estimation algorithm for multivariable systems. *Applied Mathematical Modelling* **37**(1-2), 476–483.
- Li, Wangyan, Guoliang Wei, Derui Ding, Yurong Liu** und **Fuad E. Alsaadi** (2018). A New Look at Boundedness of Error Covariance of Kalman Filtering. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* **48**(2), 309–314.
- Ljung, L.** (1988). Adaptation and Tracking in System Identification. *IFAC Proceedings Volumes* **21**(9), 1–10.
- Ljung, L.** (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall information and system sciences series: Prentice Hall PTR.
- Luck, Rogelio** und **Asok Ray** (1990). An observer-based compensator for distributed delays. *Automatica* **26**(5), 903–908.
- Luck, Rogelio** und **Asok Ray** (1994). Experimental verification of a delay compensation algorithm for integrated communication and control systems. *International Journal of Control* **59**(6), 1357–1372.

- Lunze, Jan** (2013). *Control Theory of Digitally Networked Dynamic Systems*: Springer International Publishing.
- Lunze, Jan** (2017). Ein neues Konzept zur kooperativen Regelung von Fahrzeugkolonnen. *at - Automatisierungstechnik*.
- Markley, F. Landis** und **J. Russell Carpenter** (2009). Generalized Linear Covariance Analysis. *The Journal of the Astronautical Sciences* **57**(1-2), 233–260.
- Molin, Adam** (2014). Optimal Event-triggered Control with Communication Constraints. Dissertation. Technische Universität München. München.
- Naghshtabrizi, P.** und **J. P. Hespanha** (2005). Designing an observer-based controller for a network control system. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. Sevilla, Spanien.
- Naghshtabrizi, Payam** (2007). Delay Impulsive Systems: A Framework For Modeling Networked Control Systems. PhD thesis. University of California. Santa Barbara, USA.
- Naghshtabrizi, Payam, Joao P. Hespanha** und **Andrew R. Teel** (2007). Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems. In: *2007 American Control Conference*. IEEE. New York, NY, USA. 4899–4904.
- Nešić, D.** und **A. R. Teel** (2004). Input-to-state stability of networked control systems. *Automatica* **40**(12), 2121–2128.
- Nilsson, Johan** (1998). Real-Time Control Systems with Delays. PhD thesis. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology. Lund, , Schweden.
- Nilsson, Johan, Bo Bernhardsson** und **Björn Wittenmark** (1998). Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. *Automatica* **34**(1), 57–64.
- Olfati-Saber, Reza, J. Alex Fax** und **Richard M. Murray** (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE* **95**(1), 215–233.
- Otto, Klaus-Dieter** (1988). Einführung in die lineare Schätztheorie. Technical Report LRT/WE 13/IB/88-1. Universität der Bundeswehr München, LRT/WE 13.
- Pak, Jung Min, Choon Ki Ahn, Yuriy S. Shmaliy, Peng Shi** und **Myo Taeg Lim** (2016). Switching Extensible FIR Filter Bank for Adaptive Horizon State Estimation with Application. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **24**(3), 1052–1058.
- Petković, Milena, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić** und **Alessandro Pisano** (2012). On-line adaptive clustering for process monitoring and fault detection. *Expert Systems with Applications* **39**(11), 10226–10235.
- Ramirez-Echeverria, Felipe, Amadou Sarr** und **Yuriy S. Shmaliy** (2014). Optimal memory for discrete-time FIR filters in state-space. *IEEE Transactions on Signal Processing* **62**(3), 557–561.

- Ray, Asok** und **Yoram Halevi** (1988). Integrated communication and control systems: Part II—design considerations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **110**(4), 374–381.
- Reger, Johann** und **Jérôme Jouffroy** (2008). Algebraische Ableitungsschätzung im Kontext der Rekonstruierbarkeit (Algebraic Time-derivative Estimation in the Context of Reconstructibility). *at - Automatisierungstechnik* **56**(6), 324–331.
- Reger, Johann** und **Jérôme Jouffroy** (2009). On algebraic time-derivative estimation and deadbeat state reconstruction. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. IEEE. 1740–1745.
- Robertson, Douglas G., Jay H. Lee** und **James B. Rawlings** (1996). A moving horizon-based approach for least-squares estimation. *AIChE Journal* **42**(8), 2209–2224.
- Romero, Julio Ariel, Nestor J. Pascual, Ignacio Penarrocha** und **Roberto Sanchis** (2012). Event-based PI controller with adaptive thresholds. In: *2012 IV International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems*. IEEE. St. Petersburg, Russia. 219–225.
- Rubin, Donald B.** (1978). Multiple imputations in sample surveys—a phenomenological Bayesian approach to nonresponse. In: *Proceedings of the survey research methods section of the American Statistical Association*. Vol. 1. American Statistical Association. 20–34.
- Rubin, Donald B.** (1987). *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys (Wiley Series in Probability and Statistics)*: Wiley.
- Ryu, Dong Ki, Chang Joo Lee, Sang Kyoo Park** und **Myo Taeg Lim** (2020). Unbiased FIR Filtering with Incomplete Measurement Information. *International Journal of Control, Automation and Systems* **18**(2), 330–338.
- Schenato, Luca** (2006). Optimal estimation in networked control systems subject to random delay and packet loss. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE.
- Schenato, Luca** (2008). Optimal Estimation in Networked Control Systems Subject to Random Delay and Packet Drop. *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(5), 1311–1317.
- Schröder, Hartmut** (1998). *Mehrdimensionale Signalverarbeitung*: Vieweg + Teubner Verlag.
- Söderström, Torsten** und **Petre Stoica** (1989). *System Identification (Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering)*: Prentice Hall.
- Seiler, P.** und **Raja Sengupta** (2005). An H_∞ approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(3), 356–364.
- Shinbrot, M.** (1957). On the analysis of linear and nonlinear systems. *Trans. ASME* **79**(3), 547–552.

- Shi, Yang** und **Huazhen Fang** (2009). Kalman filter-based identification for systems with randomly missing measurements in a network environment. *International Journal of Control* **83**(3), 538–551.
- Shmaliy, Y. S.** (2009). Unbiased FIR filtering of discrete-time polynomial state-space models. *IEEE Transactions on Signal Processing* **57**(4), 1241–1249.
- Shmaliy, Yuriy S.** (2010). Linear optimal FIR estimation of discrete time-invariant state-space models. *IEEE Transactions on Signal Processing* **58**(6), 3086–3096.
- Shmaliy, Yuriy S.** (2011). An Iterative Kalman-Like Algorithm Ignoring Noise and Initial Conditions. *IEEE Transactions on Signal Processing* **59**(6), 2465–2473.
- Shmaliy, Yuriy S., Frederic Lehmann, Shunyi Zhao** und **Choon Ki Ahn** (2018). Comparing Robustness of the Kalman, h_{infty} , and UFIR Filters. *IEEE Transactions on Signal Processing* **66**(13), 3447–3458.
- Shmaliy, Yuriy S., Jorge Munoz-Diaz** und **Luis Arceo-Miquel** (2008). Optimal horizons for a one-parameter family of unbiased FIR filters. *Digital Signal Processing* **18**(5), 739–750.
- Shmaliy, Yuriy S., Sanowar Khan** und **Shunyi Zhao** (2016). Ultimate iterative UFIR filtering algorithm. *Measurement* **92**, 236–242.
- Shmaliy, Yuriy S., Shunyi Zhao** und **Choon Ki Ahn** (2017). Unbiased Finite Impulse Response Filtering: An Iterative Alternative to Kalman Filtering Ignoring Noise and Initial Conditions. *IEEE Control Systems* **37**(5), 70–89.
- Shmaliy, Yuriy S.** und **Dan Simon** (2013). Iterative unbiased FIR state estimation: a review of algorithms. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*.
- Shmaliy, Yuriy S.** und **Oscar Ibarra-Manzano** (2011). Noise power gain for discrete-time FIR estimators. *IEEE Signal Processing Letters* **18**(4), 207–210.
- Shousong, Hu** und **Zhu Qixin** (2003). Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay. *Automatica* **39**(11), 1877–1884.
- Siegl, Steffen** (2017). Networked Control Systems: Ein Überblick. Technical report. Universität der Bundeswehr München Institut für Steuer- und Regelungstechnik.
- Siegl, Steffen** und **Ferdinand Svaricek** (2020). UFIR-Parameteridentifikation in Echtzeit. *at - Automatisierungstechnik* **68**(3), 176–195.
- Siegl, Steffen** und **Ferdinand Svaricek** (2021). UFIR-Parameteridentifikation in Echtzeit bei fehlenden Messungen. *at - Automatisierungstechnik* **69**(1), 14–40.
- Simon, Dan** (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*: Wiley-Interscience.
- Sinopoli, B., L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M. I. Jordan** und **S. S. Sastry** (2004). Kalman Filtering With Intermittent Observations. *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(9), 1453–1464.

- Sonntag, Christian** (2017). Echtzeitadaptionsverfahren für Optimalregler mit Ausgangsrückführung für lineare Systeme. PhD thesis. Universität der Bundeswehr München/Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik.
- Tipsuwan, Y.** und **Mo-Yuen Chow** (2001). Network-based controller adaptation based on QoS negotiation and deterioration. In: *IECON 2001. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (Cat. No.37243)*. IEEE. Denver, CO, USA. 1794–1799.
- Tipsuwan, Yodyium** und **Mo-Yuen Chow** (2003). Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice* **11**(10), 1099–1111.
- Unbehauen, Heinz** (2008). *Regelungstechnik I*: Vieweg + Teubner Verlag.
- Uribe-Murcia, Karen J., Yuriy S. Shmaliy, Choon Ki Ahn** und **Shunyi Zhao** (2020). Unbiased FIR Filtering for Time-Stamped Discretely Delayed and Missing Data. *IEEE Transactions on Automatic Control* **65**(5), 2155–2162.
- van Buuren, Stef** (2018). *Flexible Imputation of Missing Data, Second Edition*: Taylor & Francis Ltd.
- Vazquez-Olguin, Miguel, Yuriy S. Shmaliy, Choon Ki Ahn** und **Oscar G. Ibarra-Manzano** (2017). Blind Robust Estimation With Missing Data for Smart Sensors Using UFIR Filtering. *IEEE Sensors Journal* **17**(6), 1819–1827.
- Vazquez-Olguin, Miguel, Yuriy S. Shmaliy, Oscar Ibarra-Manzano** und **Luis Javier Morales-Mendoza** (2018). Design of Blind Robust Estimator for Smart Sensors. In: *Advances in Computational Intelligence*. 354–365. Springer International Publishing.
- Walsh, G. C., Hong Ye** und **L. Bushnell** (1999a). Stability analysis of networked control systems. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*. Vol. 4. IEEE. San Diego, California. 2876–2880.
- Walsh, G. C., O. Beldiman** und **L. Bushnell** (1999b). Asymptotic behavior of networked control systems. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications (Cat. No.99CH36328)*. IEEE. Kohala Coast, HI, USA. 1448–1453.
- Walsh, G. C., O. Beldiman** und **L. Bushnell** (1999c). Error encoding algorithms for networked control systems. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*. IEEE. Phoenix, AZ, USA. 4933–4938.
- Wilson, Emma D., Quentin Clairon, Robin Henderson** und **C. James Taylor** (2018). Dealing with observational data in control. *Annual Reviews in Control* **46**, 94–106.
- Xiao, Lin, A. Hassibi** und **J. P. How** (2000). Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*. IEEE. Chicago, IL, USA. 2199–2204.
- Xiong, K., H.Y. Zhang** und **C.W. Chan** (2006). Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering. *Automatica* **42**(2), 261–270.

- Xu, Yonggang** (2006). Communication scheduling methods for estimation over networks. PhD thesis. University of California.
- Xu, Yonggang** und **Joao P. Hespanha** (2005). Estimation under uncontrolled and controlled communications in Networked Control Systems. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE.
- Yang, Chao, Jiangying Zheng, Xiaoqiang Ren, Wen Yang, Hongbo Shi** und **Ling Shi** (2018). Multi-Sensor Kalman Filtering With Intermittent Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control* **63**(3), 797–804.
- Young, Peter C.** (2011). *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*: Springer Berlin Heidelberg.
- You, Sung Hyun, Jung Min Pak** und **Jeong Hoon Kim** (2017). Optimal horizon size for unbiased finite memory digital phase-locked loop. *IEICE Electronics Express* **14**(3), 20161184–20161184.
- Yue, Dong, Qing-Long Han** und **Chen Peng** (2004). State feedback controller design of networked control systems. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications, 2004*. IEEE. Taipei, Taiwan. 640–644.
- Yu, Han** und **Panos J. Antsaklis** (2011). Event-triggered output feedback control for networked control systems using passivity: Triggering condition and limitations. In: *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. IEEE. Orlando, FL, USA. 199–204.
- Yu, Mei, Long Wang, Tianguang Chu** und **Fei Hao** (2004). An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays. In: *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*. Vol. 5. IEEE. Nassau, Bahamas. 3545–3550.
- Zampieri, Sandro** (2008). Trends in Networked Control Systems. *IFAC Proceedings Volumes* **41**(2), 2886–2894.
- Zhang, Qinghua** (2017). On stability of the Kalman filter for discrete time output error systems. *Systems & Control Letters* **107**, 84–91.
- Zhang, Xiao-Ping, Ahmed Shaharyar Khwaja, Ji-An Luo, Alon Shalev Housfater** und **Alagan Anpalagan** (2015). Multiple Imputations Particle Filters: Convergence and Performance Analyses for Nonlinear State Estimation With Missing Data. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* **9**(8), 1536–1547.
- Zhao, Shunyi, Biao Huang** und **Yuriy S. Shmaliy** (2017a). Bayesian state estimation on finite horizons: The case of linear state–space model. *Automatica* **85**, 91–99.
- Zhao, Shunyi, Yuriy S. Shmaliy, Choon Ki Ahn** und **Fei Liu** (2018a). Adaptive-Horizon Iterative UFIR Filtering Algorithm With Applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **65**(8), 6393–6402.

- Zhao, Shunyi, Yuriy S. Shmaliy und Choon Ki Ahn (2018b)**. Iterative Maximum Likelihood FIR Estimation of Dynamic Systems With Improved Robustness. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **23**(3), 1467–1476.
- Zhao, Shunyi, Yuriy S. Shmaliy und Fei Liu (2015a)**. Fast Computation of Discrete Optimal FIR Estimates in White Gaussian Noise. *IEEE Signal Processing Letters* **22**(6), 718–722.
- Zhao, Shunyi, Yuriy S. Shmaliy und Fei Liu (2016)**. Fast Kalman-Like Optimal Unbiased FIR Filtering With Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing* **64**(9), 2284–2297.
- Zhao, Shunyi, Yuriy S. Shmaliy und Fei Liu (2017b)**. On the Iterative Computation of Error Matrix in Unbiased FIR Filtering. *IEEE Signal Processing Letters* **24**(5), 555–558.
- Zhao, Yun-Bo, Xi-Ming Sun, Jinhui Zhang und Peng Shi (2015b)**. Networked control systems: The communication basics and control methodologies. *Mathematical Problems in Engineering* **2015**, 1–9.
- Zhong, Qing-Chang (2006)**. *Robust Control of Time-delay Systems*: Springer London.

A Ergänzende und weiterführende Punkte

A.1 Die rekursive Form des UFIR-Parameterschätzers über die gesamte Horizontlänge

Setzt man in den Gleichungen (3.28) bis (3.31) $N = k + 1$ und $l = k$, dann erhält man den UFIR-Parameterschätzer auf dem gesamten Horizont. Dieser entspricht der rekursiven Methode der kleinsten Quadrate, bei dem die Anfangsbedingungen durch eine Startschätzung in Blockform ersetzt werden. [Shmaliy (2011), S. 2468]

Gegeben sei p und $k \geq \alpha$ mit $\alpha = \max(p, 2)$. Für die rekursive Form auf dem gesamten Horizont folgt dann:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \mathbf{M}_k \boldsymbol{\varphi}_k (y_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}) \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\mathbf{M}_k = (\mathbf{M}_{k-1}^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T)^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k-1} - \frac{\mathbf{M}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M}_{k-1}}{1 + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k} \quad (\text{A.3})$$

und der Startschätzung in Blockform

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha-1|\alpha-1} = \mathbf{M}_{\alpha-1} \boldsymbol{\Phi}_{\alpha-1,0}^T \mathbf{Y}_{\alpha-1,0}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{M}_{\alpha-1} = (\boldsymbol{\Phi}_{\alpha-1,0}^T \boldsymbol{\Phi}_{\alpha-1,0})^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{\alpha-1} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right]^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Der DKF-Parameterschätzer als Benchmark

Zur Einordnung der Leistungsfähigkeit der vorgestellten Ansätze auf Basis des UFIR-Parameterschätzers werden diese mit einem Verfahren auf Basis eines diskreten Kalmanfilters (DKF) nach Sinopoli *et al.* (2004) sowie Shi und Fang (2009) auf unendlichem Horizont (IIR) verglichen. Dabei überträgt der Sensor an der Regelstrecke nur einen einzelnen Abtastwert über das Netzwerk. Der potentieller Datenverlust unterliegt aber derselben Modellierung wie bei den neuen UFIR-Ansätzen.

Für das Kalmanfilter auf einem unendlichen Zeithorizont ergibt sich mit den Gleichungen (2.9) und (2.10) sowie den Rauscheigenschaften nach (2.11) und dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Netzwerkverhalten nachfolgender Zusammenhang:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \gamma_k \cdot \mathbf{K}_k (y_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}). \quad (\text{A.6})$$

Die Kalmanverstärkung folgt dabei aus

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k}{\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k + R}, \quad (\text{A.7})$$

mit der A-priori-Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}. \quad (\text{A.8})$$

Die A-posteriori-Schätzfehlerkovarianzmatrix ergibt sich des Weiteren zu

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \gamma_k \cdot \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1}. \quad (\text{A.9})$$

Anmerkung:

Die Bildung des Regressionsvektors $\boldsymbol{\varphi}_k$ beruht auch beim DKF auf der AMM und nutzt somit ein Hilfsmodell nach Abschnitt 4.2.1.2.

A.3 Das Kalmanfilter auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Kalman Filter/RHKF)

Das Kalmanfilter auf einem unendlichen Zeithorizont ist im Zuge der Prädiktionsfehlerverfahren für die Identifikation (zeitvariabler) Parameter etabliert [Bohn und Unbehauen (2016), Cao und Schwartz (2003), Guo (1990)]. [Auch das Erweiterte Kalmanfilter (Extended Kalman filter/EKF) kommt nach Simon (2006) bei der Systemidentifikation zur Anwendung.]

A.3.1 Herleitung des RHKF-Algorithmus

Für das Kalmanfilter zur Parameterschätzung auf Basis von (2.9) und (2.10) sowie den Rauschigenschaften nach (2.11) ergibt sich mit dem Anfangswert $\boldsymbol{\theta}_{k_0}$ [als eine mit dem Prozess- und Messrauschen unkorrelierte Zufallsvariable (Mittelwert $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k_0}$)] und der initialen Kovarianz \mathbf{P}_{k_0} :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k (y_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}). \quad (\text{A.10})$$

Für die Kalmanverstärkung gilt dabei

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k}{R + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k}, \quad (\text{A.11})$$

mit der A-priori-Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}. \quad (\text{A.12})$$

Für die A-posteriori-Schätzfehlerkovarianzmatrix ergibt sich des Weiteren

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1}}{R + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \boldsymbol{\varphi}_k}. \quad (\text{A.13})$$

Gleichung (A.10) kann dann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \mathbf{P}_{k|k} \boldsymbol{\varphi}_k \frac{1}{R} y_k. \quad (\text{A.14})$$

Bei einer unendlichen Unsicherheit der Anfangsbedingungen ($\mathbf{P}_{k_0} = \infty$) bietet sich die Nutzung der Informationsform des Kalmanfilters nach Simon (2006) [S. 156 ff.] an. Mit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{k|k-1} &= \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \\ \mathcal{I}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k}^{-1} = \mathcal{I}_{k|k-1} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \end{aligned}$$

ergibt sich aus (A.14)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathcal{I}_{k|k}^{-1} \mathcal{I}_{k|k-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \mathcal{I}_{k|k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k \frac{1}{R} y_k. \quad (\text{A.15})$$

Das Kalmanfilter auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Kalman Filter/RHKF) in Anlehnung an Kwon *et al.* (1999) nutzt zum Zeitpunkt k nur eine endliche Anzahl Messungen auf dem Horizont der Länge N , von $m = k - N + 1$ bis k , und verwirft Messungen, die außerhalb liegen. In Gleichung (A.15) wird dazu das k durch ein $l \in [m, k]$ ersetzt:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \mathcal{I}_{l|l}^{-1} \mathcal{I}_{l|l-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \mathcal{I}_{l|l}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{R} y_l. \quad (\text{A.16})$$

Da der Anfangswert $\boldsymbol{\theta}_{m-1}$ zu Beginn des Horizontes nicht bekannt ist, gilt

$$\mathcal{I}_{m-1|m-1}^{-1} = \mathbf{P}_{m-1|m-1} = \infty$$

und damit $\mathcal{I}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$. Um Probleme mit einer möglichen Singularität von $\mathcal{I}_{l|l}$ auf $0 \leq l < p$ zu umgehen, multipliziert Kwon *et al.* (1999) Gleichung (A.16) von links mit $\mathcal{I}_{l|l}$ und nutzt den folgenden Zusammenhang [aus dem Matrixinversionslemma/der Matrizenidentität nach Simon (2006), S. 11 f.]

$$\mathcal{I}_{l|l-1} = (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1}.$$

Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} &= \mathcal{I}_{l|l-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{R} y_l \\ &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{R} y_l \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Mit der Definition $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} := \mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{m-1|m-1} = \mathcal{I}_{m-1|m-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$ erhält man den folgenden Algorithmus:

Algorithmus A.1 RHKF-Parameterschätzer

Gegeben:

- a) Identifikationsmodell nach (2.9) bis (2.11)
- b) Persistente Anregung
- c) Horizontlänge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k
- d) Unbekannte Anfangsbedingung $\boldsymbol{\theta}_{m-1}$

Gesucht:

- a) Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ von $\boldsymbol{\theta}_k$
- b) Schätzfehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k|k}$

1: **begin**

2: **for** $k = N - 1 : \infty$ **do**

3: $m = k - N + 1$

4: *Initialisierung:*

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l-1|l-1} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{I}_{l-1|l-1} = \mathcal{I}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$$

5: **for** $l = m : k$ **do**

6: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{k|k}$ und $\mathcal{I}_{k|k}$ werden iterativ bestimmt aus:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{R} y_l \\ \mathcal{I}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

7: **end for**

8: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l}$ (für $l = k$)

9: $\mathcal{I}_{k|k} = \mathcal{I}_{l|l}$ (für $l = k$)

10: Die *Parameterschätzung* folgt aus

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathcal{I}_{k|k}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{k|k} . \quad (\text{A.19})$$

11: Die *Schätzfehlerkovarianzmatrix* ergibt sich zu

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathcal{I}_{k|k}^{-1} . \quad (\text{A.20})$$

12: **end for**

13: **end**

Das Vorgehen in Algorithmus A.1 ist in Abbildung A.1 näher erläutert.

A.3.2 Relevante Eigenschaften des RHKF-Parameterschätzers

Das RHKF, das nach Kwon *et al.* (2002) ein optimales FIR-Filter (optimal unbiased FIR filter/OUFIR-Filter) darstellt, ist insbesondere ein erwartungstreuer Schätzer und hat die so-

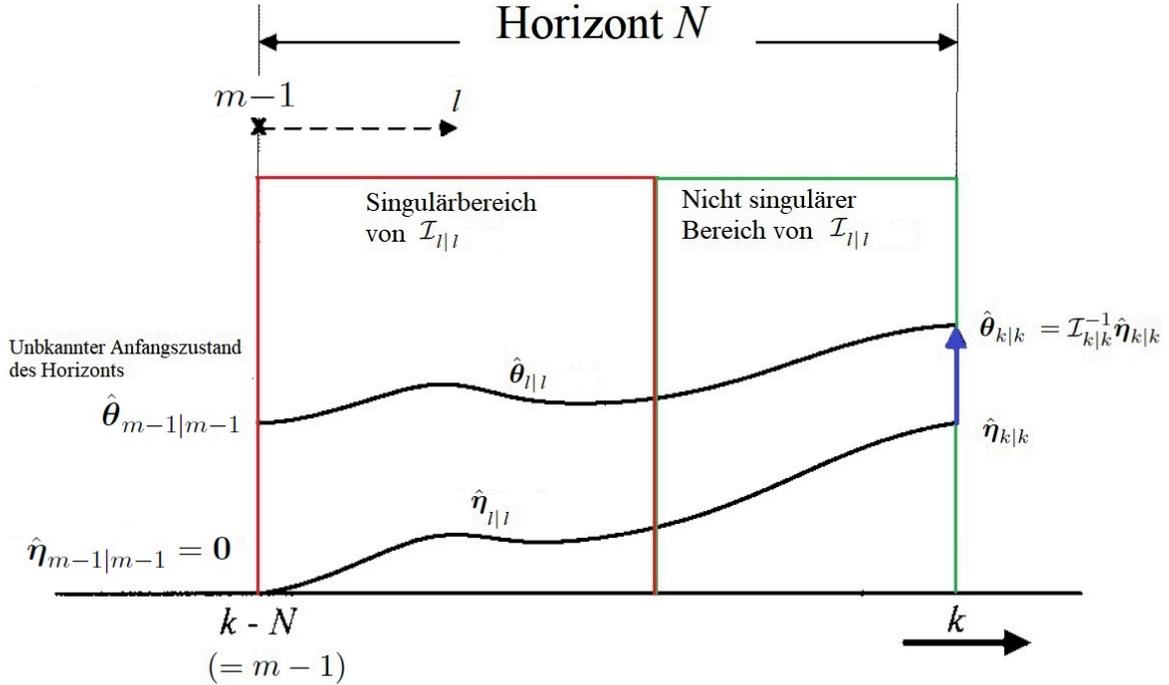


Abbildung A.1: RHKF-Parameterschätzer [vgl. Kwon *et al.* (1999)]

nannte Deadbeat-Eigenschaft (Kwon *et al.*, 1999).

Sofern Prozess- und Messrauschen vorhanden ist, kompensiert der RHKF-Parameterschätzer das Rauschen optimal. Ist kein Rauschen vorhanden, dann liefert er die exakte Schätzung der Parameter. Diese Deadbeat-Eigenschaft deutet auf eine endliche Konvergenzzeit und eine schnelle Nachführung der Schätzung hin [Kwon *et al.* (1999), S. 1790 sowie Kwon *et al.* (2002), S. 548].

Lemma 15. *Wenn die Anregung persistent ist und $N \geq p$, dann ist der RHKF-Parameterschätzer (A.19) für jede unbekannt Anfangsbedingung θ_{m-1} auf dem Horizont $[m, k]$ erwartungstreu¹⁶.*

Beweis. Da $\mathcal{I}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$ ist, gilt für $l = m - 1$ unabhängig von $\hat{\theta}_{m-1|m-1}$ und θ_{m-1} : $E[\mathcal{I}_{m-1|m-1} \hat{\theta}_{m-1|m-1}] = E[\mathcal{I}_{m-1|m-1} \theta_{m-1}] = \mathbf{0}$. Mit $v_k \in \mathbb{R}$ und $w_k \in \mathbb{R}^p$ als mittelwertfreies weißes Rauschen und der Annahme, dass $E[\mathcal{I}_{l|l} \hat{\theta}_{l|l}] = E[\mathcal{I}_{l|l} \theta_l]$ für l gilt, kann man zeigen, dass

¹⁶ Die für Erwartungstreue notwendige stochastische Unabhängigkeit zwischen den Regressoren und der Störgröße (Exogenität) ist u. a. auch abhängig vom Identifikationsmodell. [Bohn und Unbehauen (2016), S. 71 ff.]

dasselbe auch für $l + 1$ korrekt ist:

$$\begin{aligned}
& E[\mathcal{I}_{l+1|l+1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l+1|l+1}] \\
&= E[(\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} + \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \frac{1}{R} y_{l+1}] \\
&= E[(\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l + \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \frac{1}{R} (\boldsymbol{\varphi}_{l+1}^T \boldsymbol{\theta}_{l+1} + v_{l+1})] \\
&= E\{(\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l + \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \frac{1}{R} [\boldsymbol{\varphi}_{l+1}^T (\boldsymbol{\theta}_l + \mathbf{w}_l) + v_{l+1}]\} \\
&= E\{[(\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \boldsymbol{\varphi}_{l+1}^T] (\boldsymbol{\theta}_l + \mathbf{w}_l)\} \\
&= E[\mathcal{I}_{l+1|l+1} \boldsymbol{\theta}_{l+1}]
\end{aligned}$$

Somit gilt $E[\mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}] = E[\mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l]$ für alle $l \geq m - 1$, unabhängig von den Anfangsbedingungen des Horizonts. Da zum Zeitpunkt k $\mathcal{I}_{k|k} > \mathbf{0}$ ist, folgt

$$E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}] = E[\boldsymbol{\theta}_k], \quad q. e. d.$$

□

Obwohl der RHKF-Parameterschätzer unter Berücksichtigung von Prozess- und Messrauschen ($\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$, $v_k \in \mathbb{R}$) abgeleitet wurde, kann er auch auf das rauschfreie Regressionsmodell

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_k &= \boldsymbol{\theta}_{k-1} \\
y_k &= \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k
\end{aligned} \tag{A.21}$$

angewendet werden.

Lemma 16. *Wenn die Anregung persistent ist und $N \geq p$, dann ist der RHKF-Parameterschätzer (A.19) für die rauschfrei Regression (A.21) exakt. (Deadbeat-Eigenschaft)*

Beweis. Da $\mathcal{I}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$ ist, gilt für $l = m - 1$ unabhängig von $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1|m-1}$ und $\boldsymbol{\theta}_{m-1}$: $\mathcal{I}_{m-1|m-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1|m-1} = \mathcal{I}_{m-1|m-1} \boldsymbol{\theta}_{m-1} = \mathbf{0}$. Mit der Annahme, dass $\mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l$ für l gilt, kann man zeigen, dass dasselbe auch für $l + 1$ korrekt ist:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}_{l+1|l+1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l+1|l+1} \\
&= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} + \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \frac{1}{R} y_{l+1} \\
&= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l + \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_{l+1}^T \boldsymbol{\theta}_{l+1} \\
&= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l + \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_{l+1}^T \boldsymbol{\theta}_l \\
&= [(\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l|l} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l|l} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_{l+1} \boldsymbol{\varphi}_{l+1}^T] \boldsymbol{\theta}_l \\
&= \mathcal{I}_{l+1|l+1} \boldsymbol{\theta}_{l+1}
\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \mathcal{I}_{l|l} \boldsymbol{\theta}_l$ für alle $l \geq m - 1$, unabhängig von den Anfangsbedingungen des Horizonts. Da zum Zeitpunkt k $\mathcal{I}_{k|k} > \mathbf{0}$ ist, folgt

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \boldsymbol{\theta}_k, \quad q. e. d.$$

□

A.3.3 Die Festlegung der Horizontlänge

Nach Bittner *et al.* (2015) [S. 6] gibt es bei der Wahl der Horizontlänge einen Zielkonflikt: Wird ein kurzer Zeithorizont gewählt, verschwinden (nichtstochastische) Störungen (z. B. durch Modellunsicherheiten) schnell aus dem betrachteten Horizont, somit erhält man recht schnell wieder eine geeignete Schätzung. Ein langer Horizont verbessert jedoch die Schätzung durch eine stärkere Unterdrückung des Messrauschens. Für das RHKF gibt es keine Vorgaben für die Festlegung der Horizontlänge. Aus Zhao *et al.* (2016) und Zhao *et al.* (2018b) lässt sich schließen, dass das RHKF-Verfahren als OUFIR-Filter ebenfalls eine bestimmte Horizontlänge benötigt, um die minimale Varianz zu erreichen und damit optimal zu sein.

A.3.4 Herleitung des RHKF-Parameterschätzers bei Messungsverlusten

In diesem Abschnitt werden die Änderungen des RHKF-Algorithmus A.1 beschrieben, die erforderlich sind, um diesen an den Verlust einzelner Messungen anzupassen. Da das RHKF mit den Rauscheigenschaften arbeitet, bietet sich nach Sinopoli *et al.* (2004) [S. 1454 f.] folgendes Vorgehen an:

Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Messrauschens v_k soll dabei für irgendein σ^2

$$pdf(v_k | \gamma_k) = \begin{cases} \mathcal{N}(0, R); & \gamma_k = 1 \\ \mathcal{N}(0, \sigma^2); & \gamma_k = 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

gelten. Die Varianz des Messrauschens zum Zeitpunkt k ist also R , wenn eine Messung vorliegt ($\gamma_k = 1$) und σ^2 bei einem Verlust. Man kann nun das Fehlen einer Messung als Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ betrachten. Im folgenden Ansatz wird daher das RHKF mit einer „Dummy-Messung“ abgeleitet und beim Paketverlust der Grenzwert ($\sigma \rightarrow \infty$) betrachtet.

Die Bildung des Regressionsvektors φ_k beruht hierbei auf der AMM und nutzt somit ein Hilfsmodell nach Abschnitt 4.2.1.2.

Wie auch im Abschnitt A.3.1 beschrieben, gilt für das Kalmanfilter auf einem unendlichen Zeithorizont auf Basis von (2.9) und (2.10) sowie den Rauscheigenschaften (2.11):

$$\hat{\theta}_{k|k} = \hat{\theta}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k (y_k - \varphi_k^T \hat{\theta}_{k-1|k-1}) . \quad (\text{A.23})$$

Für die Kalmanverstärkung schreibt man dabei

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_{k|k-1} \varphi_k}{\gamma_k R + (1 - \gamma_k) \sigma^2 + \varphi_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \varphi_k} , \quad (\text{A.24})$$

mit der A-Priori-Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q} . \quad (\text{A.25})$$

Für die A-Posteriori-Schätzfehlerkovarianzmatrix ergibt sich des Weiteren

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathbf{P}_{k|k-1}}{\gamma_k R + (1 - \gamma_k) \sigma^2 + \varphi_k^T \mathbf{P}_{k|k-1} \varphi_k} . \quad (\text{A.26})$$

Gleichung (A.23) kann dann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\hat{\theta}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\theta}_{k-1|k-1} + \mathbf{P}_{k|k} \varphi_k \frac{1}{\gamma_k R + (1 - \gamma_k) \sigma^2} y_k . \quad (\text{A.27})$$

Der Übergang zur Informationsform des Kalmanfilters nach Simon (2006) [S. 156 ff.] ergibt mit

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{k|k-1} &= \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}, \\ \mathcal{I}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k}^{-1} = \mathcal{I}_{k|k-1} + \frac{1}{\gamma_k R + (1-\gamma_k)\sigma^2} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T\end{aligned}$$

aus (A.27):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathcal{I}_{k|k}^{-1} \mathcal{I}_{k|k-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} + \mathcal{I}_{k|k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k \frac{1}{\gamma_k R + (1-\gamma_k)\sigma^2} y_k. \quad (\text{A.28})$$

Das Kalmanfilter auf bewegtem Horizont (Receding Horizon Kalman Filter/RHKF) in Anlehnung an Kwon *et al.* (1999) nutzt zum Zeitpunkt k nur eine endliche Anzahl von Messungen auf dem Horizont der Länge N , von $m = k - N + 1$ bis k , und verwirft Messungen, die außerhalb liegen. In Gleichung (A.28) wird dazu das k durch ein $l \in [m, k]$ ersetzt:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \mathcal{I}_{l|l}^{-1} \mathcal{I}_{l|l-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \mathcal{I}_{l|l}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{\gamma_l R + (1-\gamma_l)\sigma^2} y_l. \quad (\text{A.29})$$

Da der Anfangswert $\boldsymbol{\theta}_{m-1}$ zu Beginn des Horizontes nicht bekannt ist, gilt

$$\mathcal{I}_{m-1|m-1}^{-1} = \mathbf{P}_{m-1|m-1} = \infty$$

und damit $\mathcal{I}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$. Um Probleme mit einer möglichen Singularität von $\mathcal{I}_{l|l}$ auf $0 \leq l < p$ zu umgehen, multipliziert Kwon *et al.* (1999) Gleichung (A.29) von links mit $\mathcal{I}_{l|l}$ und nutzt den folgenden Zusammenhang [aus dem Matrixinversionslemma/der Matrizenidentität nach Simon (2006), S. 11 f.]

$$\mathcal{I}_{l|l-1} = (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1}.$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} &= \mathcal{I}_{l|l-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{\gamma_l R + (1-\gamma_l)\sigma^2} y_l \\ &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{\gamma_l R + (1-\gamma_l)\sigma^2} y_l.\end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Ferner soll definitionsgemäß gelten: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} := \mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{m-1|m-1} = \mathcal{I}_{m-1|m-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$.

Führt man nun eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Paketverlustes durch, so erhält man für $\gamma_l = 1$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l-1|l-1} + \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{R} y_l \\ \mathcal{I}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1} + \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T.\end{aligned}$$

Dies entspricht erwartungsgemäß dem RHKF-Algorithmus ohne Messungsverlust (vgl. Algorithmus A.1).

Für den Fall einer fehlenden Messung ($\gamma_l = 0$ und $\sigma \rightarrow \infty$) ergibt sich aus Gleichung (A.30)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l-1|l-1} \\ \mathcal{I}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1}\end{aligned}$$

Man erkennt sofort, dass unter Nutzung der Definition $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} := \mathcal{I}_{l|l} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}$ und elementaren Umformungen in diesem Fall der Schätzwert unverändert bleibt ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l|l} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l-1|l-1}$) und lediglich das Prozessrauschen in die Kovarianzbetrachtung eingeht ($\mathbf{P}_{l|l} = \mathbf{P}_{l-1|l-1} + \mathbf{Q}$).

Zusammengefasst erhält man somit den folgenden Algorithmus:

Algorithmus A.2 RHKF-Parameterschätzer bei Messungsverlusten**Gegeben:**

- a) Identifikationsmodell nach (2.9) bis (2.10)
- b) Rauscheigenschaften nach (2.11)
- c) Persistente Anregung
- d) Horizontlänge $N \geq p$, von $m = k - N + 1$ bis k
- e) Unbekannte Anfangsbedingung $\boldsymbol{\theta}_{m-1}$
- f) Netzwerkverhalten nach 2.2 mit Annahme 2
- g) Speicher $\boldsymbol{\Phi}_{k,m}$ mit den Regressionsvektoren aus dem Hilfsmodell nach Lemma 10
- h) Speicher $\mathbf{Y}_{k,m}$ und $\boldsymbol{\Gamma}_{k,m}$

Gesucht:

- a) Parameterschätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ von $\boldsymbol{\theta}_k$
- b) Schätzfehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k|k}$

1: **begin**2: **for** $k = N - 1 : \infty$ **do**3: $m = k - N + 1$ 4: *Initialisierung:*

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{l-1|l-1} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{I}_{l-1|l-1} = \mathcal{I}_{m-1|m-1} = \mathbf{0}$$

5: **for** $l = m : k$ **do**6: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{k|k}$ und $\mathcal{I}_{k|k}$ werden iterativ bestimmt aus:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l-1|l-1} + \gamma_l \cdot \boldsymbol{\varphi}_l \frac{1}{R} y_l \\ \mathcal{I}_{l|l} &= (\mathbf{I} + \mathcal{I}_{l-1|l-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I}_{l-1|l-1} + \gamma_l \cdot \frac{1}{R} \boldsymbol{\varphi}_l \boldsymbol{\varphi}_l^T \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

7: **end for**8: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{l|l}$ (für $l = k$)9: $\mathcal{I}_{k|k} = \mathcal{I}_{l|l}$ (für $l = k$)10: Die *Parameterschätzung* folgt aus

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \mathcal{I}_{k|k}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{k|k}. \quad (\text{A.32})$$

11: Die *Schätzfehlerkovarianzmatrix* ergibt sich zu

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathcal{I}_{k|k}^{-1}. \quad (\text{A.33})$$

12: **end for**13: **end**

Anmerkung: Es ist leicht zu erkennen, dass der Algorithmus A.2 prädizierte Ausgangswerte nicht nutzt. Sie enthalten grundsätzlich keine neuen Informationen und werden nicht verarbeitet.

Hinweis: Betrachtet man die Gleichungen (A.32) und (A.33), so fällt auf, dass die Informationsmatrix $\mathcal{I}_{k|k}$ für die Bestimmung des Schätzwerts und der zugehörigen Kovarianz invertiert werden muss. Ist die Verlustrate der Messungen hoch, so ist $\mathcal{I}_{k|k}$ dafür schlecht konditioniert und es kann zu numerischen Problemen kommen.

Für diese Arbeit wurde MatLab® R2019b Update 4 (9.7.0.1296695) verwendet.

Rechtliches:

MatLab® und Simulink® sind eingetragene Warenzeichen der [MathWorks, Inc.](#) bzw. der [MathWorks GmbH](#).

Aus einer eventuell fehlenden Erwähnung eines benutzten Warenzeichens kann nicht geschlossen werden, dass es frei von Rechten Dritter ist.