

UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Echtzeitadaptionsverfahren für Optimalregler mit Ausgangsrückführung für lineare Systeme

Christian Sonntag

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und
Informationstechnik der Universität der Bundeswehr München
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Gutachter/Gutachterin:

1. Prof. Dr.rer.nat. Claus Hillermeier
2. Prof. DDr. Stefan Schäffler

Die Dissertation wurde am 13. Juni 2016 bei der
Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für
Elektrotechnik und Informationstechnik am 16. Dezember 2016 angenommen.
Die mündliche Prüfung fand am 02. Februar 2017 statt.

Abstract

This thesis discusses the development and the overall methodology of an optimal adaptive output feedback controller for linear systems. Therefore it makes use of methods and proceedings from a variety of fields of control theory, e.g. optimal control, static output feedback design, system identification, switched linear systems and real time adaption, and brings them together in a comprehensive approach.

First, an alternative constructive design method for static output feedback controller based on linear quadratic optimization is presented. This new design method provides an enhanced convergence behaviour in comparison to common techniques and, therefore, supports the further design of optimal output feedback servo controller. To guarantee a consistent optimal closed loop behaviour and overall system stability, particularly in consideration of changing system parameters, the plant is constantly monitored by an estimator. Based on current methods of system identification theory which are extended whithin this thesis for an online approach, the estimator identifies and determines changes within the system parameters. The controller is adapted consequently, using a real time method, rested on the determined system parameter changes. A newly developed approach for stability analysis in the presence of non-predictable switching operations is also presented as part of the overall methodology.

The development of an homotopy based methodology for the design of optimal output feedback controller for linear plants which are not stable, is a further particular subject of this thesis.

The expected behaviour of this new approach in each of the developed techniques is confirmed in detailed simulations which display the advantages of such methodology.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines neuen Echtzeitadaptionsverfahrens für ausgangsbasierte Optimalregler bei linearen Systemen. Darunter wird eine Gesamtmethodik verstanden, die zunächst mittels eines maßgeschneiderten Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens jene Ausgangsrückführung zur Verfügung stellt, die hinsichtlich der definierten Gütekriterien optimal ist. Neben eines besseren Konvergenzverhalten gegenüber der herkömmlichen Methode zur Bestimmung ausgangsbasierter Regelungen zur Störkompensation, eignet sich dieses neue Entwurfsverfahren auch zur Berechnung ausgangsbasierter Folgeregler. Um stetig die Optimalität in Bezug auf die Gütekriterien zu gewährleisten, soll das Adaptionsverfahren eine kontinuierliche Überwachung der Regelstrecke sicherstellen, um auf diese Weise mögliche Änderungen in den Systemparametern zu identifizieren, die einer Anpassung des Reglers bedürfen. Die Identifikation der Systemparameter erfolgt mittels aktueller Methoden, welche in geeigneter Weise modifiziert werden, um eine laufzeitbasierte Überwachung zu ermöglichen. Auch werden sie um ein Schätzverfahren zur Bestimmung der aktuell gültigen Systemparameter erweitert. Bei Feststellung von Änderungen in den Systemparametern, erfolgt die Adaption des Reglers mit Hilfe einer weiterentwickelten Methodik zur Echtzeitanpassung von Optimalreglern. Ein neu entwickelter Ansatz zur Stabilitätsbetrachtung bei nicht vorhersagbaren Schaltvorgängen stellt ebenso einen notwendigen Bestandteil des Adaptionsverfahren dar.

Die Formulierung eines eigenentwickelten Homotopie-basierten Algorithmus, der es ermöglicht Optimalregler mit Ausgangsrückführung auch für instabile Regelstrecken zu entwerfen, ist neben der Entwicklung des Adaptionsverfahren ein weiteres besonders hervorzuhebendes Ergebnis dieser Dissertation.

Des Weiteren wird in dieser Arbeit unter Zuhilfenahme eines verbesserten Homotopie-Verfahrens für mehrdimensionale Homotopieparameter, sowie unter Nutzung von neuronalen Netzen, eine Lösung für das Inverse Optimierungsproblem entworfen.

Danksagung

Diese Dissertation wurde im Rahmen meiner Tätigkeit als externer Doktorand am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Universität der Bundeswehr München verfasst.

Für den Erhalt dieser Möglichkeit und die Betreuung dieses Vorhabens möchte ich mich insbesondere bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Claus Hillermeier, bedanken. Erst Ihre umfangreichen Ideenvorschläge, die immer freundliche Hilfestellung sowie Ihre Geduld und wissenschaftliche Leitung haben diese Arbeit möglich gemacht. Die persönlichen Gespräche mit Ihnen habe ich immer sehr genossen, vor allem aber als Ermutigung und Motivation empfunden.

Ich danke aufrichtig Herrn Prof. Dr. Dr. Stefan Schäffler für seine Bereitschaft und seine wissenschaftliche Betreuung als Zweitgutachter sowie Herrn Prof. Dr. Lankl für die Leitung der Promotionskommission. Mir ist bewusst, dass Ihre Bereitwilligkeit und Ihr zeitliches Engagement in Anbetracht der vielen Aufgaben und Verpflichtungen keine Selbstverständlichkeit ist.

Mein außerordentlicher Dank gilt Dr. José-Luis Marqués-López. Du warst stets eine zuverlässige Stütze und hast die Vollendung dieser Arbeit erst möglich gemacht. Für deine fortwährende Hilfsbereitschaft, die mehrfache Durchsicht dieser Abhandlung, deine kritischen Betrachtungen und die gewinnbringenden Diskussionen bin ich dir über aller Maßen dankbar.

Ganz besonders möchte ich mich aber bei meiner Frau und meiner Tochter bedanken. Viel zu oft musstet Ihr zurücktreten damit ich diese Dissertation vollenden konnte. Für eure unendliche Geduld, euer Verständnis und eure immerwährende Unterstützung bin ich euch von Herzen dankbar.

Ingolstadt, Februar 2017

Christian Sonntag

Inhaltsverzeichnis

Abstract	iii
Zusammenfassung	v
Danksagung	vii
Inhaltsverzeichnis	ix
Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xvii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Forschungsstand	1
1.2 Ziel der Arbeit	2
1.3 Aufbau der Arbeit	3
2 Optimale Regelung	7
2.1 Grundidee der optimalen Regelung	7
2.2 Die Hamilton-Gleichungen	9
2.2.1 Herleitung der Hamilton-Gleichungen	9
2.2.2 Lösung der Hamilton-Gleichungen	11
2.3 Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung	14
3 Das Inverse Optimierungsproblem	17
3.1 Ausschöpfung einer Lösungsmenge der Matrix-Riccati-Gleichung	18
3.2 Speichern der ausgeschöpften Lösungsmenge und Lösen des In-	
versen Optimierungsproblems	21
3.3 Die Lösung des Inversen Optimierungsproblems am Beispiel eine	
SISO Systems	23
4 Stabilität geschalteter Systeme	27
4.1 Geschaltete Systeme	27
4.2 Stabilisierung geschalteter Systeme mittels „ <i>dwell time</i> “-Ansatz	30
4.3 Erweiterter „ <i>dwell time</i> “-Ansatz zur Stabilisierung unvorher-	
sehbarer Schaltvorgänge	32

5	Systemidentifikation	35
5.1	„ <i>Predictor Based System Identification</i> “ („ <i>PBSID</i> “)	36
5.2	Schätzen der Systemparameter	47
6	Der optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung	53
6.1	Entwurfsverfahren für optimale Folgeregler mit Zustandsrückführung	54
6.2	Herkömmliches Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen	56
6.3	Nullstellen-basiertes Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen	61
6.4	Vergleich der Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen	63
6.5	Nullstellen-basiertes Entwurfsverfahren für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung	64
7	Echtzeitanpassung des optimalen Reglers	71
7.1	Echtzeitanpassung des klassischen Riccati-Reglers	72
7.2	Erweiterte Echtzeitanpassung des klassischen Riccati-Reglers	76
7.3	Erweiterte Echtzeitanpassung für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung	81
8	Die optimale Ausgangsrückführung für instabile Regelstrecken	87
8.1	Entwurfsverfahren	91
8.2	Anwendungsbeispiel	93
9	Der adaptive Optimalregler	97
9.1	Der adaptive Folgeregler mit Ausgangsrückführung	97
9.1.1	Regelung ohne Adaption	99
9.1.2	Regelung mit Adaption	100
9.1.2.1	Implementierung des Identifikationsalgorithmus	100
9.1.2.2	Implementierung der Regleradaption	106
10	Zusammenfassung und Ausblick	111
10.1	Zusammenfassung der Arbeit	111
10.2	Ausblick	113
A	Grundlagen der Regelungstechnik	115
A.1	Aufgabe der Regelungstechnik	115
A.2	Regelkreis	115
A.3	Regelgesetz	116
A.4	Modellformen der Regelstrecke	117
A.5	Zeitdiskrete Systeme	120

B	Methoden zur „<i>dwell time</i>“-Berechnung	125
B.1	„ <i>dwell time</i> “ Berechnung mittels linearer Regression	125
B.2	Berechnung mittels Abstandsbetrachtung der Eigenvektoren der Systemmatrizen	126
B.3	Der „ <i>average dwell time</i> “-Ansatz	128
C	Anhang zu Systemidentifikation	131
C.1	Methoden der Systemidentifikation	131
C.1.1	„ <i>Prediction Error Methods</i> “	131
C.1.2	„ <i>Subspace Identification</i> “	135
C.1.2.1	Deterministische Systeme	136
C.1.2.2	Stochastische Systeme	143
C.1.2.3	Deterministisch-stochastische Systeme	149
C.1.3	Identifizierbarkeit	154
C.2	Rekursive Systemidentifikation mit „ <i>PBSID</i> “	155
D	Kalman-Filter	161
E	Geometrische Projektionen	163
E.1	Orthogonale Projektion	163
E.2	Schräge Projektion	164
E.3	Projektionen für den stochastischen Fall	164
F	Weiterführende Erklärungen zu den Hamilton-Gleichungen	167
F.1	Herleitung der Transversalitätsbedingung	167
F.2	Anwendungsbeispiel zur Lösung der Hamilton-Gleichung mittels Laplace-Transformation	168
G	Anhang zur Echtzeitanpassung des optimalen Reglers	171
	Literaturverzeichnis	173

Abbildungsverzeichnis

3.1	Modell eines Künstlichen Neurons	21
3.2	Schematische Darstellung eines ein- und zweischichtiges Perzeptron	22
3.3	Beispiel 1: Ausschöpfung einer Lösungsmenge an optimalen Rückführungen \mathbf{K} - einfacher Durchlauf	25
3.4	Beispiel 1: Ausschöpfung einer Lösungsmenge an optimalen Rückführungen \mathbf{K} - mehrfacher Durchlauf	25
3.5	Beispiel 1: Ausschöpfung einer Lösungsmenge an optimalen Rückführungen \mathbf{K} - mehrfacher Durchlauf mit veränderten Startpunkten	26
4.1	Beispielhafter Verlauf von σ für $\mathcal{Q} = \{1,2,3,4\}$	28
4.2	Instabiler Verlauf eines geschalteten Systems mit zwei asymptotisch stabilen Subsystemen	29
5.1	Zustandsraummodell mit Ausgangsrückführung und Referenzsignal	41
5.2	Identifikation eines deterministisch-stochastischen Systems mit Ausgangsrückführung	43
5.3	Zustandsraummodell mit ausgangsbasierter Folgeregelung und Referenzsignal	44
5.4	Identifikation eines deterministisch-stochastischen Systems mit Folgeregelung und Referenzsignal mit „ <i>N4SID</i> “	44
5.5	Identifikation eines det.-stoch. Systems mit Folgeregelung und schwachen Referenzsignal mittels „ <i>PBSID</i> “ („ <i>VARX</i> “)	45
5.6	Identifikation eines det.-stoch. Systems mit Folgeregelung und schwachen Referenzsignal mittels „ <i>PBSID</i> “ („ <i>VARX</i> “) mit Regularisierung	46
5.7	Identifikation eines det.-stoch. Systems mit Folgeregelung und Referenzsignal mittels „ <i>PBSID</i> “ („ <i>VARMAX</i> “) mit Regularisierung	47
5.8	Identifikation der Systemparameter eines geschalteten Systems	51
6.1	Zustandsraummodell mit Folgeregelung	56
6.2	Zustandsraummodell mit Folgeregelung und Ausgangsrückführung	66

7.1	Einfaches RC-Glied	83
9.1	Beispiel 7: Blockschaltbild Zustandsraummodell mit ausgangsbasierten Folgeregler	98
9.2	Beispiel 7: Aktivierungsreihenfolge von \mathbf{A}_σ	99
9.3	Beispiel 7: Verlauf $\mathbf{y}(t)$ bei starrer Regelung	100
9.4	Beispiel 7: Verlauf $\mathbf{u}(t)$ bei starrer Regelung	101
9.5	Beispiel 7: Blockschaltbild Zustandsraummodell mit adaptiven, ausgangsbasierten Folgeregler	102
9.6	Beispiel 7: Verlauf α	105
9.7	Beispiel 7: Zeitliche Anpassung von \mathbf{K}_y bei adaptiver Regelung	106
9.8	Beispiel 7: Zeitliche Anpassung von \mathbf{K}_w bei adaptiver Regelung	106
9.9	Beispiel 7: Verlauf $\mathbf{y}(t)$ bei adaptiver Regelung ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) . .	107
9.10	Beispiel 7: Verlauf $\mathbf{u}(t)$ bei adaptiver Regelung ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) . .	107
9.11	Beispiel 7: Verlauf $\mathbf{y}(t)$ bei adaptiver Regelung ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) mit gleitender Regleranpassung	109
9.12	Beispiel 7: Verlauf $ \Phi(\mathbf{t}) $ bei konstanter Regelung ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$)	110
9.13	Beispiel 7: Verlauf $ \Phi(\mathbf{t}) $ bei adaptiver Regelung ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) mit gleitender Regleranpassung	110
A.1	Einfacher Regelkreis	115
A.2	Einfache Zustandsrückführung	117
A.3	Zustandsraummodell	119
A.4	Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals	120
A.5	„ <i>Aliasing</i> “-Effekt	121
B.1	Annäherung des normierten zeitlichen Verlaufs der Transitionsmatrix eines Subsystems durch eine Exponentialfunktion	125
B.2	Asymptotisch stabiler Verlauf eines geschalteten Systems mit zwei asymptotisch stabilen Subsystemen	127
B.3	Grenzstabiler Verlauf eines geschalteten Systems mit zwei asymptotisch stabilen Subsystemen	129
C.1	Übergangsfunktion eines DT1-Gliedes	132
C.2	ARX-Modell	133
C.3	ARMAX-Modell	134
C.4	Identifikation eines deterministischen Systems mittels Schnittmengenmethode	139
C.5	Identifikation eines deterministischen Systems mittels Projektion	142
C.6	Identifikation eines stochastischen Systems mittels Projektion .	148
C.7	Identifikation eines deterministisch-stochastischen Systems mittels „ <i>N4SID</i> “	153
C.8	Identifikation eines zeitvarianten det.-stoch. Systems mit Folge- regelung und Referenzsignal mittels rekursiver Implementierung des „ <i>PBSID</i> “-Algorithmus	158

E.1	Orthogonale Projektion	164
E.2	Schräge Projektion	164

Tabellenverzeichnis

3.1	Beispiel 1: Ergebnis der Simulation des neuronalen Netzes für gegebene Rückführungen \mathbf{K}	26
6.1	Vergleich der herkömmlichen Methode zum Entwurf optimaler Ausgangsrückführungen mit der Nullstellen-basierten Methode anhand eines SISO und eines MIMO Systems	65
6.2	Berechnung von Ausgangsrückführungen für Folgeregelung. Beispielhafter Vergleich von Nullstellen-basiertem und herkömmlichem Verfahren für verschiedene Wichtungsmatrizen. Beispiel 1: SISO System	69
8.1	Verlauf des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung beim instabilen SISO System - mit Konvergenz	90
8.2	Verlauf des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung beim instabilen SISO System - ohne Konvergenz	91
8.3	Verlauf des Homotopie-basierten Entwurfsverfahrens zur Bestimmung optimaler Folgeregler mit Ausgangsrückführung für instabile Regelstrecken	95

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Forschungsstand

Die adaptive Regelung stellt eines der aktuellsten Themengebiete der modernen Regelungstechnik dar. Sie ist essentieller Bestandteil vieler hochtechnologischer Systeme und aus Anwendungsgebieten wie Flugregelungsanlagen, Autopiloten oder Robotersteuerungen nicht mehr wegzudenken.

Auch wenn die Grundidee einer solchen Regelung nicht neu ist, so war es insbesondere der hohen Komplexität und der damit verbundenen Rechenintensität geschuldet, dass die adaptive Regelung in vergangenen Jahrzehnten einen geringeren Stellenwert besaß als heute.

Intention der adaptiven Regelung ist es, Systeme mit stark veränderlichen oder sogar teilweise unbekanntem Systemparametern zuverlässig zu stabilisieren und hierbei auch auf unerwartete Störungen zielgerichtet reagieren zu können. Dabei können die Systeme, welche Gegenstand einer solchen Regelung sind, von unterschiedlichster Natur und Komplexität sein.

Oftmals sind Änderungen der Systemparameter, wie zum Beispiel bei Last- oder Arbeitspunktwechsel, aber auch bei Alterung und Verschleiß sowie beim Auftreten unerwarteter starker Störungen nicht, oder zumindest nicht vollständig vorhersagbar. Bei den meisten herkömmlich geschlossenen Systemen hat solch eine Änderung in den Systemparametern ein unerwünschtes Verhalten der Regelgröße zur Folge oder kann gar zu instabilem Verhalten führen, wenn aufgrund der Parameteränderungen die Stabilitätsgrenze des geschlossenen Kreises überschritten wird. Aber auch für den Fall ausreichender Robustheit des Regelkreises, müssen nicht selten Einbußen in der Effizienz des Systems hingenommen werden. Diese Einbußen können sich zum Beispiel in einem unerwünschten Trajektorienverlauf der Regelgrößen oder einer erhöhten Störanfälligkeit widerspiegeln. Aufgabe der adaptiven Regelung ist, auch im Falle unsicherer oder sich ändernder Systemparameter sowohl Stabilität als auch gewünschtes Verhalten sicherzustellen.

Für die adaptive Regelung existiert eine Vielzahl verschiedenster Realisierungsmöglichkeiten. Diese lassen sich jedoch im Wesentlichen in drei Kategorien

unterteilen: „*Gain-Scheduling*“ (Parameterumschaltung), adaptive Regelsysteme mit parallelem Vergleichsmodell sowie „*Self-Tuning*“ (selbstoptimierende) Regler (vgl. [SB89]).

Verfahren mit Parameterumschaltung sind nur für vorhersagbare Änderungen der Systemparameter geeignet, was folglich zu einer Einschränkung in ihrer Anwendbarkeit führt. Mehr Freiheitsgrade bieten somit Systeme mit parallelem Vergleichsmodell sowie selbstoptimierende Regler.

Die Untersuchung von selbstoptimierenden Reglern wird zusätzlich dadurch motiviert, dass sie mehrere Themengebiete der Regelungstechnik verbinden und somit variantenreich in Ihrer Umsetzung sind. Vor allem für das Design des zugrundeliegenden Reglers als auch für die notwendige Systemparameterschätzung stehen verschiedenste Methoden zu Auswahl. Ein genereller Überblick zu den aktuellen Erkenntnissen in der Adaptiven Regelung wird in [rW08a] zur Verfügung gestellt.

Möchte man den Vorteil der Stabilisierung von adaptiven Reglern noch verstärken und dabei mittels Gütekriterien weitest möglichen Einfluss auf den Verlauf von Regel-, Zustands- und Steuergrößen nehmen, so sollte insbesondere die Option eines Optimalreglers als zugrundeliegendes Entwurfsverfahren näher betrachtet werden. Die Optimale Regelung stellt ein sehr gut erforschtes Themengebiet der Regelungstechnik dar, ein guter Überblick hierzu ist in [Lun06], [Loc01] und [FSK94] zu finden. Ein Problem stellt hierbei jedoch die Tatsache dar, dass die Optimale Regelung fast ausschließlich Zustandsregler vorsieht, die dafür benötigte direkte Messung von Zuständen jedoch oftmals nicht oder nur schwer möglich ist.

Betrachtet man das Problem der Systemparameterschätzung als Aufgabe der Systemidentifikation, so haben sich insbesondere in den letzten Jahren neue Optionen aufgetan, da nun auch Verfahren zur Verfügung stehen, welche zumindest prinzipiell die Echtzeitidentifikation von geschlossenen Systemen durch alleinige Auswertung der Ein- und Ausgangsdaten ermöglichen (siehe [Lju99], [OM97], [LM96] und [VWBMV13]).

Die Entwicklung eines Echtzeitadaptionsverfahrens für Optimalregler mit Ausgangsrückführung, basierend auf den aktuellsten Verfahren der Systemidentifikation, wird daher als vielversprechender Ansatz für einen neuen selbstoptimierenden Regler erachtet.

1.2 Ziel der Arbeit

Es ist das Ziel dieser Dissertation, ein Echtzeitadaptionsverfahren für Optimalregler von linearen Systemen zu konzipieren, das unter Beachtung der vorgegebenen Gütekriterien die Regelstrecke überwacht, Änderungen identifiziert und eine entsprechende Anpassung der Rückführung im Falle sich ändernder Systemparameter vornimmt.

Für die Realisierung des adaptiven Reglers wird es notwendig werden, Verfahren aus unterschiedlichsten Sachgebieten der Regelungstechnik wie Optimal-

regelung, statische Ausgangsrückführung, Systemidentifikation und geschaltete Systeme zu kombinieren und in Einklang zu bringen. Die Verfahren der einzelnen Disziplinen, die jeweils als am geeignetsten bewertet werden, sollen hierfür modifiziert und integriert werden sowie neue Herangehensweisen, wie beispielsweise im Fall des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung, entwickelt werden.

Die Anpassung des Optimalreglers erfolgt, ebenso wie der initiale Entwurf, mittels eines zweistufigen, Nullstellen-basierten Verfahrens. Zunächst wird dabei eine approximierete Lösung angeboten, die in Abhängigkeit der Stabilitätsbetrachtung (hinsichtlich der Schaltvorgänge im System) direkt auf den Regler angewendet werden könnte. In einem zweiten Schritt wird ausgehend von dieser Näherungslösung der eigentliche Optimalregler auf numerischen Wege bestimmt.

Die Überwachung der Regelstrecke hinsichtlich der Änderung von Systemparametern soll mittels eines modifizierten Echtzeitverfahrens zur Systemidentifikation in Kombination mit einem in dieser Arbeit entwickelten Schätzverfahren realisiert werden.

Um eine Destabilisierung des geschlossenen Kreises, verursacht durch die Änderungen in der Regelstrecke und die darauf folgende Reglerangleichung zu vermeiden, soll der Regler zusätzlich eine Stabilitätsbetrachtung hinsichtlich der Schaltvorgänge respektive der Schaltzeitpunkte vornehmen können.

Als adaptiv ausgelegter Regler steht in dieser Arbeit vor allem der neu entwickelte, optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung im Fokus.

1.3 Aufbau der Arbeit

In **Kapitel 2** wird dem geeigneten Leser, zunächst eine Einführung in die Optimale Regelung zur Verfügung gestellt. Weitere Grundlagen der Regelungstechnik stellt Anhang **A** bereit.

Bevor jedoch diese Arbeit sich ihrem Hauptaspekt, der Entwicklung eines neu adaptiven Reglers, widmet, soll in **Kapitel 3** eine eigenentwickelte Methodik zur Lösung des Inversen Optimierungsproblems vorgestellt werden. Das Inverse Optimierungsproblem beschreibt die Tatsache, dass es nur für eine kleine Auswahl an Optimalreglern möglich ist, nachträglich zu bestimmen, hinsichtlich welcher Gütekriterien der betrachtete Regler optimal ist.

Dieser Problemstellung soll in Kapitel **3** mittels Homotopie sowie unter Verwendung neuronaler Netze begegnet werden.

Mit der Stabilität geschalteter Systeme befasst sich **Kapitel 4**. Nach einer Einführung in die Thematik geschalteter Systeme im Allgemeinen wird im Besonderen der „*dwell time*“-Ansatz als das für diese Arbeit relevante Verfahren zur Prüfung der Stabilität bei Schaltvorgängen vorgestellt. Weiterführend soll dann ein eigener Ansatz zur „*dwell time*“-Berechnung entwickelt werden, der

speziell auf die Stabilisierung unvorhersehbarer Schaltvorgänge ausgerichtet ist.

Ein weiterer essentieller Bestandteil des zu entwickelnden Adaptionsverfahren, ist die Fähigkeit, Änderungen in den Systemparametern des zu regelnden Systems zu identifizieren und zu quantifizieren. Die Realisierung dieser Fähigkeit soll mittels Methoden aus dem Sachgebiet der Systemidentifikation erfolgen. In **Kapitel 5** wird daher die Methode der „*Predictor Based System Identification*“ erläutert und analysiert. Aufbauend auf dieser Methode wird weiterführend in Kapitel 5 ein eigenes Verfahren zum Schätzen der Systemparameter entwickelt. Weitere Methoden und Herangehensweisen der Systemidentifikation wie „*Prediction Error Methods*“ und „*Subspace Identification*“ werden in Anhang C präsentiert.

Basierend auf den Vorbetrachtungen zur optimalen Regelung in Kapitel 2, soll in **Kapitel 6** als wesentliche eigene wissenschaftliche Leistung ein Verfahren zum Entwurf von optimalen Folgeregler mit Ausgangsrückführung entwickelt werden. Nach einer eingehenden Vorstellung der herkömmlichen Verfahren zur Berechnung von optimalen Folgeregler mit Zustandsrückführung sowie zur Bestimmung von optimalen Ausgangsrückführungen, soll zunächst ein Nullstellen-basiertes Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen der herkömmlichen Methodik gegenübergestellt werden. In einem weiteren Schritt wird das Nullstellen-basierte Verfahren erweitert, um somit den Entwurf optimaler *Folgeregler* mit Ausgangsrückführung zu ermöglichen.

Kapitel 7 wird zunächst ein bestehendes Approximationsverfahren zur Echtzeitanpassung des optimalen Zustandsreglers (Riccati-Regler) bei sich ändernden Systemparametern vorstellen. Dieses Näherungsverfahren wird, als ein Bestandteil der eigenen Leistung dieser Arbeit, zunächst um einen Korrektorschritt erweitert, um somit eine exakte, laufzeitbasierte Anpassung des Optimalreglers zu ermöglichen. Dieses erweiterte Verfahren zur Echtzeitanpassung soll weiterführend als Grundlage dienen, um in Kombination mit dem in Kapitel 6 neu entwickelten Entwurfsverfahren eine Methodik zur Echtzeitanpassung für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung zur Verfügung zu stellen, welche einen zentralen Bestandteil des laufzeitbasierten Adaptionsverfahrens darstellt.

Ein originäres Entwurfsverfahren für Optimalregler mit Ausgangsrückführung speziell für instabile Regelstrecken wird in **Kapitel 8** entwickelt. Bisherige Verfahrensweisen zum Entwurf statischer Rückführungen, wie sie unter anderem in Kapitel 6 vorgestellt werden, sind lediglich auf stabile Regelstrecken anwendbar. Kapitel 8 dieser Arbeit liefert daher mit der Herleitung eines Homotopie-basierten Entwurfsverfahrens für die ausgangsbasierte Optimalregelung instabiler Regelstrecken einen wesentlichen Beitrag zur Thematik der optimalen statischen Ausgangsrückführung.

Kapitel 9 stellt das finale Kapitel dieser Arbeit dar. Die Ergebnisse der vorherigen Kapitel hinsichtlich Reglerentwurf, Systemidentifikation, Echtzeitanpassung sowie Stabilitätsbetrachtung bei Schaltvorgängen, werden hier zu einem ganzheitlichen Verfahren zusammengeführt. Die Implementierung des Adaptionsverfahrens erfolgt hierbei zur besseren Veranschaulichung anhand eines akademischen Anwendungsbeispiels, um die Anwendbarkeit für ein breites Spektrum realer Systeme zu betonen.

Nomenklatur. Für die in dieser Arbeit aufgeführten Formeln gelten die nachfolgenden Konventionen: Skalare werden mit kleinen kursiven Buchstaben (x , y) dargestellt, während für Vektoren fette Lettern (\mathbf{x} , \mathbf{y}) Verwendung finden. Matrizen werden durch fette Großbuchstaben (\mathbf{A} , \mathbf{C}) und Mengen mittels kalligrafischer Großbuchstaben (\mathcal{M} , \mathcal{P}) kenntlich gemacht. Entsprechend verhält es sich mit den Elementen von Vektoren (x_1, x_i) und Matrizen (a_{12}, a_{ij}), die folglich als kursive Kleinbuchstaben mit entsprechenden Indizes dargestellt werden. Bei Matrizen kennzeichnet der erste Index die Zeile, der zweite Index benennt die Spalte.

Kapitel 2

Optimale Regelung

Dieses Kapitel stellt eine kurze Einführung in die Optimale Regelung zur Verfügung. Hierbei sollen zunächst in Abschnitt 2.1 die Intention und Grundidee der Optimalen Regelung näher beleuchtet werden. Weiterführend wird in Abschnitt 2.2 dargestellt, wie über die Hamilton-Gleichungen die Matrix-Riccati-Gleichung entwickelt wird, deren Lösung in Abschnitt 2.3 schließlich zu einem optimalen Zustandsregler führt. Dieser wird nicht selten auch als Riccati-Regler bezeichnet.

Es sei an dieser Stelle auf Anhang A verwiesen, welcher die für dieses und nachfolgende Kapitel essentiellen Grundlagen der Regelungstechnik zusammenfasst. Dieses Kapitel lehnt sich dabei eng an die Ausführungen zur Optimalen Regelung in [Lun06] und [FSK94].

2.1 Grundidee der optimalen Regelung

Intention der optimalen Regelung ist es, beim Entwurf eines Reglers nicht nur einzelne Kenngrößen des Systems, wie Pole, Bandbreite, Resonanz, Einschwingzeit und Überschwingweite festzulegen, sondern auf den gesamten Verlauf der Regel-, Zustands- und Steuergrößen Einfluss nehmen zu können. Dabei geht es nicht nur um die Forderung, die Ausgangsgrößen mit möglichst geringem Energie- oder Zeitaufwand in den gewünschten Endzustand zu bringen. Eine optimale Regelung hat viel mehr den Vorteil, dass der auf diese Weise entworfene Regelkreis immer asymptotisch stabil und der hergeleitete Regler robust¹ ist (siehe [Lun06]).

Grundlage einer optimalen Regelung ist die Formulierung eines Gütemaßes oder Gütefunktional. Abhängig von der Struktur dieses Funktional und der Regelstrecke sind daraus abgeleitete Regler linear oder auch nichtlinear. Im Weiteren werden nur lineare, zeitinvariante Regelstrecken betrachtet.

¹Robustheit gibt hierbei Auskunft über die Fähigkeit eines Reglers, trotz Modellunsicherheiten beim Reglerentwurf die Forderungen nach Stabilität, Störkompensation und Sollwertfolge sowie die Güteanforderung an den dynamischen Zusammenhang zwischen Führungsgröße und Regelgröße zu erfüllen [Lun07].

Eine der bekanntesten Problemstellungen unter den Optimierungsaufgaben ist das Linear-Quadratische Problem, auch LQ-Problem genannt [Lun06], [Loc01]. Grundlage der LQ-Regelung ist ein quadratisches Gütemaß J der Form:

$$J = \int_{t_0}^{t_e} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt, \quad (2.1)$$

mit den Wichtungsmatrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Diese Form des Gütemaßes empfiehlt sich vor allem, wenn ein allgemein günstiges Systemverhalten gefordert ist, da es verlaufs- und verbrauchsoptimales Verhalten kombiniert. Mittels der Matrix \mathbf{Q} kann dabei auf den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ und mittels der Matrix \mathbf{R} auf den Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ für das Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_e$ Einfluss genommen werden. Um t_e endlich zu halten, erweitert man das Gütemaß mit $\mathbf{x}^T(t_e)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_e)$ zu

$$J = \mathbf{x}^T(t_e)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt, \quad (2.2)$$

mit $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Anstelle des Endzustandes $\mathbf{x}(t_e)$ kann auch eine Modifikation hinsichtlich des Systemausgangs zum Zeitpunkt t_e vorgenommen werden. Für (2.2) würde dann gelten:

$$J = \mathbf{y}^T(t_e)\mathbf{S}\mathbf{y}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt, \quad (2.3)$$

mit $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{S} sind hierbei stets so zu wählen, dass sie symmetrisch und zumindest positiv semidefinit sind, um ein positives Gütemaß J zu erhalten. Die Matrix \mathbf{R} muss positiv definit sein.

(2.3) ist ein Bolzasches² Gütemaß, das sich aus einem Mayerschen³ Gütemaß $h(\mathbf{y}(t_e), t_e)$ zur Bewertung des Endwertes und einem Lagrangeschen⁴ Gütemaß $\int_{t_0}^{t_e} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$ zur Evaluierung des Übergangsverhaltens zusammensetzt. Es entspricht der allgemeinen Form

$$J = h(\mathbf{x}(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} [f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)] dt. \quad (2.4)$$

Unter allen Vektoren $(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{u}(t)^T)^T$, welche die DGL $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, die durch das zu regelnde System gegeben ist, und die dazugehörigen Randbedingungen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und eventuell auch $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$ erfüllen, ist der Vektor gesucht, der das Gütefunktional minimiert.

$$\min_{(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{u}(t)^T)^T} J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.5)$$

²Bolzasches Gütemaß ist eine Bezeichnung für das allgemeine Gütemaß, das als Summe aus einem Funktionsteil und einem Integralteil hervorgeht.

³Als Mayersches Gütemaß wird ein Gütemaß ohne Integralanteil bezeichnet.

⁴Ein Gütemaß, das lediglich über einen Integralanteil verfügt, wird auch als Lagrange-sches Gütemaß bezeichnet.

Diese Extremalaufgabe ist ein Variationsproblem, das noch erweitert respektive verallgemeinert werden kann, indem der konkrete Endpunkt \mathbf{x}_i des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t_e in eine Zielmannigfaltigkeit, d.h. eine Punktmenge im Zustandsraum (z.B. eine Gerade, auf welcher der Endpunkt \mathbf{x}_i liegen soll) überführt wird.

$$\mathbf{x}(t_e) \text{ auf Zielmannigfaltigkeit } \mathcal{Z} : \mathbf{z}(\mathbf{x}(t_e)) = 0 \text{ bzw. } \begin{cases} z_1(\mathbf{x}(t_e)) = 0 \\ \vdots \\ z_m(\mathbf{x}(t_e)) = 0 \end{cases}$$

Dabei gilt für:

- $m = 0 \rightarrow \mathbf{x}_e$ beliebig,
- $m = n \rightarrow \mathbf{x}_e$ fest vorgegeben,

wobei n der Anzahl der Zustandsvariablen der Regelstrecke entspricht.

2.2 Die Hamilton-Gleichungen

Im folgenden Abschnitt werden die Hamilton-Gleichungen zunächst vorgestellt und in einem weiteren Schritt gelöst. Diese Gleichungen stellen einen Ansatz zur Lösung des in Abschnitt 2.1 aufgeführten Variationsproblems (2.5) dar. Als weiterführende Literatur sei an dieser Stelle auf [FSK94] verwiesen.

2.2.1 Herleitung der Hamilton-Gleichungen

Das Optimierungsproblem unterscheidet sich vom Grundproblem der Variationsrechnung dahingehend, dass zur Optimierungsforderung eine Nebenbedingung, die Differenzialgleichung des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{2.6}$$

hinzukommt. Durch Einführung sogenannter Lagrange-Multiplikatoren, kann (nach Lagrange) ein Extremalproblem mit Nebenbedingungen auf eines ohne Nebenbedingungen zurückgeführt werden. Der Multiplikator ist ein zeitabhängiger Vektor der Form $\boldsymbol{\psi}(t)^T = (\psi_1(t) \dots \psi_n(t))$. Als erster Schritt wird die DGL des Systems (2.6) umformuliert und mit $\boldsymbol{\psi}(t)$ von links multipliziert. Die umgeschriebene Systemgleichung

$$\boldsymbol{\psi}(t)^T \dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\psi}(t)^T f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0 \tag{2.7}$$

kann nun, da sie gleich null ist, zum Gütemaß (2.1) addiert werden. Das Gütemaß

$$J = \int_{t_0}^{t_e} \left[f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\psi}(t)^T \dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\psi}(t)^T f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \right] dt \tag{2.8}$$

enthält somit die Nebenbedingungen (Differenzialgleichung des dynamischen Systems). Es liegt folglich wieder ein Grundproblem der Variationsrechnung vor.

Die Hamilton-Funktion (2.9) verknüpft den Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{\psi}(t)$, den Integranden des ursprünglichen Gütemaßes $f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ und die Nebenbedingung $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ (die Regelstrecke) miteinander.

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) = -f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\psi}(t)^T f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.9)$$

Für das Gütefunktional ergibt sich:

$$J = \int_{t_0}^{t_e} \left[\boldsymbol{\psi}(t)^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) \right] dt. \quad (2.10)$$

Resultierend lässt sich die Lösung des Grundproblems der Variationsrechnung anwenden, um dieses vektorielle Variationsproblem in ein Extremalproblem zu überführen (siehe [FSK94]). Hierbei erhält man als Zwischenresultat, dass die optimale Lösung $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)$ im Bereich $t_0 < t < t_e$ die Vektorgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.11)$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (2.12)$$

erfüllen muss.

Beachtet man, dass lediglich der Anfangspunkt fest vorgegeben ist, der Endpunkt jedoch, wie weiter oben bereits beschrieben, lediglich durch eine Zielmannigfaltigkeit beschrieben wird, lässt sich die Transversalitätsbedingung (2.13) herleiten, welche die optimale Lösung im Endpunkt erfüllen muss um das Gütefunktional (2.4) zu minimieren:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{t_e} + \boldsymbol{\psi}(t_e) - \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \Big|_{t_e} \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (2.13)$$

Hierfür wurde das Gütefunktional (2.4) neben $\boldsymbol{\psi}(t)$ mit einem weiteren Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{\mu}$ zu

$$J = h(\mathbf{x}(t_e), t_e) - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{z}(\mathbf{x}(t_e)) + \int_{t_0}^{t_e} \left[\boldsymbol{\psi}(t)^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) \right] dt \quad (2.14)$$

erweitert, um somit die Anforderungen an den Endpunkt in das Gütemaß zu inkludieren. Weiterführende Erläuterungen zur Herleitung der Transversalitätsbedingung (2.13) sind in Anhang F.1 zu finden.

Bezüglich der Vorgabe des Endpunktes eines Optimierungsproblems, ergeben sich aus (2.13) nun 3 Möglichkeiten:

1. Endpunkt \mathbf{x}_e ist fest vorgegeben $m = n$: keine Transversalitätsbedingung,

2. Zielmannigfaltigkeit \mathcal{Z} ($0 < m < n$): Transversalitätsbedingung (2.13),

3. Endpunkt völlig frei ($m = 0, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$):

$$\text{Transversalitätsbedingung } \boldsymbol{\psi}(t_e) = - \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{t_e}.$$

Zusammenfassung:

Hamilton-Funktion:

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) = -f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Gleichungen der optimalen Lösung:

$$\begin{array}{ll} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} \text{ bzw. } \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) & \text{Zustands-DGL} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \text{ bzw. } \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\psi} & \text{adjungierte DGL} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 & \text{Steuerungsgleichung} \end{array}$$

Die Zustands-DGL und die adjungierte DGL werden zusammen als kanonische Differenzialgleichungen bezeichnet.

Übersicht 2.1: *Hamilton-Gleichungen*

2.2.2 Lösung der Hamilton-Gleichungen

Zur Lösung der zuvor vorgestellten Hamilton-Gleichungen stehen zwei verschiedene Verfahren zur Verfügung. Beide sollen hier kurz vorgestellt werden.

Die klassische Methode. Die erste allgemeine Variante beruht auf einer Lösung der DGL mittels Laplace-Transformation. Diese Lösungsmethode besteht im Wesentlichen aus den nachfolgend aufgeführten fünf Schritten:

Schritt 1: Auflösen der Steuerungsgleichung nach $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, t)$ und einsetzen in die kanonische DGL.

Schritt 2: Ermitteln der allgemeinen Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, c)$ und $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(t, c)$ der kanonischen DGL mittels Laplace-Transformation, wobei c hierbei den Integrationsparameter darstellt.

Schritt 3: Anpassen der allgemeinen Lösung aus Schritt 2 an die Randbedingungen, d.h. bei gegebener Zielmannigfaltigkeit z.B.

$$\mathbf{x}(t_0, c) = \mathbf{x}_0, \mathbf{z}(\mathbf{x}(t_e, c)) = 0 \text{ und } \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_e, c)) + \boldsymbol{\psi}(t_e, c) - \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_e, c)) \right)^T \boldsymbol{\mu} = 0.$$

Schritt 4: Den Integrationsparameter $c(x_0)$ in die allgemeine Lösung der kanonischen DGL einsetzen, um die optimale Trajektorie und den optimalen Steuervektor zu erhalten:

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, x_0)$ optimale Trajektorie,
- $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^*(t, x_0)$,
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, t) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}_0)$ optimaler Steuervektor.

Schritt 5: Um nun ein Reglergesetz zu erhalten, das unabhängig vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 ist, muss die optimale Trajektorie nach \mathbf{x}_0 aufgelöst und in den optimalen Steuervektor eingesetzt werden. Somit erhält man mit $\mathbf{u}^* = \mathbf{k}^*(\mathbf{x}, t)$ den optimalen Regler.

Ein detailliertes Anwendungsbeispiel für den hier aufgeführten Algorithmus ist in Anhang F.2 gegeben.

Matrix-Riccati-Gleichung. Für diese Lösungsvariante bedient man sich der Zustandsgleichung des Zustandsraummodells (A.5), jedoch unter der Voraussetzung, dass die Regelstrecke nicht sprungfähig ist, das heißt $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Des Weiteren besteht die Forderung nach Steuerbarkeit⁵ des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . Das bedeutet es gilt:

$$\text{Rg}(\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n. \quad (2.15)$$

Es soll zunächst vom allgemeinen Fall ausgegangen werden, indem beide Matrizen auch zeitabhängig sein dürfen. Das Gütefunktional entspricht der unter (2.2) vorgestellten Form. Die Randbedingungen bleiben unverändert: t_0 und $t_e > t_0$ gegeben, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Da $\mathbf{x}(t_e)$ ungezwungen ist, gilt die folgende Transversalitätsbedingung:

$$\boldsymbol{\psi}(t_e) = - \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_e} = -\mathbf{S}\mathbf{x}(t_e). \quad (2.16)$$

Die Matrix \mathbf{S} ist hierbei symmetrisch. Um die Hamiltonfunktion zu erhalten setzt man in (2.9) für f_0 den Integranden des Gütemaßes (2.1) und für die Nebenbedingung $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ die Zustandsgleichung des dynamischen Systems ein:

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) = -\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)^T \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)^T \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.17)$$

Des Weiteren wird die adjungierte DGL

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)^T \mathbf{A} \quad (2.18)$$

und die Steuerungsgleichung

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

⁵Ein System heißt genau dann steuerbar, wenn es in endlicher Zeit t_e von jedem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$ in einen beliebigen vorgegebenen Endzustand $\mathbf{x}(t_e)$ überführt werden kann [Lun06].

aufgestellt. Im nächsten Schritt wird Gleichung (2.19) nach $\mathbf{u}(t)$ aufgelöst,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\psi}(t), \quad (2.20)$$

und in die kanonischen Differenzialgleichungen eingesetzt. Es folgt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\psi}(t), \quad (2.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)^T\mathbf{A} \quad (2.22)$$

Da (2.21) und (2.22) lineare Differenzialgleichungen sind, kann davon ausgegangen werden, dass auch der gesuchte Optimalregler linear ist. Aus diesem Grund wird als möglicher Lösungsansatz

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.23)$$

gewählt, mit $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Damit aber nun die Gleichungen (2.23) und (2.20) korrelieren, muss gelten:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.24)$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Somit folgt für den optimalen Steuervektor

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t). \quad (2.25)$$

Das Einsetzen von Gleichung (2.24) in (2.21) und (2.22) führt zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.26)$$

und

$$-\left(\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t). \quad (2.27)$$

Durch Verbinden der beiden Gleichungen erhält man die zeitabhängige, nicht-lineare Matrix-Riccati-Gleichung

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}. \quad (2.28)$$

Die Anfangsbedingung ergibt sich aus der Transversalitätsbedingung zu

$$\mathbf{P}(t_e) = \mathbf{S}. \quad (2.29)$$

Mit der Lösung der Riccati-Gleichung liegt eine hinreichende Lösung für das Optimierungsproblem vor. Die zeitvariante Form der Matrix-Riccati-Gleichung soll allerdings nicht weiter in dieser Arbeit betrachtet werden. Die im nachfolgenden Abschnitt vorgestellten numerischen Lösungsverfahren der Matrix-Riccati-Gleichung beziehen sich daher auf den zeitinvarianten Fall.

2.3 Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur Lösung der zeitinvarianten Form der in Abschnitt 2.2 als Lösung der Hamilton-Gleichungen präsentierten Matrix-Riccati-Gleichung vorgestellt. Diese Methode zur Bestimmung einer expliziten Lösung ist unter anderem auch in [Lun07] und [FSK94] zu finden.

Für den zeitinvarianten Fall gehen wir wieder von den unter (2.21) und (2.22) hergeleiteten kanonischen Differenzialgleichungen einer allgemeinen Regelstrecke aus. Hierbei fassen wir das Gleichungssystem in einer Matrixform zusammen. Es gilt

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\psi}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}\mathbf{v}(t), \quad (2.30)$$

wobei die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} konstant sind und das System (\mathbf{A}, \mathbf{B}) steuerbar ist. Als weitere Voraussetzung für diesen Fall gilt $t_e = +\infty$. Damit aber das Integral im Gütemaß (2.2) existiert, muss $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{0}$ sein. Dies hat aber auch zur Folge, dass der Summand des Gütefunktional mit der Matrix \mathbf{S} entfällt. Das neue Gütefunktional hat nun die Form

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (2.31)$$

Wählt man nun für \mathbf{Q} und \mathbf{R} symmetrische, positiv definite Matrizen ($\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$), und erfüllt die Forderung, dass das Paar $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}})$ mit $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}}$ beobachtbar⁶ ist, wird somit gewährleistet, dass alle Zustände ins Gütefunktional eingehen und folglich einen stabilen Verlauf haben. Als Resultat wäre damit der gesamte Regelkreis stabil.

Zum Verlauf der Trajektorie sei noch erwähnt, dass sich dieser trotz der Bedingung $t_e = +\infty$ beim realen System kaum vom optimalen Verlauf unterscheidet und der gewünschte Endzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ innerhalb kürzester Zeit erreicht ist. Da alle Matrizen der Hamilton-Gleichungen zeitinvariant sind, ist auch die unter (2.24) eingeführte Matrix \mathbf{P} konstant. Die zeitvariante Matrix-Riccati-Gleichung (2.28) wird zur algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q}, \quad (2.32)$$

wobei \mathbf{P} nun einfach berechnet werden kann.

Zunächst soll das charakteristische Polynom von (2.30) bestimmt werden:

$$\det[\lambda\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{W}] = \det \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & \lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^T \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

⁶Ein System heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand \mathbf{x}_0 aus dem über einem endlichen Intervall $[0, t_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{y}_{[0, t_e]}$ bestimmt werden kann [Lun07]. In diesem speziellen Fall soll somit geprüft werden, ob alle Eigenvorgänge in das Gütefunktional eingehen.

Wie in [FSK94] gezeigt wird, handelt es sich hierbei um eine gerade Funktion. Mit λ ist somit auch $-\lambda$ ein Eigenwert von \mathbf{W} . Bezeichnen wir weiter die stabilen Eigenwerte, $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$ mit Index $1 \dots n$ und die instabilen mit $n+1 \dots 2n$. Um nun die DGL (2.30) zu lösen, wird als Ansatz $\mathbf{v}(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$ gewählt, mit λ_i als Eigenwert von \mathbf{W} und \mathbf{v}_i als einen unbestimmten konstanten Vektor. Setzt man nun diesen Ansatz in die Differenzialgleichung ein, so ergibt sich

$$\lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i = \mathbf{W} e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$$

oder

$$(\lambda_i \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{W}) \mathbf{v}_i = 0. \quad (2.34)$$

Dies bedeutet, dass \mathbf{v}_i Eigenvektor von \mathbf{W} ist und die allgemeine Lösung zu (2.30) damit

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i, \quad (c_i \text{ beliebig}) \quad (2.35)$$

lautet. Da $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\psi}(t) \end{pmatrix}$, bedeutet dies für (2.35):

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_{ix}, \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_{i\psi}, \quad (2.37)$$

Um den Stabilitätsforderungen nachzukommen (siehe Anhang A), müssen die Eigenwerte $\lambda_{n+1} \dots \lambda_{2n}$ (dies entspricht den Eigenwerten mit positiven Realteil) gleich null werden. Dies wird erreicht, indem die Konstanten $c_{n+1} \dots c_{2n}$ gleich null gesetzt werden. Für (2.36) ergibt sich somit

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_{1x} | \mathbf{v}_{2x} | \dots | \mathbf{v}_{nx})^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (2.38)$$

und eingesetzt in Gleichung (2.37) folgt

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\mathbf{v}_{1\psi} | \dots | \mathbf{v}_{n\psi}) \cdot (\mathbf{v}_{1x} | \dots | \mathbf{v}_{nx})^{-1} \mathbf{x}(t). \quad (2.39)$$

Hierbei sind nun $\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{ix} \\ \mathbf{v}_{i\psi} \end{pmatrix}$ mit $i = 1 \dots n$ die zu den stabilen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren von \mathbf{W} . Für den gesuchten optimalen Steuervektor ergibt sich nun, wenn man (2.20) hinzuzieht,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{v}_{1\psi} | \dots | \mathbf{v}_{n\psi}) \cdot (\mathbf{v}_{1x} | \dots | \mathbf{v}_{nx})^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (2.40)$$

und

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_{1\psi} | \dots | \mathbf{v}_{n\psi}) \cdot (\mathbf{v}_{1x} | \dots | \mathbf{v}_{nx})^{-1}, \quad (2.41)$$

womit das Optimierungsproblem des zeitinvarianten Falles gelöst ist. An dieser Stelle soll noch einmal gesondert herausgestellt werden, dass der hier vorgestellte Optimalregler lediglich dafür ausgelegt ist, eine Regelstrecke mit dem gegebenen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ in den Nullzustand zu überführen.

Optimaler Zustandsregler:

Für ein dynamisches zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$$

mit gegebenem Güßmaß

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt,$$

wobei \mathbf{Q} und \mathbf{R} positiv definite Wichtungsmatrizen sind, ist die Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{K}} J$$

durch die Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}^*\mathbf{x}(t)$$

mit

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

gegeben. Hierbei ist \mathbf{P} die positiv definite Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Hierbei gelten die Bedingungen, dass (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar und $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}})$ vollständig beobachtbar sein müssen mit $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{Q}}$.

Übersicht 2.2: *Optimaler Zustandsregler*

Kapitel 3

Das Inverse Optimierungsproblem

Im vorangegangenen Kapitel 2 wurde dargestellt, wie nach Festlegung eines Gütefunktional (2.31) und Lösung der daraus hergeleiteten algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung (2.32) ein optimaler Regler bezüglich des Gütefunktional für ein System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

ermittelt werden kann. Möchte man nun diesen Weg rückwärts gehen, indem zunächst eine stabilisierende Rückführung entworfen und in einem zweiten Schritt ein Gütefunktional gesucht wird, bezüglich dessen die Rückführung optimal ist, führt dies zum sogenannten Inversen Optimierungsproblem. Problematisch ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, dass es nur in einer beschränkten Anzahl von Fällen möglich ist, zu einer gegebenen Rückführungsmatrix \mathbf{K} die zugehörigen Wichtungsmatrizen zu finden, für die der Regler optimal ist. Eine Auswahl an möglichen Beispielen und eine entsprechende Verfahrensmöglichkeit ist in [Loc01] dargestellt.

Intention einer solchen Umkehrrechnung kann es sein, zu bestimmen, ob ein über andere Verfahren ermittelter Regler für bestimmte Gütefunktionale auch ein Optimalregler des entsprechenden Systems ist und somit die gewünschte Robustheit garantiert, sowie ob ein Regler zu einem verbrauchs- oder verlaufsoptimalen Systemverhalten führt. Ein solches Vorgehen wäre auch für die initiale Berechnung des im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelten adaptiven Reglers von potenzieller Relevanz. Ein mögliches Beispiel wäre hierbei, dass ein mittels Polzuweisung entworfener Regler hinsichtlich Optimalität überprüft und das dabei minimierte Gütefunktional mit Hinblick auf die Matrizen \mathbf{R} und \mathbf{Q} identifiziert wird. Sind diese Wichtungsmatrizen ermittelt, so ist eine Anpassung des Reglers unter Beachtung des zu minimierenden Gütefunktional bei sich ändernden Systemparametern möglich (siehe Kapitel 9).

In diesem Kapitel soll nun ein eigener Ansatz zur Lösung des Inversen Opti-

mierungsproblems präsentiert werden. Kern dieses Ansatzes ist die Nutzung eines neuronalen Netzes, das in der Lage ist, die vollständige Mannigfaltigkeit an optimalen Rückführungen \mathbf{K}^* eines ausgewählten Systems darzustellen. Somit kann mittels des neuronalen Netzes bestimmt werden, ob für eine beliebig gegebene Matrix \mathbf{K} ein zugehöriges Paar an Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} existiert, hinsichtlich dessen die Matrix \mathbf{K} optimal ist.

Zur Generierung (Training) des neuronalen Netzes ist ein entsprechend umfangreicher Datensatz für das entsprechende System notwendig, der die möglichen Optimalregler \mathbf{K} mit den jeweils zugehörigen Gütekriterien \mathbf{Q} und \mathbf{R} beinhaltet. Eine Möglichkeit zur Generierung dieses Datensatzes besteht in der Nutzung des in [Hil01a] und [Hil01b] vorgestellten verallgemeinerten Homotopie-Verfahrens. Dieses Verfahren wird im nachfolgenden Abschnitt 3.1 dahingehend abgewandelt, dass die Ausschöpfung einer hinreichend großen Lösungsmenge der Matrix-Riccati-Gleichung für ein gegebenes System möglich ist. Abschnitt 3.2 behandelt anschließend die Generierung eines Neuronalen Netzes aus der ermittelten Lösungsmenge.

3.1 Ausschöpfung einer Lösungsmenge der Matrix-Riccati-Gleichung

In [Hil01a] und [Hil01b] wird ein Homotopieverfahren vorgestellt, das speziell für die Ausschöpfung einer Lösungsmenge in Abhängigkeit mehrdimensionaler Homotopieparameter entwickelt wurde.

Da im Fall der Matrix-Riccati-Gleichung keine Gleichheitsnebenbedingungen vorliegen, stellt sich ein Punkt der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} in der Form $(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \in \mathbb{R}^{n^2+k}$ dar. Dieser Punkt $(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ reduziert sich aufgrund der Symmetrie der Matrix \mathbf{P} auf $\bar{n} = n(n+1)/2 + k$ Elemente und erfüllt dabei folgendes Gleichungssystem, dargestellt als Vektorfunktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\bar{n}+k} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n}+1}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \text{vek}(\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \\ \sum_{l=1}^k \alpha_l - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

mit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^k$, $\mathbb{R}_+^k := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k \mid \alpha_i > 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$.¹

Der Gewichtsvektor $\boldsymbol{\alpha}$ ergibt sich aus den m Diagonalelementen der Matrix \mathbf{R} und den n Diagonalelementen der Matrix \mathbf{Q} zu $\boldsymbol{\alpha} = (r_1, \dots, r_m, q_1, \dots, q_n)^T$. Hierbei wird angenommen, dass alle Nicht-Diagonalelemente der Matrizen \mathbf{R} und \mathbf{Q} gleich null sind. Des Weiteren lässt sich nun der in [Hil01a] vorgeschlagene Algorithmus übertragen.

¹Die Funktion vek stellt hierbei die Überführung einer Matrix in einen Vektor dar. Dabei werden die Zeilen der Matrix in Spaltenvektoren transponiert, welche dann untereinander geschachtelt werden. Auch hierbei darf aufgrund der Symmetrie der Matrix \mathbf{P} lediglich die obere Dreiecksmatrix transformiert werden.

Schritt 1: Als Ausgangspunkt für das Verfahren wird bereits ein gültiger Punkt $(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2+k}$ der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} benötigt. Dieser kann unter Vorgabe des Gewichtsvektors $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^k$ mit $\sum_{l=1}^k \alpha_l = 1$ mittels des im vorigen Abschnitt 2.3 beschriebenen expliziten Lösungsverfahrens berechnet werden. Weitere explizite Berechnungen von Punkten sind nicht notwendig, da neue Ausgangspunkte $(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ aus den neu generierten Punkten der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gewählt werden können.

Schritt 2: Berechnen der Jacobi-Matrix \mathbf{F} von \mathbf{f} im Punkt $(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_{n(n+1)/2}} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n(n+1)/2}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n(n+1)/2}}{\partial p_{n(n+1)/2}} & \frac{\partial f_{n(n+1)/2}}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n(n+1)/2}}{\partial \alpha_k} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Schritt 3: Orthogonalisierung der transponierten Jacobi-Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha})^T$ mittels QR-Zerlegung (siehe [BSMM01]). Hieraus resultieren eine orthogonale Matrix $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2+k}$ und eine Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n(n+1)/2+1} \\ & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n(n+1)/2+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{n(n+1)/2+1,n(n+1)/2+1} \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix}.$$

Es gilt also:

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha})^T = \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{R}. \quad (3.4)$$

Schritt 4: Die ober Dreiecksmatrix \mathbf{R}_1 enthält die Information darüber, ob $\mathbf{F}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha})^T$ vollen Rang hat. Wie in [Hil01b] dargestellt, ist dies genau dann der Fall, wenn alle Diagonalelemente von \mathbf{R}_1 ungleich null sind. Ist dies nicht der Fall, so ist der gewählte Ausgangspunkt $(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ ungeeignet und es muss mit einem entsprechend neuen Punkt wieder bei Schritt 1 begonnen werden.

Schritt 5: Aus der Matrix $\tilde{\mathbf{Q}}$ wird mittels Spaltenumordnung eine Matrix \mathbf{Q} gewonnen, deren Spalten die Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{n(n+1)/2+k}$ bilden. Die Umordnung der Spalten erfolgt wie nachfolgend dargestellt:

$$\mathbf{q}_j = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_{j+n(n+1)/2+1} & | \quad j = 1, \dots, k-1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{j-k+1} & | \quad j = k, \dots, n(n+1)/2+k \end{cases} \quad (3.5)$$

Schritt 6: Generierung einer Menge von Kartenparametervektoren $\{\xi_{(i)}\}$, indiziert durch eine Indexmenge $\mathcal{I} = \{1, \dots, k-1\}$. Für den i -ten Kartenparameter gilt hierbei:

$$\xi_{(i)} = \frac{c}{\|\mathbf{F}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^*)\bar{\mathbf{q}}_i\|} \mathbf{e}_i, \quad (3.6)$$

wobei c der vorgegebene Abstand zwischen zwei Homotopiepunkten, \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^{k-1} und $\bar{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ der aus den ersten $n(n+1)/2$ Elementen des Basisvektors \mathbf{q}_i gebildete Vektor ist. Die Matrix $\mathbf{F}_{\mathbf{P}}$ ist ein Teil der Jacobi-Matrix (3.3), der nur die nach den Elementen der Matrix \mathbf{P} abgeleiteten Einträge beinhaltet.

Die folgenden Schritte von 7 bis 9 werden für alle Indices $i \in \mathcal{I}$ durchgeführt.

Schritt 7: Prädiktorschritt:

$$\phi^{\mathbf{P}}(\xi_{(i)}) = (\mathbf{P}^*, \alpha^*) + (\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_{k-1}) \xi_{(i)} \quad (3.7)$$

Schritt 8: Korrektorschritt per Newton-Verfahren:

Hierfür wird ein vereinfachtes Newton-Verfahren verwendet bei dem eine Folge von Punkten $\eta_{(i)}^{[l]} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2+1}$, $l = 0, 1, \dots, l_{max}$ mit Startpunkt $\eta_{(i)}^{[0]}$ und der Iterationsvorschrift

$$\eta_{(i)}^{[l+1]} = \mathbf{z} + \eta_{(i)}^{[l]} \quad (3.8)$$

generiert wird. Der Parametervektor \mathbf{z} ist hierbei die Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\mathbf{F}(\phi^{\mathbf{P}}(\xi_{(i)})) \cdot (\mathbf{q}_k \dots \mathbf{q}_{n+k}) \mathbf{z} = -\mathbf{f} \left((\mathbf{P}^*, \alpha^*) + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \xi_{(i)} \\ \eta_{(i)}^{[l]} \end{pmatrix} \right). \quad (3.9)$$

Des Weiteren ist zu prüfen, ob

$$\left\| \mathbf{f} \left((\mathbf{P}^*, \alpha^*) + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \xi_{(i)} \\ \eta_{(i)}^{[l]} \end{pmatrix} \right) \right\| < \epsilon \quad (3.10)$$

gilt, wobei ϵ eine vorgegebene Fehlerschranke darstellt. Ist dies der Fall, wird zu Schritt 9 gewechselt. Sollte jedoch nach einer Maximalzahl von l_{max} Iterationsschritten (3.10) noch nicht erfüllt sein, scheint das Newton-Verfahren nicht zu konvergieren. In Folge dessen sollte der Kartenparametervektor $\xi_{(i)}$ halbiert und zurück zu Schritt 7 gewechselt werden.

Schritt 9: Im letzten Schritt ist zu prüfen, ob der soeben generierte Punkt tatsächlich zur Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gehört. In diesem Fall bedeutet dies, ob besonders die Anforderung $\alpha \in \mathbb{R}_+^k$ erfüllt ist. Ist dies nicht zutreffend, sollte der Kartenparametervektor $\xi_{(i)}$ halbiert und zurück zu Schritt 7 gegangen werden.

3.2 Speichern der ausgeschöpften Lösungsmenge und Lösen des Inversen Optimierungsproblems

Für eine allgemeine Einführung in die Thematik der künstlichen neuronalen Netze sei auf [Roj06], [RW08b], [Her94] und [Ham93] verwiesen. Die Erstellung eines neuronalen Netzes erfolgt mittels der in MATLAB[®] bereitgestellten Neural Network Toolbox [DBH10].

Da der zuvor beschriebene Sachverhalt über die Speicherung der Mannigfaltigkeit von \mathbf{K} in Abhängigkeit von \mathbf{Q} und \mathbf{R} einem Assoziativspeicher entspricht, ist hierfür ein mehrschichtiges Perzeptron zu verwenden, das mit dem Lernverfahren der *Backpropagation* trainiert wird. Im ersten Schritt soll allerdings kurz der Aufbau eines solchen mehrschichtigen Perzeptrons erklärt werden. Grundbausteine eines neuronalen Netzes sind künstliche Neuronen, welche auch als Perzeptron-Neuronen bezeichnet werden. In (Abb. 3.1) ist eine solche Zelle schematisch dargestellt. Die Eingabeparameter werden hierbei mit

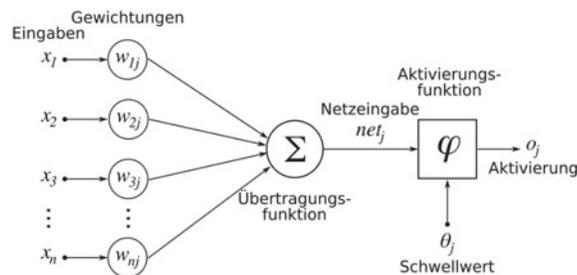


Abbildung 3.1: Modell eines künstlichen Neurons (Quelle: Wikipedia)

einer Wichtung w_{ij} mit $-1 \leq w_{ij} \leq 1$ multipliziert und aufsummiert und gehen als Netzeingabe in die Aktivierungsfunktion φ ein. Zusätzlich kann durch Einführen eines Schwellwertes θ (Bias) die Netzeingabe verschoben werden. Für die Ausgabe des künstlichen Neurons stellt sich dies in der Form $o_j = \varphi \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i w_{ij} \right) - \theta_j \right)$ dar. φ kann eine der folgenden Aktivierungsfunktionen sein:

- *Pure Linear Function* oder *Geradlinige Funktion* $\varphi^{\text{plin}}(v) = v$
- *Hard Limit Function* oder *Schwellenwertfunktion* $\varphi^{\text{hlim}}(v) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } v < 0 \end{cases}$

- *Piecewise Linear Function* oder *stückweise lineare Funktion*

$$\varphi^{\text{pwl}}(v) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v \geq \frac{1}{2} \\ v + \frac{1}{2} & \text{wenn } -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{wenn } v \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- *Sigmoide Funktion* $\varphi_a^{\text{sig}} = \frac{1}{1+e^{av}}$

Natürlich sind auch Abwandlungen dieser Funktionen (zum Beispiel die Tangens Sigmoidfunktion) möglich. Durch eine parallele Anordnung von Neuronen, wobei jeder Zelle alle Eingangsparameter zugeführt werden, erhält man ein einschichtiges Perzeptron, durch Aneinanderreihung mehrerer Schichten ein mehrlagiges Perzeptron (siehe Abbildung 3.2).

Die größte Herausforderung beim Entwurf des künstlichen neuronalen Netzes

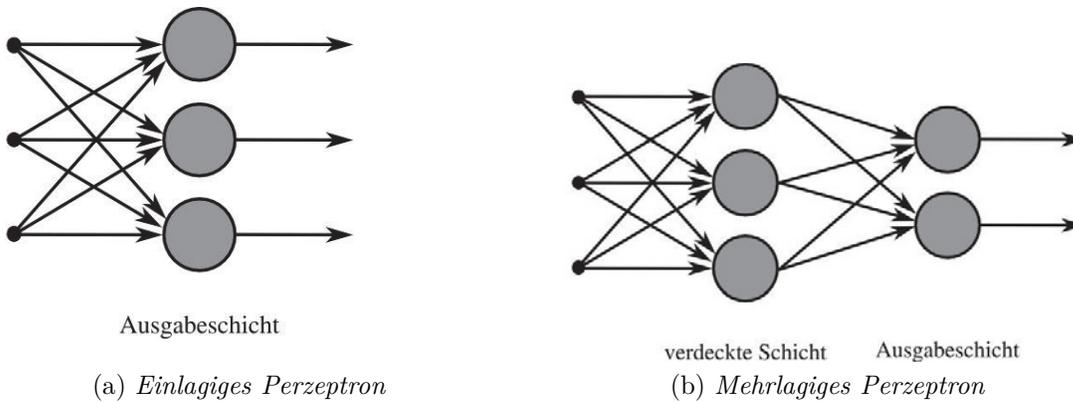


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung eines ein- und zweischichtigen Perzeptrons

besteht darin eine Netzarchitektur zu finden, die nach erfolgtem Training den Datensatz mit der gewünschten Genauigkeit wiedergibt. Grundsätzlich kann jedoch davon ausgegangen werden, dass Datensätze, wie die hier vorliegende Mannigfaltigkeit, durch ein drei-schichtiges Perzeptron mit ausreichender Genauigkeit dargestellt werden können. Die notwendige Anzahl an Neuronen in den mittleren Schichten, welche eine Tangens Sigmoidfunktion als Aktivierungsfunktion besitzen, muss jedoch für jeden Anwendungsfall gesondert bestimmt werden. Die Ausgabeschicht besteht aus Neuronen mit gerader Aktivierungsfunktion und entsprechen in ihrer Anzahl den Ausgabewerten des Netzes, respektive den Parametern der Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} .

Da es sich um eine Funktionsapproximation handelt, ist der Levenberg-Marquard-Algorithmus, der auf der Methode der kleinsten Quadrate beruht, als Trainingsfunktion für das neuronale Netz am besten geeignet [DBH10]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Neuronale Netze entwickelt, die nach erfolgreichem Training eine mittlere quadratische Abweichung von 10^{-6} aufweisen. Eine weitere Reduzierung der Abweichung ist durch die Verwendung komplexerer Netze und umfangreicherer Trainingsdatensätze möglich. Dies resultiert jedoch in einem exorbitanten Anstieg der Trainingszeit. Des Weiteren ist bei

Verwendung der Neural Network Toolbox in MATLAB[®] der Umfang der Trainingsdaten begrenzt. Die in dieser Arbeit ermittelte Obergrenze lag hierbei bei 50000 Eingangs- und 75000 Zieldaten.

3.3 Die Lösung des Inversen Optimierungsproblems am Beispiel eine SISO Systems

Die Lösung des Inversen Optimierungsproblems soll nachfolgend an dem als Beispiel 1 deklarierten, linearen, zeitinvarianten und nicht sprungfähigen SISO² System zweiter Ordnung mit betrachtet werden.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c} = (1 \ 0)$$

Beispiel 1: *SISO System 2. Ordnung*

Bei der Umsetzung des Algorithmus müssen zunächst zweierlei Überlegungen erfolgen. Zum Ersten ist es notwendig festzulegen, wie die Auswahl des Startpunktes für den nächsten Homotopieschritt aus der Lösungsmenge der generierten optimalen Punkte $\{(\mathbf{P}^*, \alpha^*)_{(i)}\}$ aus dem vorangegangenen Homotopieschritt erfolgen soll. Hauptaugenmerk sollte hierbei auf einer homogenen Verteilung der gesamten Lösungsmannigfaltigkeit an optimalen Punkten am Ende dieses Homotopieverfahrens liegen. In diesem Fall wurde sich für einen stochastischen Ansatz entschieden, welcher mittels Zufallsverfahren bestimmt, welcher der im aktuellen Homotopieschritt generierten Punkte als Ausgangspunkt für den nächsten Schritt dient. Dieses Auswahlverfahren des nächsten Startpunktes führt jedoch bei dem gegebenen Beispiel nicht zu der gewünschten homogenen Punkteverteilung in der Lösungsmannigfaltigkeit. Aus diesem Grund wurde für das Beispielsystem der Algorithmus zunächst nach einer bestimmten Anzahl an Homotopieschritten abgebrochen und noch einmal am gleichen Startpunkt beginnend wiederholt. Nach einer bestimmten Anzahl an Durchläufen wird ein neuer Startpunkt festgelegt. Die zweite notwendige Überlegung bezieht sich nun auf das Schema, nach dem diese Startpunkte ausgewählt respektive generiert werden.

Erstellt man nun die Vektorfunktion für das gegebene Beispiel gemäß des oben

²SISO ist die Kurzbezeichnung für single input/single output. Unter diesem Begriff werden alle dynamischen Systeme zusammengefasst, die lediglich über eine Eingangs- und eine Ausgangsgröße verfügen.

aufgeführten Verfahrens, ergibt sich³

$$\mathbf{f}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{5625}{r} p_2^2 - q_1 + 10(2p_1 - 5p_2) \\ \frac{1}{r} \frac{5625}{r} p_2 p_3 - 10p_1 + 36p_2 - 25p_3 \\ \frac{1}{r} \frac{5625}{r} p_3^2 - q_2 - 4(5p_2 - 13p_3) \\ q_1 + q_2 + r - 1 \end{pmatrix}$$

und für die zugehörige Jacobi-Matrix

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 20 & -50 + \frac{3 \cdot 125}{r} p_2 & 0 & \frac{-1}{r^2} \frac{5625}{r} p_2^2 & -1 & 0 \\ -10 & \frac{1}{r} \frac{5625}{r} p_3 + 36 & \frac{1}{r} \frac{5625}{r} p_2 - 25 & \frac{-1}{r^2} \frac{5625}{r} p_2 p_3 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & \frac{3}{r} \frac{125}{r} p_3 + 52 & \frac{-1}{r^2} \frac{5625}{r} p_3^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung der Konstanten $l_{max} = 10$, $\epsilon = 10^{-4}$, der Ausgangsgewichtung $q_1 = q_2 = r = \frac{1}{3}$ sowie einer Schrittmenge von 600 Punkten (d.h. es werden 600 Punkte berechnet), erhält man die in Abb. 3.3 dargestellte Lösungsmenge. Die Ausschöpfung an Optimalreglern \mathbf{K} lässt sich jedoch noch verbessern, in dem das Verfahren, wie zuvor beschrieben, nach einer bestimmten Schrittmenge abgebrochen und nochmals mit der gleichen Ausgangsgewichtung gestartet wird. Nach zehn Durchläufen erhält man eine wie in Abbildung 3.4 dargestellte Mannigfaltigkeit. Schließlich wird in einem weiteren Schritt nach zehn Durchläufen der Ausgangspunkt gezielt verändert. Hierbei wird der Wert q_1 pro Durchlauf um 0,01 erhöht um möglichst beide Grenzbereiche der Lösungsmenge für \mathbf{K} zu bestimmen. Die somit berechnete Mannigfaltigkeit ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Sie enthält $594 \cdot 10^3$ Datenpaare.

Der Eingangsdatensatz an optimalen Rückführungen \mathbf{K} als auch der Zieldatensatz, welcher die Elemente q_1 , q_2 und r der Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} beinhaltet, wird in Vorbereitung des Trainings des neuronalen Netzes auf je $25 \cdot 10^3$ Einträge je Datumselement reduziert. Das heißt, der Trainingseingangsdatensatz beinhaltet $25 \cdot 10^3$ optimale Rückführungen \mathbf{K} . Der Trainingszieldatensatz besteht ebenfalls aus $25 \cdot 10^3$ Einträgen, wobei jeder Eintrag die Elemente q_1 , q_2 und r beinhaltet. Hierbei sollten die extrahierten Daten für den Trainingsdatensatz möglichst homogen über der gesamten Lösungsmenge verteilt sein. Für die Erstellung des Validierungs- und des Testdatensatzes wird ein analoges Vorgehen gewählt. Die Erstellung des neuronalen Netzes in MATLAB[®] erfolgt wie vorigen Abschnitt 3.2 beschrieben. Für weitergehende Details sei auf [DBH10] verwiesen.

Nach erfolgreichem Training des Netzes ist dieses in der Lage, die Elemente q_1 , q_2 und r der Wichtungsmatrizen zu einer gegebenen Rückführungsmatrix \mathbf{K} zu bestimmen. Dies erfolgt beispielsweise mittels des Matlab Befehls `[q1,q2,r]=sim(neuronal_net,K)`. Im Falle einer nicht-optimalen Rückführungsmatrix \mathbf{K} als Eingabeparameter, enthält mindestens eines der ausgegebenen Elemente q_1 , q_2 oder r ein negatives Vorzeichen. Für das hier behandelte

³Wie bereits in Abschnitt 3.1 erläutert, muss die Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha})$ aufgrund der Symmetrie von \mathbf{P} auf $n(n+1)/2 + 1$ Elemente reduziert werden. Die obere Dreiecksmatrix der Matrix \mathbf{P} wird dabei zeilenweise in einen Vektor überführt.

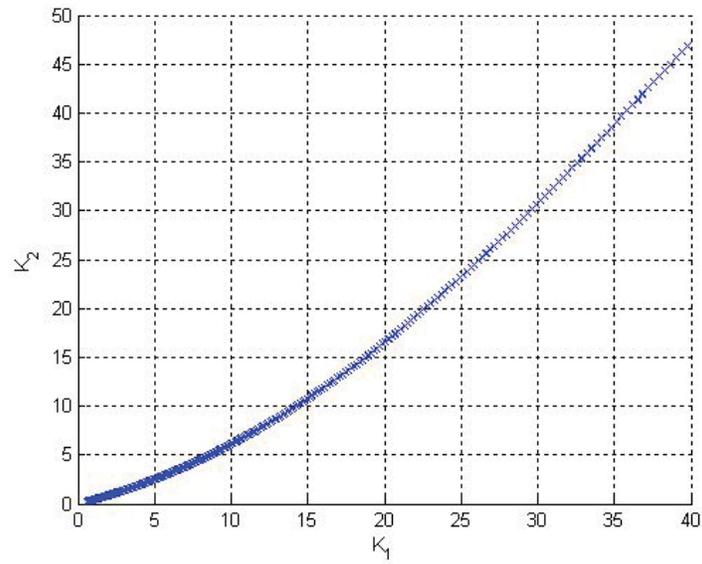


Abbildung 3.3: *Beispiel 1: Ausschöpfung einer Lösungsmenge an optimalen Rückführungen*
K - einfacher Durchlauf

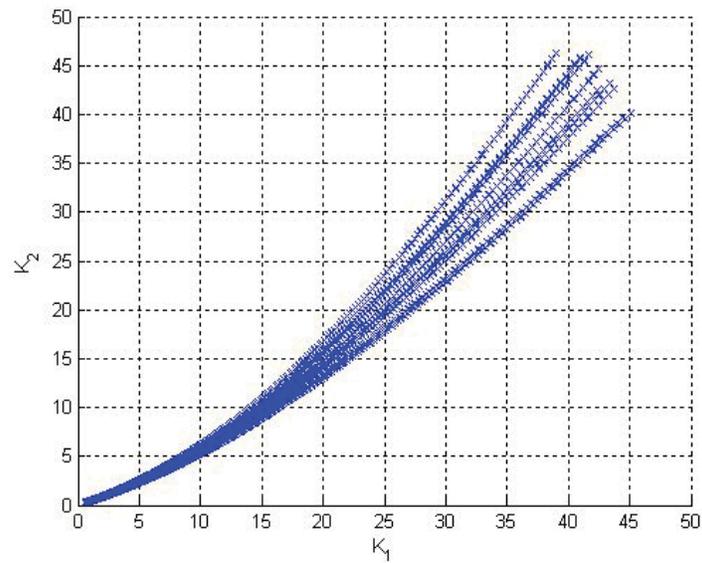


Abbildung 3.4: *Beispiel 1: Ausschöpfung einer Lösungsmenge an optimalen Rückführungen*
K - mehrfacher Durchlauf

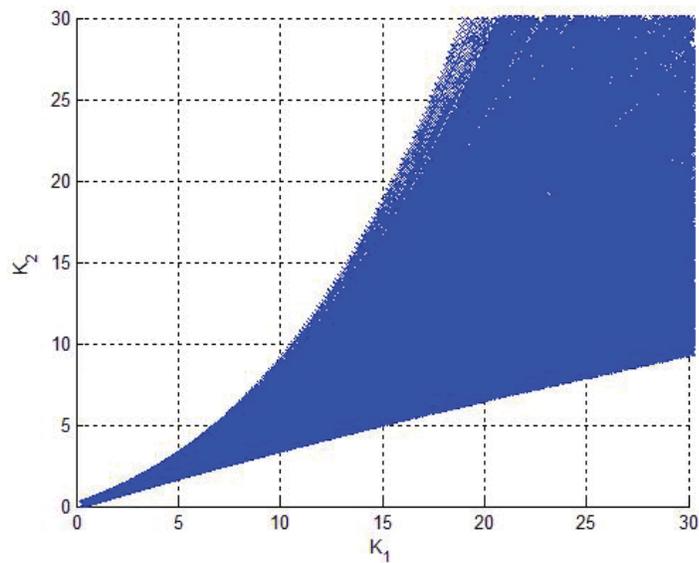


Abbildung 3.5: *Beispiel 1: Ausschöpfung einer Lösungsmenge an optimalen Rückführungen \mathbf{K} - mehrfacher Durchlauf mit veränderten Startpunkten*

Beispiel ist dies anhand von Simulationsergebnissen in Tabelle 3.1 veranschaulicht.

\mathbf{K}	q_1	q_2	r
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$	0,8667	0,1170	0,0164
$\begin{pmatrix} 15 & 10 \end{pmatrix}$	0,5882	0,4108	0,0010
$\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$	-7.8789	8.5452	0.3463
$\begin{pmatrix} 20 & 3 \end{pmatrix}$	2,8627	-2,0008	0.1283

Tabelle 3.1: *Beispiel 1: Ergebnis der Simulation des neuronalen Netzes für gegebene Rückführungen \mathbf{K} . Bei Eingabe existenter Optimalrückführungen \mathbf{K}^* für Beispiel 1 (vgl. Abb. 3.5), liefert das trainierte neuronale Netz die Wichtungparameter q_1 , q_2 und r für die \mathbf{K}^* optimal ist (Eintrag 1 und 2). Ist die dem neuronalen Netz übergebene Rückführung, wie bei Eintrag 3 und 4 geschehen, nicht optimal (vgl. Abb. 3.5), so nimmt mindestens einer der Wichtungparameter einen negativen und somit nicht zulässigen Wert an.*

Kapitel 4

Stabilität geschalteter Systeme

Nur eine beschränkte Anzahl an Regelungsproblemen lassen sich mit einem einzigen, a priori berechneten, statischen Regler lösen. Häufig sind es zu große Modellunsicherheiten, sich ändernde Systemparameter (z.B. durch Materialermüdung oder Störungen), ein Wechsel des Arbeitspunktes oder aber neue Forderungen an das Systemverhalten (z.B. verbrauchsoptimales statt verlaufsoptimales Verhalten des dynamischen Systems), die einen Wechsel des Reglers notwendig machen. Hierbei ist jedoch nicht nur ein Wechseln des Reglers, sondern auch die Änderung in den Modellgleichungen bei sich ändernden Systemparametern als ein Umschalten des Systems zu verstehen (Beschreibung eines zeitinvarianten Systems durch ein stückweise konstantes, geschaltetes System). Somit können Schaltvorgänge einerseits bewusst mittels eines „*Supervisors*“ initiiert sein (siehe [Mor96] und [Lib03]), andererseits aber auch unkontrolliert (durch sich ändernde Systemparameter) auftreten.

In diesem Kapitel werden zunächst geschaltete Systeme hinsichtlich ihrer Stabilität betrachtet (Abschnitt 4.1). Weiterführend wird in Abschnitt 4.2 der „*dwell time*“-Ansatz als ein mögliches Verfahren zur Prüfung der Stabilität bei Schaltvorgängen vorgestellt. Darauf aufbauend wird in Abschnitt 4.3 eine eigene Methode zur Sicherstellung eines stabilitätsverträglichen Umschaltens bei unvorhersehbaren Schaltvorgängen erarbeitet, die sich in die (auf einen adaptiven Regler ausgerichtete) Strategie dieser Arbeit integrieren lässt.

Eine Auswahl an vorhandenen Methoden zur Berechnung dieser „*dwell time*“ wird in Anhang B präsentiert.

4.1 Geschaltete Systeme

Unter einem geschalteten System \mathbf{A}_σ versteht man eine Sammlung von Subsystemen \mathbf{A}_q , deren Aktivierungsreihenfolge im Idealfall mittels eines stückweise konstanten Schaltsignals $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{Q}$ vorgegeben ist.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_q \mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad q \in \mathcal{Q} \quad (4.1)$$

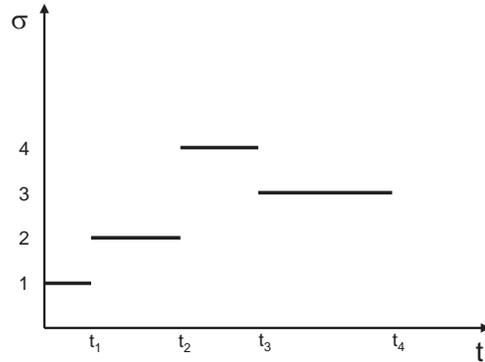


Abbildung 4.1: *Beispielhafter Verlauf von σ für $\mathcal{Q} = \{1,2,3,4\}$*

Das in Abb. 4.1 dargestellte Schaltsignal σ zeigt eine aus vier Subsystemen bestehende Anordnung, bei der die Aktivierungsreihenfolge der Subsysteme inklusive der zugehörigen Aktivierungsdauer bereits a priori vorgegeben ist. In einem solchen Fall lässt sich auf sehr einfachem Wege über Berechnung der resultierenden Trajektorie bestimmen, ob das Gesamtsystem stabil ist.

Von weitaus größerem Forschungsinteresse sind hingegen Anordnungen, bei denen die Aktivierungsreihenfolge nicht a priori bekannt ist, sehr wohl aber der vollständige Satz an Subsystemen. Dieses Interesse wird unter anderem von der Tatsache getrieben, dass ein geschaltetes System nicht zwingend asymptotisch stabil sein muss, auch wenn alle Subsysteme diese Eigenschaft aufweisen. In (Abb. 4.2) ist der instabile Trajektorienverlauf eines geschalteten Systems dargestellt, das sich aus den zwei asymptotisch stabilen Subsystemen $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,4 & -1 \\ 5 & -0,6 \end{pmatrix}$ zusammensetzt. In diesem Beispiel wird alle 0,5 Sekunden zwischen den Subsystemen geschaltet.

Ist nun also nicht im Voraus bekannt, in welcher Reihenfolge die Subsysteme geschaltet werden, so müssen die notwendigen Bedingungen ermittelt werden, welche die Systemstabilität auch für beliebiges Schalten garantieren. Viele Ansätze bezüglich dieser Thematik greifen auf eine subsystemgemeinsame quadratische Lyapunov-Gleichung (siehe auch Fußnote ¹ auf Seite 53) zurück. Diese kann auf numerischem Wege durch Lösung einer linearen Matrixungleichung (LMI) der Form

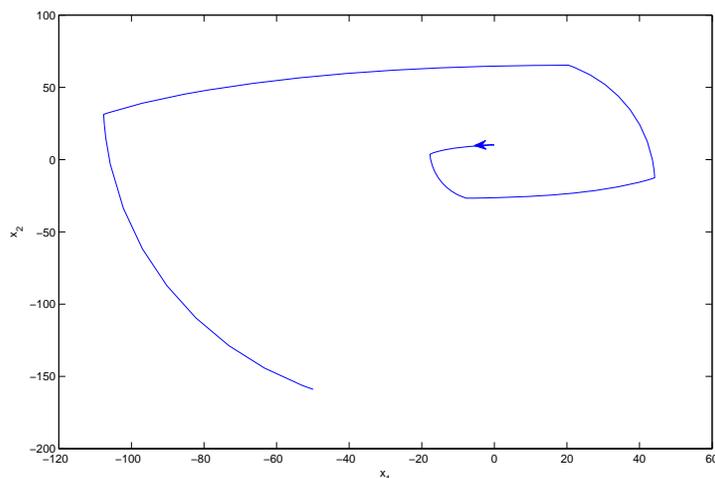
$$\mathbf{P}\mathbf{A}_q + \mathbf{A}_q^T\mathbf{P} < 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q} \quad (4.2)$$

bestimmt werden, wobei $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite symmetrische Matrix ist.

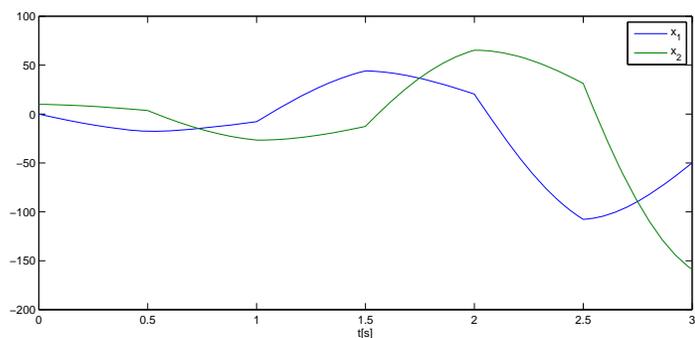
Eine weitere Möglichkeit eine für das Gesamtsystem gültige Lyapunov-Gleichung zu kreieren, besteht in der Verwendung einer geschalteten Lyapunov-Funktion.

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t). \quad (4.3)$$

$\mathbf{P}_{\sigma(t)}$ ist wiederum eine symmetrische positiv definite Matrix, die nach Vorgabe von $\sigma(t)$ aus den Matrizen \mathbf{P}_q zusammengefügt wird, welche die Lyapunov-Gleichung für das Subsystem \mathbf{A}_q lösen. Ist nun eine solche Lyapunov-Funktion



(a) Trajektorie im Zustandsraum



(b) zeitlicher Verlauf der Zustandsgrößen

Abbildung 4.2: Instabiler Verlauf eines geschalteten Systems mit zwei asymptotisch stabilen Subsystemen - Das geschaltete System besteht aus den beiden asymptotisch stabilen Subsystemen $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,4 & -1 \\ 5 & -0,6 \end{pmatrix}$ mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. Der gering gewählte zeitliche Abstand von 0,5 Sekunden zwischen den Schaltvorgängen führt jedoch zu einer Destabilisierung des Gesamtsystems.

gegeben, kann die Stabilität eines geschalteten Systems beim beliebigen Schalten garantiert werden, wenn neben der positiv definiten symmetrischen Matrix $\mathbf{P}_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrizen $\mathbf{F}_q, \mathbf{G}_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($q \in \mathcal{Q}$) existieren, welche die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_q \mathbf{F}_q^T + \mathbf{F}_q \mathbf{A}_q^T - \mathbf{P}_q & \mathbf{A}_q \mathbf{G}_q - \mathbf{F}_q \\ \mathbf{G}_q^T \mathbf{A}_q^T - \mathbf{F}_q^T & \mathbf{P}_{\bar{q}} - \mathbf{G}_q - \mathbf{G}_q^T \end{pmatrix} < 0 \quad (4.4)$$

für $(q, \bar{q} \in \mathcal{Q})$ erfüllen. Beide Methoden werden in [LA09] mit weiterführender Literatur vorgestellt.

Ein weitere Möglichkeit die Stabilität eines geschalteten Systems zu gewährleisten, besteht im Auferlegen von Restriktionen beim Schalten. Diese Restriktionen können sich zum Beispiel von der Verwendung sogenannter Multipler Lyapunov-Gleichungen dahingehend ableiten, dass die Folge der Aktivierungs-

punkte der Lyapunov-Gleichung des jeweils aktiven Subsystems nicht steigend sein darf. Diese Bedingung ist unter Umständen nur unter bestimmten Schaltsequenzen erfüllt. Neben [LA09] wird diese Thematik vor allem in [DBPL00], [HUE04], [LM99] und [Mor96] näher behandelt.

In [Mor96] wird auch eine weitere Methode des restriktiven Schaltens eingeführt, die asymptotische beziehungsweise exponentielle Stabilität geschalteter Systeme garantiert und hierbei Hauptaugenmerk auf die einzelnen Schaltzeitpunkte und die daraus resultierenden Verweilzeiten („*dwell times*“) der Subsysteme legt. Da diese Methode die Grundlage für ein Stabilisierungskonzept zur Implementierung in die Reglerstrategie dieser Arbeit darstellt, wird es im nachfolgenden Abschnitt gesondert beleuchtet.

Erwähnt sei an dieser Stelle noch ein weiterer interessanter Forschungsaspekt geschalteter Systeme, der sich mit der Stabilisierung einer teilweise oder gar gänzlich aus instabilen Subsystemen bestehenden Anordnung mittels eines entsprechenden Schaltgesetzes befasst (siehe [LA09], [DBPL00] und [ZHYM00]). Schließlich sei auch noch auf eine inverse Methode zur Stabilitätsbetrachtung geschalteter Systeme in [GM02] und [ML03] hingewiesen, bei der mittels „*worst case*“-Betrachtung nach der destabilisierendsten Trajektorie gesucht wird, um daraus jene Bedingungen abzuleiten, für die das System stabil ist.

4.2 Stabilisierung geschalteter Systeme mittels „*dwell time*“-Ansatz

In [Mor96] wird das nachfolgend beschriebene Konzept zur Stabilisierung geschalteter Systeme vorgestellt, das besagt, dass ein nur aus asymptotisch stabilen Subsystemen bestehendes geschaltetes System asymptotisch stabil ist, so lange die Schaltvorgänge nur langsam genug erfolgen beziehungsweise die Verweildauer eines jeden Subsystems nur lang genug ist. Dieser Ansatz wird auch als „*dwell time*“-Ansatz bezeichnet und sagt aus, dass zwischen zwei Schaltvorgängen eine Mindestzeitspanne τ_D vorhanden sein muss.

Wie im Nachfolgenden dargestellt wird, ist τ_D zwar subsystemspezifisch, jedoch findet in [Mor96] zur Vereinfachung $\tau_D = \max\{\tau_{D_q}\}$ für das gesamte System Anwendung.

Betrachtet wird wieder ein geschaltetes System \mathbf{A}_σ der Form (4.1). Zusätzlich wird an die Systemmatrix \mathbf{A}_q die Forderung gestellt asymptotisch stabil zu sein. Diese Forderung impliziert, dass für alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von \mathbf{A}_q gelten muss, dass $a_i > 0$ und sämtliche Hauptdeterminanten der aus den Koeffizienten gebildeten Hurwitzmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

größer 0 sind [Lun07]. Ausgangspunkt für den „*dwell time*“-Ansatz ist hierbei die Bewegungsgleichung eines Systems

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (4.6)$$

Diese kann in einen freien Anteil $\mathbf{x}_{\text{frei}} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$, der die Eigenbewegung des Systems wiedergibt, und in einen von der Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ erzwungenen Anteil $\mathbf{x}_{\text{erzw}} = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ gegliedert werden [Lun07]. Der Term $e^{\mathbf{A}t}$ wird auch als Transitions- oder Übergangsmatrix $\Phi(t)$ bezeichnet.

Es werden, wie in [Mor96] vorgestellt, für jedes stabile Subsystem \mathbf{A}_q von (4.1) die positiven Konstanten α_q und β_q bestimmt. Hierbei gilt:

$$\|e^{\mathbf{A}_q t}\| \leq e^{(\alpha_q - \beta_q t)}, \quad t \geq 0. \quad (4.7)$$

Die gesuchte, Stabilität garantierende „*dwell time*“ ergibt sich aus

$$\tau_D = \max_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ \frac{\alpha_q}{\beta_q} \right\}. \quad (4.8)$$

Erfüllt nun ein geschaltetes System die Bedingung, dass zwischen sämtlichen Schaltzeitpunkten eine Zeitspanne größer τ_D liegt, so gilt bei beliebigen $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{Q}$ für die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Gesamtsystems \mathbf{A}_σ

$$\|\Phi(t - \mu)\| \leq e^{(\alpha - \beta(t - \mu))}, \quad \forall t \geq \mu \geq 0 \quad (4.9)$$

mit

$$\alpha = \max_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ \alpha_q \right\} \quad (4.10)$$

und

$$\beta = \min_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ \beta_q - \frac{\alpha_q}{\tau_D} \right\}. \quad (4.11)$$

Die in [Mor96] vorgestellte „*dwell time*“ definiert sich also als die Zeit, die benötigt wird, damit die an die Norm der Transitionsmatrix von \mathbf{A}_σ angenäherte inverse Exponentialfunktion unter den Wert 1 sinkt und somit für jedes Subsystem garantiert ist, dass der Anteil \mathbf{x}_{frei} der Bewegungsgleichung abklingt und für die Zustandstrajektorie des geschalteten Systems gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_\sigma(t) = 0.$$

Sowohl für (4.7) als auch für (4.9) stellt $\|\cdot\|$ die Spektralnorm¹ (2-Norm) der Matrix dar.

¹Für die Spektralnorm einer Matrix \mathbf{A} gilt: $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$. $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ bezeichnet dabei den größten Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (siehe [BSMM01]).

4.3 Erweiterter „*dwell time*“-Ansatz zur Stabilisierung unvorhersehbarer Schaltvorgänge

In Anhang B werden drei Methoden zur Berechnung der „*dwell time*“ vorgestellt, die, wie mit Hilfe des Beispielsystems (B.9) gezeigt wird, auch zu unterschiedlichen Werten für τ_D führen. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass das Einhalten der „*dwell time*“ keine zwingende Notwendigkeit ist, damit ein geschaltetes System stabil ist. Dies soll heißen, dass ein geschaltetes System mit einer Verweildauer der Subsysteme kleiner als τ_D nicht zwingend instabil im Gesamtverlauf sein muss. Ein Einhalten der „*dwell time*“ garantiert jedoch ein stabiles Systemverhalten.

Es stellt sich nun weiter die Frage, welche der in Anhang B aufgeführten Methoden am besten für eine Implementierung im adaptiven Regler geeignet ist. Auch wenn der „*average dwell time*“-Ansatz am vielversprechendsten erscheint, so fällt die Entscheidung doch auf den ursprünglichen in [Mor96] vorgestellten „*dwell time*“-Ansatz. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass vor allem geschaltete Systeme betrachtet werden sollen, von denen nicht a priori alle Subsysteme bekannt sind.

Diese Arbeit verfolgt nun den neuen Ansatz, dass Änderungen in den Systemparametern (beispielsweise durch Störungen) als ein Umschalten auf ein bislang unbekanntes Subsystem betrachtet werden. Da ein Auftreten von Störungen akut erfolgt, ist dahingehend in den meisten Fällen keine Überwachung der „*dwell time*“ eines Subsystems möglich. Eine Kontrolle von τ_D ist folglich nur beim gezielten Umschalten möglich. In diesem Fall stellt die Adaption des Reglers einen gezielten Schaltvorgang dar. Das bedeutet, dass bei dem hier verfolgten Ansatz bei der Bestimmung des Zeitpunktes zum Umschalten auf den adaptierten Regler, auch jene Schaltzeiten betrachtet werden müssen, wo Störungen aktiv wurden und somit ein ungewollter Schaltvorgang auf das Subsystem mit Störung stattfand.

Ausgehend von der Bewegungsgleichung (4.6) ergibt sich für $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0. \quad (4.12)$$

Für geschaltete Systeme folgt daraus

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_{\sigma_{i+1}}(t-t_i)} e^{\mathbf{A}_{\sigma_i}(t_i-t_{i-1})} \dots e^{\mathbf{A}_{\sigma_1}(t_1-t_0)} \mathbf{x}_0 \quad (4.13)$$

Ist nun für jeden Term die Verweildauer lang genug, damit für diesen $|\cdot| < 1$ gilt, so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Folglich ist es möglich, dass die Norm einzelner Terme größer Eins sein darf, solange genügend verbleibende Terme sehr viel kleiner Eins sind oder mindestens ein Term gegen Null strebt und somit asymptotische Stabilität gewährleistet.

Da es sich bei den hier zu betrachteten dynamischen Systemen nicht umgehen lässt, dass sich das System aufgrund äußerer Einflüsse bereits vor Erreichen der benötigten „*dwell time*“ ändert (und somit auf ein anderes Subsystem schaltet), sollte nun anstelle des einzelnen Subsystems, das gesamte System in seinem bisherigen Verlauf betrachtet werden. Folglich sollte ein gesteuerter Schaltvorgang erst dann erfolgen, wenn die Norm des Gesamtsystems einen Wert kleiner Eins erreicht, also wenn gilt:

$$\left| e^{\mathbf{A}_{\sigma_{i+1}}(t-t_i)} e^{\mathbf{A}_{\sigma_i}(t_i-t_{i-1})} \dots e^{\mathbf{A}_{\sigma_1}(t_1-t_0)} \right| < 1. \quad (4.14)$$

Das heißt, für das zum Zeitpunkt t aktive Subsystem wird die „*dwell time*“ τ_D berechnet, die benötigt wird, um die Norm der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Gesamtsystems kleiner eins werden zu lassen. Dies bedeutet, wenn der letzte Schaltvorgang zum Zeitpunkt t_i erfolgte, muss nun gelten:

$$\left| e^{\mathbf{A}_{\sigma_{i+1}}(t-t_i)} \right| |\Phi(t_i)| < 1. \quad (4.15)$$

Nähert man eine Exponentialfunktion an (4.15) mittels Regression an (wie in Abschnitt B.1 beschrieben), so ergibt sich für die gesuchte „*dwell time*“

$$\tau_D = t - t_i > \frac{\alpha_{\sigma_{i+1}} + \ln\left(|\Phi(t_i)|\right)}{\beta_{\sigma_{i+1}}}. \quad (4.16)$$

Mit diesem, in dieser Arbeit hergeleiteten Ansatz ist es nun möglich ohne a priori Wissen die notwendige Verweildauer des aktiven Subsystems zu berechnen, die für die Gewährleistung der Stabilität des Gesamtsystems notwendig ist. Hieraus entsteht allerdings auch die Notwendigkeit einer kontinuierlichen Systemüberwachung zur Identifikation des jeweils aktiven Subsystems. Das dabei gewählte Vorgehen zur Systemidentifikation ist im nachfolgenden Kapitel 5 beschrieben.

Des Weiteren gilt es zu beachten, dass keine Anforderung an die „*dwell time*“ existiert, sollte es sich bei dem aktiven Subsystem um ein instabiles System handeln. In solch einem Fall gilt es vielmehr schnellstmöglich mittels Regleradaptation auf ein stabiles Subsystem zu schalten, um die Stabilität des Gesamtsystems zu gewährleisten.

Kapitel 5

Systemidentifikation

Im Vorgriff auf die in Kapitel 9 behandelte Realisierung eines adaptiven Optimalreglers muss zunächst ein Verfahren zur kontinuierlichen Überwachung der Systemparameter entwickelt werden, um eine adäquate Anpassung des Reglers in Folge von Änderungen im Systemverhalten überhaupt erst zu ermöglichen. Wie im späteren Verlauf dieser Arbeit (Kapitel 7) noch näher erläutert wird, bedarf es dafür der steten Kenntnis der im Vektor $\boldsymbol{\rho}$ zusammengefassten zeitlich veränderlichen Parameter des dynamischen Systems. Weiterführend ist es notwendig, dass die als $\Delta\boldsymbol{\rho}$ bezeichneten Änderungen in den Systemparametern frühzeitig erkannt und quantifiziert werden. Dies kann auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen dargestellt werden.

So wäre einerseits eine direkte Identifikation und Quantifizierung von Parameteränderungen mittels Einsatz von Sensorik denkbar. Dies lässt sich jedoch nicht immer oder nur mit erhöhtem Aufwand und Kosten realisieren.

Ein anderer möglicher Ansatz ist, sich der Methoden der Systemidentifikation zu bedienen. Unter Zuhilfenahme der gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen des dynamischen Systems wird dann ein Modell bestimmt, welches das Ein-/Ausgangsverhalten des realen Systems genau widerspiegelt. Zur Bestimmung dieses Ein-/Ausgangsverhalten stehen in der Forschung eine Vielzahl von Herangehensweisen zur Verfügung. Während in diesem Kapitel nur die Methode der „*Predictor Based System Identification*“ (*PBSID*) näher behandelt wird, da dies unter anderem die Identifikation von geschlossenen MIMO (Multiple Input Output) -Systemen ermöglicht, werden weitere Verfahren, vor allem aus dem Bereich der „*Subspace Identification*“, in Anhang C detailliert vorgestellt. Unabhängig von der gewählten Methodik zur Ermittlung eines Modells mit entsprechendem Ein-/Ausgangsverhalten, ist es notwendig, in einem nächsten Schritt mit Hilfe des identifizierten Modells auf die gesuchten Systemparameter zu schließen. Mit diesem Schritt befasst sich Abschnitt 5.2, der den in dieser Arbeit selbst geleisteten Beitrag zur Thematik der Systemidentifikation darstellt.

Für ein besseres Verständnis der in diesem Kapitel vermittelten Inhalte wird dem geneigten Leser empfohlen, zunächst Anhang C zu lesen. Dennoch sollen

nachfolgend noch kurz ein paar grundlegende Gedanken zur Systemidentifikation gesagt sein.

Die Systemidentifikation befasst sich mit der Bestimmung von mathematischen Modellen für reale dynamische Systeme unter Zuhilfenahme von gemessenen Ein- und Ausgangsdaten. Hierbei gilt der Grundsatz, dass das Systemverhalten so gut wie nötig nachgebildet, Form und Komplexität der Modelle jedoch so einfach wie möglich gehalten wird.

Die auf diesem experimentellen Weg bestimmten Modelle sind meist „*Black Box*“-Modelle, die das Ein-/Ausgangsverhalten des realen Systems so genau wie nötig wiedergeben, jedoch hinsichtlich der inneren Zustände vom Original abweichen. Diese Modellform wird häufig auch als Eingangs-/Ausgangsmodell bezeichnet; die in Anhang A vorgestellte Übertragungsfunktion ist ein typischer Vertreter dieser Modellform.

Im strengen Gegensatz hierzu stehen „*White Box*“-Modelle wie die systembeschreibenden Differentialgleichungen oder das Zustandsraummodell aus Anhang A. Bei dieser Modellform stimmen sowohl das äußere wie auch das innere Systemverhalten mit dem realen System überein. Hierfür wird jedoch neben systemtheoretischer Expertise oftmals tiefgehende Fachkenntnis benötigt, um die Modellgleichungen unter Zuhilfenahme von Bilanzgleichungen und Gesetzmäßigkeiten herzuleiten.

Eine Mischform dieser beiden Modelltypen wird als „*Grey Box*“-Modell bezeichnet. Bei dieser Modellform ist zumindest ein Teil der inneren Strukturen und Wechselwirkungen bekannt.

Welche der Methoden zur Modellerstellung gewählt wird, hängt somit einerseits von der vorgesehenen Nutzung des Modells ab, das heißt beispielsweise von der Frage, ob die Kenntnis der inneren Zustände eines Systems notwendig ist. Andererseits ist natürlich relevant, welche Systemkenntnisse überhaupt zur Verfügung stehen.

Nachfolgend, sowie in Anhang C, werden verschiedene Vorgehensweisen zur experimentellen Bestimmung von Ein-/Ausgangsmodellen vorgestellt. Da die hierfür verwendeten Ein- und Ausgangsdaten jedoch mittels Abtastglieder ermittelt werden, spricht man bei den identifizierten Systemen nicht mehr von zeitkontinuierlichen sondern von zeitdiskreten Systemen oder Abtastsystemen. Diese sind in Anhang A.5 näher beschrieben.

5.1 „*Predictor Based System Identification*“ („*PBSID*“)

Wie auch in Anhang C.1.1 erläutert wird, sind auf Vorhersagefehlern basierende Verfahren für die Identifikation von MIMO-Systemen aufgrund der aufwendigen Parametrisierung und des dafür benötigten a priori Wissens nur bedingt geeignet. Die Verwendung von „*Subspace*“-Identifikationsmethoden für Systeme mit mehrfachen Ein- und Ausgängen hat sich dahingehend als weitaus

praktikabler erwiesen. Allerdings führen die in Anhang C.1.2 vorgestellten Methoden der „Subspace Identification“ zu fehlerhaften Ergebnissen bei der Identifizierung geschlossener Regelkreise. Die Ursache hierfür ist einerseits in der Korrelation des Prozess- und/oder Messrauschens mit der Eingangsfolge $\mathbf{u}(k)$ (vgl. Anhang C.1.2) aufgrund der Rückführung, andererseits in der Nichtbeachtung der Anfangszustände des zu untersuchenden Systems seitens der entwickelten Methoden zu finden. Erste Modifikationen und Weiterentwicklungen der zuvor vorgestellten Algorithmen, zum Beispiel in [LM96], [OM97], [QL03] oder [Jan03], führen nur unter speziellen Voraussetzungen zu exakten Ergebnissen, wie eine Analyse dieser neuen Methoden in [CP05a] zeigt.

Die ebenfalls in [CP05a] zunächst als „whitening filter“ vorgestellte Methode zur Identifikation geschlossener Regelkreise, welche eine Verknüpfung der in [LM96] und [Jan03] betrachteten Verfahren darstellt, ist das bis dato erfolgreichste „Subspace“-Verfahren zur Identifikation geschlossener Regelkreise, da es nicht auf speziellen Annahmen und Voraussetzungen basiert, welche nur bei wenigen ausgewählten Systemen erfüllt werden. Dennoch sind auch bei dieser Methode noch Einschränkungen vorhanden, wie etwa die Forderung nach unendlich langen Ein-/Ausgangsdatensätzen, um eine fehlerfreie Identifikation zu ermöglichen, sowie bei der Identifikation von instabilen Systemen.

Das „whitening filter“ bedient sich eines mehrstufigen Algorithmus zur Identifikation geschlossener Regelkreise. In einem ersten Schritt, einem Prädiktorschritt, wird mittels eines ARX-Modells¹ (siehe [LM96]) die Zustandsmatrix prognostiziert (ein ähnliches Vorgehen wurde auch in [Jan03] vorgeschlagen) bevor in einem weiteren Schritt mittels der Methode der kleinsten Quadrate die zugehörigen Systemmatrizen bestimmt werden. Aufgrund des Prädiktorschrittes wird das „whitening filter“ auch als „Predictor Based System Identification“ (PBSID) Methode bezeichnet.

Eine Übersicht über aktuell verfügbare Verfahren zu Identifikation von System mit Rückführung unter Zuhilfenahme von „Subspace Identification“ Methoden ist in [VWBMV13] zu finden. Eine in [Chi07] weiterentwickelte Form des „PBSID“-Algorithmus, „PBSID_{opt}“ genannt, soll nun im Nachfolgenden näher vorgestellt werden. Die nachfolgenden theoretischen Ausführungen basieren dabei im Wesentlichen auf [VWBMV13] und [HWV12].

Betrachtet wird hierfür ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System, das sowohl durch Prozess- als auch durch Messrauschen beeinflusst wird. Neben den in Anhang C.1.3 definierten Bedingungen zur Identifizierbarkeit (Beobachtbarkeitsbedingung, ausreichend stimulierende Eingangsfolge, hinreichend viele Datenpaare), gilt auch die Anforderung an das zu identifizierende geschlossene System, das dieses wohldefiniert ist. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn Regelstrecke und oder Regler nicht sprungfähig sind (Durchgangsmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{0}$).

Abweichend von der sonst üblichen Darstellungsform (vgl. (C.71)) wird das

¹Die Beschreibung eines ARX-Modells ist mit Gleichung (A.10) in Anhang A.5 gegeben.

Zustandsraummodell in der „*Forward Innovation Form*“

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{K} \mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) + \mathbf{e}(k)\end{aligned}\quad (5.1)$$

beschrieben, wobei beide Darstellungsformen kongruent sind (siehe [AM79]). Das Prozessrauschen $\mathbf{w}(k)$ sowie das Messrauschen $\mathbf{v}(k)$ werden durch einen einzigen Term weißen Rauschens, $\mathbf{e}(k) \in \mathbb{R}^r$, mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{W} = E(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T)$ beschrieben, der auch als Innovationsfolge bezeichnet wird. Die Matrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ bezeichnet die Kalman-Matrix (vgl. Anhang D). Es wird vorausgesetzt, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) beobachtbar und das Paar $(\mathbf{A}, (\mathbf{B} \quad \mathbf{K} \mathbf{W}^{1/2}))$ steuerbar ist.

Durch Umstellung der zweiten Gleichung von (5.1) nach $\mathbf{e}(k)$ und anschließenden Einsetzen in die erste Gleichung erhält man die Prädiktorform

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{A}}_d \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{K} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) + \mathbf{e}(k)\end{aligned}\quad (5.2)$$

mit $\tilde{\mathbf{A}}_d = \mathbf{A}_d - \mathbf{K} \mathbf{C}$ und $\tilde{\mathbf{B}}_d = \mathbf{B}_d - \mathbf{K} \mathbf{D}$. Die Zustandsgleichung in der Prädiktorform (5.2) ist Ausgangspunkt bei der Herleitung der „*PBSID*“-Methode. Zur Identifikation des gesuchten Systems ist ein Datensatz von N Ein-/Ausgangsdatenpaaren $\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k$ mit $k = 0, \dots, N-1$ gegeben. Jedes Wertepaar wird durch den Vektor

$$\mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}\quad (5.3)$$

beschrieben. Abhängig von einer frei wählbaren Variable $p \in \mathbb{N}^+$, wird der zusammengesetzte Vektor der Form

$$\mathbf{z}_k^{(p)} = \left(\mathbf{z}_{k-p}^T \quad \mathbf{z}_{k-p+1}^T \quad \cdots \quad \mathbf{z}_{k-1}^T \right)^T\quad (5.4)$$

definiert. Die Variable $p \in \mathbb{N}^+$ als auch die noch nachfolgend aufgeführte Variable $f \in \mathbb{N}^+$ dienen der Unterteilung der gegebenen Ein-/Ausgangsdaten in vergangene und zukünftige Werte (*past* und *future*). Sie sind vergleichbar mit der im „*N4SID*“-Algorithmus benutzten Variable i . Des Weiteren wird die umgekehrte erweiterte Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$

$$\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} = \left(\tilde{\mathbf{A}}_d^{p-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \quad \tilde{\mathbf{A}}_d^{p-2} \tilde{\mathbf{B}}_d \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{B}}_d \right)\quad (5.5)$$

mit $\tilde{\mathbf{B}}_d = (\tilde{\mathbf{B}}_d \quad \mathbf{K})$ definiert sowie die für „*Subspace Identification*“ üblichen Hankel-Matrizen aus Ein-/Ausgangsdaten der Form

$$\mathbf{Y}_{i,s,N} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{i+s-1} & \mathbf{y}_{i+s} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N+s-2} \end{pmatrix}.\quad (5.6)$$

Die Indizes i , s und N sind variabel und benennen das erste Element der Matrix sowie die Anzahl an Blockzeilen und Spalten.² Sind nur zwei Indizes aufgeführt, so gilt $s=1$. Hankel-Matrizen werden nachfolgend für Ein-/Ausgangdaten, aber auch für die Zustände und die Innovation verwendet. Des Weiteren wird die in Anhang C.1.2.1 eingeführte erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix (C.23)

$$\tilde{\mathbf{I}}^{(f)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{f-1} \end{pmatrix}$$

benötigt.

Unter Zuhilfenahme der Zustandsgleichung in Prädiktorform (5.2) und der Annahme eines initialen Zustandes \mathbf{x}_k , gilt für den Zustand zum Zeitpunkt $k+p$

$$\mathbf{x}_{k+p} = \tilde{\mathbf{A}}_d^p \mathbf{x}_k + \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{z}_{k+p}^{(p)}, \quad (5.7)$$

sowie für den Ausgang

$$\mathbf{y}_{k+p} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^p \mathbf{x}_k + \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{z}_{k+p}^{(p)} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{k+p} + \mathbf{e}_{k+p}. \quad (5.8)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_d$ stabil ist, das heißt alle Eigenwerte λ_i innerhalb des Einheitskreises liegen, strebt $\tilde{\mathbf{A}}_d^p$ mit wachsendem p gegen 0. Dies bedeutet, für ein genügend großes p gilt für die Ausgangsgleichung (5.8):

$$\mathbf{y}_{k+p} = \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{z}_{k+p}^{(p)} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{k+p} + \mathbf{e}_{k+p}. \quad (5.9)$$

Die für $k+p$ gültige Gleichung (5.9) kann mittels Hankel-Matrizen für einen gegebenen Datensatz erweitert werden. Für eine Folge von \mathbf{y}_p bis \mathbf{y}_{N-1} gilt dann:

$$\mathbf{Y}_{p,N-p} = \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{Z}_{0,p,N-p}^{(p)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{p,N-p} + \mathbf{E}_{p,N-p}. \quad (5.10)$$

Der Term $\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$ beinhaltet hierbei die Markov-Parameter $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}_d$ und $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{k-1}\mathbf{K}$ der Prädiktorform (5.2) (vgl. (A.19)).

In Anhang A.5 wird die um einen weißen Rauschterm $e(k)$ erweiterte Differenzgleichung (A.10) als sogenanntes „ARX“-Modell vorgestellt. Erweitert man die Skalare der Zeitreihe und des Rauschterms zu Vektoren, so spricht man von einem Vektor-„ARX“- oder auch „VARX“-Modell

$$\mathbf{y}(k) + \mathbf{a}_1 \mathbf{y}(k-1) + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{y}(k-n) = \mathbf{b}_1 \mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{b}_q \mathbf{u}(k-q) + \mathbf{e}(k). \quad (5.11)$$

²Die Anzahl an Zeilen, die eine Blockzeile umfasst, ist stets abhängig von dem Datenvektor aus dem die Matrix gebildet wird und entspricht der Anzahl an Elementen, die dieser Vektor umfasst.

Beim Vergleich des „*VARX*“-Modell (5.11) mit Gleichung (5.9) ist leicht zu erkennen, dass die Parameter des Modells den zuvor erwähnten Markov-Parametern des Zustandsraummodells in Prädiktorform entsprechen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{n-1}\mathbf{K}, \quad \text{für } n = 1 \dots p \\ \mathbf{b}_q &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{q-1}\tilde{\mathbf{B}}_d, \quad \text{für } q = 1 \dots p \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ist aus den gemessenen Ein-/Ausgangsdaten ein entsprechendes „*VARX*“-Modell erstellt, so gilt es die Markov-Parameter des Zustandsraummodells in Prädiktorform (5.7) zu schätzen. Hierfür muss das Minimierungsproblem

$$\min_{(\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \ \mathbf{D})} \left\| \mathbf{Y}_{p,N-p} - (\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \ \mathbf{D}) \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,p,N-p} \\ \mathbf{U}_{p,N-p} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbf{F}}^2 \quad (5.13)$$

gelöst werden. Ist die Bedingung (C.88) hinsichtlich der Eingangsfolge $\mathbf{u}(k)$ erfüllt, so verfügt die Matrix $(\mathbf{z}_{0,p,N-p}^T \ \mathbf{u}_{p,N-p}^T)^T$ über vollen Rang und eine Lösung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate kann mittels QR-Faktorisierung oder Pseudoinverse ermittelt werden. Im rangdefizienten Fall muss das Minimierungsproblem (5.13) in ein regularisiertes Minimierungsproblem überführt werden, welches mittels Singulärwertzerlegung gelöst wird (siehe [BSMM01]). Ist das Minimierungsproblem (5.13) gelöst, liegen mit der Matrix $\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$ alle Markov-Parameter vor:

$$\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} = (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{p-1}\tilde{\mathbf{B}}_d \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{p-2}\tilde{\mathbf{B}}_d \quad \dots \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}}_d). \quad (5.14)$$

Mit Hilfe der Markovparameter kann nun wieder eine Matrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{p-1}\tilde{\mathbf{B}}_d & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{p-2}\tilde{\mathbf{B}}_d & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{p-1}\tilde{\mathbf{B}}_d & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d\tilde{\mathbf{B}}_d \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{f-1}\tilde{\mathbf{B}}_d \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

konstruiert werden, die das Produkt aus erweiterter Beobachtbarkeits- und erweiterter Steuerbarkeitsmatrix darstellt (vgl. (C.51) und (C.16)). Wie bei einem Vergleich der beiden Ausgangsgleichungen (5.10) und (C.26) ersichtlich ist, entspricht das Produkt aus $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$ und $\mathbf{Z}_{0,p,N-p}$ dem Produkt aus erweiterter Beobachtbarkeitsmatrix und Zustandsfolge:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\mathbf{X}_{p,N-p} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}\mathbf{Z}_{0,p,N-p}. \quad (5.16)$$

Analog zu der in Anhang C vorgestellten „*Subspace Identification*“-Methoden, kann nun die Anzahl n der Zustände sowie die Zustandsfolge selbst mittels Singulärwertzerlegung bestimmt werden. Dies ist notwendig, da die Matrix

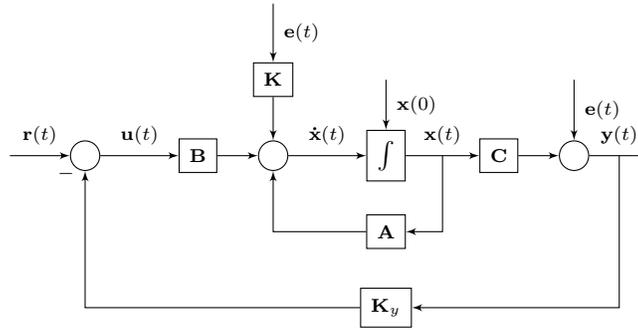


Abbildung 5.1: Zustandsraummodell mit Ausgangsrückführung und Referenzsignal

$\tilde{\Gamma}^{(f)} \tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$ mittels geschätzter Werte konstruiert wurde, weshalb auch die Zustandsfolge selbst nur eine Schätzung ist. Die Zustandsfolge kann mit

$$\mathbf{X}_{p,N-p} = \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{V}^T \quad (5.17)$$

aus der Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{USV}^T = \tilde{\Gamma}^{(f)} \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{Z}_{0,p,N-p} \quad (5.18)$$

bestimmt werden. Durch Verwendung von zusätzlichen Wichtungsmatrizen bei der Singulärwertzerlegung (5.18) kann die Varianz der berechneten Zustandsfolge beeinflusst werden (siehe [VWBMV13]).

Um die Systemmatrizen \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C} , \mathbf{D} sowie die Kalman-Matrix \mathbf{K} zu bestimmen, wird zunächst die Gleichung

$$\mathbf{Y}_{p,N-p} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{p,N-p} \\ \mathbf{U}_{p,N-p} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate gelöst. Die dabei erhaltenen Residuen entsprechen der Innovationsfolge $\mathbf{E}_{p,N-p-1}$ so dass gilt:

$$\mathbf{Y}_{p,N-p} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{p,N-p} \\ \mathbf{U}_{p,N-p} \end{pmatrix} + \mathbf{E}_{p,N-p}. \quad (5.20)$$

In einem zweiten Schritt wird die Zustandsgleichung

$$\mathbf{X}_{p+1,N-p-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d & \mathbf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{p,N-p-1} \\ \mathbf{U}_{p,N-p-1} \\ \mathbf{E}_{p,N-p-1} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

gelöst. Auch hierbei wird sich der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bedient.

Mit Hilfe des in Abbildung 5.1 dargestellten Systems mit Ausgangsrückführung, soll im Nachfolgenden die mit „ $PBSID_{\text{opt}}$ “ (nachfolgend immer als „ $PBSID$ “ aufgeführt) erhaltenen Resultate diskutiert werden.³ Für die Simulation

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1,6371 & 0,1720 \\ 0,1720 & -1,0252 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0,7145 & -0,2248 \\ 0 & -0,5890 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -0,2938 & -1,1201 \\ -0,8479 & 2,5260 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1,3798 & -0,6087 \\ -0,4882 & 0,1596 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 2,3619 & 1,0476 \\ 1,6792 & 0,0047 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: *MIMO System 2. Ordnung mit Ausgangsrückführung*

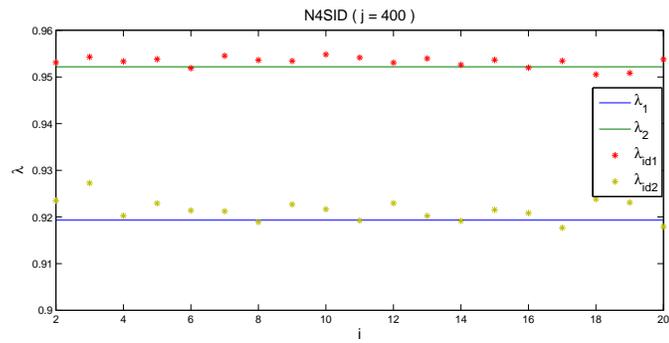
wird das aufgeführte Beispiel 2 verwendet. Der Ausgangszustand von Bsp. 2 beträgt $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Als Rauschterm $\mathbf{e}(t)$ wird weißes Gaußsches Rauschen der Kovarianz 10^{-4} verwendet. Um die Identifizierbarkeit zu erhöhen, wird zusätzlich ein Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ eingespeist, das aus weißen Gaußschen Rauschen mit Kovarianz $5 \cdot 10^{-2}$ besteht. Die zur Identifikation benötigten Ein-/Ausgangsdaten werden mittels Abtasthalteglied mit einer Periodendauer von $T = 0,05$ s ermittelt, wobei ein Datensatz von 400 Ein-/Ausgangsdatenpaaren verwendet wird. Ein Vergleich des identifizierten Systems mit dem Originalsystem erfolgt anhand der Eigenwerte λ_i .⁴ Die identifizierten Eigenwerte sind als Funktion des Parameters p dargestellt, der Parameter f wurde entsprechend $f = p$ gewählt. Für jedes p wurde eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 Durchläufen vollzogen. Die bei dieser Simulation erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 5.2b dargestellt. Die dabei erhaltene maximale mittlere Abweichung $|\lambda_i - \lambda_{id_i}(p)|$ zwischen den Eigenwerten des Originalsystems und des identifizierten Systems liegt im dargestellten Bereich von $p = 2$ bis $p = 30$ bei 0,01, im Bereich von $p = 6$ bis $p = 18$ bei maximal 0,0021.

Ein vergleichbares Ergebnis ist für eine einfache lineare Ausgangsrückführung auch mittels des in Abschnitt C.1.2.3 vorgestellten „*N4SID*“-Algorithmus zu erzielen. Die mittels „*N4SID*“ bestimmten Eigenwerte sind in Abbildung 5.2a als Funktion des Parameters i dargestellt.

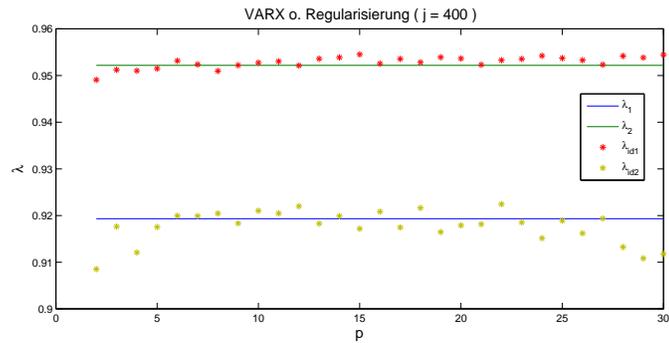
Die im Anhang C.1.2.3 beschriebenen systematischen Fehler bei der Nutzung von „*N4SID*“ zur Identifikation geschlossener Regelkreise treten insbesondere dann auf, wenn komplexere Regler Anwendung finden, welche beispielsweise neben einem Proportionalglied auch über einen I-Anteil oder D-Anteil verfügen. Um dies zu verdeutlichen, soll das zuvor genutzte Beispielsystem 2 auf Seite 42, wie in Abbildung 5.3 dargestellt, in eine Folgeregelung über-

³Zur Identifikation des Systems mittels „*PBSID*“ wird an dieser Stelle sowie im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf die „*Predictor-based subspace identification toolbox*“ ([HWV10]) zurückgegriffen.

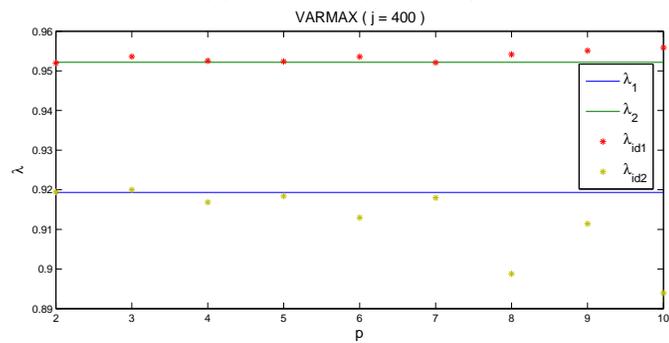
⁴Da es sich bei dem identifizierten System um ein zeitdiskretes System handelt, das Originalsystem jedoch zeitkontinuierlich ist, werden für den Vergleich an dieser Stelle, sowie auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit, die Eigenwerte des Originalsystems mit $\lambda_i = e^{\lambda_{ci}T}$ in den zeitdiskreten Bereich überführt.



(a) „N4SID“



(b) „PBSID“ („VARX“)



(c) „PBSID“ („VARMAX“)

Abbildung 5.2: Identifikation des deterministisch-stochastischen Systems Bsp. 2 auf Seite 42 mit Ausgangsrückführung unter Nutzung von „N4SID“ (Abb. (a)) sowie „PBSID_{opt}“ basierend auf einen VARX (Abb. (b)) und einen VARMAX-Modell (Abb. (c)).

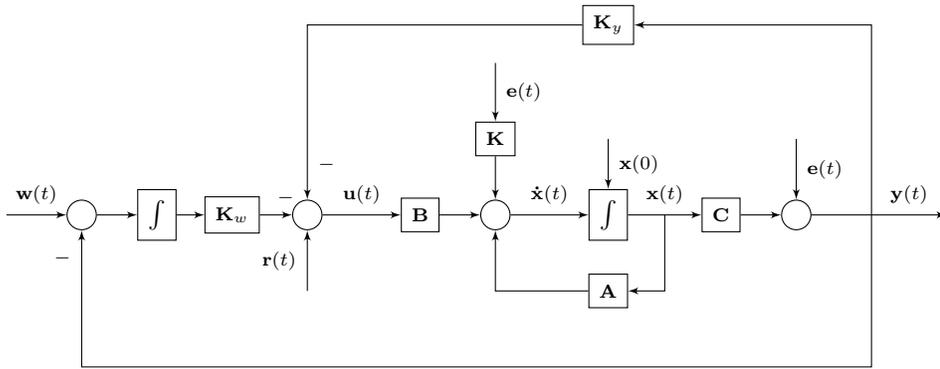


Abbildung 5.3: Zustandsraummodell mit ausgangsbasierter Folgeregelung und Referenzsignal

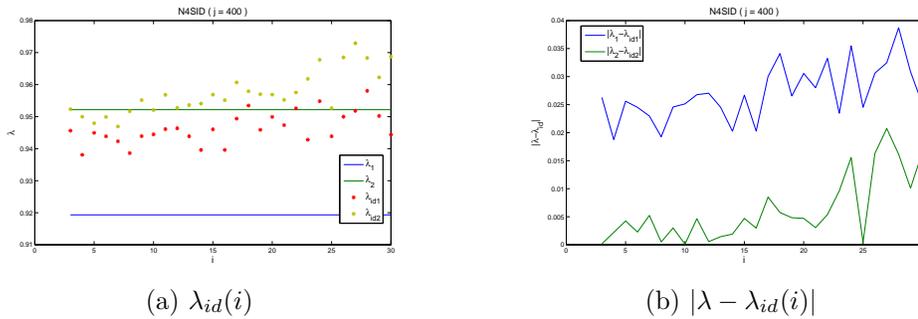


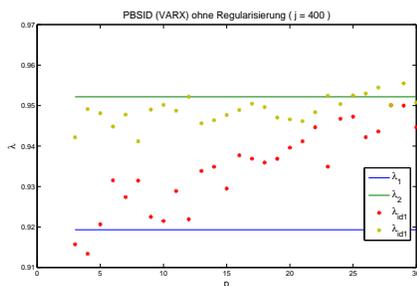
Abbildung 5.4: Identifikation des deterministisch-stochastischen Beispielsystems 2 auf Seite 42 mit Folgeregelung, Ausgangsrückführung und Referenzsignal unter Nutzung von „N4SID“

führt werden. Die Ausgangsrückführungen betragen $\mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 4,4806 & 2,7858 \\ 3,4853 & -1,8048 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{K}_w = \begin{pmatrix} -7,6308 & -6,4630 \\ -6,4630 & 7,6308 \end{pmatrix}$. Des Weiteren wird ein sinusoidaler Sollwert der Form $\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} 0,5 \sin(\frac{2\pi}{0,1t}) \\ 0,5 \sin(\frac{2\pi}{0,07t}) + 0,5 \end{pmatrix}$ sowie ein zusätzliches Referenzsignal aus weißen gaußschen Rauschen mit einer Kovarianz von $5 \cdot 10^{-2}$ vorgegeben. Die Kovarianz des Rauschterms $\mathbf{e}(t)$ beträgt 10^{-3} .

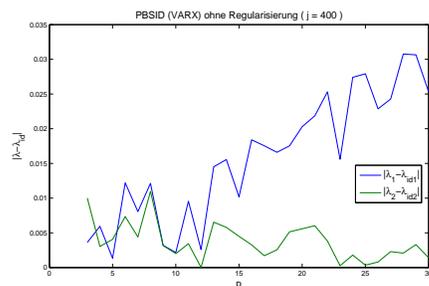
Wie in Abbildung 5.4a deutlich wird, ist eine genaue Identifikation mittels „N4SID“ in diesem Fall nicht möglich. Abbildung 5.4b zeigt die Abweichung der ermittelten Eigenwerte von den realen Eigenwerten des Systems in Abhängigkeit des Parameters i .

Die mittels „PBSID“ identifizierten Eigenwerte des Beispielsystems zu Abbildung 5.3 sind in Abbildung 5.5 zu finden. Hierbei wurde bei der Simulation mit Datensätzen von 400 (Abb. 5.5a und 5.5b) sowie 1200 Datenpaaren (Abb. 5.5c und 5.5d) gearbeitet. Erkennbar ist dabei, dass die Vergrößerung des verwendeten Datensatzes auch zu einer Vergrößerung der Abweichung zwischen realen und identifizierten System führt. Für $j = 400$ liegt die geringste maximale Abweichung mit einem Wert von 0,0021 bei $p = 10$, für $j = 1200$ bei $p = 11$ mit 0,0092.

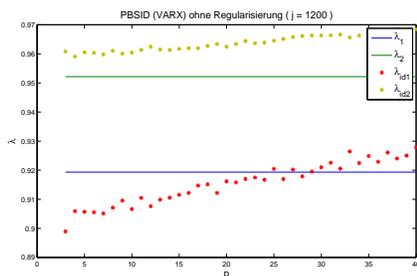
Die Verwendung zusätzlicher Regularisierung zur Lösung des Minimierungs-



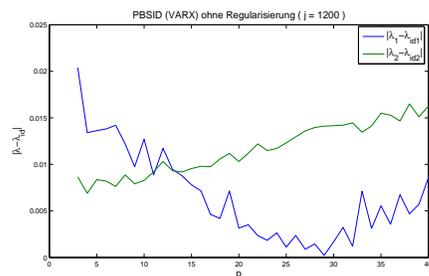
(a) $\lambda_{id}(p)$ ($N=400$)



(b) $|\lambda - \lambda_{id}(p)|$ ($N=400$)



(c) $\lambda_{id}(p)$ ($N=1200$)



(d) $|\lambda - \lambda_{id}(p)|$ ($N=1200$)

Abbildung 5.5: Identifikation des det.-stoch. Beispielsystems 2 auf Seite 42 mit Folgeregelung und Referenzsignal mittels „PBSID“ („VARX“) unter Verwendung verschieden großer Datensätze. Die Abbildungen (a) und (b) zeigen die Ergebnisse der Identifikation in Abhängigkeit von p bei Verwendung eines Datensatzes von 400 Datenpaaren, in (c) und (d) sind die Ergebnisse für einen Datensatz der Größe $j=1200$ dargestellt.

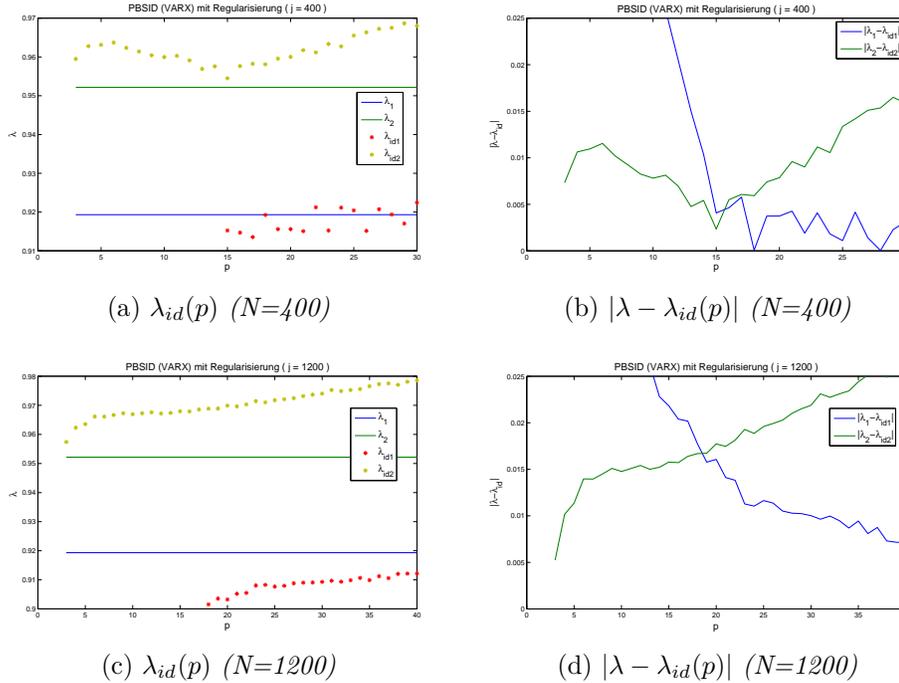


Abbildung 5.6: Identifikation des det.-stoch. Beispielsystems 2 auf Seite 42 mit Folgeregelung und Referenzsignal mittels „PBSID“ („VARX“) unter Verwendung zusätzlicher Regularisierung. Die Abbildungen (a) und (b) zeigen die Ergebnisse der Identifikation in Abhängigkeit von p bei Verwendung eines Datensatzes von 400 Datenpaaren, in (c) und (d) sind die Ergebnisse für einen Datensatz der Größe $j=1200$ dargestellt.

problems (5.13) führt bei dem vorliegenden Beispiel zu einer Verschlechterung hinsichtlich der Genauigkeit der Ergebnisse des Identifikationsprozesses (siehe Abbildung 5.6). Dabei nimmt sowohl die Abweichung $|\lambda_{1,2} - \lambda_{id1,2}(p)|$ zwischen den ermittelten und den realen Eigenwerten als auch der Wert des Parameters p zu, bei dem diese Abweichung minimal wird. Wird die Menge der verwendeten Datensätze erhöht (Abbildung 5.6c und 5.6d), steigt auch der für p zu wählende Wert. Dies begründet sich in der Tatsache, dass der Parameter p in einem numerisch günstigen Verhältnis zur Gesamtmenge der zur Identifikation verwendeten Ein-/Ausgangsdaten stehen muss (siehe diesbezüglich [Chi07]).

Aufgrund der getroffenen Annahme, dass der Parameter p genügend groß gewählt ist, so dass der Term $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^p\mathbf{x}_k$ in Gleichung (5.8) gegen null strebt, kann das für eine Identifikation benötigte p , in Abhängigkeit vom zu identifizierenden System und der geforderten Genauigkeit, beliebig große Werte annehmen. Dies birgt nicht nur die Gefahr schlecht konditionierter Hankel-Datenmatrizen und einer wachsenden Varianz der geschätzten Werte, bedingt durch eine entsprechend gestiegene Anzahl zu bestimmender Markov-Parameter des „VARX“-Modells, sondern erhöht vor allem auch die benötigte Rechenzeit (siehe [HWV09a]). Dies kann jedoch durch Nutzung eines „VARMAX“-Modells (siehe [HWV09b]) umgangen werden. Hierfür wird die in Abschnitt C.1.1 vor-

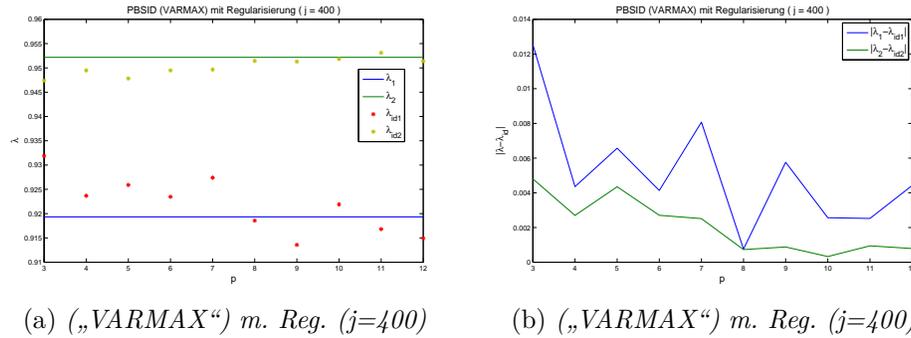


Abbildung 5.7: Identifikation des det.-stoch. Beispielsystems 2 auf Seite 42 mit Folgeregelung und Referenzsignal mittels „PBSID“ („VARMAX“) unter Verwendung zusätzlicher Regularisierung. Die Abbildungen (a) und (b) zeigen die Ergebnisse der Identifikation in Abhängigkeit von p bei Verwendung eines Datensatzes von 400 Datenpaaren.

gestellte „ARMAX“-Modellform (C.12) auf Vektoren erweitert, zu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) + \mathbf{a}_1 \mathbf{y}(k-1) + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{y}(k-n) = \\ \mathbf{b}_1 \mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{b}_q \mathbf{u}(k-q) + \mathbf{c}_1 \mathbf{e}(k) + \dots + \mathbf{c}_r \mathbf{e}(k-r). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Prädiktorform des „VARMAX“-Modells lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}_d \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{M} \mathbf{y}(k) + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) + \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (5.23)$$

mit $\bar{\mathbf{A}}_d = \mathbf{A}_d - \mathbf{M} \mathbf{C}$, $\bar{\mathbf{B}}_d = \mathbf{B}_d - \mathbf{M} \mathbf{D}$ und $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{M}$ (siehe [HWV09b]). Des Weiteren wird der Vektor \mathbf{z}_k um die Innovation \mathbf{e}_k zu

$$\mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

erweitert. Da die Innovation jedoch nicht zusammen mit den gemessenen Ein-/Ausgangsdaten zur Verfügung steht, ist eine Lösung des Minimierungsproblems (5.13) im „VARMAX“-Fall nur auf rekursiven Wege möglich.

Die mittels VARMAX-Ansatz berechneten Eigenwerte für das zuvor aufgeführte Beispiel einer ausgangsbasierten Folgeregelung sind in Abbildung 5.7 zu finden.

5.2 Schätzen der Systemparameter

Wie in Anhang C.1.3 näher verdeutlicht wird, ist es aufgrund der linearen Transformierbarkeit des Zustandsvektors nur möglich, die Zustandsraummatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} eines Systems mittels gemessener Ein- und Ausgangsdaten bis hin zu einer unbekanntem Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (5.25)$$

zu identifizieren.

Unter Verwendung des im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Algorithmus sind somit nur die Eigenwerte λ_i des untersuchten Systems eindeutig identifizierbar.

Wie auch in Anhang A beschrieben wird, entspricht das aus den Eigenwerten der Systemmatrix \mathbf{A} gebildete charakteristische Polynom, dem charakteristischen Polynom der Übertragungsfunktion (A.3). Die Übertragungsfunktion $G(s)$, im Falle von Mehrgrößensystemen die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$, kann somit aus den mittels Systemidentifikation bestimmten Zustandsraummatrizen eindeutig rekonstruiert werden. Hierbei gilt die Beziehung

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (5.26)$$

welche man durch eine Laplace-Transformation des Zustandsraummodells erhält (siehe [Lun07]).

Zu beachten ist hierbei, dass das identifizierte System ein zeitdiskretes Zustandsraummodell darstellt. Dieses gilt es zunächst mittels der Beziehung (A.15) unter Zuhilfenahme der Abtastzeit in ein zeitkontinuierliches System zur überführen.

Liegt für jede Ein-/Ausgangsbeziehung die Übertragungsfunktion vor, so können mittels Koeffizientenvergleich die zugehörigen systembeschreibenden Differenzialgleichungen rekonstruiert werden (siehe Kapitel A). Unter der Voraussetzung, dass ein entsprechendes a priori Wissen über das zu identifizierende System vorliegt, kann aus den somit bestimmten Differenzialgleichungen eine begrenzte Anzahl an Systemparametern bestimmt werden.

Die Anzahl der auf diesen Weg bestimmbaren Parameter ist vom System selbst und von der Anzahl an vorhandenen unabhängigen Gleichungen abhängig. Hierbei spielt sowohl die Ordnung des Systems als auch die Anzahl der Ein- und Ausgänge eine wesentliche Rolle. Beispielsweise ist es für das SISO-System 2. Ordnung in Beispiel 1 auf Seite 23 in Abschnitt 7.3

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

nur möglich maximal 2 freie Systemparameter eindeutig zu identifizieren. Die Übertragungsfunktion dieses Beispielsystems beträgt

$$G(s) = \frac{\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}{s^2 + \frac{R_1 C_1 + C_1 R_2 + R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}.$$

Folglich stehen nur die zwei unabhängigen Gleichungen

$$a_0 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}$$

und

$$a_1 = \frac{R_1 C_1 + C_1 R_2 + R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2}$$

zur Bestimmung von Systemparametern zur Verfügung. Somit ist die Anzahl an frei identifizierbaren Parametern auf zwei begrenzt.

Nachfolgend soll das als Beispiel 3 aufgeführte parameterabhängige geschaltete System mit ausgangsbasierter Folgeregelung betrachtet werden. Als Übertra-

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} & 0,5\alpha \\ 0,5\alpha & -3\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0,7 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 0,8 & 2,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}_y &= \begin{pmatrix} 0,3647 & -0,1374 \\ -0,0065 & -0,4655 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_w = \begin{pmatrix} -0,9392 & 0,3433 \\ 0,3433 & 0,9392 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 3: *Geschaltetes parameterabhängiges MIMO System 2. Ordnung mit zwei variablen Systemparametern, Folgeregelung und Ausgangsrückführung*

gungsfunktionen erhält man gemäß (5.26)

$$G_{1,1} = \frac{(0,42\beta - 0,35\alpha) + 0,14s}{s^2 + (3\beta + \frac{\alpha}{\beta})s - (\frac{\alpha^2}{4} + 3\alpha)} \quad (5.27)$$

$$G_{1,2} = \frac{(1,2\beta - 0,5\alpha - 5\frac{\alpha}{\beta}) - 4,6s}{s^2 + (3\beta + \frac{\alpha}{\beta})s - (\frac{\alpha^2}{4} + 3\alpha)} \quad (5.28)$$

$$G_{2,1} = \frac{(-1,68\beta - 0,875\alpha) - 0,56s}{s^2 + (3\beta + \frac{\alpha}{\beta})s - (\frac{\alpha^2}{4} + 3\alpha)} \quad (5.29)$$

$$G_{2,2} = \frac{(-4,8\beta - 4,5\alpha - 12,5\frac{\alpha}{\beta}) - 14,1s}{s^2 + (3\beta + \frac{\alpha}{\beta})s - (\frac{\alpha^2}{4} + 3\alpha)}. \quad (5.30)$$

Bei dieser kleinen Anzahl von zwei variablen Systemparametern $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ stehen somit mehrere Gleichungen zur Bestimmung von α und β zur Verfügung. Die Auswahl fiel an dieser Stelle auf die linearen Gleichungen

$$\beta = \frac{2,5b_{0G_{1,1}} - b_{0G_{2,1}}}{2,73} \quad (5.31)$$

$$\alpha = \frac{0,42\beta - b_{0G_{1,1}}}{0,35}, \quad (5.32)$$

die sich aus den Übertragungsfunktionen $G_{1,1}$ und $G_{2,1}$ herleiten. Hierbei bezeichnet $b_{0G_{1,1}}$ beispielsweise den Koeffizienten b_0 des Zählerpolynoms von $G_{1,1}$.

Unter Verwendung des in Kapitel 9 vorgestellten paketweisen Identifikationsalgorithmus basierend auf „*PBSID*“ wurde eine Simulation des als Beispiel 3 auf Seite 49 vorgestellten Systems durchgeführt. Die gesamte Simulationsdauer beträgt 60 Sekunden. Nach 20 Sekunden wechselt der Systemparameter α von 2 auf 10. Der Systemparameter β bleibt konstant auf 0,5. Der zeitliche Verlauf der Systemparameter im Originalsystem ist in Abbildung 5.8 als gestrichelte Linie dargestellt. Die Ein-/Ausgangsdaten werden mit einer Frequenz von 200 Hz gemessen. Als Innovation $\mathbf{e}(t)$ dient weißes gaußsches Rauschen mit einer Varianz von 10^{-7} . Des Weiteren wird ein Referenzsignal $r(t)$ aus weißem gaußschem Rauschen mit einer Varianz von $5 \cdot 10^{-3}$ eingespeist. Zur Identifikation wird jeweils ein Datenpaket von 1600 Wertepaaren $\mathbf{z}(k)$ verwendet. Die Datenpakete sind hierbei immer um p Wertepaare verschoben. Für den in Abbildung 5.8 dargestellten Identifikationsverlauf von $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ wurde $p = 70$ gewählt. Nach dem Umschalten der Systemparameter bedarf es einer gewissen Zeit, welche der gewählten Datenpaketgröße entspricht, bevor die neuen Werte der Systemparameter identifiziert sind. In dem vorliegenden Beispiel liegt diese Zeitspanne folglich bei 8 Sekunden ($1600 \cdot 0,005s$). Dies begründet sich in der Tatsache, dass das zur Identifikation verwendete Datenpaket nur Wertepaare enthalten darf, die nach dem Umschalten gemessen wurden um eine erfolgreiche Identifikation zu gewährleisten.

Die in Abbildung 5.8 erkennbaren Schwankungen hinsichtlich des identifizierten Parameters α sind vor allem in der höheren Dimensionierung der Systemmatrix \mathbf{A} nach dem Umschalten begründet. Diese ändert sich von

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1,5 \end{pmatrix}$$

auf

$$A_2 = \begin{pmatrix} -20 & 5 \\ 5 & -1,5 \end{pmatrix}.$$

Hierdurch wird das rückgeführte Störsignal $\mathbf{e}(t)$ in höherem Maße verstärkt als vor dem Schaltvorgang.

Des Weiteren soll noch einmal hervorgehoben werden, dass zu Verbesserung der Genauigkeit der identifizierten Eigenwerte und somit des identifizierten Parametervektors $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ im Vergleich zu den in den vorherigen Abschnitten aufgeführten Beispielen, die Abtastrate von 20 Hz auf 200 Hz erhöht wurde.

Mit der in diesen Abschnitt eigenentwickelten Methodik zur Überwachung und Identifikation ausgewählter Systemparameter ist die geforderte permanente Kenntnis der im Vektor $\boldsymbol{\rho}$ zusammengefassten, zeitlich veränderlichen Parameter des dynamischen Systems gegeben. Die in Kapitel 7 vorgestellte Echtzeitanpassung des Optimalreglers ist somit realisierbar. Die Umsetzung und Integration der in diesem Kapitel entwickelten Methode in das Gesamtkonzept eines adaptiven Reglers ist im Kapitel 9 dieser Arbeit dargestellt.

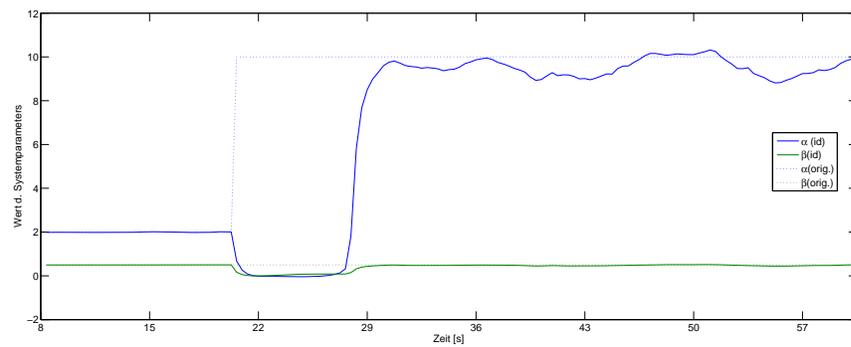


Abbildung 5.8: Identifikation der Systemparameter eines geschalteten MIMO Systems 2. Ordnung mit ausgangsbasierter Folgeregelung (Beispiel 3, Seite 49). Die Identifikation erfolgt mittels der in Kapitel 9 vorgestellten paketweisen Identifikation basierend auf „PBSID“.

Kapitel 6

Der optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung

In Kapitel 2 wurde ein Optimalregler vorgestellt, dessen Zielsetzung es ist, einen Regelkreis mit Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$ mittels vollständiger Zustandsrückführung in den Nullzustand $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{0}$ zu überführen. Der Regelkreis ist somit zustandsstabil¹. Werden in diesem Zusammenhang zusätzlich die Forderungen erfüllt, dass die Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} symmetrisch und positiv definit sind, so ist der Regelkreis asymptotisch stabil. Des Weiteren weist der mittels optimaler Zustandsrückführung geschlossene Regelkreis gute Robustheitseigenschaften auf, da ein Phasenrand ϕ_R von mindestens 60° garantiert wird.² Diese Robustheit kann durch Vergrößerung der Elemente der Matrix \mathbf{R} gegenüber den Elementen der Matrix \mathbf{Q} weiter gesteigert werden (siehe [Lun06]). Hierbei ist jedoch eine Zunahme der Überschwingweite und Überschwingdauer des Regelkreises in Kauf zu nehmen, da die Zustandsgrößen und somit das Einschwingverhalten weniger gedämpft werden.

Allerdings ist ein auf diesem Weg entworfener Regler nur begrenzt einsetzbar, da er weder für Sollwertfolge noch für Störkompensation ausgelegt ist. Ein weiterer großer Nachteil dieses Reglers besteht in der Notwendigkeit der Rückführung aller Zustandsgrößen, denn oftmals ist eine fortdauernde Messung aller Zustände technisch nicht oder nur unter großem Aufwand realisierbar. Die Verwendung eines Luenberger-Beobachters ([Lue64]) zur Schätzung der nicht messbaren Zustände ist nur bedingt geeignet, da im weiteren Verlauf dieser Arbeit vor allem Systeme mit zeitvarianten Systemparametern betrachtet werden, bei denen der Regler möglichst zeitnah an das neue System angepasst werden soll. Der Luenberger-Beobachter benötigt dahingehend eine zu

¹Gemäß LYAPUNOV gilt der Gleichgewichtszustand \mathbf{x}_g eines Systems genau dann als stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für jeden beliebigen Anfangszustand $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ die Eigenbewegung des Systems die Bedingung $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ für alle $t > 0$ erfüllt. Gilt zusätzlich die Bedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, so heißt der Gleichgewichtszustand asymptotisch stabil ([Lun07] und [BSMM01]).

²Der garantierte Phasenrand von 60° folgt aus der Eigenschaft der Rückführdifferenzmatrix, dass $|\det \mathbf{F}(j\omega)| \geq 1$ gilt (siehe [Lun06]).

große Zeitspanne bei der Kompensation von Störungen, sodass zwar eine aktualisierte Rückführungsmatrix vorliegt, jedoch die benötigten Zustandsgrößen teilweise fehlerhaft sind. Dies müsste durch eine Aktualisierung des Beobachters nach erfolgreicher und vollständiger Identifikation der Änderungen der Systemparameter behoben werden.

Ähnliches trifft bei der Verwendung eines Kalman-Filters (siehe Anhang D und [Kal60a]) zu, denn auch hier bedarf es einer größeren Zeitspanne, bis die Abweichungen zwischen realen und geschätzten Zustandsgrößen beim Auftreten von Änderungen der Systemparameter kompensiert werden.

Mögliche alternative Ansätze bieten sogenannte adaptive Beobachter, die zum großen Teil auf [Kre77] basieren und entsprechend weiterentwickelt wurden (siehe beispielsweise [Liu05] und [Zha02]). Diese Beobachter weisen exponentielle Konvergenz auf und sind somit auch für zeitvariante, lineare Systeme anwendbar.

Um die Notwendigkeit der Schätzung von Zustandsgrößen zumindest für stabile Regelstrecken³ vollständig zu umgehen, soll der in Kapitel 2 vorgestellte optimale Zustandsregler in einen Optimalregler mit Ausgangsrückführung abgewandelt werden, der zusätzlich für Folgeregelung und Störkompensation ausgelegt ist.

Hierfür werden in diesem Kapitel zunächst die bisher gängigen Entwurfsverfahren für optimale Folgeregler mit Zustandsrückführung und für Stabilisierungsprobleme mit optimaler Ausgangsrückführung vorgestellt.

Anschließend wird in Abschnitt 6.3 eine eigene, auf dem Newton-Verfahren basierende Methode zur Bestimmung optimaler Ausgangsrückführungen entwickelt, die im Abschnitt 6.5 dieses Kapitels für die Bestimmung von optimalen Folgereglern mit Ausgangsrückführung erweitert wird.

Die Schilderungen in Abschnitt 6.1 und 6.2 lehnen sich eng an Kapitel 7.5 und 7.6 in [Lun06].

6.1 Entwurfsverfahren für optimale Folgeregler mit Zustandsrückführung

Aufgabe einer Folgeregelung ist es, die Regelgrößen $\mathbf{y}(t)$ eines dynamischen Systems in einer bestimmten Zeit den vorgegebenen Führungsgrößen $\mathbf{w}(t)$, auch Sollwerte genannt, beliebig genau anzunähern, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)) = \mathbf{0}.$$

Änderungen dieser Sollwerte können stetig sein, häufig sind sie jedoch sprungförmiger Natur. Sprungförmige Führungsgrößen stellen dabei besondere Anforderungen an den stabilen Regelkreis, damit nach Abklingen des Übergang-

³Siehe diesbezüglich Abschnitt 6.2.

verhaltens im stationären Verhalten keine bleibenden Regelabweichungen zwischen Führungsgrößen und Regelgrößen verbleiben. Um Regelabweichungen vollständig kompensieren zu können, muss die offene Kette⁴ integrales Verhalten aufweisen, der Faktor $\frac{1}{s}$ muss also in der Übertragungsfunktion G_o der offenen Kette enthalten sein (siehe [Lun07], [Unb08]). Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall, da Regelstrecken häufiger proportionales Verhalten aufweisen. Dabei tritt eine bleibende Regelabweichung von

$$\mathbf{e}(\infty) = (\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B})\mathbf{w}(\infty) \quad (6.1)$$

auf.

In der offenen Kette kann dieses integrale Verhalten erzeugt werden, indem ein Regler mit I-Anteil entworfen wird. Eine weitere Möglichkeit mit der bleibenden Regelabweichung umzugehen, besteht in der Verwendung eines Vorfilters wie in (Abb. A.2) dargestellt. Hierbei werden ausgehend von den ursprünglichen Sollwerten $\mathbf{w}(t)$ neue Sollwerte $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ bestimmt, welche die bleibende Regelabweichung $\mathbf{e}(\infty)$ berücksichtigen. Die Regelgrößen $\mathbf{y}(t)$, die den neuen Sollwerten $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ mit bleibender Regelabweichung $\mathbf{e}(\infty)$ folgen, nähern sich so asymptotisch den ursprünglichen Führungsgrößen $\mathbf{w}(t)$ an. Für einen solchen Vorfilter gilt:

$$\mathbf{V} = -(\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B})^{-1}. \quad (6.2)$$

Die Verwendung eines Vorfilters weist jedoch einen entscheidenden Nachteil auf: die Folgeregelung ist nicht robust. Im Falle von Modellunsicherheiten, sich ändernden Systemparametern oder Auftreten von Störungen, wäre eine Kompensation der Regelabweichungen nicht mehr gegeben.

Geeigneter ist folglich der Ansatz, einen Optimalregler mit entsprechendem I-Anteil zu entwerfen. Hierzu wird das Zustandsraummodell (3.1) um einen zusätzlichen Zustandsvektor $\mathbf{x}_w(t)$ erweitert, der die integrierte Regelabweichung $\int \mathbf{e}(t)dt = \int (\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t))dt$ enthält. Mit

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \mathbf{e}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

gilt folglich:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w}(t). \quad (6.3)$$

Fast man die Zustandsvektoren $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}_w(t)$ zu einem neuen Zustandsvektor $\bar{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{x}^T(t) \ \mathbf{x}_w^T(t))^T$ zusammen, so ergibt sich für das Gütemaß (2.31):

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\bar{\mathbf{x}}(t)^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.4)$$

mit

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_w \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

⁴Als offene Kette wird die Anordnung aus Regler und Regelstrecke bezeichnet, bei der keinerlei Rückführung der Ausgangs- oder Zustandsgrößen stattfindet.

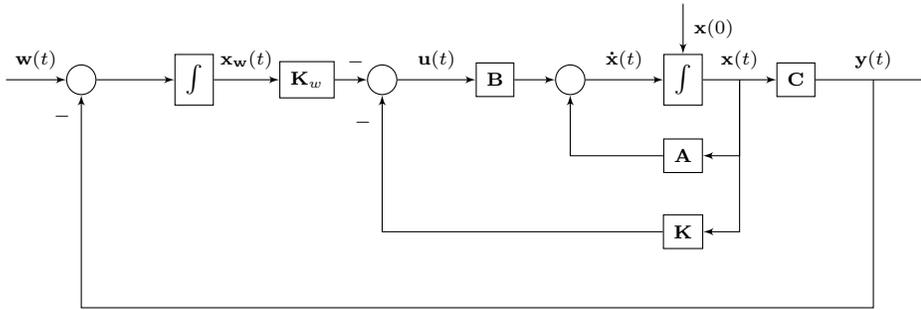


Abbildung 6.1: Blockschaltbild des Zustandsraummodells mit Folgeregelung für Mehrgrößensysteme

Zur Bestimmung eines Optimalreglers für (6.3) und (6.4) kann das Verfahren in Übersicht 2.2 verwendet werden. Für den auf diesen Weg bestimmten Optimalregler gilt somit:

$$\mathbf{u}(t)^* = -\bar{\mathbf{K}}^* \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (6.6)$$

mit

$$\bar{\mathbf{K}}^* = (\mathbf{K} \mathbf{K}_w). \quad (6.7)$$

(Abb. 6.1) stellt das zugehörige Zustandsraummodell mit Folgeregelung dar. Unabhängig davon ob für die Sollwertfolge ein Vorfilter oder aber ein entsprechender Folgeregler mit integralem Verhalten verwendet wird, gilt als Anforderung an die Regelstrecke, dass die vollständige Beobachtbarkeit

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (6.8)$$

sowie die vollständige Steuerbarkeit (2.15) gegeben ist.

6.2 Herkömmliches Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen

Da meist nicht alle inneren Zustandsgrößen $\mathbf{x}(t)$ einer Regelstrecke direkt messbar sind, besteht ein alternativer Ansatz zur Zustandsrückführung in der Verwendung der Regelgrößen $\mathbf{y}(t)$ als Rückführung. Die Verwendung einer Ausgangsrückführung hat den entscheidenden Vorteil, dass der damit hergeleitete Regler eine einfachere Struktur aufweist als die um einen Beobachter erweiterte Zustandsrückführung. Auch gelten wieder die Forderungen nach vollständiger Beobachtbarkeit (6.8) und Steuerbarkeit (2.15) des dynamischen Systems. Diese Bedingungen sind notwendig um alle Eigenwerte via Ausgangsrückführung verändern zu können. Sie sind im Allgemeinen jedoch nicht hinreichend, da beispielsweise ein Regelkreis trotz vollständiger Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit nicht mittels einfacher Ausgangsrückführung stabilisierbar ist, wenn der

Mittelwert der Realteile aller Eigenwerte eine positive reelle Zahl ist. Dies begründet sich in der Tatsache, dass zwar alle Eigenwerte mittels Ausgangsrückführung verschoben werden können, dies aber nicht in allen Fällen zielgerichtet geschieht, wenn die Verwendung der Regelgrößen an Stelle der Zustandsgrößen zu einer Reduzierung der Freiheitsgrade beim Reglerentwurf führt. Die Reduzierung der Freiheitsgrade tritt immer dann auf, wenn weniger Regelgrößen als Zustandsgrößen beziehungsweise Eigenwerte existieren und somit nicht alle Eigenwerte gleichzeitig zielgerichtet verschoben werden können. Die nachfolgenden Entwurfsverfahren beziehen sich aus diesem Grund auf stabile Regelstrecken. Die Regelung eines instabilen dynamischen Systems ist aufgrund der zuvor aufgeführten Tatsachen in vielen Fällen nur unter Verwendung eines Beobachters, wie bereits weiter oben dargestellt, realisierbar. Einen allgemeinen Überblick zu Ausgangsrückführungen findet man in [SADG97].

Möchte man nun eine optimale Ausgangsrückführung der Form

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t) \tag{6.9}$$

herleiten, so muss diese das Gütemaß (2.31)

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) = \int_0^\infty [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

minimieren:

$$\min_{\mathbf{K}_y} J(\mathbf{x}_0, -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t)). \tag{6.10}$$

Wie in (6.10) leicht ersichtlich, ist das Gütemaß und folglich auch die daraus abgeleitete Rückführung $\mathbf{K}_y(\mathbf{x}_0)$ abhängig vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 . Dies ist allerdings wenig erstrebenswert, da somit für jeden Anfangszustand \mathbf{x}_0 das Optimierungsproblem (6.10) von neuem zu lösen ist. Um diese Abhängigkeit zu relativieren, wird nach der Rückführung \mathbf{K}_y gesucht, die im Mittel für alle Anfangszustände \mathbf{x}_0 das Gütemaß (6.10) minimiert. Zu diesem Zweck wird der Anfangszustand \mathbf{x}_0 als auf der Einheitskugel gleichverteilte Zufallsgröße im \mathbb{R}^n betrachtet. Es gilt somit den Erwartungswert des Gütemaßes zu minimieren:

$$\min_{\mathbf{K}_y} E\{J(\mathbf{x}_0, -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t))\}. \tag{6.11}$$

Dies wird erreicht, indem das Gütemaß umgeformt wird. Als neues Gütemaß wählt man:

$$J = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0, \tag{6.12}$$

wobei \mathbf{P} die Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}} = -\bar{\mathbf{Q}} \tag{6.13}$$

darstellt⁵. Die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ stellt hierbei die Systemmatrix des geschlossenen Kreises mit

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C} \quad (6.14)$$

dar. Für die Matrix $\bar{\mathbf{Q}}$ gilt:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C}. \quad (6.15)$$

Setzt man (6.14) und (6.15) in (6.13) ein, so resultiert die Riccati-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}) + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C} + \mathbf{Q} = 0. \quad (6.16)$$

Des Weiteren gilt für symmetrische Matrizen

$$\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x}_0 = \text{Spur}(\mathbf{P}\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T)$$

und somit für das neue Gütemaß:⁶

$$J = \text{Spur}(\mathbf{P}\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T).$$

Für das Optimierungsproblem (6.11) folgt somit:

$$\min_{\mathbf{K}_y} E\{J(\mathbf{x}_0, -\mathbf{K}_y y(t))\} = \min_{\mathbf{K}_y} \frac{1}{n} \text{Spur}(\mathbf{P}). \quad (6.17)$$

Für den Erwartungswert E wurde hierbei angenommen, dass die Anfangszustände \mathbf{x}_0 auf der Einheitskugel des Zustandsraumes gleich verteilt sind (siehe [LA70]). Weiterführend kann nun aus (6.16) eine Optimalitätsbedingung abgeleitet werden, in dem für $\tilde{J} = \text{Spur}(\mathbf{P})$ die Ableitung nach \mathbf{K}_y berechnet wird. Dies geschieht mittels der für die Spur-Funktion definierten Ableitungsregeln. Die Berechnung von $\frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y}$ aus (6.16) ist in [GB79] detailliert dargestellt und ergibt:

$$\frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y} = 2(\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{L}\mathbf{C}^T. \quad (6.18)$$

Hierbei ist \mathbf{L} die positiv definite und symmetrische Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})\mathbf{L} + \mathbf{L}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})^T + \mathbf{I} = 0. \quad (6.19)$$

Setzt man nun Gleichung (6.18) gleich Null, so erhält man für die Ausgangsrückführung

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{C}^T)^{-1}. \quad (6.20)$$

⁵Für den Optimalregler mittels Zustandsrückführung existiert ebenfalls eine solche Lyapunov-Gleichung, sie geht in die zu lösende Riccati-Gleichung (2.32) über. Die Lyapunov-Gleichung spielt eine wichtige Rolle in der Stabilitätsanalyse, denn für eine beliebige symmetrische, positiv definite Matrix \mathbf{Q} hat sie genau dann eine symmetrische, positiv definite Lösung \mathbf{P} , wenn \mathbf{A} asymptotisch stabil ist (siehe [Lun06]).

⁶Die Spurfunktion ist für symmetrische Matrizen definiert. Sie bezeichnet die Summe aller Diagonalelemente einer Matrix.

Betrachtet man die Gleichungen (6.16), (6.19) und (6.20), so stellt man leider fest, dass sich diese Gleichungen gegenseitig bedingen. Dies soll heißen, dass eine direkte Berechnung von \mathbf{K}_y nicht möglich ist, da keine Berechnungsreihenfolge zur Lösung der Gleichungen bestimmt werden kann. Eine getrennte Berechnung der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{P} ist nur möglich, wenn bereits eine Matrix \mathbf{K}_y gegeben ist. Folglich kann die Berechnung der optimalen Ausgangsrückführung nur iterativ erfolgen. Die herkömmliche Methode hierfür wurde in [LA70] und weiterführend in [GB79] vorgestellt:

Schritt 1: Zu Beginn ($k=0$) muss eine Ausgangsrückführung \mathbf{K}_y^0 bestimmt werden, für die der geschlossene Regelkreis $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y^0\mathbf{C}$ bereits stabil ist.

Schritt 2: Nun beginnt der eigentliche iterative Algorithmus. Es gilt zunächst die Riccati-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y^{k-1}\mathbf{C})^T\mathbf{P}^k + \mathbf{P}^k(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y^{k-1}\mathbf{C}) + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^{k-1T}\mathbf{R}\mathbf{K}_y^{k-1}\mathbf{C} + \mathbf{Q} = 0$$

und die Lyapunov-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y^{k-1}\mathbf{C})\mathbf{L}^k + \mathbf{L}^k(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y^{k-1}\mathbf{C})^T + \mathbf{I} = 0$$

nach \mathbf{P}^k und \mathbf{L}^k zu lösen.

Schritt 3: Es erfolgt die Berechnung des Gradienten nach

$$\frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y} = 2(\mathbf{R}\mathbf{K}_y^{k-1}\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{P}^k)\mathbf{L}^k\mathbf{C}^T.$$

Des Weiteren wird geprüft, ob die euklidische Norm des Gradienten

$$\left\| \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y} \right\|_2$$

den a priori festgelegten Grenzwert ϵ unterschreitet. Ist dies der Fall, so wird der Algorithmus beendet, anderenfalls mit Schritt 4 fortgefahren.

Schritt 4: Es wird eine neue Rückführung gemäß

$$\mathbf{K}_y^k = \mathbf{K}_y^{k-1} - a \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y}$$

bestimmt. Der Skalar a stellt hierbei eine variable Schrittweite dar. Nach Beendigung von Schritt 4, wird das Verfahren bei Schritt 2 fortgeführt.

Das hier dargestellte Verfahren soll nachfolgend noch etwas näher beleuchtet werden.

Die im Schritt 1 aufgestellte Forderung nach Bestimmung einer Ausgangsrückführung \mathbf{K}_y^0 , die bereits den betroffenen Regelkreis $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y^0\mathbf{C}$ stabilisiert, ist

vor allem dann nicht trivial, wenn die zugehörige Regelstrecke instabil ist. In allen anderen Fällen könnte $\mathbf{K}_y^0 = \mathbf{0}$ gewählt werden. Um jedoch ein allgemein gültiges Verfahren zu erhalten, wird in dieser Arbeit vorgeschlagen, zunächst für die gegebenen Güteforderungen \mathbf{Q} und \mathbf{R} einen Optimalregler mit Zustandsrückführung, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, zu bestimmen. In einem zweiten Schritt wird diese Zustandsrückführung in eine Ausgangsrückführung überführt. Jedoch ist eine direkte Substitution der Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung, bei der die Eigenwerte des geschlossenen Kreises unverändert bleiben, nur selten möglich. Hierfür müsste gelten:

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}(\mathbf{C}) \quad (6.21)$$

wobei \mathbf{K} die Zustandsrückführung ist. Somit würde sich die Ausgangsrückführung zu $\mathbf{K}_y = \mathbf{K}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}$ ergeben. Ist Bedingung (6.21) nicht erfüllt, so muss die Ausgangsrückführung so gewählt werden, dass die Eigenwerte des damit geschlossenen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})\mathbf{x}(t)$ denen des Regelkreises mit Zustandsrückführung $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$ möglichst nahe kommen. Hierfür muss das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{K}_y} J = \min_{\mathbf{K}_y} \|(\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{K})\mathbf{V}\mathbf{W}\| \quad (6.22)$$

mit beliebiger positiv definiten Wichtungsmatrix \mathbf{W} und der aus den Eigenvektoren gebildeten Matrix \mathbf{V} gelöst werden. Diese Problemstellung ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Eigenwert der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ auch Eigenwert von $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})$ ist, wenn gilt:

$$\mathbf{K}_y\mathbf{C}\mathbf{v}_i = \mathbf{K}\mathbf{v}_i. \quad (6.23)$$

Hierbei ist \mathbf{v}_i der zu λ_i gehörende Eigenvektor von $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$. Zur Lösung des Minimierungsproblems (6.22) gilt es folglich die Gleichung

$$\begin{aligned} J &= [(\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{K})\mathbf{V}\mathbf{W}] [(\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{K})\mathbf{V}\mathbf{W}]^T \\ &= (\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{K})\mathbf{V}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T (\mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T - \mathbf{K}^T) \end{aligned} \quad (6.24)$$

nach $\partial\mathbf{K}_y^T$ abzuleiten und gleich null zu setzen. Mit

$$\frac{\partial J}{\partial\mathbf{K}_y^T} = (\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{K})\mathbf{V}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T\mathbf{C}^T = 0, \quad (6.25)$$

folgt für die Lösung des Optimierungsproblems (6.22)

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{W})^T((\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{W})(\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{W})^T)^{-1} \quad (6.26)$$

(siehe auch [Lun06]).

Sollte sich der mit \mathbf{K}_y geschlossene Kreis auch nicht durch Anpassung der Wichtungsmatrix \mathbf{W} stabilisieren lassen, so müssen die Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} variiert werden.

Um die in Schritt 2 benötigten Lösungen der Lyapunov-Gleichungen zu erhalten, kann jeweils der Bartels-Stewart-Algorithmus [BS72] verwendet werden. Des Weiteren kann die in Schritt 4 aufgeführte variable Schrittweite beispielsweise mittels Armijo-Goldstein-Regeln bestimmt werden (siehe [GK99] und [Her11]).

6.3 Nullstellen-basiertes Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen

Ausgehend von den Vorbetrachtungen in Abschnitt 6.2, soll in diesem Abschnitt nun ein Nullstellen-basiertes Verfahren zur Berechnung einer optimalen Ausgangsrückführung hergeleitet werden, welches das Gütefunktional im gleichen Maße minimiert wie das herkömmliche Verfahren, allerdings zusätzlich auf Sollwertfolge erweiterbar ist. Ein solches Vorgehen zur Lösung des Problems der optimalen Ausgangsrückführung mittels Newton-Verfahren wurde bereits in [TM87] vorgeschlagen.

Für diesen alternativen Ansatz werden die in 6.2 aufgestellten Gleichungen (6.16), (6.19) und (6.18) hinsichtlich der Elemente der Matrizen \mathbf{P} , \mathbf{L} und \mathbf{K}_y parametrisiert. Es gilt die vektorwertige Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{K}_y) = \begin{pmatrix} \text{vek}((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}) + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C} + \mathbf{Q}) \\ \text{vek}((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})\mathbf{L} + \mathbf{L}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})^T + \mathbf{I}) \\ \text{vek}(2(\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{L}\mathbf{C}^T) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.27)$$

zu lösen.⁷

Zunächst ist auch bei diesem Verfahren eine initiale Lösung notwendig, die als Prädiktorschritt des Verfahrens dient. Die initiale Ausgangsrückführung \mathbf{K}_y^0

⁷Die Funktion vek stellt hierbei die Überführung einer Matrix in einen Vektor dar. Dabei werden die Zeilen der Matrix in Spaltenvektoren transponiert, welche dann untereinander geschachtelt werden.

Für eine 2×2 Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ würde folglich gelten: $\text{vek}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Die Rück-

transformation der Vektorform in eine Matrixform, wird mit vek^{-1} dargestellt.

Ziel der Umformung in einen Vektor ist die Vermeidung von Tensoren bei der Erstellung der zugehörigen Jacobi-Matrix. Bei der Überführung der Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{L} ist aufgrund des symmetrischen Charakters dieser Matrizen lediglich jeweils die obere Dreiecksmatrix zu verwenden.

kann aus der optimalen Zustandsrückführung für die gewünschten Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} mittels Gleichung (6.26) bestimmt werden. Dabei ist zu prüfen, ob der mit \mathbf{K}_y^0 geschlossene Kreis $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_y\mathbf{C})$ stabil ist. Ebenfalls werden für den Prädiktorschritt die Lösungen \mathbf{P}^0 und \mathbf{L}^0 benötigt. Diese werden mittels Bartels-Stewart-Algorithmus für \mathbf{K}_y^0 berechnet. Anschließend folgt der Korrektorschritt, wofür die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k}_y) = \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k}_y) = \begin{pmatrix} (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_1))^T & (\text{grad}_{\mathbf{l}}(f_1))^T & (\text{grad}_{\mathbf{k}_y}(f_1))^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_{n(n+1)+m}))^T & (\text{grad}_{\mathbf{l}}(f_{n(n+1)+m}))^T & (\text{grad}_{\mathbf{k}_y}(f_{n(n+1)+m}))^T \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

benötigt wird. Diese enthält die Ableitungen des Vektors $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k}_y)$ hinsichtlich der Vektoren \mathbf{p} , \mathbf{l} und \mathbf{k}_y , die mittels der Funktion vek aus den gleichnamigen Matrizen gebildet werden. Hierbei steht $(\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_1))^T$ für den Gradienten des ersten Elements der vektorwertigen Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k}_y)$ hinsichtlich des Vektors \mathbf{p} . Aufgrund der Transposition stellt sich der Gradient als Zeilenvektor dar. Die Jacobi-Matrix lässt sich explizit berechnen und parametrisiert darstellen. Somit muss sie nicht in jeder Iteration des Korrektorschrittes neu berechnet werden, sondern es genügt die Elemente der Vektoren \mathbf{p}^j , \mathbf{l}^j und \mathbf{k}_y^j des j -ten Iterationsschrittes in $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k}_y)$ einzusetzen. Es gilt nun mittels mehrdimensionalem Newton-Verfahren die Lösung der vektorwertigen Gleichung (6.27) zu finden. Hierbei ist in jedem Iterationsschritt das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}^j, \mathbf{l}^j, \mathbf{k}_y^j) = -\mathbf{F}(\mathbf{p}^j, \mathbf{l}^j, \mathbf{k}_y^j)\mathbf{z}^j \quad (6.29)$$

zu lösen. Die Iterierten der Vektoren \mathbf{p} , \mathbf{l} und \mathbf{k}_y ergeben sich dann zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^{j+1} \\ \mathbf{l}^{j+1} \\ \mathbf{k}_y^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^j \\ \mathbf{l}^j \\ \mathbf{k}_y^j \end{pmatrix} + \mathbf{z}^j. \quad (6.30)$$

Nach jedem Schritt ist weiterhin zu prüfen, ob $\|\mathbf{f}(\mathbf{p}^{j+1}, \mathbf{l}^{j+1}, \mathbf{k}_y^{j+1})\|_2$ die gewünschte Schranke ϵ unterschreitet. Ist dies der Fall, so kann das Verfahren beendet und die Vektoren \mathbf{p} , \mathbf{l} und \mathbf{k}_y wieder in Matrizen überführt werden. Nachfolgend wird der eben beschriebene Algorithmus nochmals zusammengefasst:

Schritt 1: $j = 0$. Prüfe ob das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar und das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) vollständig beobachtbar ist, sowie ob die gegebene Systemmatrix \mathbf{A} stabil ist (Realteile aller Eigenwerte von \mathbf{A} sind kleiner gleich null).

Schritt 2: Bestimme die optimale Zustandsrückführung und überführe diese mittels (6.26) in eine Ausgangsrückführung. Diese dient als Initialwert \mathbf{K}_y^0 . Prüfe ob der geschlossene Regelkreis $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_y^0\mathbf{C})$ stabil ist.

Schritt 3: Löse die Gleichungen (6.16) und (6.19) mittels Bartels-Stewart-Algorithmus um die Initiallösungen \mathbf{P}^0 und \mathbf{L}^0 zu erhalten. Überführe \mathbf{P}^0 , \mathbf{L}^0 und \mathbf{K}_y^0 in Vektoren, wobei insbesondere bei den Matrizen \mathbf{P}^0 und \mathbf{L}^0 aufgrund der Symmetrie nur die obere Dreiecksmatrix in einen Vektor zu überführen ist.

Schritt 4: Stelle die vektorwertige Gleichung $\mathbf{f}(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{K}_y)$ gemäß (6.27) auf und setze die Vektoren \mathbf{p}^j , \mathbf{l}^j und \mathbf{k}_y^j in die Jacobi-Matrix (6.28) ein.

Schritt 5: Löse das Gleichungssystem (6.29) und berechne die nächsten Iterierten mittels Gleichung (6.30).

Schritt 6: $j = j + 1$. Prüfe ob die Bedingung $\|\mathbf{f}(\mathbf{p}^j, \mathbf{l}^j, \mathbf{k}_y^j)\|_2 < \epsilon$ erfüllt wird. Sollte dies nicht der Fall sein, so ist zu Schritt 4 zurückzukehren.

Schritt 7: Überführe die Vektoren \mathbf{p}^j , \mathbf{l}^j und \mathbf{k}_y^j in Matrizen.

6.4 Vergleich des herkömmlichen und des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen

Mit Hilfe der nachfolgenden Beispiele sollen nun die zwei Verfahren der vorherigen Abschnitte 6.2 und 6.3 miteinander verglichen werden.

Zunächst sei das bereits in Kapitel 3 als Beispiel 1 eingeführte lineare, zeitinvariante und nicht sprungfähige SISO System zweiter Ordnung mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = (1 \quad 0)$$

gegeben. Für die Wichtungen im Gütemaß gilt trivialerweise $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $r = 1$. Als optimale Zustandsrückführung ergibt sich $\mathbf{k} = (0,5137 \quad 0,2184)$ und somit als initiale Ausgangsrückführung $k_y^0 = 0,5676$. Beide Verfahren minimieren das Gütemaß $\tilde{J} = \text{Spur}(\mathbf{P})$ auf den Wert $\tilde{J} = 1,2401$ mit $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1,0647 & 0,4104 \\ 0,4104 & 0,1754 \end{pmatrix}$. Die herkömmliche Methode aus Abschnitt 6.2 benötigt hierfür sieben Iterationen, bis die Abbruchbedingung mit $\left\| \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y} \right\|_2 < 10^{-7}$ erreicht wird. Die Nullstellen-basierte Methode benötigt vier Iterationen (siehe Tabelle 6.1). Es ergibt sich eine optimale Ausgangsrückführung von $k_y^* = 0,7112$.

Des Weiteren soll ein MIMO⁸ System betrachtet werden, das ebenfalls linear, zeitinvariant und nicht sprungfähig ist. Es wird durch die als Beispiel 4 aufgeführten Zustandsraummatrizen beschrieben.

⁸MIMO ist die Kurzbezeichnung für multiple input/multiple output. Unter diesem Begriff werden alle dynamischen Systeme zusammengefasst, die über mehrere Eingangs- und Ausgangsgrößen verfügen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 1,5 & -2 & 0,1 \\ 1 & 0 & -1,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4: MIMO System 3. Ordnung

Als Wichtungsmatrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird jeweils die Einheitsmatrix gewählt. Bei diesem Mehrgrößensystem unterscheidet sich die Anzahl benötigter Iterationen signifikant. Während das Nullstellen-basierte Verfahren vier Iterationen benötigt, beläuft es sich beim herkömmlichen Verfahren auf 896. Die Abbruchbedingung von $\left\| \frac{d\bar{J}}{d\mathbf{K}_y} \right\|_2 < 10^{-7}$ wird hierbei nicht erreicht (siehe Tabelle 6.1). Das herkömmliche Verfahren wurde aus diesem Grund nach 1000 Iterationen abgebrochen.

Das Nullstellen-basierte Entwurfsverfahren bietet im Vergleich zum herkömmlichen Verfahren zur Bestimmung optimaler Ausgangsrückführungen den Vorteil, dass vor allem bei Mehrgrößensystemen die Anzahl benötigter Iteration bis zum Erreichen des minimalen Gütemaßes deutlich geringer ausfällt. Jedoch benötigt dieses Verfahren im Gegenzug die Jacobi-Matrix der zu lösenden Vektorgleichung, was sich zumindest bei der initialen Erstellung der Jacobi-Matrix als Mehraufwand darstellt.

Der eigentliche Vorteil des Nullstellen-basierten Verfahrens gegenüber der herkömmlichen Methode zur Bestimmung optimaler Ausgangsrückführungen kommt im nachfolgenden Abschnitt zum Tragen, wo weiterführend der Entwurf optimaler *Folgeregler* mit Ausgangsrückführung behandelt werden.

6.5 Nullstellen-basiertes Entwurfsverfahren für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung

Nachfolgend soll eine Verfahrensweise hergeleitet werden, deren Ziel es ist, einen Regler für Sollwertfolge und Störkompensation basierend auf einer Ausgangsrückführung, wie in (Abb. 6.2) dargestellt, zu bestimmen. Diese ergibt sich aus einer Kombination der in den Abschnitten 6.1 und 6.3 vorgestellten Algorithmen.

Ausgehend von (Abb. 6.2) ergibt sich für den geschlossenen Regelkreis:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(-\mathbf{K}_y\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_w\mathbf{x}_w(t)) \quad (6.31)$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \mathbf{w}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (6.32)$$

		herkömmliche Methode		Nullstellen Verfahren	
Iteration j		\tilde{J}	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{dK} \right\ $	\tilde{J}	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{dK} \right\ $
Beispiel 1: SISO System	1	1,2521	0,1748	1,2521	0,1748
	2	1,2406	0,0326	1,2300	0,0126
	3	1,2401	0,0014	1,2400	4,2845e-05
	4	1,2401	1,0094e-04	1,2401	2,1853e-10
	5	1,2401	7,0746e-06	1,2401	0
	6	1,2401	4,9643e-07	1,2401	0
	7	1,2401	3,4832e-08	1,2401	0
Beispiel 2: MIMO System	1	0,7408	0,3884	0,7408	0,0598
	2	0,7393	0,1532	0,7018	0,0105
	3	0,7390	0,0755	0,7236	1,3042e-04
	4	0,7389	0,0496	0,7238	5,8797e-09
	5	0,7389	0,1372	0,7238	0
	6	0,7387	0,0691	0,7238	0
	7	0,7386	0,0479	0,7238	0
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	896	0,7238	0,0051	0,7238	0
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	0,7238	0,0044	0,7238	0	

Tabelle 6.1: Vergleich der herkömmlichen Methode zum Entwurf optimaler Ausgangsrückführungen mit der Nullstellen-basierten Methode anhand eines SISO und eines MIMO Systems

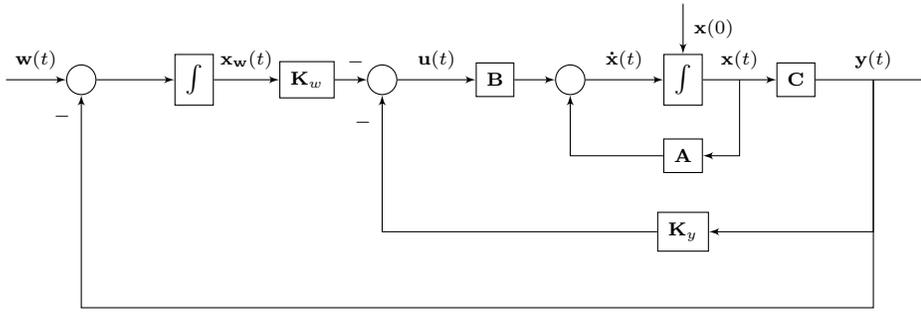


Abbildung 6.2: Blockschaltbild des Zustandsraummodells mit Folgeregelung für Mehrgrößensysteme basierend auf Ausgangsrückführung

Die Gleichungen (6.31) und (6.32) lassen sich mit der Zustandsgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{K}_y \mathbf{C} & -\mathbf{K}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (6.33)$$

zusammenfassen. Um nun die optimalen Rückführungen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_w bestimmen zu können, wird (6.33) in die Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (6.34)$$

überführt, mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{K}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_y & \mathbf{K}_w \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_w \end{pmatrix} & \text{und} & \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Nun kann der folgende Algorithmus, der sich von dem in Abschnitt 6.3 vorgestellten Verfahren ableitet, zur Bestimmung der Reglermatrizen verwendet werden.

Schritt 1: $j = 0$. Prüfe ob das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar und das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) vollständig beobachtbar ist, sowie ob die gegebene Systemmatrix \mathbf{A} stabil ist.⁹ Bestimme den optimalen Folgeregler mit Zustandsrückführung mittels der gegebenen Güteforderungen wie in Abschnitt 6.1 beschrieben. Überführe diesen mittels Gleichung (6.26) in die Ausgangsrückführung $\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}$, die den Initialwert des Lösungsverfahrens darstellt.

Schritt 2: Berechne die Matrizen des erweiterten Systems gemäß (6.35). Prüfe ob der geschlossene Regelkreis $(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}})$ stabil ist.

⁹Die Forderungen nach Stabilität, Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit beziehen sich auf die ursprüngliche Regelstrecke und nicht auf das erweiterte System (6.34).

Schritt 3: Löse die Gleichungen

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}}) + \tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{K}}_{j=0})^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{Q}} = 0 \quad (6.36)$$

und

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{L} + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}})^T + \mathbf{I} = 0 \quad (6.37)$$

mittels Bartels-Stewart-Algorithmus, um die Initiallösungen \mathbf{P}^0 und \mathbf{L}^0 zu erhalten.

Schritt 4: Stelle die vektorwertige Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \tilde{\mathbf{K}}) = & \\ & \begin{pmatrix} \text{vek}((\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_j\tilde{\mathbf{C}})^T\mathbf{P}_j + \mathbf{P}_j(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_j\tilde{\mathbf{C}}) + \tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{K}}_j)^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}}_j\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{Q}}) \\ \text{vek}((\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_j\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{L}_j + \mathbf{L}_j(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}_j\tilde{\mathbf{C}})^T + \mathbf{I}) \\ \text{vek}(2(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}}_j\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{P})\mathbf{L}\tilde{\mathbf{C}}^T) \end{pmatrix} \\ = & \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.38)$$

auf und setze die mittels der Funktion vek in Vektoren transformierten Matrizen $\mathbf{P}_j, \mathbf{L}_j$ und $\tilde{\mathbf{K}}_j$ in die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j) = \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j) = & \\ & \begin{pmatrix} (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_1))^T & (\text{grad}_{\mathbf{l}}(f_1))^T & (\text{grad}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{f}_1))^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_{n(n+1)+m}))^T & (\text{grad}_{\mathbf{l}}(f_{n(n+1)+m}))^T & (\text{grad}_{\tilde{\mathbf{k}}}(f_{n(n+1)+m}))^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

ein. Da \mathbf{P}_j und \mathbf{L}_j symmetrische Matrizen sind, werden bei der Umstellung in Vektorform nur die oberen Dreiecksmatrizen verwendet.

Schritt 5: Löse das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j) = -\mathbf{F}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j)\mathbf{z}^j \quad (6.40)$$

und berechne die nächsten Iterierten mit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{j+1} \\ \mathbf{l}_{j+1} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_j \\ \mathbf{l}_j \\ \tilde{\mathbf{k}}_j \end{pmatrix} + \alpha_j \mathbf{z}^j. \quad (6.41)$$

Die Schrittweite α_j ergibt sich hierbei aus einer linearen Suche mittels der Armijo-Regel. Es gilt $\alpha_j^m = 2^{-m}$ (mit $m = 0, 1, 2, \dots$). Die Laufvariable m wird hierbei solange erhöht bis die Bedingung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{p}_{j+1}, \mathbf{l}_{j+1}, \tilde{\mathbf{k}}_{j+1})\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j) + \tau \alpha_j^m \mathbf{F}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j)\mathbf{z}^j\|$$

mit $0 < \tau < 1$ erfüllt ist.

Schritt 6: $j = j + 1$. Prüfe, ob die Bedingung $\|\mathbf{f}(\mathbf{p}_j, \mathbf{l}_j, \tilde{\mathbf{k}}_j)\|_2 < \epsilon$ erfüllt wird. Sollte dies nicht der Fall sein, so ist zu Schritt 4 zurückzukehren.

Schritt 7: Überführe die Vektoren \mathbf{p}_j , \mathbf{l}_j und $\tilde{\mathbf{k}}_j$ in Matrizen.

Der hier dargestellte Algorithmus kann natürlich auch auf Grundlage des herkömmlichen Verfahrens aus Abschnitt 6.2 entwickelt werden. Hierbei können jedoch Probleme im Konvergenzverhalten vor allem bei stärkerer Wichtung von \mathbf{R} auftreten. Tabelle 6.2 stellt den Verlauf des Entwurfsverfahren basierend auf der herkömmlichen und der Nullstellen-basierten Methode anhand des SISO Beispiels 1 auf Seite 23 und einer Auswahl an Güteforderungen gegenüber. Im aufgeführten Fall b) mit $r = 10$, $q_w = 1$ und $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, zeigt das auf der herkömmlichen Methode basierende Verfahren keine Konvergenz. Das Nullstellen-basierte Verfahren konvergiert nach 48 Iterationen.

Die hierfür in Tabelle 6.2 aufgeführten Beispielverläufe der beiden Verfahren zeigen nicht nur auf, dass der Nullstellen-basierte Algorithmus dieser Arbeit schneller konvergiert. Vielmehr wird verdeutlicht, dass er auch dann einen gültigen Minimalwert des Gütefunktional \tilde{J} findet, wenn beim herkömmlichen Algorithmus keine Konvergenz auftritt.

		herkömmliche Methode		Nullstellen Verfahren	
Iteration j		\tilde{J}	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{dK} \right\ $	\tilde{J}	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{dK} \right\ $
a)	1	41,2145	28,5992	41,2145	28,5992
	2	40,9576	8,1391	37,2838	6,1245
	3	38,0266	1,9977	37,0640	0,9570
	4	37,9820	1,9352	37,4281	0,0384
	5	37,9742	1,8764	37,4530	4,0048e-05
	6	37,9328	1,7650	37,4530	4,5537e-11
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	500	37,4530	3,9940e-06	37,4530	0
b)	1	207,7285	18,1333	207,7285	18,1333
	2	188,7708	39,5695	194,2323	17,7553
	3	262,3869	28,9223	181,2389	17,3785
	4	120,3458	14,2512	174,9866	17,2165
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	10	23,5022	11,5436	139,9569	16,2694
	11	0,0314	19,1668	137,2348	16,1977
12	-14,1406	13,3042	134,5407	16,1261	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	48	gestoppt - keine Konvergenz		18,5389	4,0893e-10
c)	1	22,2429	1,8609	22,2429	1,8609
	2	21,8181	1,5779	20,9903	0,3730
	3	21,6491	1,3628	21,3593	0,0152
	4	21,5820	1,0748	21,3985	1,6832e-05
	5	21,4738	0,7279	21,3985	1,5258e-11
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
		39	21,3985	2,6479e-07	21,3985

Tabelle 6.2: Berechnung von Ausgangsrückführungen für Folgeregelung. Beispielhafter Vergleich von Nullstellen-basiertem und herkömmlichem Verfahren für verschiedene Wichtungsmatrizen. Beispiel 1: SISO System

Kapitel 7

Echtzeitanpassung des optimalen Reglers

Das im vorigen Kapitel vorgestellte Nullstellen-basierte Verfahren zur Bestimmung von Ausgangsrückführungen zeigt gegenüber dem herkömmlichen Verfahren [GB79] besonders im Fall der Sollwertfolge und Störkompensation eine größere Robustheit im Konvergenzverhalten. Beide Algorithmen haben jedoch gemein, dass sie numerisch aufwendig sind, was sich in einer entsprechenden Laufzeit widerspiegelt. Dies kommt vor allem dann zum Tragen, wenn Regler nicht a priori entworfen werden, sondern während des laufenden Prozesses, um beispielsweise eine Adaption an geänderte Systemparameter zu ermöglichen. Eine Möglichkeit, dieser Problematik zu begegnen, besteht in einer Aufteilung der Reglerberechnung in zwei Phasen. Dabei soll im ersten Schritt möglichst zeitnah eine gute Näherung des neuen Reglers bestimmt werden. Der zweite Schritt besteht dann in der exakten Berechnung des Reglers mittels des in Kapitel 6 hergeleiteten Verfahrens. Somit kann die Regelung bereits mit der approximierten Lösung fortgeführt werden, während parallel die exakte Berechnung des neuen Reglers erfolgt. Es wird folglich zwischen einem Prädiktorschritt und einem Korrektorschritt unterschieden.

Die nachfolgend aufgeführte vorläufige Näherungslösung entspricht dabei dem Prädiktorschritt.

In Kapitel 6 wurde der Prädiktorschritt vom optimalen Zustandsregler abgeleitet, der zunächst für die gegebenen Güteforderungen (\mathbf{Q} , \mathbf{R} und \mathbf{Q}_w) bestimmt wurde. Hierbei handelt es sich allerdings nicht um eine allzu gute Näherung der optimalen Ausgangsrückführung. Für das SISO System Bsp. 1 auf Seite 23 wurde beispielsweise in Abschnitt 6.3 für die Wichtungen $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $r = 1$ eine initiale Ausgangsrückführung von $k_y^0 = 0,5676$ bestimmt. Die für diese Güteforderungen optimale Ausgangsrückführung liegt allerdings bei $k_y^* = 0,7112$.

Nachfolgend soll nun in diesem Kapitel die in [Büs09] vorgestellte Methode näher betrachtet werden, die approximierte Lösungen für gestörte Optimalregler zur Verfügung stellt. Diese ursprünglich für Zustandsregelung ausgelegte Me-

thode soll zunächst um einen Korrektorschritt erweitert werden, um somit die Berechnung des exakten Optimalreglers, die in einem zweiten Schritt erfolgt, zu ermöglichen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird diese Verfahrensweise dann auf die im Kapitel 6 vorgestellten Regler angepasst.

7.1 Echtzeitanpassung des klassischen Riccati-Reglers

Das in diesem Abschnitt behandelte Verfahren wurde in [Büs09] und weiterführend in [Büs98] entwickelt und vorgestellt. Es bedient sich einer Methode der parametrischen Sensitivitätsanalyse (siehe [Büs98]), um approximierete Lösungen für durch Störungen veränderte Regelkreise in Echtzeit¹ zur Verfügung zu stellen. Hierbei werden Riccati-Regler (optimale Zustandsregler) betrachtet. Den Ausführungen in [Büs09] folgend, soll dieses Verfahren nachfolgend vorgestellt werden. Die Erläuterung der Methode folgt stark der Quelle [Büs09]. Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist folglich wieder ein lineares, vorerst zeitinvariant angenommenes dynamisches System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

mit der Forderung nach Beobachtbarkeit an das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) und nach Steuerbarkeit an das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . Die optimale Lösung

$$\mathbf{u}(t)^* = -\mathbf{K}^*\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$$

für das Gütefunktional

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt$$

erhält man durch Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

wie bereits im Kapitel 2 ausführlich beschrieben wurde.

Die Problemstellung wird nun erweitert, indem sowohl das Modell der Regelstrecke als auch das Gütefunktional und der Anfangswert² um lineare und nicht lineare Störungen erweitert werden. Diese Abweichungen, respektive Störungen, des ursprünglichen Optimierungsproblems werden in einem Vektor $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^q$ zusammengefasst. Das neue Optimierungsproblem stellt sich nun wie folgt dar:

$$\min_{\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)} J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{u}(t)] dt, \quad (7.1)$$

¹In [Büs09] werden diesbezüglich Zeitspannen im Nanosekundenbereich aufgeführt.

²Eine Störung im Anfangswert \mathbf{x}_0 , was gleich bedeutend mit einer Verschiebung des selbigen ist, wird jedoch als wenig relevant erachtet, da Optimalregler gerade dafür ausgelegt sind, für beliebige Anfangswerte eine optimale Trajektorie der Regel- und Zustandsgrößen zu garantieren.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t=0, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\rho}), \quad (7.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{x}(t). \quad (7.3)$$

Für den Optimalregler gilt hierbei

$$\mathbf{u}(t)^* = -\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^*\mathbf{x}(t). \quad (7.4)$$

Für $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\rho}_0$) liegt unterdies wieder das ungestörte dynamische System vor. Um nun eine Näherung des hinsichtlich der Störung $\boldsymbol{\rho}$ adaptierten Reglers bestimmen zu können, wird zunächst das Optimierungsproblem (7.1) in das gestörte, unbeschränkte, nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{K}} \hat{J}(\mathbf{K}, \boldsymbol{\rho}) = \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\mathbf{x}(t, \mathbf{K}, \boldsymbol{\rho})^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{x}(t, \mathbf{K}, \boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{K}\mathbf{x}(t, \mathbf{K}, \boldsymbol{\rho}))^T \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho}) (\mathbf{K}\mathbf{x}(t, \mathbf{K}, \boldsymbol{\rho})) \right] dt \end{aligned} \quad (7.5)$$

mit $\hat{J}(\mathbf{K}, \boldsymbol{\rho}) = J(\mathbf{x}(t, \mathbf{K}, \boldsymbol{\rho}), -\mathbf{K}\mathbf{x}(t, \mathbf{K}, \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ transformiert. Der Voraussetzung folgend, dass (7.5) bezüglich der Rückführung \mathbf{K} und des Vektors $\boldsymbol{\rho}$ zweimal stetig differenzierbar ist, existiert eine Umgebung $\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}_0)$, sodass das Optimierungsproblem (7.5) für alle $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}_0)$ eine eindeutige Lösung besitzt. Somit können mittels des Gleichungssystems

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) = -(\nabla_{\mathbf{K}\mathbf{K}}^2 \hat{J}(\mathbf{K}_0, \boldsymbol{\rho}_0))^{-1} \nabla_{\mathbf{K}\boldsymbol{\rho}}^2 \hat{J}(\mathbf{K}_0, \boldsymbol{\rho}_0) \quad (7.6)$$

die Sensitivitätsableitungen $\frac{d\mathbf{K}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)$ berechnet werden (siehe auch [Büs98] und [Fia83]). Diese können nun zur Approximation einer an die Störung adaptierten optimalen Rückführung $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ mittels einer Taylorreihe, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird, herangezogen werden.

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_0 + \Delta\boldsymbol{\rho}) \approx \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}) := \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_0) + \frac{d\mathbf{K}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)\Delta\boldsymbol{\rho} \quad (7.7)$$

Damit dieses Verfahren als Echtzeitapproximation anwendbar ist, müssen die Berechnungen des Optimalreglers $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_0)$ und der Sensitivitätsableitungen $\frac{d\mathbf{K}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)$ bereits a priori erfolgen. Des Weiteren dürfen aufgrund der auftretenden Störungen $\boldsymbol{\rho}$ die Stabilitäts- und Beobachtbarkeitsforderungen nicht verletzt werden.

Fundamentaler Bestandteil des hier beschriebenen Approximationsverfahrens sind die Sensitivitätsdifferenziale der optimalen Rückführung \mathbf{K} bezüglich der Störung $\boldsymbol{\rho}$ in $\boldsymbol{\rho}_0$. In [Büs09] wird zur Lösung der Problemstellung (7.1)-(7.3) auf ein besonderes *Sequential Quadratic Programming*-Verfahren (SQP) ver-

wiesen, das den Namen WORHP³ trägt. Bei dieser Methode können mittels weniger zusätzlicher Aufwendungen die Sensitivitäten als Nebenprodukt bestimmt werden.

Bezüglich Optimierungsproblemen geringerer Dimension, die sich auch nicht durch eine schwache Besetzung auszeichnen, ist die Ermittlung dieser Sensitivitätsdifferenziale auch mittels des zentralen Differenzenquotienten möglich (siehe [BSMM01]).

$$\frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) := \frac{\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{\rho})}{\Delta \boldsymbol{\rho}} \quad (7.8)$$

Hiervon wird auch in dieser Arbeit Gebrauch gemacht, dabei werden die selben Ergebnisse wie in [Büs09] erzielt.

Mittels des nachfolgenden Beispiels soll das hier beschriebene Verfahren veranschaulicht werden. Zur besseren Vergleichbarkeit wird dabei auf das ebenfalls in [Büs09] verwendete Beispiel zurückgegriffen.

Es sei das um den Gleichgewichtspunkt linearisierte, inverse Pendel gegeben, im Folgenden als 'Beispiel 5' bezeichnet.⁴

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \ddot{w} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-0,5gm}{\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g\beta_1}{2l\beta_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \dot{w} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta_2} \\ 0 \\ \frac{-1}{2l\beta_2} \end{pmatrix} u$$

$$\beta_1 = M + m, \quad \beta_2 = M + 0,5m$$

$$\mathbf{x}(t) = (w \ \dot{w} \ \theta \ \dot{\theta})^T$$

Beispiel 5: *SISO System 4. Ordnung mit variablen Systemparametern (inverses Pendel)*

Das Pendel, bestehend aus einem beweglichen masselosen Stab der Länge l , an dessen Ende sich die kugelförmige Masse m befindet, ist an einem Wagen mit Masse M zentral befestigt. Durch Bewegung des Wagens in x -Richtung soll die Masse m im oberen Gleichgewichtspunkt (Stab senkrecht mit Masse m oberhalb des Wagens) stabilisiert werden, wobei w die horizontale Verschiebung des Wagens und u die Kraft auf den Wagen beschreibt. Für den aufrechten Gleichgewichtspunkt gilt $\theta = 0^\circ$. Aufgrund der Linearisierung werden hierbei

³WORHP: „We Optimize Really Huge Problems“, bezeichnet einen von der ESA (European Space Agency) finanzierten Sparse NLP-Solver (NonLinear-Programming-Verfahren zur Lösung schwach besetzter nichtlinearer Optimierungsprobleme), der in einer Kooperation der Firmen ASTOS SOLUTION GmbH und Skysoft (Lissabon), sowie Mitarbeitern der Universitäten Coimbra, Birmingham und Bremen entwickelt wurde. Diese Software ist in der Lage, Probleme mit mehr als 2 500 000 Variablen und mehr als 5 000 000 Beschränkungen zu lösen.

⁴Anders als hier aufgeführt, wird in [Büs09] β_2 mit $\frac{1}{M+0,5m}$ angegeben. Dies ist allerdings inkorrekt.

nur Anfangsauslenkungen von $\theta \leq 5^\circ$ betrachtet. Es wird nun der Vektor $\boldsymbol{\rho}$ mit $\boldsymbol{\rho} = (M \ m \ l \ \alpha)^T$ definiert. Hierbei ist α wesentlicher Bestandteil der Wichtungsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren gilt $r = 1 - \alpha$. Für den ungestörten Fall wird $\boldsymbol{\rho}_0 = (10 \ 1 \ 1 \ 0,5)^T$ festgelegt. Löst man nun die Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}_0)^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}_0) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0)^T \mathbf{b}(\boldsymbol{\rho}_0) \mathbf{r}(\boldsymbol{\rho}_0)^{-1} \mathbf{b}(\boldsymbol{\rho}_0)^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}_0) = \mathbf{0}$$

mittels des in Abschnitt 2.3 vorgestellten Verfahrens, so ergibt sich

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) = \begin{pmatrix} 2,7874 & 7,7696 & 57,6489 & 26,0392 \\ 7,7696 & 37,4354 & 295,3420 & 133,4063 \\ 57,6489 & 295,3420 & 7,4766 \cdot 10^3 & 3,3234 \cdot 10^3 \\ 26,0392 & 133,4063 & 3,3234 \cdot 10^3 & 1,4774 \cdot 10^3 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Für den Regler \mathbf{k} folgt dann aus den Gleichungen (2.23) und (2.20)

$$\mathbf{k} = r(\boldsymbol{\rho}_0)^{-1} \mathbf{b}(\boldsymbol{\rho}_0)^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) = - \left(1,0000 \ 5,5748 \ 260,2582 \ 115,2978 \right)^T.$$

Diese Schritte müssen nun unter Zuhilfenahme von Gleichung (7.8) für jedes Element von $\boldsymbol{\rho}$ ausgehend von $\boldsymbol{\rho}_0$ wiederholt werden, um die Sensitivitäten der einzelnen Elemente von \mathbf{k} hinsichtlich der Elemente ρ_i von $\boldsymbol{\rho}$ zu erhalten. Wählt man $\Delta \rho_i = 10^{-6}$, so erhält man für die parametrischen Sensitivitätsableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{k}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) &= \begin{pmatrix} d\mathbf{k}/d\rho_1 \\ d\mathbf{k}/d\rho_2 \\ d\mathbf{k}/d\rho_3 \\ d\mathbf{k}/d\rho_4 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} -1,0510 \cdot 10^{-6} & -3,1841 \cdot 10^{-7} & -2,7456 \cdot 10^{-7} & -2,0000 \\ -0,2149 & -0,1958 & -0,4431 & -6,4611 \\ -21,5523 & -20,5101 & -24,2264 & -48,4527 \\ -9,7349 & -7,0069 & -68,5916 & -21,8854 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es soll nun beispielhaft der Fall betrachtet werden, dass sich die kugelförmige Masse am Ende des Pendelstabes halbiert und simultan die Anforderungen an die Wichtungsmatrizen mittels des Parameters α modifiziert werden. Mit $\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}} = (10 \ 0,5 \ 1 \ 0,75)^T$ ergibt sich gemäß Gleichung (7.7) für die angepasste, approximierete Rückführung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) &= \mathbf{k}(\boldsymbol{\rho}_0) + \left(\frac{d\mathbf{k}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) (\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}} - \boldsymbol{\rho}_0) \right)^T \\ &= - \left(1,5 \ 7,0922 \ 262,1163 \ 117,2657 \right). \end{aligned}$$

Die exakt berechnete Rückführung wäre in diesem Fall

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) = - \left(1,7321 \quad 7,5790 \quad 265,5807 \quad 118,8247 \right).$$

Die Differenz von exakter und geschätzter Rückführung begründet sich in der Linearisierung der Problemstellung durch Verwendung der Sensitivitätsableitungen und nimmt folglich mit wachsendem $\Delta\boldsymbol{\rho}$ zu. Die approximierte Rückführung stellt trotzdem einen Regler dar, der besser als die ursprüngliche Rückführung an die veränderten Systemparameter angepasst ist. Er kann somit zum Einen als direkt verfügbare Zwischenlösung dienen, um einer potentiellen Destabilisierung des dynamischen Systems durch eine Änderung der Systemparameter vorzubeugen, andererseits stellt dieser Näherungswert, wie bereits zuvor angedeutet, einen guten Prädiktorschritt bei der Echtzeitadaption eines Reglers dar.

7.2 Erweiterte Echtzeitanpassung des klassischen Riccati-Reglers

Wie bereits zuvor dargestellt, handelt es sich bei dem im Abschnitt 7.1 vorgestellten Verfahren um ein Approximationsverfahren, da auf einen Korrektorschritt im Anschluss an den Prädiktorschritt $\frac{d\mathbf{K}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)\Delta\boldsymbol{\rho}$ verzichtet wird. Ein Prädiktorschritt im herkömmlichen Sinne ist jedoch auch nicht möglich, da sich einerseits (7.7) nicht in der Form $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ darstellt und andererseits die Abhängigkeiten der Rückführung \mathbf{K} vom Vektor $\boldsymbol{\rho}$ nicht explizit als Gleichungssystem zur Verfügung stehen.

Möchte man nun an das Echtzeitapproximationsverfahren einen Korrektorschritt anhängen, kann dies durch Einbindung eines n-dimensionalen Newton-Verfahrens erzielt werden. Dies bedarf allerdings eines Nullstellenproblems der Form

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.10)$$

Um dieser Forderung nachzukommen, wird nun nicht mehr die Rückführung \mathbf{K} direkter Gegenstand des Approximationsverfahrens sein, sondern die Lösungsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der zeitinvarianten Matrix-Riccati-Gleichung (2.32)

$$\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

respektive nach Überführung der konstanten Matrizen in Abbildungen der Störung $\boldsymbol{\rho}$ (siehe (7.2))

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{B}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{R}(\boldsymbol{\rho})^{-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\rho})^T\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho})^T\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}. \quad (7.11)$$

Wird nun die Matrix-Riccati-Gleichung (7.11) (nachfolgend mit $\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})$ bezeichnet) mittels der in Abschnitt 6.3 eingeführten Funktion vek in den Vektor $\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ überführt, so liegt ein vektorwertiges Nullstellenproblem vor, auf das der nachfolgende Algorithmus angewendet werden kann.

Schritt 1: Bestimme die Lösung $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0)$ der Matrix-Riccati-Gleichung (7.11) mittels des in Abschnitt 2.3 vorgestellten Verfahrens für den ungestörten Fall $\boldsymbol{\rho}_0$. Überführe die Lösungsmatrix $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0)$ in den Vektor $\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_0)$ mittels der Funktion vek . Da \mathbf{P} eine symmetrische Matrix ist, ist lediglich die obere Rechtsdreiecksmatrix in einen Vektor zu überführen. Der Vektor \mathbf{p} hat somit die Länge $\bar{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_0) = \text{vek}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0))$$

Schritt 2: Berechne die Sensitivitätsableitungen von $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ hinsichtlich $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^q$ in $\boldsymbol{\rho}_0$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\rho_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{\bar{n}}}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial p_{\bar{n}}}{\rho_q} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

mittels des zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) = \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{\rho})}{\boldsymbol{\rho}}. \quad (7.13)$$

Schritt 3: Prädiktorschritt. Berechne den Vektor $\Delta \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ mit

$$\Delta \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{p}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)\Delta \boldsymbol{\rho} \quad (7.14)$$

und $\Delta \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{\text{neu}} - \boldsymbol{\rho}_0$. Nach Rücktransformation des Vektors $\Delta \mathbf{p}$ in die Matrixform mittels

$$\Delta \mathbf{P} = \text{vek}^{-1}(\Delta \mathbf{p})$$

erfolgt die Berechnung der approximierten Lösung der Riccati-Gleichung für $\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) + \Delta \mathbf{P} \quad (7.15)$$

und der approximierten Rückführung

$$\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^{-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^T\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}). \quad (7.16)$$

Schritt 4: Aufstellen der Jacobi-Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ der Riccati-Gleichung bezüglich des Vektors $\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho})$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_1))^T \\ (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_2))^T \\ \vdots \\ (\text{grad}_{\mathbf{p}}(f_{\bar{n}}))^T \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

und Einsetzen der in Schritt 3 approximierten Lösung der Riccati-Gleichung $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})$.

Schritt 5: Korrektorschritt. Der Korrektorschritt erfolgt in Form eines vereinfachten n -dimensionalen Newton-Verfahrens, um den Rechenaufwand einer Neuberechnung der Jacobimatrix in jedem Iterationsschritt zu umgehen. Als Iterationsvorschrift gilt

$$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i + \mathbf{z}. \quad (7.18)$$

Um den Vektor \mathbf{z} zu ermitteln, gilt es das Gleichungssystem

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}))\mathbf{z} = -\mathbf{f}(\mathbf{p}^i) \quad (7.19)$$

zu lösen. Des Weiteren ist zu prüfen, ob die Bedingung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{p}^i)\| < \epsilon \quad (7.20)$$

erfüllt ist und somit das Newton-Verfahren abgebrochen werden kann. Die Schranke $\epsilon > 0$ ist eine frei wählbare Konstante. Auch ist es möglich eine maximale Anzahl l_{max} an Iterationsschritten vorzugeben, nach Erreichen derer trotz Nichterfüllung von (7.20) das Newton-Verfahren abgebrochen wird.

Nachfolgend sei noch ein Hinweis zur Lösung des Gleichungssystems (7.19) gegeben. Da die Jacobi-Matrix $\mathbf{F}'(\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ nicht quadratisch ist lässt sich Gleichung (7.19) nicht durch einfaches Invertieren der Jacobi-Matrix lösen. Des Weiteren liegt mit Gleichung (7.19) ein überbestimmtes Gleichungssystem vor. Hierfür ergeben sich zwei Lösungsansätze, wobei für beide Ansätze die Forderung gilt, dass $\mathbf{F}'(\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ den Maximalrang \bar{n} hat, d.h. die Spalten der Jacobi-Matrix linear unabhängig sind. Ein möglicher Lösungsweg besteht in einem Orthogonalisierungsverfahren. Hierbei wird die Jacobi-Matrix durch QR-Zerlegung mittels Householder- oder Givens-Transformation (siehe auch [BSMM01]) in die Matrizen \mathbf{Q} und $\hat{\mathbf{R}}$ überführt, so dass $\mathbf{F}(\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{R}}$ gilt, mit $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ und

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,\bar{n}} \\ & r_{2,2} & \cdots & r_{2,\bar{n}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{\bar{n},\bar{n}} \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix},$$

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(n^2-\bar{n}) \times \bar{n}}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ (siehe auch [BSMM01]). Anschließend muss nun das Gleichungssystem

$$\mathbf{R}\mathbf{z} = -\mathbf{Q}^T\mathbf{f}(\mathbf{p}^i)$$

gelöst werden.

Ein zweiter Lösungsweg besteht in der Verwendung der Pseudoinversen⁵

⁵Die Pseudoinverse leitet sich über die Gauß-Transformation (siehe [BSMM01]) her, die beide Seiten des Gleichungssystems (7.19) mit $(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))^T$ multipliziert. Von der entstehenden Matrix $(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))^T\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))$ kann nun die Inverse gebildet und Gleichung (7.19) nach \mathbf{z} umgestellt werden.

der Jacobi-Matrix, die sich definiert durch

$$(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho})))^+ = (\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))^T \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))^{-1} (\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))^T.$$

Dabei ist dann das Gleichungssystem

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{F}'(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))^+ \mathbf{f}(\mathbf{p}^i)$$

zum Beispiel mittels Cholesky-Verfahren zu lösen (siehe [BSMM01]). Hierbei ist darauf zu achten, dass der Lösungsfehler $\|(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\rho}))\mathbf{z} + \mathbf{f}(\mathbf{p}^i)\|$ möglichst gering wird.

Schritt 6: Rücktransformation des Vektors $\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})$ in eine symmetrische Matrix $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})$ und Berechnung der zugehörigen optimalen Rückführung $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^*$ mit

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^* = \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}). \quad (7.21)$$

Zur besseren Veranschaulichung des erweiterten Algorithmus wird dieser nachfolgend auf das im vorigen Abschnitt vorgestellte Beispiel des invertierten Pendels angewendet.

Die für Schritt 1 benötigte Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung (7.11) für den ungestörten Fall $\boldsymbol{\rho}_0$ wurde bereits in Abschnitt 7.1 Gleichung (7.9) berechnet. Die Matrix $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0)$ wird im nächsten Schritt in die Vektorform überführt:

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_0) = \text{vek} \left(\begin{pmatrix} 2,7874 & 7,7696 & 57,6489 & 26,0392 \\ 7,7696 & 37,4354 & 295,3420 & 133,4063 \\ 57,6489 & 295,3420 & 7,4766 \cdot 10^3 & 3,3234 \cdot 10^3 \\ 26,0392 & 133,4063 & 3,3234 \cdot 10^3 & 1,4774 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2,7874 \\ 7,7696 \\ 57,6489 \\ 26,0392 \\ 37,4354 \\ 295,3420 \\ 133,4063 \\ 7,4766 \cdot 10^3 \\ 3,3234 \cdot 10^3 \\ 1,4774 \cdot 10^3 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt werden die Sensitivitätsableitungen von \mathbf{p} im Punkt $\boldsymbol{\rho}_0$ bestimmt. Wählt man für den Differenzenquotient eine Schrittweite von $\Delta\boldsymbol{\rho} =$

$1,0 \cdot 10^{-6}$, so erhält man

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) = \begin{pmatrix} 0,1074 & 0,0979 & 0,2216 & 3,2305 \\ 0,5989 & 0,5457 & 1,2352 & 2,4704 \\ 4,8674 & 3,5034 & 34,2958 & 4,9409 \\ 2,1977 & 1,5915 & 28,5071 & 4,9197 \\ 4,5115 & 4,2063 & 6,8319 & -23,7717 \\ 37,3230 & 29,2264 & 188,2294 & -214,2254 \\ 16,8538 & 13,2558 & 151,4230 & -96,7728 \\ 1,2536 \cdot 10^3 & 1,0209 \cdot 10^3 & 5,1349 \cdot 10^3 & -1,2160 \cdot 10^4 \\ 561,2034 & 403,9381 & 3,9542 \cdot 10^3 & -5,3851 \cdot 10^3 \\ 251,2216 & 157,7326 & 2,5011 \cdot 10^3 & -2,385 \cdot 10^3 \end{pmatrix}.$$

In Übereinstimmung mit dem vorigen Abschnitt gilt $\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}} = (10 \ 0,5 \ 1 \ 0,75)^T$. Für die Änderung der Systemparameter in Schritt 3 folgt dann $\Delta\boldsymbol{\rho} = (0 \ -0,5 \ 0 \ 0,25)^T$ und somit

$$\Delta\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0,7587 \\ 0,3447 \\ 0,9840 \\ 0,4395 \\ -8,0461 \\ -68,1695 \\ -30,8211 \\ -3,5505 \cdot 10^3 \\ -1,5482 \cdot 10^3 \\ -675,1168 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) = \begin{pmatrix} 3,5461 & 8,1143 & 58,6329 & 26,4787 \\ 8,1143 & 29,3894 & 227,1725 & 102,5852 \\ 58,6329 & 227,1725 & 2,9262 \cdot 10^3 & 1,7751 \cdot 10^3 \\ 26,4787 & 102,5852 & 1,7751 \cdot 10^3 & 802,3225 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Hieraus resultiert der approximierte Regler

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^T \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) \\ &= - \left(2,0000 \ 8,5476 \ 257,7173 \ 116,5175 \right)^T. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Diese approximierte Lösung ist im Vergleich zu der in Abschnitt 7.1 ermittelten Näherungslösung schlechter und in diesem besonderen Fall auch nicht besser als die für den ungestörten Fall bestimmte Rückführung. Dies begründet sich jedoch in der Tatsache, dass die Matrixelemente der ersten Zeile von \mathbf{P} hinsichtlich des Parameters α (viertes Element von $\boldsymbol{\rho}$) für den ungestörten

Fall ($\alpha = 0,5$) in der unmittelbaren Nähe eines lokalen Maximums liegen. Dies spiegelt sich in einer gewissen Ungenauigkeit der Sensitivitätsableitungen wider.

Der anschließende Korrektorschritt mittels vereinfachten Newtonverfahren, wie in Schritt 5 dargestellt, führt innerhalb von fünf Iterationen zum exakten Ergebnis für die Lösungsmatrix

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) = \begin{pmatrix} 3,2818 & 7,1802 & 51,4523 & 23,2372 \\ 7,1802 & 26,1720 & 201,9068 & 91,1866 \\ 51,4526 & 201,9068 & 3,9364 \cdot 10^3 & 1,7649 \cdot 10^3 \\ 23,2372 & 91,1866 & 1,7649 \cdot 10^3 & 791,3499 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

der Riccati-Gleichung und für den optimalen Regler

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^* &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) \\ &= - \left(1,7321 \quad 7,5790 \quad 265,5807 \quad 118,8247 \right)^T. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Da dieses erweiterte Verfahren zur Echtzeitanpassung numerisch recht aufwendig ist und im Besonderen im Fall des optimalen Zustandsreglers (Riccati-Regler) mit dem in Abschnitt 2.3 vorgestelltem Verfahren bereits eine weniger aufwendige Methode zur Verfügung steht, wird im nachfolgenden Abschnitt die Anwendbarkeit dieses Verfahrens für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung (siehe Kapitel 6) betrachtet, da für diese Regler wiederum kein explizites Verfahren vorliegt.

7.3 Erweiterte Echtzeitanpassung für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung

In den Abschnitten 6.3 und 6.5 dieser Arbeit, wurden numerische Verfahren zur Bestimmung optimaler Regler mittels Ausgangsrückführung hergeleitet. Wie auch schon beim herkömmlichen Verfahren zur Bestimmung optimaler Ausgangsrückführungen in Abschnitt 6.2, bedarf es wegen der Verschränkung der zugrundeliegenden Gleichungen eines iterativen Vorgehens und eines bereits gegebenen Reglers $\bar{\mathbf{K}}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_y^0 & \mathbf{K}_w^0 \end{pmatrix}$. Dieser wurde in Kapitel 6 für die gegebenen Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} vom optimalen Zustandsregler \mathbf{K}^* des dynamischen Systems abgeleitet.

Um im Falle von Änderungen in den Systemparametern einen möglichst guten Ausgangswert $\bar{\mathbf{K}}^0$ im Prädiktorschritt der Verfahren zu erhalten, um auf diese Weise die Anzahl der notwendigen Iterationen im Korrektorschritt zu minimieren, soll die Methode der Echtzeitanpassung aus [Büs09] für diese Verfahren adaptiert werden.

Hierbei wird von der Tatsache ausgegangen, dass ein entsprechender optimaler Regler mit Ausgangsrückführung gemäß Abschnitt 6.5 für die gegebenen Systemparameter und Güteforderungen bestimmt wurde. In Abschnitt 7.1 wurde in Anlehnung an [Büs09] der Vektor $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^q$ als Zusammenfassung der

Störungen oder Abweichungen des dynamischen Systems bezeichnet. Korrekterweise stellen die Elemente von $\boldsymbol{\rho}$ vielmehr die veränderlichen Parameter des dynamischen Systems dar. Des Weiteren soll $\boldsymbol{\rho}$ neben diesen Parametern auch die Elemente der Hauptdiagonalen der Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{R} und \mathbf{Q}_w führen, um somit zusätzlich eine schnelle Änderung der Güteforderungen umsetzen zu können. Für das initiale dynamische System, das durch $\boldsymbol{\rho}_0$ beschrieben wird, liegen als Ausgangsbedingungen für den nachfolgenden Algorithmus neben dem optimalen Regler $\bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}_0)^*$ auch die Lösungsmatrizen $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0)$ und $\mathbf{L}(\boldsymbol{\rho}_0)$ der Lyapunov-Gleichungen (6.13) und (6.19) vor. Für eine erweiterte Echtzeitanpassung erschließt sich dann folgendes Vorgehen:

Schritt 1: Bestimme a priori mittels Differenzenquotient die Sensitivitätsableitungen der Matrizen $\bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})$ und $\mathbf{L}(\boldsymbol{\rho})$ hinsichtlich $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^q$ für $\boldsymbol{\rho}_0$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\rho_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{\bar{n}}}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial p_{\bar{n}}}{\rho_q} \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{l}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial l_1}{\rho_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_{\bar{n}}}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial l_{\bar{n}}}{\rho_q} \end{pmatrix}, \\ \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial k_1}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial k_1}{\rho_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_{\bar{n}}}{\rho_1} & \dots & \frac{\partial k_{\bar{n}}}{\rho_q} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Hierzu bedarf es wieder einer vorangehenden Transformation der Matrizen $\bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})$ und $\mathbf{L}(\boldsymbol{\rho})$ in die Vektorform mittels der Funktion vek . Da \mathbf{P} und \mathbf{L} symmetrische Matrizen sind, genügt es jeweils die obere Rechtsdreiecksmatrix in einen Vektor zu überführen. Diese Vektoren haben dann die Länge $\bar{n} = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Schritt 2: Dieser Schritt erfolgt sobald eine Änderung $\Delta\boldsymbol{\rho}$ in den Systemparametern oder Güteforderungen identifiziert wurde. Er stellt den Prädiktorschritt des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens dar. Es gilt die Näherungslösungen für $\bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})$ und $\mathbf{L}(\boldsymbol{\rho})$ mittels der zuvor bestimmten Ableitungen (7.26) zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\mathbf{K}}}(\boldsymbol{\rho}_{neu}) &= \bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}_0) + \text{vek}^{-1}\left(\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)\Delta\boldsymbol{\rho}\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{neu}) &= \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_0) + \text{vek}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)\Delta\boldsymbol{\rho}\right) \\ \tilde{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\rho}_{neu}) &= \mathbf{L}(\boldsymbol{\rho}_0) + \text{vek}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{l}}{d\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_0)\Delta\boldsymbol{\rho}\right) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Schritt 3: Mit diesem Schritt beginnt der Korrektorschritt. Er beinhaltet die Schritte 4 bis 7 des in Abschnitt 6.5 dargestellten Algorithmus. Als Initialwerte des Newton-Verfahrens werden jedoch die Näherungslösungen $\tilde{\bar{\mathbf{K}}}(\boldsymbol{\rho}_{neu})$, $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}_{neu})$ und $\tilde{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\rho}_{neu})$ aus Schritt 2 gewählt.

Der hier aufgeführte Algorithmus ist für SISO wie auch für MIMO Systeme beliebiger Ordnung geeignet. Aus Gründen der Darstellbarkeit vor allem im Hinblick auf die Dimension der Ableitungsmatrizen, wird nachfolgend das SISO System zweiter Ordnung Bsp. 1 als Anwendungsbeispiel aufgeführt. Um den Vektor $\boldsymbol{\rho}$ mit den Systemparametern und den Güteforderungen aufstellen zu können, wird zunächst das dynamische System - ein einfaches RC-Glied - näher betrachtet, das hinter dem Zustandsraummodell aus Bsp. 1 auf Seite 23 steht. In (Abb.7.1) ist das RC-Glied dargestellt. Man kann daraus leicht ablesen,

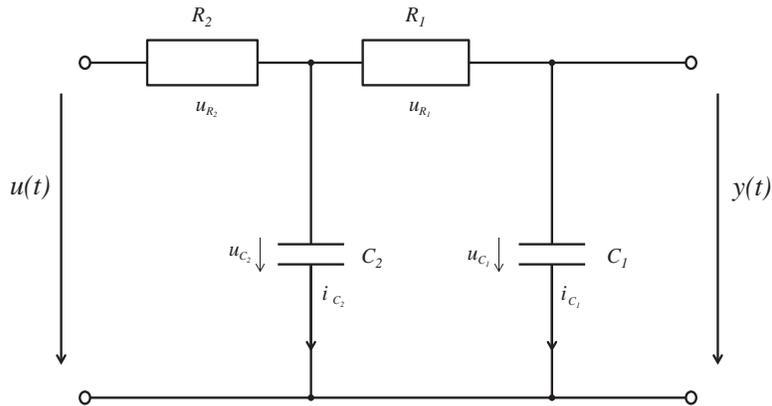


Abbildung 7.1: Einfaches RC-Glied (SISO System)

dass die Gleichung der ersten Masche

$$u_{C_2}(t) - u(t) + R_2(i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t)) = 0$$

und die der zweiten Masche

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) + R_1 i_{C_1}(t) = 0$$

lautet. Aus der Definition der Kapazität folgt für die beiden Ströme: $i_{C_1}(t) = C_1 \frac{du_{C_1}(t)}{dt}$ und $i_{C_2}(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt}$. Als Zustandsvektor wird $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{pmatrix}$ gewählt. Durch Umstellung erhält man nun ein Zustandsraummodell der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} u(t) \quad (7.28)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \quad (7.29)$$

Für dieses Beispiel werden sowohl die zwei Widerstände als auch die beiden Kapazitäten als veränderliche Systemparameter betrachtet. Unter zusätzlicher

Beachtung der Wichtungsmatrizen für die Güteforderungen erhält man einen Vektor $\boldsymbol{\rho}$ der Form

$$\boldsymbol{\rho} = \left(R_1 \quad R_2 \quad C_1 \quad C_2 \quad q_{11} \quad q_{22} \quad r \quad q_w \right)^T. \quad (7.30)$$

Wird für $\boldsymbol{\rho}_0$ $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 400nF$ und als Zeiteinheit $[t] = ms$ gesetzt, erhält man das bereits bekannte Beispiel 1 auf Seite 23.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für $\boldsymbol{\rho}_0$, dass q_{11} , q_{22} , r und q_w jeweils den Wert 1 haben. Somit ergibt sich der optimale Regler $k_y = 1,9039$ und $\mathbf{k}_w = -0,9765$. Die Lösungen der Lyapunov-Gleichungen (6.13) und (6.19) lauten

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3,0187 & 1,1370 & -2,1558 \\ 1,1370 & 0,4522 & -0,8002 \\ -2,1558 & -0,8002 & 2,9853 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,4863 & 0,4363 & 0,5 \\ 0,4863 & 0,4205 & 0,5486 \\ 0,5 & 0,5486 & 2,8901 \end{pmatrix}.$$

Die resultierenden Sensitivitätsableitungen gemäß (7.26) sind auf Seite 172 in Anhang G dargestellt.

Erfolgt jetzt eine Änderung der Systemparameter zu

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}} = \left(100 \quad 4000 \quad 1 \cdot 10^{-6} \quad 100 \cdot 10^{-9} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right)^T$$

(es erhöht sich also der Widerstand R_2 auf $4k\Omega$ während die Kapazität C_2 auf $100nF$ abnimmt), so können unter Zuhilfenahme der Sensitivitäten und mittels Gleichung (7.27) die Näherungslösungen

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 7,5847 & 2,0780 & -4,1477 \\ 2,0780 & 0,4934 & -0,9998 \\ -4,1477 & -0,9998 & 3,7199 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 0,6440 & 0,5940 & 0,5 \\ 0,5940 & 0,5611 & 0,5644 \\ 0,5 & 0,5644 & 4,7785 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}) = \left(\tilde{\mathbf{k}}_y \quad \tilde{\mathbf{k}}_w \right) = \left(2,6978 \quad -1,0006 \right)$$

bestimmt werden.

Diese Näherungslösungen dienen als Startwert für den in Abschnitt 6.5 beschriebenen Algorithmus. Das Nullstellen-basierte Verfahren führt dann innerhalb von fünf Iterationen zu dem für $\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}$ optimalen Regler des RC-Gliedes

$$\bar{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}})^* = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_y & \tilde{\mathbf{k}}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4504 & -0,9946 \end{pmatrix}.$$

Da die für den Korrektorschritt benötigte Jacobi-Matrix bereits a priori symbolisch bestimmt werden kann, somit lediglich die durch $\boldsymbol{\rho}_{\text{neu}}$ modifizierten Elemente der Matrizen des Zustandsraummodells und der Wichtungsmatrizen in der Jacobi-Matrix ersetzt werden müssen, benötigen der Prädiktorschritt als auch der Korrektorschritt nur wenige Millisekunden.

Wie sich im Kapitel 5 jedoch zeigt, beträgt der Zeitbedarf vor allem für die Identifizierung und Quantifizierung von Änderungen in den Systemparametern mitunter mehrere Sekunden. Somit ist die zuvor aufgeführte Fähigkeit der Echtzeitanpassung des optimalen Reglers eher von geringer Bedeutung im Kontext dieser Arbeit.

Das hervorzuhebende Ergebnis dieses Kapitels ist die Erweiterung der Entwurfsverfahren aus Kapitel 6 um einen (approximierten) Prädiktorschritt, der es ermöglicht bei der Adaption des Reglers einen möglichst guten Initialwert für das Entwurfsverfahren zu bestimmen und somit eine schnelle Konvergenz des Verfahrens zu ermöglichen.

Kapitel 8

Die optimale Ausgangsrückführung für instabile Regelstrecken

Wie bereits in Abschnitt 6.2 dieser Arbeit aufgeführt wurde, ist die Stabilisierung einer instabilen Regelstrecke mittels statischer Ausgangsrückführung nur begrenzt möglich. Dies trifft vor allem dann zu, wenn die Anzahl r der Ausgangs-/Regelgrößen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ kleiner ist, als die Anzahl n an Zuständen und somit auch kleiner ist als die Anzahl n an Eigenwerten λ_i der Zustandsmatrix \mathbf{A} . Hieraus resultiert, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, alle Eigenwerte gleichzeitig zielgerichtet zu verschieben und somit der geschlossene Regelkreis nicht via statischer Ausgangsrückführung stabilisiert werden kann. Ausnahme stellen hierbei folglich nur jene Regelstrecken dar, bei denen die Anzahl an Eigenwerten mit positiven Realteil die Anzahl r der Ausgangs-/Regelgrößen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ nicht überschreitet. Aus den zuvor genannten Gründen bezogen sich die in Kapitel 6 vorgestellten Entwurfsverfahren lediglich auf stabile Regelstrecken.

Bei den Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen in Abschnitt 6.3 und 6.5 wurden die initialen Rückführungen $\tilde{\mathbf{K}}_y^0$ mittels der Relation

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{W})^T((\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{W})(\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{W})^T)^{-1} \quad (8.1)$$

von einem zuvor bestimmten optimalen Zustandsregler abgeleitet. Hierbei ist \mathbf{W} eine beliebige positiv definite Wichtungsmatrix und \mathbf{V} eine aus den Eigenvektoren gebildete Matrix. Dieser Schritt ist notwendig, um bereits zu Beginn des Entwurfsverfahrens über eine stabilisierende Ausgangsrückführung zu verfügen, vorausgesetzt die Anzahl an Eigenwerten mit positiven Realteil ist kleiner oder gleich der Anzahl r an Ausgangs-/Regelgrößen.

Die Eigenwerte des mit $\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}$ geschlossenen Kreises weisen, in Abhängigkeit von der Wichtungsmatrix \mathbf{W} , dabei Ähnlichkeit mit den Eigenwerten des zustandsrückgeführten Systems auf, jedoch ist das ausgangsrückgeführte System noch nicht optimal, da der optimale Regler erst in den nachfolgenden Schritten der Entwurfsverfahren aus Abschnitt 6.3 und 6.5 bestimmt werden muss.

Im Falle von instabilen Regelstrecken ist die mittels Gleichung (8.1) bestimmte, initiale Ausgangsrückführung $\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}$ jedoch häufig nicht stabilisierend und führt in Folge dessen auch zu einem instabilen geschlossenen Regelkreis. Dies hat allerdings zur Folge, dass die zuvor erwähnten Entwurfsverfahren in ihren weiteren Verlauf unter Umständen nicht konvergieren. Der Entwurf einer optimalen Ausgangsrückführung für instabile Regelstrecken ist somit mittels der in Abschnitt 6.3 und 6.5 vorgestellten Methoden unter Umständen nicht möglich. In anderen Fällen konvergiert das Verfahren nur schlecht, wodurch eine hohe Anzahl an Iterationen nötig ist (siehe Tabelle 8.1). Das herkömmliche Entwurfsverfahren aus Abschnitt 6.2 würde bei der Wahl einer nicht-stabilisierenden initialen Rückführung in keinem Fall konvergieren (siehe [Lun06]).

Ziel dieses Kapitels ist es, ein auf Homotopie basierendes Entwurfsverfahren zu entwickeln, das optimale Ausgangsrückführungen auch für instabile Regelstrecken zur Verfügung stellt, unter der Voraussetzung dass die Anzahl an Eigenwerten mit positiven Realteil die Anzahl r der Ausgangs-/Regelgrößen nicht überschreitet.

Wie bereits eingangs aufgeführt wurde, führt das bisherige in Kapitel 6 vorgestellte Vorgehen zur Bestimmung einer initialen Ausgangsrückführung im Falle von instabilen Regelstrecken in vielen Fällen nicht zu einer stabilisierenden Rückführung $\tilde{\mathbf{K}}_{j=0}$. Dies ist allerdings eine notwendige Bedingung für einen erfolgreichen Durchlauf, sowohl des herkömmlichen (Abschnitt 6.2) als auch der Nullstellen-basierenden Verfahren (Abschnitt 6.3 und 6.5). Um dies zu veranschaulichen, soll das nachfolgende, als Beispiel 6 aufgeführte instabile SISO System näher betrachtet werden.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r = 1, \quad q_w = 10$$

Beispiel 6: *SISO System, instabil*

Die Eigenwerte λ_i der Zustandsmatrix \mathbf{A} von Beispiel 6 betragen $\lambda_1 = 1,1306$ und $\lambda_2 = -35,3806$. Die Regelstrecke ist folglich nicht stabil.

Bestimmt man für Beispiel 6 einen optimalen Zustandsregler entsprechend dem in Abschnitt 6.1 definierten Vorgehen, und unter Maßgabe der vorgegebenen Wichtungen Q , r und q_w , so erhält man für die statischen Rückführungen

$$\mathbf{k} = (6,7775 \quad 2,4615)$$

und

$$k_w = -3,1623.$$

Das damit zustandsrückgeführte System

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \quad k_w) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix}.$$

ist mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -35,3998$, $\lambda_2 = -0,9635 + j \cdot 0,4339$ und $\lambda_3 = -0,9635 - j \cdot 0,4339$, wie erwartet, stabil.

Die mittels Gleichung (8.1) bestimmte initiale Ausgangsrückführung $\tilde{\mathbf{k}}_{j=0}$, welche auf der zuvor berechneten Zustandsrückführung beruht, beträgt

$$\tilde{\mathbf{k}}_{j=0} = (4,5331 \quad 0,695).$$

Dieser Regler führt jedoch zu einem instabilen System

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}_{j=0}\tilde{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}_y \quad \mathbf{k}_w),$$

dessen Eigenwerte $\lambda_1 = -33,7486$, $\lambda_2 = -0,8166$ und $\lambda_3 = 0,3152$ betragen. Der weitere Verlauf des Entwurfsverfahrens ist in Tabelle 8.2 dargestellt. Das Verfahren wurde dabei nach 10 Iteration abgebrochen, da das Newtonverfahren zu keinen plausiblen Ergebnissen mehr führte.

Homotopie-Verfahren finden unter Anderem Anwendung, um bei der Lösung von Gleichungssystemen Startpunkte im Konvergenzbereich des Newton-Verfahrens zur Verfügung zu stellen. Hierfür wird das zu lösende Gleichungssystem hinsichtlich einer oder mehrerer Variablen parametrisiert und somit in eine ganze Schar von Gleichungssystemen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1 - \lambda)\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \tag{8.2}$$

eingebettet. Der bekannte Startwert $(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ löst hierbei für $\lambda = 0$ das System (8.2), während (8.2) für $\lambda = 1$ mit dem zu lösenden Gleichungssystem übereinstimmt.

Basierend auf dieser Vorgehensweise wird nachfolgend ein robustes Entwurfsverfahren für optimale Ausgangsrückführungen entwickelt, welches auch bei instabilen Regelstrecken unter der Voraussetzung, dass die Anzahl an Eigenwerten mit positiven Realteil die Anzahl r der Ausgangs-/Regelgrößen nicht überschreitet, konvergiert.

Iteration k	\tilde{J}	$\ \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k})\ $	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{k}}\right\ $
1	15,9931	20,1237	20,1237
2	28,3961	17,6779	19,3159
3	34,0481	16,5883	18,9574
4	39,4445	15,5658	18,7459
5	42,0191	15,0827	18,4181
6	44,5341	14,6146	18,1051
7	46,9905	14,1611	17,8061
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
67	119,3962	2,1346	8,4549
68	119,8050	2,0683	8,3297
69	120,1995	2,0040	8,2049
70	120,5801	1,9418	8,0806
71	120,9472	1,8815	7,9569
72	121,3012	1,8230	7,8338
73	121,6426	1,7664	7,7112
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
109	129,7987	0,0032	1,4272
110	129,7741	3,0555-5	0,0123
111	129,7740	2,9102-9	1,1607-6
112	129,7740	6,0530-15	2,4147-14

Tabelle 8.1: Verlauf des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung beim instabilen SISO System $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = (1 \ 0)$. Trotz der nicht-stabilisierenden initialen Rückführung $\tilde{\mathbf{k}}_{j=0} = (29,2585 \ 0,9632)$ konvergiert das Verfahren und liefert die optimale Rückführung $\tilde{\mathbf{k}}^* = (0,3291 \ 3,1428)$. Die Anzahl an benötigten Iteration ist jedoch mit 112 sehr hoch.

Iteration k	\tilde{J}	$\ \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{l}, \mathbf{k})\ $	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{k}}\right\ $
1	-14,7465	47,9008	47,9008
2	0,6955	12,1790	12,7923
3	7,5449	4,4233	6,2840
4	4,1436	4,2217	5,7382
5	7,4947	2,7038	4,3057
6	5,1025	1,9265	3,5177
7	5,5031	1,8838	3,4571
8	5,5420	1,8835	3,4568
9	5,5359	1,8835	3,4568
10	5,5359	1,8835	3,4568
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabelle 8.2: Verlauf des Nullstellen-basierten Entwurfsverfahrens für optimale Folge-
regler mit Ausgangsrückführung beim instabilen SISO System $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix}$,
 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = (1 \ 0)$. Aufgrund der nicht-stabilisierenden initialen Rückführung
 $\tilde{\mathbf{k}}_{j=0} = (4,5331 \ 0,695)$ konvergiert das Verfahren nicht und muss bereits nach 10 Iteratio-
nen abgebrochen werden.

8.1 Entwurfsverfahren

Der erste und wesentlichste Schritt in dem zu entwickelnden Homotopie-basierten Verfahren besteht in der Parametrisierung des Gleichungssystems. Dabei muss die Parametrisierung so erfolgen, dass für $\lambda = 0$, mittels der in Kapitel 6 vorge-
stellten und entworfenen Verfahren, eine Rückführung bestimmt werden kann,
die als Startwert $(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ fungiert. Dies impliziert, dass das parametrisier-
te Gleichungssystem für $\lambda = 0$ eine stabile Regelstrecke darstellen muss, um
die Konvergenz der Entwurfsverfahren aus Kapitel 6 bei der Bestimmung des
Startwerts $(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ zu garantieren. Für $\lambda = 1$ gibt das Gleichungssystem
folglich die zu stabilisierende Regelstrecke wieder.

Ist der Startpunkt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ bestimmt, so kann λ schrittweise bis $\lambda = 1$
erhöht werden. Hierbei ist bei jedem Iterationsschritt der zugehörige Optimal-
regler entsprechend der in Kapitel 6 vorgestellten Verfahren zu bestimmen.
Unter der Voraussetzung, dass die Schrittweite für λ hinreichend klein genug
gewählt ist, konvergiert nun das Entwurfsverfahren für den Optimalregler. Die
dabei bestimmten Lösungsmatrizen \mathbf{P} , \mathbf{L} und $\tilde{\mathbf{K}}$ dienen als Initialwerte für den
nächsten Iterationsschritt.

Folgt man der beschriebenen Vorgehensweise, so ergibt sich für den Entwurf
eines optimalen Folgereglers mit Ausgangsrückführung basierend auf Abschnitt
6.5 nachfolgender Algorithmus:

Schritt 1: Modifikation der Regelstrecke durch geeignete Erweiterung der Sy-

stemmatrix \mathbf{A} mit dem Parameter λ . Die Erweiterung soll dabei so erfolgen, dass $\mathbf{A}(\lambda)$ für $\lambda = 1$ der ursprünglichen Systemmatrix der zu stabilisierenden Regelstrecke entspricht. Für $\lambda = 0$ soll $\mathbf{A}(\lambda)$ stabil sein (Realteile aller Eigenwerte von \mathbf{A} sind kleiner als null).

Schritt 2: $k = 0$. Bestimme den optimalen Folgeregler $\bar{\mathbf{K}}_{k=0}$, sowie die zugehörigen Lösungsmatrizen $\mathbf{P}_{k=0}$ und $\mathbf{L}_{k=0}$ für $\lambda = 0$ gemäß den im Abschnitt 6.5 beschriebenen Entwurfsverfahren.

Schritt 3: Bestimme a priori mittels Differenzenquotient die Sensitivitätsableitungen der Matrizen $\bar{\mathbf{K}}(\lambda)$, $\mathbf{P}(\lambda)$ und $\mathbf{L}(\lambda)$ hinsichtlich λ für $\lambda_{k=0} = \lambda_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda}(\lambda_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{\bar{n}}}{\lambda} \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{l}}{d\lambda}(\lambda_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial l_{\bar{n}}}{\lambda} \end{pmatrix}, \\ \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\lambda}(\lambda_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial k_1}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_{\bar{n}}}{\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Hierzu bedarf es wieder einer vorangehenden Transformation der Matrizen $\bar{\mathbf{K}}(\lambda)$, $\mathbf{P}(\lambda)$ und $\mathbf{L}(\lambda)$ in die Vektorform mittels der Funktion vek (siehe Abschnitt 6.3). Da \mathbf{P} und \mathbf{L} symmetrische Matrizen sind, sind hier jeweils nur die obere Dreiecksmatrix in einen Vektor zu überführen. Diese Vektoren haben dann die Länge $\bar{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Schritt 4: Festlegen der Schrittweite τ zur Erhöhung des Parameters λ . Die Variable τ ist hierbei unter der Voraussetzung $\tau \leq (1 - \lambda)$ frei wählbar.

Schritt 5: Prädiktorschritt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{k+1}^{[0]} &= \bar{\mathbf{K}}_k + \text{vek}^{-1}\left(\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot \tau\right), \\ \mathbf{P}_{k+1}^{[0]} &= \mathbf{P}_k + \text{vek}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot \tau\right), \\ \mathbf{L}_{k+1}^{[0]} &= \mathbf{L}_k + \text{vek}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{l}}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot \tau\right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Schritt 6: Korrektorschritt:

Im Korrektorschritt findet das Entwurfsverfahren aus Abschnitt 6.5 Anwendung, beginnend bei Schritt 4 des Verfahrens mit $\mathbf{A}(\lambda_k + \tau)$ und den Initiallösungen $\bar{\mathbf{K}}_{k+1}^{[0]}$, $\mathbf{P}_{k+1}^{[0]}$ und $\mathbf{L}_{k+1}^{[0]}$. Hierbei ist darauf zu achten, dass die benötigte Anzahl j an Iterationen einen zuvor zu definierenden Maximalwert j_{\max} nicht überschreitet. Sollte das Entwurfsverfahren nicht innerhalb von j_{\max} Iterationen konvergieren, so ist die Schrittweite τ zu halbieren und zu Schritt 4 zurückzukehren, anderenfalls folgt Schritt 7.

Schritt 7: Unter der Voraussetzung, dass der Korrektorschritt erfolgreich war, wird der Parameter λ um die Schrittweite τ , sowie die Laufvariable k um eins erhöht:

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} &= \lambda_k + \tau, \\ k &= k + 1.\end{aligned}\tag{8.5}$$

Sobald der Parameter λ den Wert eins erreicht hat, ist das Entwurfsverfahren beendet und mit $\bar{\mathbf{K}}^* = \bar{\mathbf{K}}_{k+1}$ liegt der gesuchte, stabilisierende Optimalregler für die instabile Regelstrecke mit $\mathbf{A}(\lambda = 1)$ vor.

8.2 Anwendungsbeispiel

Zur besseren Veranschaulichung soll nun nachfolgend ein optimaler Folgeregler mit Ausgangsrückführung für das als Beispiel 6 auf Seite 88 vorgestellte, instabile System mittels des zuvor beschriebenen Homotopieverfahrens entwickelt werden.

Wie in Schritt 1 beschrieben, muss zunächst die Systemmatrix \mathbf{A} um den Parameter λ erweitert werden. Eine mögliche Wahl der Erweiterung wäre hierbei:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} -(10 - 2\lambda) & 10 \\ 25 & -26,5 \end{pmatrix},\tag{8.6}$$

die Eigenwerte von $\mathbf{A}(\lambda_0 = 0)$ betragen $-0,348$ und $-35,902$. Des Weiteren gilt es den optimalen Regler $\bar{\mathbf{K}}(\lambda)$, sowie die Lösungsmatrizen $\mathbf{P}(\lambda)$ und $\mathbf{L}(\lambda)$ für den (stabilen) Fall $\lambda_0 = 0$ mittels des in Abschnitt 6.5 beschriebenen Algorithmus zu bestimmen. Die initialen Lösungen lauten

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{k}}_0 &= \bar{\mathbf{k}}(\lambda_0) = (3,3492 \quad -3,0420), \\ \mathbf{P}_0 &= \mathbf{P}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} 5,5751 & 2,0483 & -7,0102 \\ 2,0483 & 0,7918 & -2,5317 \\ -7,0102 & -2,5317 & 15,008 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_0 &= \mathbf{L}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} 0,5514 & 0,5014 & 0,5 \\ 0,5014 & 0,4923 & 0,5551 \\ 0,5 & 0,5551 & 1,2639 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Mittels zentralen Differenzenquotient können die im Schritt 3 benötigten Sensitivitäten $\frac{d\mathbf{p}}{d\lambda}(\lambda_0)$, $\frac{d\mathbf{l}}{d\lambda}(\lambda_0)$ und $\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\lambda}(\lambda_0)$ bestimmt werden. Die Sensitivitätsableitungen ergeben sich zu

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\lambda}(\lambda_0) \approx \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\lambda}(\lambda_0) = \frac{\mathbf{p}(0,1) - \mathbf{p}(-0,1)}{0,2} = \begin{pmatrix} 5,3531 \\ 1,9090 \\ -0,2725 \\ 0,7204 \\ -0,0032 \\ -3,6632 \end{pmatrix},\tag{8.8}$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\lambda}(\lambda_0) \approx \frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta\lambda}(\lambda_0) = \frac{\mathbf{l}(0,1) - \mathbf{l}(-0,1)}{0,2} = \begin{pmatrix} 0,1528 \\ 0,0428 \\ 0 \\ -0,0511 \\ -0,0847 \\ -0,05 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

und

$$\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\lambda}(\lambda_0) \approx \frac{\Delta\bar{\mathbf{k}}}{\Delta\lambda}(\lambda_0) = \frac{\bar{\mathbf{k}}(0,1) - \bar{\mathbf{k}}(-0,1)}{0,2} = (2,96810,0993). \quad (8.10)$$

Für die Schrittweite τ wird der Standardwert $\tau = 0,2$ gewählt. Sollte der später folgende Korrektorschritt nicht konvergieren, so muss diese Schrittweite verkleinert werden.

Der Prädiktorschritt liefert die Startwerte

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{k=1}^{[0]} &= \bar{\mathbf{k}}_0 \text{vek}^{-1} \left(\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot \tau \right) = (3,9428 \quad -3,0221), \\ \mathbf{P}_{k=1}^{[0]} &= \mathbf{P}_0 + \text{vek}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot \tau \right) = \begin{pmatrix} 6,6458 & 2,4301 & -7,0647 \\ 2,4301 & 0,9359 & -2,5324 \\ -7,0647 & -2,5324 & 14,2754 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_{k=1}^{[0]} &= \mathbf{L}_0 + \text{vek}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{l}}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot \tau \right) = \begin{pmatrix} 0,5820 & 0,51 & 0,5 \\ 0,51 & 0,4821 & 0,5382 \\ 0,5 & 0,5382 & 1,2539 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

mit denen das Entwurfsverfahren aus Abschnitt 6.5 als Korrektorschritt initiiert wird. Dieses Verfahren konvergiert erfolgreich innerhalb von $j = 4$ Iterationen und liefert für $\lambda_{k=1} = 0,2$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{k=1}^{[4]} &= (4,0110 \quad -3,0195), \\ \mathbf{P}_{k=1}^{[4]} &= \begin{pmatrix} 6,7851 & 2,4778 & -7,0712 \\ 2,4778 & 0,9539 & -2,5325 \\ -7,0712 & -2,5325 & 14,5089 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_{k=1}^{[4]} &= \begin{pmatrix} 0,5746 & 0,5017 & 0,5 \\ 0,5017 & 0,4738 & 0,5375 \\ 0,5 & 0,5375 & 1,2588 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Der dabei erreichte Gütewert $\tilde{J} = \text{Spur}(\mathbf{P})$ beträgt 22,2478. Mit den erhaltenen Lösungsmatrizen $\mathbf{P}_{k=1}^{[4]}$, $\mathbf{L}_{k=1}^{[4]}$ sowie der Rückführung $\bar{\mathbf{k}}_{k=1}^{[4]}$ als neuen Startpunkt, wird nun das Verfahren beginnend bei Schritt 5 wiederholt. Die Schrittweite bleibt dabei vorerst unverändert beim gewählten Standardwert $\tau = 0,2$. Diese Vorgehensweise wiederholt sich bis zum Erhalt der gesuchten Lösung bei $\lambda = 1$. Der gesamte Verlauf dieses Beispielverfahrens ist in Tabelle 8.3 abgebildet. Die gesuchte, optimale Lösung für das in Beispiel 6 aufgeführte

λ	Iter. j	\tilde{J}	$\left\ \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{k}} \right\ $
0,2	4	22,2478	3,5-09
0,4	7	23,9662	6,8-10
0,6	8	26,5522	2,3-09
0,8	10	29,9528	2,3-09
1,0	11	34,0676	3,06-09

Tabelle 8.3: Verlauf des Homotopie-basierten Entwurfsverfahrens zur Bestimmung optimaler Folgeregler mit Ausgangsrückführung für instabile Regelstrecken am Beispiel des instabilen SISO Systems $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = (1 \ 0)$. Der Homotopieparameter λ wurde hierbei bei jedem Homotopie-Schritt um $\tau = 0,2$ erhöht. Die Variable j gibt Auskunft über die benötigte Anzahl an Iterationen des inneren Newton-Verfahrens in jedem Homotopie-Schritt. Die durch das Entwurfsverfahren bestimmte optimale Rückführung beträgt $\bar{\mathbf{k}}^* = (7,9835 \ -2,8761)$.

instabile System beträgt $\bar{\mathbf{k}}^* = (7,9835 \ -2,8761)$ mit einem Gütewert von $\tilde{J} = \text{Spur}(\mathbf{P}) = 34,0676$.

Ziel dieses Kapitels war es, ein neues Homotopieverfahren zu entwickeln, das es ermöglicht, Optimalregler mit Ausgangsrückführung für instabile Regelstrecken zu bestimmen. Mit der Maßgabe, dass die Anzahl an Eigenwerten mit positiven Realteil kleiner oder gleich der Anzahl r an Ausgangs-/Regelgrößen ist, ist dies mit dem in Abschnitt 8.1 entwickelten Entwurfsverfahren möglich. Dies wurde in Abschnitt 8.2 dieses Kapitel anhand von Beispiel 6 (Seite 88) demonstriert.

Kapitel 9

Der adaptive Optimalregler

Zielsetzung dieses Kapitels ist es, unter Zuhilfenahme der zuvor erarbeiteten Kenntnisse einen adaptiven Optimalregler zu entwickeln. Dies bedeutet, dass für eine Regelstrecke mit zeitlich variablen Systemparametern, ein Optimalregler, wie in Kapitel 6 beschrieben, entsprechend den vorgegebenen Güteforderungen bestimmt wird. Die hierfür benötigten, systembeschreibenden Differentialgleichungen der Regelstrecke sind a priori bekannt.

Die Regelstrecke soll im Weiteren kontinuierlich überwacht werden, um eventuelle Änderungen in den variablen Systemparametern zu detektieren und zu identifizieren. Hierfür wird die in Abschnitt 5.1 vorgestellte Systemidentifikationsmethode „*PBSID*“ adaptiert sowie sich der in Abschnitt 5.2 entwickelten Methode zur Schätzung der Systemparameter bedient.

Wird eine Änderung in den Systemparametern identifiziert und quantifiziert, so soll eine Echtzeitanpassung des Reglers entsprechend der in Kapitel 7 erarbeiteten Verfahrensweisen erfolgen. Die Anpassung des Reglers soll dabei unter Beachtung der in Kapitel 4 hergeleiteten Methoden zur Stabilisierung geschalteter Systeme durchgeführt werden.

9.1 Der adaptive Folgeregler mit Ausgangsrückführung

In diesem Anwendungsbeispiel soll noch einmal die auf Seite 49 als Beispiel 3 vorgestellte Regelstrecke betrachtet werden, jedoch mit dem konstanten Systemparameter $\beta = 0,5$. Für den verbleibenden variablen Parameter α gilt: $\alpha \in \Lambda$ mit $\Lambda = \{2,30,20\}$. Somit liegt ein parameterabhängiges MIMO System \mathbf{A}_σ vor, bestehend aus drei Subsystemen \mathbf{A}_q (siehe Beispiel 7 auf Seite 98). Hierbei sei jedoch lediglich das Subsystem \mathbf{A}_1 a priori bekannt, und dient somit als angenommene Ausgangssituation. Während die Systemmatrix des Subsystems \mathbf{A}_1 eine stabile Regelstrecke beschreibt, sind die Subsysteme \mathbf{A}_2 und \mathbf{A}_3 instabil.

Die Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_w und \mathbf{R} sind so gewählt, dass die Regelung

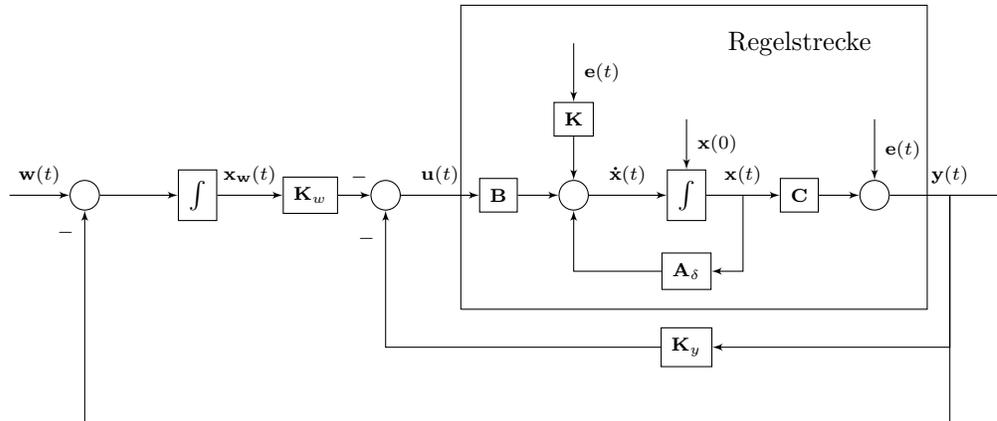


Abbildung 9.1: *Beispiel 7: Blockschaltbild Zustandsraummodell mit ausgangsbasierten Folgereger*

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(\alpha = 2) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -1,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(\alpha = 30) = \begin{pmatrix} -60 & 15 \\ 15 & -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}(\alpha = 20) = \begin{pmatrix} -40 & -10 \\ 10 & -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0,7 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 0,8 & 2,5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = 10^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_w = 10^{-2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 7: *Geschaltetes parameterabhängiges MIMO System 2. Ordnung mit variablen Systemparameter, Folgeregelung und Ausgangsrückführung*

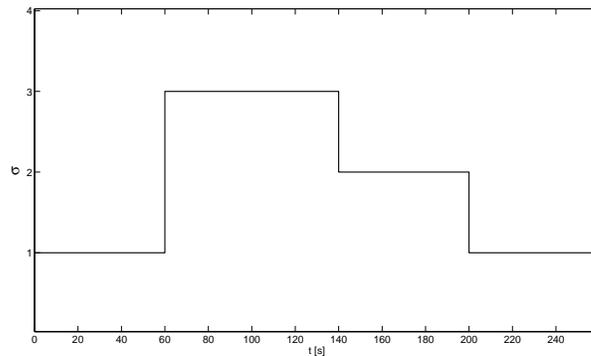


Abbildung 9.2: *Beispiel 7: Sequenz der aktivierten Subsysteme \mathbf{A}_q des geschalteten Systems \mathbf{A}_σ .*

energieeffizient erfolgt. Dass heißt, große Stellgrößen $\mathbf{u}(t)$ werden bestraft. Des Weiteren liegt weißes Rauschen der Kovarianz $5 \cdot 10^{-4}$ als Störsignal $\mathbf{e}(t)$ an. Der Sollwert ist konstant mit $\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Abbildung 9.1 zeigt das Zustandsraummodell des Beispielsystems mit einer starren Regelung. Die Aktivierungsreihenfolge der Subsysteme \mathbf{A}_q ist in Abbildung 9.2 gegeben.

9.1.1 Regelung ohne Adaption

In einem ersten Schritt soll das System aus Beispiel 7 auf Seite 98 ohne Verwendung eines adaptiven Reglers simuliert werden. Hierfür bedarf es zunächst der Bestimmung der Matrizen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_w für die a priori bekannte Zustandsmatrix \mathbf{A}_1 unter Berücksichtigung der in Beispiel 7 vorgegebenen Wichtungsmatrizen:

$$\mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 0,05 & -0,02 \\ -0,005 & -0,12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_w = \begin{pmatrix} -0,21 & 0,08 \\ 0,08 & 0,21 \end{pmatrix}.$$

Der aus der Simulation resultierende Verlauf der Regelgröße $\mathbf{y}(t)$ ist zusammen mit dem Sollwert $\mathbf{w}(t)$ in Abbildung 9.3 dargestellt. Hierbei ist deutlich zu erkennen, dass die Änderung des Systemparameters α zum Zeitpunkt $t = 60s$ von $\alpha = 2$ ($\sigma = 1$) auf $\alpha = 20$ ($\sigma = 3$) bereits zu einem Überschwingen der Regelgröße führen, dies jedoch durch den Regler noch kompensiert werden kann. Dies begründet sich in der Tatsache, dass die Matrix \mathbf{A}_3 mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -63,62$ und $\lambda_2 = 2,12$ an sich instabil ist, der durch den Optimalregler geschlossene Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{K}_y \quad \mathbf{K}_w) \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

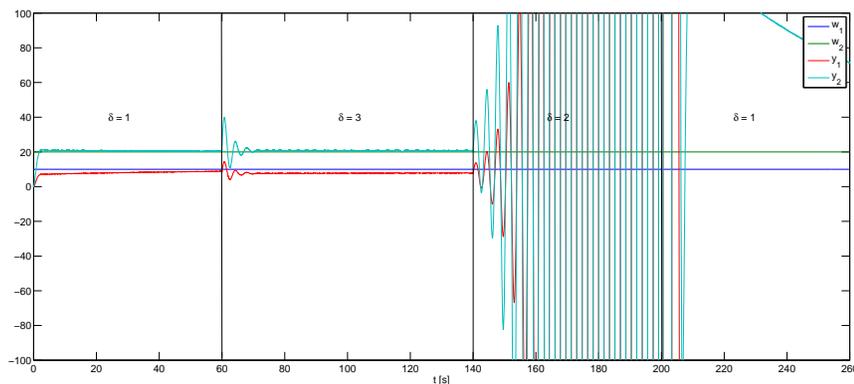


Abbildung 9.3: *Beispiel 7: Verlauf der Regelgröße $y(t)$ bei Verwendung einer starren Regelung.*

jedoch die Eigenwerte

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -42,47 \\ \lambda_2 &= -0,38 + 1,78i \\ \lambda_3 &= -0,38 - 1,78i \\ \lambda_4 &= -0,002.\end{aligned}$$

aufweist.

Die nachfolgende Änderung des Systemparameters α zum Zeitpunkt $t = 140\text{s}$ von $\alpha = 20$ ($\sigma = 3$) auf $\alpha = 30$ ($\sigma = 2$) resultiert jedoch in einer weiteren Verschiebung der Eigenwerte des geschlossenen Kreises auf

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -63,65 \\ \lambda_2 &= 0,21 + 1,81i \\ \lambda_3 &= 0,21 - 1,81i \\ \lambda_4 &= -0,001.\end{aligned}$$

und somit zu einer Destabilisierung des Systems. Der zugehörige Verlauf der Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ ist in Abbildung 9.4 zu finden.

9.1.2 Regelung mit Adaption

9.1.2.1 Implementierung des Identifikationsalgorithmus

Um eine Echtzeitanpassung des Reglers zu ermöglichen, ist in erster Linie die zeitnahe und hinreichend genaue Identifikation von Änderungen im Systemverhalten notwendig. Hierfür wurde in Kapitel 5 eine Vielzahl von Methoden vorgestellt, die der Identifikation deterministisch-stochastischer Systeme dienen. Die in dieser Arbeit nachfolgend entwickelte Implementierung soll auf dem „*PBSID*“-Algorithmus basieren (siehe Abschnitt 5.1). Hierfür werden Abtastglieder zur zeitdiskreten Messung der Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ und der Regelgröße

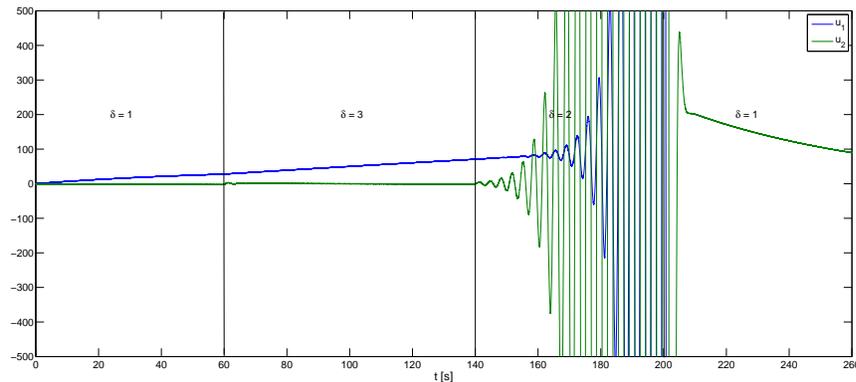


Abbildung 9.4: *Beispiel 7: Verlauf der Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ bei Verwendung einer starren Regelung.*

$\mathbf{y}(t)$ in das System eingeführt. In Abbildung 9.5 sind diese als Analog/Digital-Wandler (A/D) dargestellt. Bei der Wahl der Abtastzeit muss der Zusammenhang $\omega_T > 2\omega_{\max}$ beachtet werden, welcher auch als „Nyquist-Shannonsche Abtasttheorem“ bekannt ist. Diese Vorgabe ist zur Vermeidung von „Aliasing“-Effekten notwendig. Weiterführende Erläuterungen diesbezüglich sind in Anhang A.5 zu finden. Für das vorliegende Beispiel wird eine Abtastzeit von $T_{\text{tast}} = 0,005 \text{ s}$ gewählt.

Die gemessenen Ein-/Ausgangsdaten werden einem Schätzer zur Verfügung gestellt, der mittels Systemidentifikation den aktuellen Wert der in $\boldsymbol{\rho}$ zusammengefassten Systemparameter und somit die nachfolgende Regleradaptation ermöglicht (s. Abbildung 9.5).

Um eine Anwendung des „PBSID“-Algorithmus zu ermöglichen, bedarf es eines hinreichend großen Datensatzes N an Ein-/Ausgangsdatenpaaren, um den Rauschterm, der durch die Rückkopplung in die Stellgröße respektive Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ eingeht, weitestgehend eliminieren zu können (siehe auch Anhang C.1.3 Identifizierbarkeit). Die für die Identifikation zu verwendende Datensatzgröße wird auf $N = 1600$ festgelegt. Bei der Wahl der Datensatzgröße N ist in Verbindung mit der Abtastzeit T_{tast} weiterführend zu beachten, dass der erhaltene Datensatz Informationen über alle Modi der Regelstrecke beinhalten muss, um eine erfolgreiche Identifikation zu ermöglichen (siehe auch Anhang C.1.3). Die Variable p , die für die Unterteilung des Datensatzes in vergangene und zukünftige Werte Anwendung findet, wird mit $p = 70$ festgesetzt. Die Wahl beider Werte p und N stellt erfahrungsgemäß einen guten Kompromiss zwischen der Güte des identifizierten Systems und des notwendigen Rechenaufwands dar.

Da der in Abschnitt 5.1 vorgestellte „PBSID“ Algorithmus für die Offline-Anwendung konzipiert ist, bedarf es noch ein paar zusätzlicher Anpassungen, um eine Echtzeitüberwachung und -identifikation des hier betrachteten Anwendungsbeispiels zu ermöglichen. Bedingt durch die Tatsache, dass das Verfahren nicht rekursiv ausgelegt ist, muss kontinuierlich ein Gesamtdatensatz von

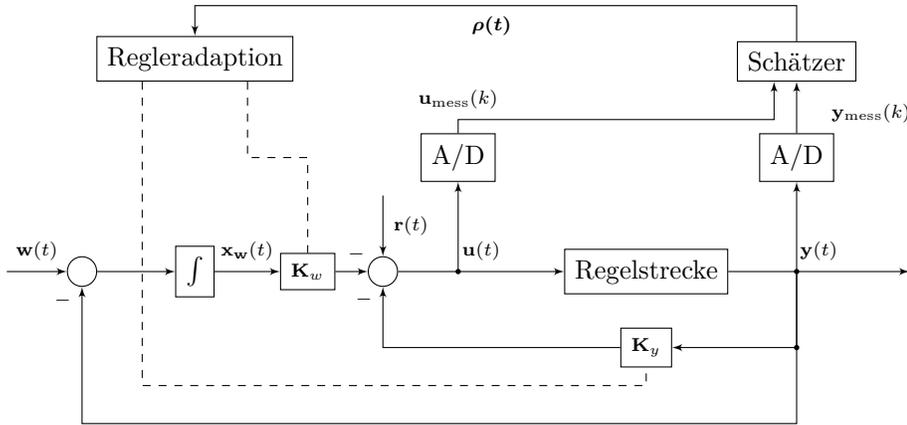


Abbildung 9.5: *Beispiel 7: Blockschaltbild Zustandsraummodell mit adaptiven ausgangsba-
sierten Folgeregler*

$N = 1600$ Datenpaaren für die Identifikation bereitstehen. Hierfür müssen die mittels A/D Wandler erzeugten Ein-/Ausgangsfolgen $\mathbf{u}(k)$ und $\mathbf{y}(k)$ in einem Puffer zwischengespeichert und paketweise bereitgestellt werden. Dieser Puffer stellt dann folglich mit einer Periodendauer von $T_{\text{Puffer}} = 1600 \cdot 0,005 \text{ s} = 8 \text{ s}$ einen Datensatz zur Identifikation zur Verfügung. Möglich wäre an dieser Stelle auch Datensätze mittels Puffer zu generieren, die sich zu einem Großteil überschneiden, indem das Abtastfenster beispielsweise jeweils um den Wert $p = 70$ verschoben wird. Das heißt, bei zwei aufeinander folgenden Datensätzen würden sich 1530 Datenpaare überlappen hierbei würden die Datensätze mit einer Periodendauer von nur $T_{\text{Puffer}} = 70 \cdot 0,005 \text{ s} = 0,35 \text{ s}$ zur Verfügung gestellt werden. Wie sich jedoch nachfolgend noch zeigen wird, ist dieses Vorgehen nicht zu bevorzugen, da sich eine Systemänderung hierbei zwar identifizieren jedoch nicht quantifizieren lässt und der dabei benötigte zusätzliche Rechenaufwand somit nicht vertretbar ist.

Liegt nun ein entsprechender Satz an Ein-/Ausgangsdaten $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ und $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times r}$ vor, so gilt es den nachfolgenden Algorithmus durchzuführen, um in einem ersten Schritt ein aktuell gültiges, zeitdiskretes Zustandsraummodell der überwachten Regelstrecke zu bestimmen:

1. Bilde die Hankel-Matrizen $\mathbf{Z}_{0,p,N-p}$, $\mathbf{Y}_{p,N-p}$ und $\mathbf{U}_{p,N-p}$ entsprechend (5.3) und (5.6) aus den vorliegenden, gepufferten Ein-/Ausgangsdatensätzen

$$\mathbf{U}_{0,N} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(N-1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_{0,N} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \cdots & \mathbf{y}(N-1) \end{pmatrix}.$$

Im Detail heißt dies:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{p,N-p} &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}(p) & \mathbf{y}(p+1) & \cdots & \mathbf{y}(N-1) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{U}_{p,N-p} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}(p) & \mathbf{u}(p+1) & \cdots & \mathbf{u}(N-1) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{0,p,N-p} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(N-p-1) \\ \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \cdots & \mathbf{y}(N-p-1) \\ \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(N-p) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(N-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}(p-1) & \mathbf{u}(p) & \cdots & \mathbf{u}(N-2) \\ \mathbf{y}(p-1) & \mathbf{y}(p) & \cdots & \mathbf{y}(N-2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Da a priori bekannt ist, dass die Durchgangsmatrix \mathbf{D} des zu identifizierenden System gleich null ist, reduziert sich das Minimierungsproblem (5.13) auf

$$\min_{\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}} \left\| \mathbf{Y}_{p,N-p} - \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}\mathbf{Z}_{0,p,N-p} \right\|_{\mathbb{F}}^2.$$

Berechne die Markov-Parameter $\mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} = \mathbf{Y}_{p,N-p}\mathbf{Z}_{0,p,N-p}^+$.

3. Bestimme $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$ mittels (5.14) und (5.15).
4. Mittels Singulärwertzerlegung von $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}\mathbf{Z}_{0,p,N-p}$, kann die Zustandsfolge $\mathbf{X}_{p,N-p} = \mathbf{S}^{1/2}\mathbf{V}^T$ (siehe (5.17)) berechnet werden. (Beachte dass $\mathbf{X}_{p,N-p}$ aus den ersten n Zeilen von $\mathbf{S}^{1/2}\mathbf{V}^T$ zu extrahieren ist, sollte die Matrix \mathbf{S} nicht bereits zuvor auf die ersten n Zeilen reduziert worden sein.)
5. Berechne die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{Y}_{p,N-p}\mathbf{X}_{p,N-p}^+$.
6. Berechne $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{p+1,N-p-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{p,N-p-1} \\ \mathbf{U}_{p,N-p-1} \end{pmatrix}^+$ und extrahiere \mathbf{A}_d und \mathbf{B}_d .

Sind die aktuell gültigen, zeitdiskreten Zustandsraummatrizen bestimmt, so kann wie in Abschnitt 5.2 beschrieben der Systemparameter mit Hilfe des nachfolgenden Algorithmus bestimmt werden:

1. Überführe die zeitdiskreten Matrizen in den zeitkontinuierlichen Bereich.¹

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \log(\mathbf{A}_d)/T \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{A}_d - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}_d. \end{aligned}$$

¹Die Nutzung des Logarithmus bringt die Einschränkung mit sich, dass der Eigenwert der zeitdiskreten Systemmatrix \mathbf{A}_d nicht exakt auf dem Einheitskreis liegen darf.

2. Berechne die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

3. Berechne $\rho = \alpha = -\frac{b_{0G_{1,1}}^{-0,21}}{0,35}$. Diese Gleichung leitet sich aus den Gleichungen (5.27) bis (5.30) ab. $b_{0G_{1,1}}$ bezeichnet den Koeffizienten b_0 des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion $G_{1,1}$.

Der Verlauf von $\rho = \alpha$ als Ergebnis dieses zweistufigen Identifikationsprozesses ist in Abbildung 9.6b als blaue Linie mit Kreuzen dargestellt. Der Verlauf dieser Linie zeigt schwache aber kontinuierliche Fluktuationen sowie Einbrüche nach dem Schalten der überwachten Regelstrecke bei $t = 60$ s und $t = 140$ s.

Da die Signaleinbrüche zu einer inkorrekten sowie die Fluktuationen zu einer nicht notwendigen Regleranpassung führen würden, sollen beide Phänomene mit Hilfe zweier nachgeführter Filterstufen eliminiert werden.

Die Einführung einer relativen oberen und unteren Schranke soll es ermöglichen, dass Änderungen des Systemparameters nur als solche erkannt und einer neuer Wert für α akzeptiert wird, wenn aufgrund dieser Änderungen die gegebenen Schranken über- oder unterschritten werden. Gleichzeitig sollen Änderungen außerhalb des Wertebereichs des Systemparameters verworfen werden (d.h. alle Werte mit $\alpha \leq 0$). Für das gegebene Beispiel wurden diese Schranken beim 1,2 bzw. 0,8-fachen des aktuellen Wertes gewählt. Das Ergebnis dieser Filterstufe ist als grüne Punkt-Strich-Linie in Abbildung 9.6b zu finden.

Die Einbrüche von α nach dem Schalten der Regelstrecke begründen sich in den zur Identifikation verwendeten, inkonsistenten Datenpaketen, welche das Zeitfenster des jeweiligen Schaltvorganges beinhalten. Die Tatsache, dass ein Paket die Ein-/Ausgangsdaten zweier verschiedener Systeme beinhaltet, ermöglicht keine eindeutige Identifikation. Beispielsweise liegt ein Datenübernahmezeitpunkt bei $t = 64$ s. Das bedeutet, dass das zu diesem Zeitpunkt bereitgestellte Datenpaket Messdaten über einen Zeitraum von je 4 Sekunden vor und nach dem Umschaltzeitpunkt bei $t = 60$ s beinhaltet. Aus diesem Grund wäre auch die zuvor aufgezeigte Möglichkeit der Verwendung von überlappenden Datensätzen nicht gewinnbringend. Zur Eliminierung der Einbrüche wird das bereits von Fluktuationen bereinigte α in einer zweiten Stufe einer weiteren Überprüfung unterzogen. Diese zweite Stufe akzeptiert eine Änderung des Systemparameters nur unter der Voraussetzung, dass der neue Wert von α länger als 8 Sekunden, d.h. länger als eine Identifikationsperiode, anliegt. Der Verlauf des bereinigten, geschätzten Systemparameters in diesem Beispiel ist als rote Linie in Abbildung 9.6b dargestellt.

Es lässt sich schlussfolgern, dass eine Regleranpassung frühestens 16 Sekunden (2 Perioden) nach der letzten Änderung des Systemparameters möglich ist. Zwar zeigt Abbildung 9.6b, dass die Einbrüche nur eine Periode andauern, dieser Zeitraum kann sich jedoch erheblich vergrößern, wenn weitere Änderungen des Systemparameters während dieses Zeitraums auftreten. Die Überprüfung

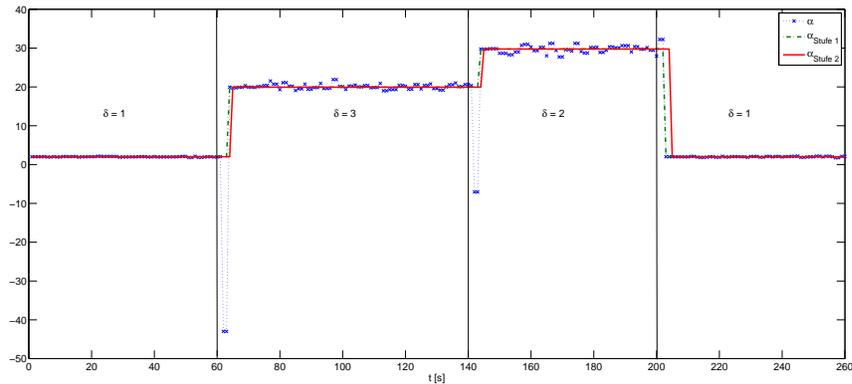
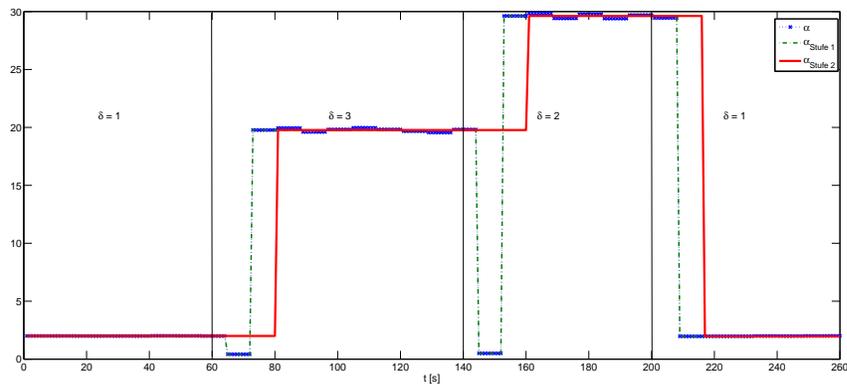

 (a) Beispiel 7: Verlauf α ($T_{\text{Puffer}} = 1,6 \text{ s}$)

 (b) Beispiel 7: Verlauf α ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$)

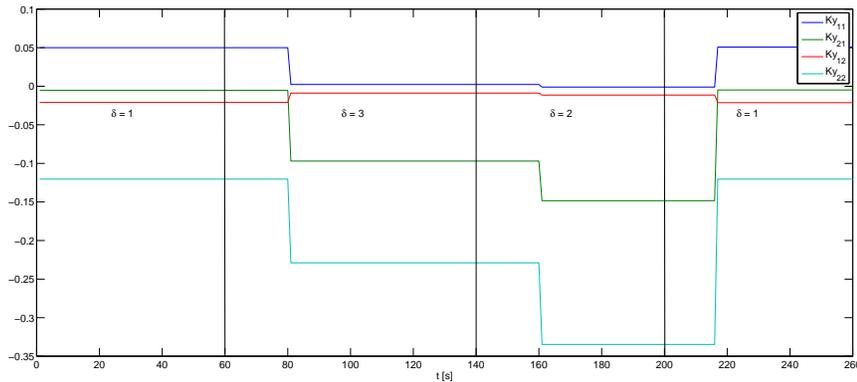
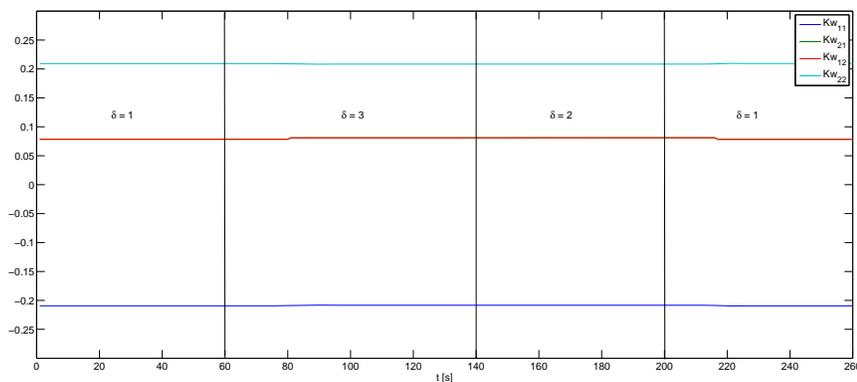
Abbildung 9.6: Beispiel 7: Verlauf des geschätzten Systemparameters α mit Abtastzeit $T_{\text{tast}} = 0,005 \text{ s}$ ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) (Abb. (b)) sowie $T_{\text{tast}} = 0,001 \text{ s}$ ($T_{\text{Puffer}} = 1,6 \text{ s}$) (Abb. (a)). Die bei α zu beobachtenden Einbrüche werden bereits in der ersten Stufe eliminiert, da diese ein negatives Vorzeichen haben.

ob der ermittelte Wert von α für eine Zeitraum $t > T_{\text{Puffer}}$ konstant ist, ist aus diesem Grund zwingend notwendig.

Des Weiteren lässt sich aus den bisherigen Erkenntnissen schlussfolgern, dass die erfolgreiche Identifikation von Änderungen in den Systemparametern nur garantiert werden kann, wenn der Zeitraum zwischen diesen Änderungen mindestens doppelt so groß als die Periodendauer des Datenpuffers ist. Es gilt:

$$2 \cdot N \cdot T_{\text{tast}} < t(\rho_2) - t(\rho_1). \quad (9.1)$$

Soll dieser Zeitraum verkürzt werden, so ist dies im Normalfall nur unter einer Verringerung der Abtastzeit möglich. Dies erhöht jedoch den kontinuierlichen Rechenaufwand in erheblichen Maße. Der Verlauf von α bei einer Abtastzeit $T_{\text{tast}} = 0,001 \text{ s}$ ($T_{\text{Puffer}} = 1,6 \text{ s}$) ist in Abbildung 9.6a dargestellt.


 Abbildung 9.7: Beispiel 7: Zeitliche Anpassung von \mathbf{K}_y bei adaptiver Regelung.

 Abbildung 9.8: Beispiel 7: Zeitliche Anpassung von \mathbf{K}_w bei adaptiver Regelung.

9.1.2.2 Implementierung der Regleradaptation

Nach erfolgreicher Identifikation einer Änderung in den Systemparametern $\boldsymbol{\rho}$, können die Reglermatrizen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_w entsprechend des in Abschnitt 7.3 beschriebenen Verfahrens zur Echtzeitanpassung optimaler Folgeregler mit Ausgangsrückführung re-konfiguriert werden. Hierfür werden jedoch die a priori berechneten Sensitivitäten der Lösungsmatrizen für die Lyapunov-Gleichungen

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}^0\tilde{\mathbf{C}})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}^0\tilde{\mathbf{C}}) + \tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{K}}^0)^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}}^0\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{Q}} = 0 \quad (9.2)$$

und

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}^0\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{L} + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}^0\tilde{\mathbf{C}})^T + \mathbf{I} = 0 \quad (9.3)$$

(siehe Abschnitt 6.5) hinsichtlich $\boldsymbol{\rho}$ benötigt (siehe (7.26)), um zunächst eine Näherung der angepassten Lösungen zu erhalten. Diese dienen im unmittelbar nachfolgenden Nullstellen-basierten Verfahren aus Abschnitt 6.5 als Startwert, um die Konvergenz des Verfahrens sicherzustellen.

Die zeitliche Änderung der Reglermatrizen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_w ist in Abbildung 9.7 und 9.8 zu sehen. Der zeitliche Verlauf der Regelgröße $\mathbf{y}(t)$ unter Verwendung eines

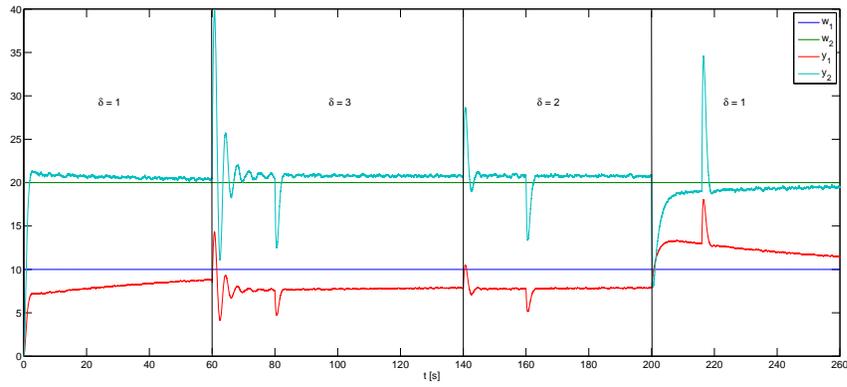


Abbildung 9.9: *Beispiel 7: Verlauf der Regelgröße $\mathbf{y}(t)$ bei Verwendung einer adaptiven Regelung mit Abtastzeit $T_{tast} = 0,005$ s ($T_{Puffer} = 8$ s).*

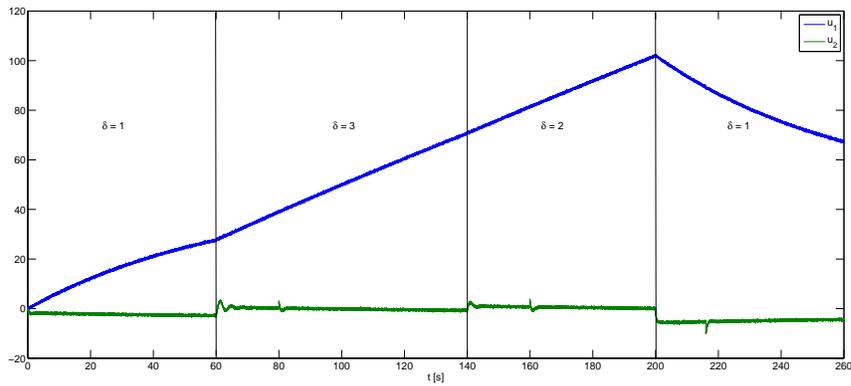


Abbildung 9.10: *Beispiel 7: Verlauf der Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ bei Verwendung einer adaptiven Regelung mit Abtastzeit $T_{tast} = 0,005$ s ($T_{Puffer} = 8$ s).*

adaptiven Reglers ist in Abbildung 9.9 dargestellt. Abweichend zum zeitlichen Verlauf bei starrer Regelung, führt nun die Änderung des Systemparameters α nicht mehr zu einer Destabilisierung des Gesamtsystems. Auffällig sind jedoch die Spitzen in der Regelgröße beim Umschalten der Reglermatrizen zu den Zeitpunkten $t = 80 \text{ s}$, $t = 160 \text{ s}$ und $t = 220 \text{ s}$. Diese Ausschläge könnten durch eine gleitende Anpassung der Matrizen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_w geglättet werden. Der Verlauf der Regelgröße $\mathbf{y}(t)$ bei der Wahl eines solchen Vorgehens ist in Abbildung 9.11 dargestellt.

Abschließend soll an dieser Stelle noch die Stabilität des Gesamtsystems hinsichtlich der variierenden Systemparameter und der daraus resultierenden Adaption des Folgereglers betrachtet werden. Hierfür wird, wie in Kapitel 4 beschrieben, die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Systems näher betrachtet. Von Relevanz ist hierbei das Gesamtsystem

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (9.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{K}} &= (\mathbf{K}_y \quad \mathbf{K}_w) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Die Transitionsmatrix des Systems lautet folglich

$$\Phi(t) = e^{(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}})t}. \quad (9.6)$$

Zur Bestimmung von $\Phi(t)$ in (9.6) wird sich der identifizierten Zustandsraummatrizen bedient. Auch gehen die entsprechend adaptierten Werte der Reglermatrizen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_w ein. Abhängig von der gewählten Abtastzeit T_{tast} , sowie von den Parametern p , f und N des Identifikationsalgorithmus, entsteht, wie bereits zuvor beschrieben, jedoch eine gewisse Verzögerung bei der Identifikation von Änderungen in den Systemparametern. Diese Verzögerung, welche die doppelte Periodendauer des Datenpuffers beträgt (siehe (9.1)), verursacht unter Umständen eine erhebliche Abweichung im geschätzten Verlauf der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ vom realen zeitlichen Verlauf von $\Phi(t)$. Die Abbildungen 9.12 und 9.13 zeigen dies für den Fall ohne und mit adaptierten Regler. Die rote Linie stellt dabei den Verlauf von $|\Phi(t)|$ des realen Systems dar. Die blauen Linien stellen in beiden Abbildungen den geschätzten, zeitlichen Verlauf von $|\Phi(t)|$ basierend auf den Identifikationsergebnissen des Schätzers. Im Fall der Strich-Punkt-Linie wurde $\Phi(t)$ auf Basis der aktuell verfügbaren Werte berechnet. Die durchgezogenen, senkrechten Linien kennzeichnen die Änderung des Systemparameters α des realen Systems, die gestrichelten, senkrechten Linien kennzeichnen die Zeitpunkte, wann die Änderungen in den Systemparametern identifiziert und quantifiziert sowie die Berechnung von $\Phi(t)$ entsprechend adaptiert wurde. In beiden Fällen (Abbildung 9.12 und 9.13) verursacht diese Verzögerung zwischen Änderung des Systemparameters und der entsprechenden

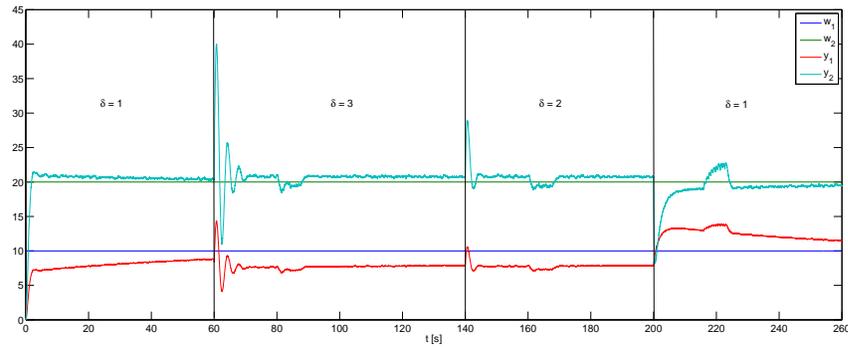


Abbildung 9.11: *Beispiel 7: Verlauf der Regelgröße $\mathbf{y}(t)$ bei Verwendung einer adaptiven Regelung mit Abtastzeit $T_{\text{tast}} = 0,005 \text{ s}$ ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) und gleitender Regleranpassung. Hierbei erfolgt die Adaption des Reglers stufenweise über einen Zeitraum von 5 Sekunden.*

Identifikation dieser Änderung, eine sichtbare Abweichung zwischen geschätzten und realen Verlauf von $|\Phi(t)|$. Diese Abweichung kann durch eine kleinere Abtastzeit entsprechend minimiert werden. Auch kann diese Verzögerung in der Berechnung von $\Phi(t)$ berücksichtigt werden. Die Berechnung ist hierbei stets rückwirkend durchzuführen, jedoch wieder basierend auf den aktuell verfügbaren Werten. Als Zeitabstand zwischen den einzelnen Berechnungen von $\Phi(t)$ wird die doppelte Periodendauer des Puffers, T_{Puffer} angenommen. In diesem Beispiel beträgt dieser Abstand 16 Sekunden ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ Sekunden}$). Des Weiteren wird angenommen, dass die zum Zeitpunkt der Berechnung anliegenden Werte bereits zum Beginn des 16 Sekunden Intervalls gültig waren. Dies bedeutet, wird zum Zeitpunkt $t = 80 \text{ s}$ eine Änderung in den Systemparametern identifiziert, so erfolgt die Berechnung von $\Phi(t)$ unter der Annahme, dass die Änderung der Systemparameter bereits zum Zeitpunkt $t = 64 \text{ s}$ und nicht zum Zeitpunkt $t = 80 \text{ s}$ eintrat. Das Ergebnis dieser modifizierten Berechnung von $\Phi(t)$ ist den Abbildungen 9.12 und 9.13 als durchgezogene Linie dargestellt. Die geringere Abweichung dieser modifizierten Berechnung vom realen Verlauf von $|\Phi(t)|$, ist hierbei in beiden Abbildung gut ersichtlich.

Der Verlauf des Betrags der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ in Abbildung 9.13, beim Einsatz des adaptiven Reglers, zeigt darüber hinaus durchgängig einen kontinuierlichen, stabilen Verlauf auch während der Schaltvorgänge. Eine weitere Beachtung von $\Phi(t)$ bei der Wahl der Umschaltzeitpunkte für den adaptiven Regler ist im gewählten Beispiel folglich nicht notwendig.

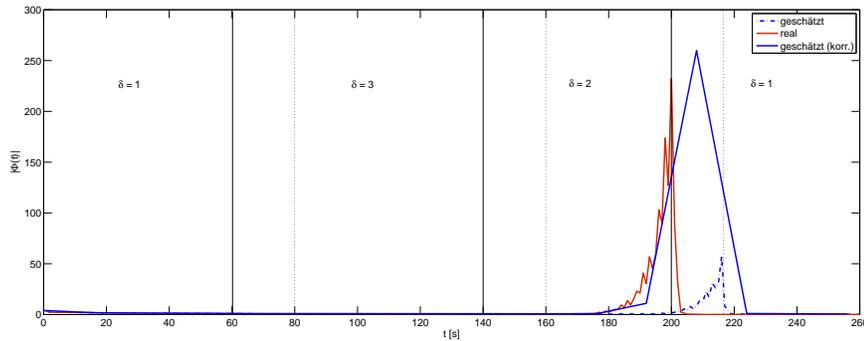


Abbildung 9.12: *Beispiel 7: Verlauf des Betrags der Transitionsmatrix $|\Phi(t)|$ bei konstanter Regelung ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$). Die durchgezogenen, senkrechten Linien kennzeichnen die Zeitpunkte der Änderung des Systemparameters α des realen Systems. Die gestrichelten, senkrechten Linien kennzeichnen hingegen die Zeitpunkte, wann diese Änderungen durch den Regler identifiziert und quantifiziert sowie die Berechnung von $|\Phi(t)|$ entsprechend adaptiert wurde. Die durchgezogene blau Linie stellt den zeitlichen Verlauf von $|\Phi(t)|$ basierend auf einer modifizierten Berechnungsmethode dar, welche die zeitliche Verzögerung zwischen Änderung der Systemparameter und Identifikation dieser Änderung berücksichtigt.*

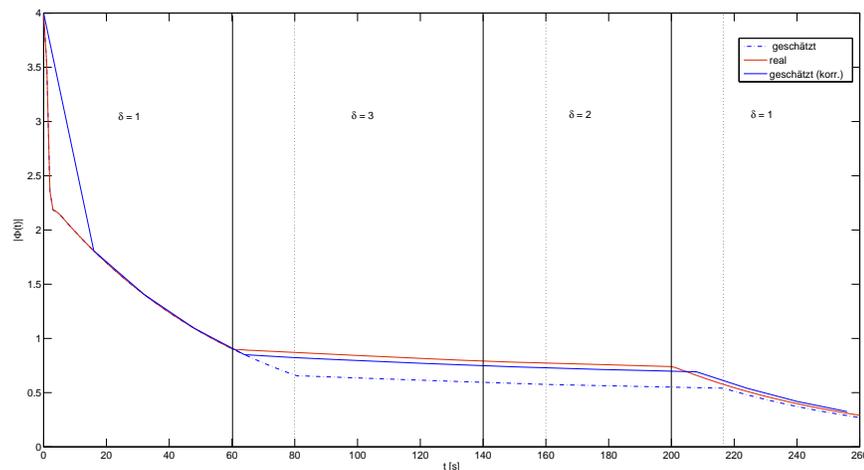


Abbildung 9.13: *Beispiel 7: Verlauf des Betrags der Transitionsmatrix $|\Phi(t)|$ bei Verwendung einer adaptiven Regelung mit Abtastzeit $T_{\text{tast}} = 0,005 \text{ s}$ ($T_{\text{Puffer}} = 8 \text{ s}$) und gleitender Regleranpassung. Hierbei erfolgt die Adaption des Reglers stufenweise über einen Zeitraum von 5 Sekunden. Die durchgezogenen, senkrechten Linien kennzeichnen die Änderung des Systemparameters α des realen Systems. Die gestrichelten, senkrechten Linien kennzeichnen hingegen die Zeitpunkte, wann diese Änderungen durch den Regler identifiziert und quantifiziert sowie die Berechnung von $|\Phi(t)|$ entsprechend adaptiert wurde. Die durchgezogene blau Linie stellt den zeitlichen Verlauf von $|\Phi(t)|$ basierend auf einer modifizierten Berechnungsmethode dar, welche die zeitliche Verzögerung zwischen Änderung der Systemparameter und Identifikation dieser Änderung berücksichtigt.*

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung der Arbeit

Die Verwendung adaptiver Regler in der optimalen Regelung ermöglicht ein hohes Maß an Flexibilität beim Reglerentwurf, da es auf diese Weise nun möglich ist, den Regler auch online hinsichtlich veränderter Gütekriterien zu optimieren, und somit das System beispielsweise von einem verlaufsoptimierten in ein verbrauchsoptimiertes Verhalten zu überführen. Auch tragen adaptive Optimalregler dafür Sorge, dass die Optimalität im Bezug auf die Gütekriterien selbst beim Auftreten unerwarteter Änderungen in den Systemparametern gewährleistet ist.

In dieser Dissertation wurde ein Verfahren zur Echtzeitadaption von Optimalreglern für lineare Systeme entwickelt und vorgestellt, welche in den Gesamtkontext der Adaptiven Regelung als selbstoptimierender Regler („*Self-Tuning Regulator*“) einzuordnen ist (vgl. [rW08a]). Das Hauptaugenmerk lag hierbei auf optimalen Reglern mit Ausgangsrückführung.

Zunächst wurde hierfür in Kapitel 6 ein alternatives Nullstellen-basiertes Entwurfsverfahren vorgestellt, das im Vergleich zur herkömmlichen Methode zur Auslegung ausgangsbasierter Optimalregler aus [LA70] und [GB79] zumindest für die untersuchten Beispiele, bestehend aus einem SISO und einem MIMO System, ein besseres Konvergenzverhalten aufweist. Auch wenn solch ein Ansatz, basierend auf dem Newton-Verfahren, bereits in [TM87] vorgeschlagen wurde, so ist es die Idee dieser Arbeit die Nullstellen-basierten Ansatz für Folgeregler zu erweitern. Wie diesbezüglich mit Hilfe von Beispielen verdeutlicht werden konnte, ist der Entwurf von ausgangsbasierten optimalen Folgereglern unter Anwendung der bisherigen Methoden (vgl. [LA70] und [GB79]) nur bedingt möglich und erfolgreich. Es musste weiterführend festgestellt werden, dass ein Schwachpunkt, den sowohl die herkömmliche als auch die auf Newton basierende Methodik aufweisen, in der Einschränkung der Anwendbarkeit auf stabile Regelstrecken besteht. Dies begründete sich in der Tatsache, dass bereits zu Beginn beider Verfahren eine stabilisierende Rückführung als Initialwert gegeben sein muss, um die Konvergenz der Verfahren überhaupt zu ermög-

lichen. Diese Forderung ist für stabile Regelstrecken trivialerweise bereits bei einer Rückführung mit dem Wert Null erfüllt. Um den Entwurf einer optimalen Ausgangsrückführung auch für instabile Regelstrecken zu ermöglichen, wurde in dieser Arbeit in Kapitel 8 ein maßgeschneidertes Homotopie-Verfahren entwickelt, welches durch geschickte Parametrisierung der Systemmatrix die instabile Regelstrecke zunächst in eine stabile Regelstrecke überführt. Nach Bestimmung des optimalen Ausgangsreglers für die stabile Regelstrecke, wird diese sukzessive in ihre ursprüngliche Form zurück gewandelt, und sich somit schrittweise der gesuchten, stabilisierenden, optimalen Ausgangsrückführung genähert.

Um eine Echtzeitadaption prinzipiell möglich zu machen, bedurfte es einer kontinuierlichen Überwachung der Systemparameter der zu regelnden Strecke. Um dies zu ermöglichen, wurde sich in dieser Dissertation der Methoden der Systemidentifikation bedient. Nach einer eingehenden Analyse der verschiedenen Methoden dieses Sachgebiets der Regelungstechnik, wie „*Prediction Error Methods*“ („*PEM*“) (siehe [Lju87], [Lju99] und [SS89]), „*Subspace Identification*“ (siehe [OM96]) und „*Predictor Based System Identification*“ („*PBSID*“) (siehe [CP05a] und [Chi07]) in Kapitel 5 und Anhang C, wurde es als sinnvoll erachtet, ein Verfahren zum kontinuierlichen Schätzen der Systemparameter basierend auf dem „*PBSID*“-Algorithmus zu entwerfen. Ausschlaggebend für diese Entscheidung war die Tatsache, dass „*PBSID*“ anders als „*PEM*“ keiner aufwendigen Parametrisierung bedarf und im Gegensatz zu den Methoden der „*Subspace Identification*“ auch geschlossene Regelkreise zu identifizieren vermag. Da eine Identifikation der Zustandsraummatrizen nur modulo einer unbekanntem Ähnlichkeitstransformation möglich ist, wurde ein eigenes Verfahren entwickelt, das unter Ausnutzung von a priori Systemkenntnissen und basierend auf den Ergebnissen des Identifikationsprozesses eine kontinuierliche Schätzung der zu überwachenden Systemparameter ermöglicht. Hierfür war jedoch eine Modifikation des für „*Offline*“-Identifikation ausgelegten „*PBSID*“-Algorithmus notwendig, um eine kontinuierliche Identifikation der Zustandsraummatrizen in Echtzeit zu ermöglichen.

Ein in Kapitel 7 auf Basis von [Büs09] entwickelter neuer Algorithmus zur erweiterten Echtzeitanpassung des Optimalreglers ermöglichte es, den Regler innerhalb weniger Millisekunden hinsichtlich der identifizierten Änderungen in den Systemparametern zu optimieren. Diese Echtzeitfähigkeit ist jedoch in Anbetracht der für die Systemidentifikation benötigten längeren Zeitskalen von geringer Relevanz. Das hervorzuhebende Ergebnis bestand an dieser Stelle in der Erweiterung des Entwurfsverfahrens für optimale Ausgangsregler um einen (approximierten) Prädiktorschritt, der es ermöglicht, bei der Adaption des Reglers einen möglichst guten Initialwert für das Entwurfsverfahren zu bestimmen und somit eine schnelle Konvergenz des Verfahrens zu unterstützen. Als nicht unerheblich zeigte sich der Einfluss von Schaltvorgängen, wie bei der Adaption des Reglers, auf die Stabilität des Gesamtsystems. Um eine Destabilisierung zu verhindern, wurden bestehende Methoden u.a. aus [Mor96],

[Lib03], [LA09], [HUE04] und [HM99] vorgestellt, die es ermöglichen, a priori die Mindestverweildauer pro Subsystem zu bestimmen. Da im Falle eines adaptiven Reglers jedoch weder jedes aktive Subsystem noch jeder Schaltvorgang vorhersagbar sind (Änderung in den Systemparametern), wurde in Kapitel 4 eine Methode entwickelt, die es ermöglicht, in Echtzeit die aktuell notwendige Verweildauer bis zum nächsten gesteuerten Schaltvorgang (Reglerwechsel) zu bestimmen. Jedoch spielt derzeit auch diese Betrachtung in Anbetracht der für die Systemidentifikation benötigten längeren Zeitskalen eine eher untergeordnete Rolle.

In einem ausführlichen Anwendungsbeispiel wurde in Kapitel 9 die Umsetzung und vor allem die Zusammenführung aller zuvor aufgeführten Bestandteile eines Echtzeitadaptionsverfahrens für optimale Ausgangsregler veranschaulicht. Hierbei wurde auch auf zusätzliche Aspekte, wie Filtern und Glättung der Ergebnisse der Systemparameteridentifikation oder gleitende Regleranpassung eingegangen. Das Erfüllen der Zielsetzung dieser Dissertation, welche die Konzeption eines Echtzeitadaptionsverfahrens für Optimalregler mit Ausgangsrückführung vorsieht, wird durch dieses Anwendungsbeispiel noch einmal unterstrichen.

10.2 Ausblick

Auch wenn die Zielsetzung dieser Dissertation vollständig erfüllt ist, so bestehen besonders im Hinblick auf die kontinuierliche Systemüberwachung Möglichkeiten zur Verbesserung des Gesamtverfahrens. Die derzeit benötigten Datenmengen zur eindeutigen, fehlerfreien Identifikation der Systemparameter, verursachen selbst bei Abtastraten von 200 Hz Verzögerungen von mehreren Sekunden und betragen somit mehr als das hundertfache der für die reine Regleranpassung benötigten Zeitdauer. Die benötigten Datenmengen und somit die Zeitdauer erhöhen sich dabei noch bei der Zunahme von Mess- und Prozessrauschen. Die Echtzeitfähigkeit bei der Anpassung des Reglers wie auch die Stabilitätsbetrachtung bei Schaltvorgängen sind aus diesen Gründen gegenwärtig von untergeordneter Bedeutung. Auch sollte die Qualität der geschätzten Werte ermittelt und in weiteren Anpassung des Reglers berücksichtigt werden. Die konsequente Integration des in Kapitel 8 entwickelten Verfahrens zum Entwurf optimaler Ausgangsrückführungen für instabile Regelstrecken stellt einen weiteren Ansatzpunkt zur Verbesserung des Gesamtverfahrens dar. Davon, dass die hierfür benötigte Fähigkeit zur Identifikation instabiler Regelstrecken in vielen Fällen gegeben ist, zeugt die erfolgreiche Identifikation der instabilen Systemzustände von Beispiel 7 in Kapitel 9.

Des Weiteren wäre eine Erweiterung des Adaptionsverfahrens auf optimale Zustandsregler denkbar. Hierbei wäre jedoch neben der Regleradaptation eine Anpassung des verwendeten Schätzers bei Feststellung einer Änderung in den Systemparametern zwingend notwendig. Ein solches Reglerkonzept würde dann keinen selbstoptimierenden Regler mehr darstellen, sondern ein adaptives Re-

gelsystem mit adaptivem Referenzmodell.

Anhang A

Grundlagen der Regelungstechnik

Ziel dieses Kapitels ist es, einen kurzen Überblick über die wesentlichsten, der für diese Arbeit benötigten Grundlagen und Methoden der Regelungstechnik zu geben. Für eine weitergehende Einführung sei auf [Lun07], [Lun06], [Unb07] und [Unb08] verwiesen.

A.1 Aufgabe der Regelungstechnik

Hauptintention der Regelungstechnik ist es, auf sich verändernde Prozesse von außen so einzugreifen, dass ein gewünschtes Verhalten auftritt. Hierbei sind die Prozesse oft, jedoch nicht ausschließlich, technischer Natur. Das gewünschte Prozessverhalten wird erreicht, wenn entsprechend ausgewählte Größen vorgegebenen Sollfunktionen ausreichend gut folgen. Dies wird auch als Sollwertfolge bezeichnet. Zusätzlich müssen eventuelle Störgrößen bestmöglich kompensiert werden (Störgrößenkompensation).

Die nachfolgenden Ausführungen basieren im Wesentlichen auf [Lun07].

A.2 Regelkreis

In (Abb. A.1) ist ein einfacher Regelkreis in seiner Grundstruktur dargestellt. Er besteht aus dem dynamischen System, auf das man Einfluss nehmen möch-

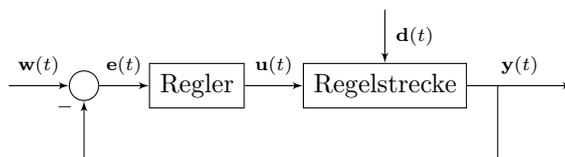


Abbildung A.1: Einfacher Regelkreis

te, der sogenannten Regelstrecke, und einer Regeleinrichtung, die auch kurz als Regler bezeichnet wird. Die Regelstrecke verfügt über eine von außen beeinflussbare Größe, die Stellgröße $u(t)$, sowie über eine messbare Ausgangsgröße, die Regelgröße $y(t)$. $w(t)$ wird als Führungsgröße oder im konstanten Fall als Sollwert bezeichnet. Dem Verlauf der Führungsgröße soll die Ausgangsgröße so gut wie möglich folgen. Hierfür wird die Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ berechnet, unter deren Nutzung der Regler die Stellgröße bestimmt um diese Forderung zu erfüllen. Des Weiteren existiert eine unabhängige Störgröße $d(t)$, welche die Regelgröße $y(t)$ beeinflusst.

Der in (Abb. A.1) gezeigte Regelkreis ist stark idealisiert dargestellt. Im realen Anwendungsfall muss zusätzlich zwischen der Regelgröße $y(t)$ und dem Messwert $y_{\text{mess}} = y(t) + r(t)$ unterschieden werden, der sich aus der Regelgröße und dem bei der Messung mittels Sensor (Messglied) verursachten Messrauschen ergibt. Auch muss im realen Prozess zwischen der vom Regler vorgegebenen Stellgröße $u(t)$, und der von einem Stellglied tatsächlich umgesetzten Stellgröße u_{stell} unterschieden werden. Ursache hierfür sind spezifische Stellgliedeigenschaften wie zum Beispiel Ansprechempfindlichkeit. Für Mehrgrößensysteme werden die in Abb. A.1 dargestellten Skalare durch Vektoren ersetzt.

A.3 Regelgesetz

Das Regelgesetz bestimmt, welche Stellgröße $u(t)$ der Regler in Abhängigkeit der Regelabweichung $e(t)$ als Eingangsgröße der Regelstrecke setzen soll. Es hat die allgemeine Form:

$$u(t) = k(y(t), w(t)) = k_{\text{R}}(e(t)). \quad (\text{A.1})$$

Regelgesetze können von unterschiedlichster Komplexität sein. Zu den aufwändigeren zählen vor allem die un stetigen Regler, wie zum Beispiel Mehrpunktregler, Fuzzy-Regler und adaptive Regler. Zu den eher weniger komplexen Reglern zählen die Standardregler. Sie sind für lineare und linearisierte Regelstrecken ausgelegt. Standardregler werden durch ihre Eigenschaften beschrieben. So gibt es P-Regler, die eine einfache proportionale Verstärkung realisieren. Ein reines integrierendes Verhalten weisen sogenannte I-Regler auf. PI-Regler zeichnen durch sowohl integrierendes als auch proportionales Verhalten aus. Des Weiteren ist es möglich sowohl den P-Regler als auch den PI-Regler um eine differenzierende Komponente (D-Glied¹) zu erweitern. Der dabei entstehende PID-Regler stellt den wohl bekanntesten Standardregler dar, was vor allem auf seine sehr gute Anpassungsfähigkeit an eine Regelstrecke zurückzuführen ist.

¹Differenzierglieder sind Übertragungsglieder, deren Ausgang im Wesentlichen durch Veränderungen der Eingangsgröße bestimmt wird und bei konstanter Eingangsgröße den Wert null annimmt. D-Glieder sind von rein theoretischer Natur, da reale physikalische Systeme kein verzögerungsfreies D-Verhalten aufweisen (siehe [Lun07]).

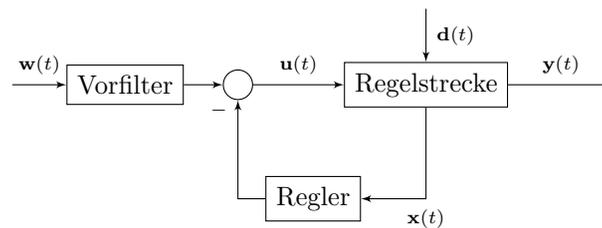


Abbildung A.2: Einfache Zustandsrückführung

Eine Besonderheit stellen die Zustandsregler dar. Sie zeichnen sich durch Rückführung der inneren Systemgrößen (Zustandsgrößen) einer Regelstrecke aus. Diese Zustandsgrößen rühren aus einem mathematischen Modell der Regelstrecke im Zustandsraum, das auch als Zustandsraummodell bezeichnet wird. Zustandsrückführungen haben den Vorteil, dass sie im Allgemeinen dynamisch schneller reagieren als Ausgangsrückführungen. Allerdings weisen sie auch einen erheblichen Nachteil auf. Denn nur selten sind alle benötigten Zustandsgrößen einer Regelstrecke messbar. Des Weiteren bedarf es häufig im Falle einer Folgeregelung aufgrund des fehlenden I-Anteils des Reglers eines zusätzlichen Vorfilters (siehe (Abb. A.2)).

Die in dieser Arbeit vorkommenden Mehrgrößenregler stellen eine Erweiterung der hier genannten Regler dar, da sie zur Regelung von Systemen mit mehrdimensionalen Stell- und/oder Regelgrößen konzipiert sind.

A.4 Modellformen der Regelstrecke

In dieser Arbeit wird zwischen drei Darstellungsformen für ein dynamisches System (die Regelstrecke) unterschieden. Ziel aller drei Modellformen ist es, das Ein-/Ausgangsverhalten eines dynamischen Systems bestmöglich abzubilden. Das heißt, bei einer gegebenen Eingangsgröße $u(t)$ sollen Modell und reales System die selbe Ausgangsgröße $y(t)$ aufweisen.

Differenzialgleichung. An erster Stelle seien hier die Differenzialgleichungen (kurz DGL) genannt. Viele Naturgesetze bedienen sich der DGL als Darstellungsform. Diese Gleichungen enthalten neben unabhängigen Veränderlichen und Funktionen dieser Veränderlichen auch noch Ableitungen dieser Funktionen nach den Variablen. Die höchste der in einer Gleichung vorkommenden Ableitung bestimmt dabei die Ordnung n der Differenzialgleichung. Nachfolgend soll nur auf lineare Differenzialgleichungen n -ter Ordnung eingegangen werden. Zur Bestimmung der zugehörigen Differenzialgleichungen wird ein dynamisches System in seine Komponenten zerlegt. Nach Erfassung der Gesetz-

mäßigkeiten,² die das Verhalten der Komponenten beschreiben, werden die Beziehungen beschrieben, die zwischen diesen Systemkomponenten existieren. In einem letzten Schritt werden diese Gleichungen zu einer DGL zusammengefasst (siehe [Lun07]). (A.2) zeigt die Form einer solchen Differenzialgleichung. Für technisch realisierbare Systeme gilt dabei die Bedingung $q \leq n$.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (\text{A.2})$$

Übertragungsfunktion. Aus der linearen Differenzialgleichung (A.2) kann direkt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{A.3})$$

eines dynamischen Systems abgeleitet werden, welche die zweite hier relevante Modellform darstellt. Hierbei gilt jedoch die Bedingung, dass alle Anfangsbedingungen der DGL (A.2) gleich null sind. $Y(s)$ und $U(s)$ sind die Laplacetransformierten³ der Ausgangsgröße $y(t)$ und der Eingangsgröße $u(t)$. Die Übertragungsfunktion kann auch in die Form

$$G(s) = \frac{b_q \prod_{i=1}^q (s - s_{0i})}{a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)} \quad (\text{A.4})$$

überführt werden, wobei s_{0i} die Nullstellen des Zählerpolynoms und somit die Nullstellen der Übertragungsfunktion darstellen. s_i sind die Nullstellen des Nennerpolynoms, das auch als charakteristisches Polynom bezeichnet wird. Sie bilden die Polstellen der Übertragungsfunktion.

Sowohl die Pole als auch die Nullstellen der Übertragungsfunktion stellen wichtige Kenngrößen eines dynamischen Systems dar. Pole geben Auskunft über das Eigenbewegungsverhalten eines Systems. Verfügen alle Pole eines Systems über einen negativen Realteil, so klingt die Eigenbewegung des Systems über die Zeit ab. Die Nullstellen der Übertragungsfunktion bestimmen indessen, welche Frequenzen der Eingangsgröße nicht durch das System übertragen werden. Eingehendere Erläuterungen zu beiden Kenngrößen sind unter anderen in [Lun07] und [Unb08] zu finden.

²Diese Gesetzmäßigkeiten können verschiedenster Natur sein, da Differenzialgleichungen in vielen naturwissenschaftlichen und technischen Sachgebieten, wie Physik, Biologie, Chemie und Elektrotechnik, aber auch Differenzialgeometrie und Ökonomie Anwendung finden (siehe [Obe95]).

³Als Laplacetransformierte bezeichnet man eine Funktion, die aus dem Zeitbereich mittels Integraltransformation in den Spektralbereich (oder auch Laplace-Bildbereich) überführt wurde. Die Laplace-Transformation stellt ein wichtiges Mittel zur Lösung von Differenzialgleichungen dar (siehe [FK11]).

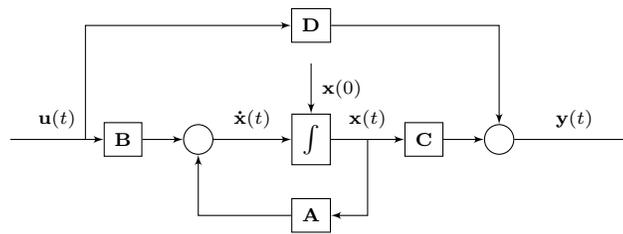


Abbildung A.3: Blockschaltbild des Zustandsraummodells für Mehrgrößensysteme

Zustandsraummodell. Bei der dritten Modellform für dynamische Systeme, die in diesem Kapitel kurz vorgestellt werden soll, handelt es sich um das Zustandsraummodell. Grundlage dieser Modellform sind die Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, welche den inneren Systemzustand wiedergeben. Das Zustandsraummodell beschreibt die lineare Differenzialgleichung (A.2) n -ter Ordnung mittels n gekoppelter Zustandsdifferenzialgleichungen 1. Ordnung und trägt für lineare System die allgemeine Form:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{Zustandsgleichung}), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (\text{Ausgangsgleichung}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Das Zustandsraummodell (A.5) ist für Mehrgrößensysteme ausgelegt. Neben dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, dem Eingangs- oder Steuervektor $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ setzt es sich aus der Systemmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, der Steuer- oder Kopplungsmatrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, der Beobachtungsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ und bei sprungfähigen System zusätzlich aus einer Durchgangsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ zusammen.

(Abb. A.3) zeigt eine schematische Darstellung des Zustandsraummodells. Das Verfahren zur Aufstellung von Zustands- und Ausgangsgleichung des Zustandsraummodells verhält sich ähnlich dem der Differenzialgleichung. Dabei werden ausgewählte Systemvariablen, wie beispielsweise Spannungen und Ströme aber auch Winkel, Wege oder Geschwindigkeiten als Zustandsvariablen verwendet. Wichtigste Voraussetzung ist jedoch, dass die Werte der Zustandsvariablen zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt sind.

Des Weiteren sei erwähnt, dass Zustandsbeschreibungen spezielle Normalformen annehmen können. Hierzu gehören die Reglungsnormalform, die Beobachtungsnormalform und die Kanonische Normalform. Für eine detailliertere Beschreibung dieser besonderen Formen sei auf [Lun07] und [Unb08] verwiesen. Auch soll an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, dass das charakteristische Polynom der Systemmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ im Regelfall dem bereits erwähnten charakteristischen Polynom der Übertragungsfunktion entspricht. Folglich entsprechen unter dieser Voraussetzung die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} den Polstellen des dynamischen Systems. Eine Ausnahme stellen hierbei jene Systeme dar, bei denen vereinzelte Pole und Nullstellen zusammenfallen und somit der Quotient (A.4) der Übertragungsfunktion gekürzt werden kann. Dies führt zu einer kleineren Anzahl an Polen in der Übertragungsfunktion gegenüber der Anzahl an Eigenwerten der Systemmatrix \mathbf{A} (siehe [Lun07]).

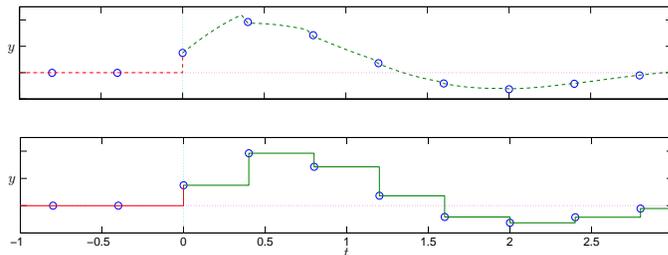


Abbildung A.4: Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals Quelle: [Lun06]

A.5 Zeitdiskrete Systeme

In den bisherigen Ausführungen dieser Arbeit wurden nur zeitkontinuierliche Systeme behandelt. Bei der Systemidentifikation tritt jedoch eine Diskretisierung des dynamischen Systems ein, da die benötigten Daten mittels Abtastglied mit einer vorgegebenen Abtastzeit T gesammelt werden (siehe (Abb. A.4)). Man spricht somit nicht mehr vom kontinuierlichen Signal $y(t)$, sondern von der Wertefolge $y(k)$. Der Skalar k bezeichnet hierbei die Nummer des zugehörigen Abtastzeitpunktes,

$$t = kT. \quad (\text{A.6})$$

Für die Wahl der Abtastzeit gilt das „Nyquist-Shannonsche Abtasttheorem“, das besagt, dass die Abtastkreisfrequenz $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ mindestens doppelt so groß sein muss, als die maximale, im dynamischen System auftretende Kreisfrequenz ω_{\max} :

$$\omega_T > 2\omega_{\max}. \quad (\text{A.7})$$

Die Erfüllung des Theorems (A.7) ist notwendig um ein bandbegrenzt, kontinuierliches Signal eindeutig rekonstruieren zu können und „Aliasing“-Effekte wie in (Abb. A.5) dargestellt zu vermeiden. Die Frequenz ω_{\max} kann neben der Bandbreite der Regelstrecke selbst auch durch Führungs- oder Störgrößen bestimmt sein (siehe auch [Lun06]).

Äquivalent zu den Modellformen der zeitkontinuierlichen Regelstrecke, die in Abschnitt A.4 vorgestellt werden, gibt es auch für zeitdiskrete Systeme verschiedene Darstellungsformen.

Differenzgleichung. Die Differenzgleichung des zeitdiskreten Systems stellt das Pendant zur Differenzialgleichung der zeitkontinuierlichen Systeme dar. Hierbei besteht jedoch der Unterschied, dass die Ableitungen des dynamischen Systems aufgrund der Diskretisierung nicht zur Verfügung stehen. Als Näherungslösung werden Differenzenquotienten

$$\Delta y(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

verwendet. Die Wertefolge $y(k)$, die häufig auch als Ausgangsfolge bezeichnet wird, kann folglich mittels einer rekursiven Gleichung beschrieben werden in

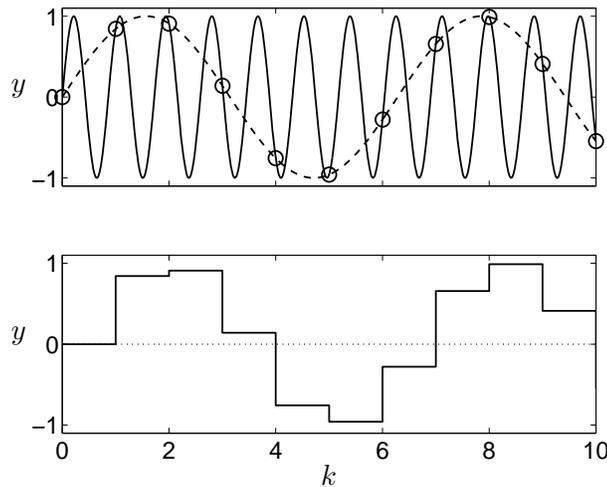


Abbildung A.5: Als „Aliasing“-Effekt bezeichnet man die Reduktion der Frequenz eines Signals beim Abtastvorgang aufgrund einer zu geringen Abtastkreisfrequenz ω_T . Quelle: [Lun06]

die sowohl vorangegangene Ausgangswerte ($y(k-1) \dots y(k-n)$) als auch Eingangswerte ($u(k-1) \dots u(k-q)$) eingehen. Diese Gleichung wird auch als Differenzgleichung bezeichnet und hat die allgemeine Form

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k) + \dots + b_q u(k-q) \quad (\text{A.8})$$

oder

$$y(k) = \sum_{i=0}^q b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i). \quad (\text{A.9})$$

(siehe [Lju99], [SS89] oder [Lun06]). Die Gleichungen (A.8) und (A.9) beschreiben sprungfähige Systeme. Bei nicht sprungfähigen Systemen entfällt der Term $b_1 u(k)$. Bei MIMO Systemen existiert für jede mögliche Ein-/Ausgangskombination eine spezifische Differenzgleichung. Die Wertfolge $\mathbf{y}(k)$ wird folglich durch ein Gleichungssystem beschrieben.

Erweitert man die Differenzgleichung (A.8) mit dem weißen Rauschen $e(k)$ zu

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k) + \dots + b_q u(k-q) + e(k) \quad (\text{A.10})$$

dann liegt ein sogenanntes „ARX“-Modell⁴ vor, worauf im weiteren Verlauf noch einmal Bezug genommen wird.

⁴ARX steht in der Zeitreihenanalyse für Auto-Regression mit eXogener Variable. Auto-Regression bedeutet hierbei, dass sich eine Variable rekursiv aus ihren eigenen Vergangenheitswerten zusammensetzt. Die Störfolge $e(k)$ stellt die exogene, also die außerhalb des Modells definierte Variable dar (siehe [Lju99]).

Übertragungsfunktion. Analog zu zeitkontinuierlichen Systemen (siehe Abschnitt A.4), kann die Differenzengleichung (A.8) in eine Übertragungsfunktion überführt werden. Während bei zeitkontinuierlichen Systemen hierfür die Laplacetransformation Anwendung findet, ist es bei zeitdiskreten System die Z-Transformation⁵. Die Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall wird deswegen häufig auch als Z-Übertragungsfunktion bezeichnet (siehe [Lun06]). Wendet man die Z-Transformation auf die Differenzengleichung (A.8) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) \\ = b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_q z^{-q} U(z) \end{aligned}$$

respektive

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (\text{A.11})$$

Häufig werden Nenner und Zähler der Übertragungsfunktion durch die Terme

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

und

$$B(z) = b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}$$

abgekürzt, womit sich die Kurzform der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (\text{A.12})$$

ergibt. Wie bereits bei der Differenzengleichung zuvor erwähnt, existiert für jede Ein-/Ausgangskombination eine spezifische Beschreibung des Übertragungsverhaltens. Für jeden Ausgang werden hierbei die zugehörigen Übertragungsfunktionen der relevanten Eingangsgrößen parallel verschaltet. Für eine einzelne Ausgangsgröße $Y_1(z)$ gilt

$$Y_1(z) = G_{11} U_1(z) + G_{12} U_2(z) + \dots + G_{1m} U_m(z)$$

und für das gesamte MIMO System somit

$$\begin{pmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \vdots \\ Y_r(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1}(z) & \dots & G_{rm}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \vdots \\ U_m(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Die einzelnen Übertragungsfunktionen werden hierbei in der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(z)$ zusammengefasst.

⁵Die Z-Transformation stellt eine spezielle Art der Laplacetransformation für beliebige Zahlenfolgen $f(k)$ dar (siehe [FK11]).

Zustandsraummodell. Zeitdiskrete Systeme können ebenfalls mittels des Zustandsraummodells

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k)\end{aligned}\tag{A.14}$$

dargestellt werden. Dieses kann entweder von der Differenzgleichung (A.8) abgeleitet werden⁶ oder bei bekannter Abtastzeit T aus dem zeitkontinuierlichen Zustandsraummodell überführt werden, wobei der folgende Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}T}, & \mathbf{B}_d &= \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C}, & \mathbf{D}_d &= \mathbf{D},\end{aligned}\tag{A.15}$$

mit der Voraussetzung dass $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist. Des Weiteren lässt sich aus $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}$ ableiten, dass für die Eigenwerte der zeitdiskreten und der zeitkontinuierlichen Systemmatrix die Beziehung

$$\lambda_i\{\mathbf{A}_d\} = e^{\lambda_i\{\mathbf{A}\}T}\tag{A.16}$$

gültig ist.

Ein durch das Zustandsraummodell (A.14) beschriebenes zeitdiskretes, dynamisches System gilt dann als asymptotisch stabil wenn für die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A}_d die Bedingung

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)\tag{A.17}$$

erfüllt ist. Dies lässt sich auch aus der Bewegungsgleichung für zeitdiskrete Systeme

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-1-j} \mathbf{B} \mathbf{u}(j)\tag{A.18}$$

ableiten, denn der Anteil der freien Bewegung $\mathbf{x}_{\text{frei}}(k) = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0$ kann nur unter der Bedingung (A.17) gegen Null gehen.

An dieser Stelle soll noch die Gewichtsfolge für zeitdiskrete Systeme

$$\mathbf{G}(k) = \begin{cases} \mathbf{D} & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d & \text{für } k \geq 1 \end{cases}\tag{A.19}$$

vorgestellt werden, welche die Antwort auf den diskreten Einheitsimpuls

$$\mathbf{u}(k) = \delta_d(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellt.

⁶Wird das zeitdiskrete Zustandsraummodell von den Differenzgleichungen abgeleitet, so liegt die Systemmatrix \mathbf{A}_d in Frobeniusform beziehungsweise nach Modifikation der Zustandsgrößen in Reglungsnormalform vor (siehe [Lun06]).

Die Terme $\mathbf{C}\mathbf{A}_d^{k-1}\mathbf{B}_d$ für $k \geq 1$ werden auch als Markov-Parameter des Zustandsraummodells (A.14) bezeichnet.

Durch Z-Transformation der Gewichtsfolge erhält man die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(z)$ mit

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d. \quad (\text{A.20})$$

Anhang B

Methoden zur „*dwell time*“-Berechnung

Für die Berechnung der in Kapitel 4 vorgestellten „*dwell time*“ existieren mittlerweile verschiedenste Ansätze. Bei den meisten Verfahren handelt es sich allerdings um Abwandlungen der in Abschnitt 4.2 vorgestellten Methode, auf die zunächst Bezug genommen wird.

B.1 „*dwell time*“ Berechnung mittels linearer Regression

Wie in (4.9) dargestellt, wird eine Exponentialfunktion an den normierten Wert des zeitlichen Verlaufs der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ eines Subsystems \mathbf{A}_q angenähert (siehe Abbildung B.1). Die Berechnung der Konstanten α und β

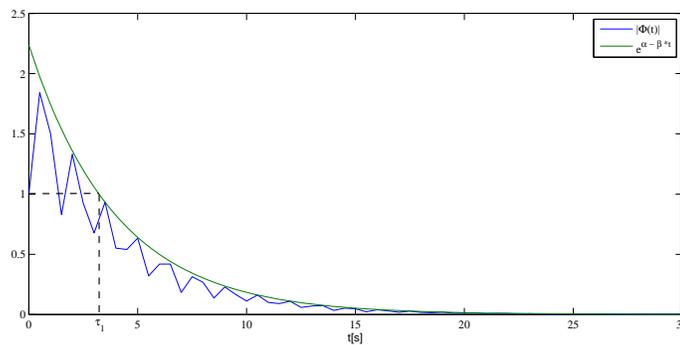


Abbildung B.1: Annäherung des normierten zeitlichen Verlaufs der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Subsystems $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}$ durch eine Exponentialfunktion

erfolgt mittels linearer Regression (siehe [BSMM01]). Hierfür wird zunächst die Punktfolge $y_i = |e^{\mathbf{A}t_i}|$ benötigt. Aus

$$y_i = e^{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}t_i} \Leftrightarrow \ln y_i = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}t_i \quad (\text{B.1})$$

folgt mit $Y = \ln y_i$ und $X = t_i$ die Regressionsgerade

$$Y = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}X. \quad (\text{B.2})$$

Diese kann mittels des Ansatzes

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}, \quad \tilde{\alpha} = \bar{y} - \tilde{\beta}\bar{x} \quad (\text{B.3})$$

berechnet werden, wobei $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Um die Bedingung in (4.9) zu erfüllen, muss nun noch die Regressionsgerade auf die lokalen Maxima der normierten Transitionsmatrix verschoben werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tilde{\alpha} + \max(Y_i - y_i), \\ \beta &= -\tilde{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

In (Abb. B.1) ist die für das Subsystem $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}$ berechnete Exponentialfunktion sowie der von dieser Funktion gehüllte Verlauf der Norm von $\Phi(t)$ dargestellt. Die mittels der Gleichungen (B.3) und (B.4) berechneten Konstanten haben die Werte $\alpha_1 = 0,8054$ und $\beta_1 = 0,25$. Gemäß Gleichung (4.8) ergibt sich somit für \mathbf{A}_1 eine Zeit τ_1 von 3,2216 Sekunden. Für das zweite Subsystem $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,4 & -1 \\ 5 & -0,6 \end{pmatrix}$ des geschalteten Systems aus Abschnitt 4.1 ergibt sich mit $\alpha_2 = 0,8077$ und $\beta_2 = 0,5$ eine Zeitkonstante τ_2 von 1,61546 Sekunden. Entsprechend Gleichung (4.8) gilt für das geschaltete System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_q \mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $q \in \{1,2\}$ eine „*dwell time*“ τ_D von 3,2216 Sekunden. Der Verlauf der Zustandsgrößen für das hier aufgeführte Beispiel eines geschalteten Systems mit einer „*dwell time*“ τ_D von 3,2216 Sekunden ist in (Abb. B.2) dargestellt.

B.2 Berechnung mittels Abstandsbetrachtung der Eigenvektoren der Systemmatrizen

Der aus [KS09] stammende und hier wiedergegebene Ansatz zur Berechnung der „*dwell time*“ verbindet gleich mehrere Bedingungen für die Stabilität geschalteter Systeme. So wird sich auf die ebenfalls in [LA09] und [NB94] aufgezeigte Tatsache bezogen, dass ein System, das nur aus stabilen, paarweise kommutativen Subsystemen besteht, asymptotisch stabil ist. Dies wird nun in [KS09] dahingehend erweitert, dass die Systemmatrizen genau dann kommutativ sind, wenn sie die gleichen Eigenvektoren besitzen. Für genau diesen Fall wird eine „*dwell time*“ von 0 Sekunden gesetzt. Die „*dwell time*“ steigt dann proportional zum Abstand der Eigenvektorsätze der Subsystemmatrizen. Als Eigenvektorsatz \mathcal{V}_q versteht man hierbei die Gesamtheit der zu einem Subsystem \mathbf{A}_q gehörenden Eigenvektoren. Für ein Subsystem i ist der Eigenvektorsatz durch eine invertierbare Matrix $\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ definiert. Für die Berechnung des Abstandes der Eigenvektorsätze zweier Subsysteme i und j , gibt

B.2. BERECHNUNG MITTELS ABSTANDSBETRACHTUNG DER
EIGENVEKTOREN DER SYSTEMMATRIZEN

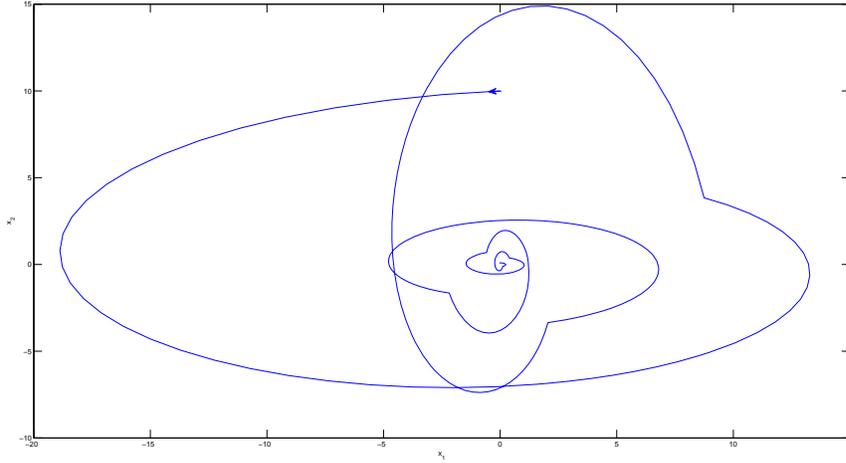


Abbildung B.2: *Asymptotisch stabiler Verlauf eines geschalteten Systems mit zwei asymptotisch stabilen Subsystemen und Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ - Das geschaltete System besteht aus den beiden asymptotisch stabilen Subsystemen $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,4 & -1 \\ 5 & -0,6 \end{pmatrix}$. Als zeitlicher Abstand zwischen den Schaltvorgängen wurde eine mittels (4.8) ermittelte „dwell time“ von 3,2216 Sekunden verwendet.*

es nach [KS09] nun zwei Möglichkeiten:

$$d_1(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) = \ln \left(\max \left\{ \|\mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_j\|, \|\mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{V}_i\| \right\} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$d_2(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) = \ln \left(\|\mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_j\| \|\mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{V}_i\| \right). \quad (\text{B.6})$$

Ausgehend von diesen zwei verschiedenen Ansätzen zur Berechnung des Abstandes der Eigenvektorsätze stehen auch zwei Möglichkeiten zur Berechnung der „dwell time“ zur Verfügung:

$$\tau_{D1} \geq \max_{j \in \mathcal{Q}} \left\{ \max_{i \in \mathcal{Q}} \left\{ \frac{d_1(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)}{\lambda_j^*} \right\} \right\} \quad (\text{B.7})$$

und

$$\tau_{D2} \geq \frac{2m - 2}{m} \max_{i, j \in \mathcal{Q}} \left\{ \frac{d_2(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)}{\lambda_i^* + \lambda_j^*} \right\} \quad (\text{B.8})$$

mit $\lambda_j^* = \min_k (|\text{Re}(\lambda_k(\mathbf{A}_j))|)$ und m als Anzahl der vorhandenen Subsysteme.

Um die „dwell time“ mittels der zwei in diesem Abschnitt vorgestellten Varianten für das geschaltete System

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} -0,4 & -1 \\ 5 & -0,6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

berechnen zu können, werden zunächst die Eigenwerte der beiden Subsysteme benötigt. Die konjugiert komplexen Eigenwerte von \mathbf{A}_1 liegen bei $-0,25 \pm j \cdot 2,2355$, die von \mathbf{A}_2 bei $-0,5 \pm j \cdot 2,2338$. Hieraus resultieren die nachfolgenden Matrizen, die spaltenweise aus den Eigenvektoren zusammengesetzt sind:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 0,9129 & 0,9129 \\ 0,0091 - j \cdot 0,4081 & 0,0091 + j \cdot 0,4081 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0,0183 + j \cdot 0,4078 & 0,0183 - j \cdot 0,4078 \\ 0,9129 & 0,9129 \end{pmatrix}.$$

Gemäß Gleichung (B.5) gilt für den Abstand d_1 der beiden Eigenvektorsätze \mathcal{V}_1 und \mathcal{V}_2

$$\begin{aligned} d_1(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) &= \ln \left(\max \left\{ \|\mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{V}_2\|, \|\mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{V}_1\| \right\} \right) \\ &= \ln \left(\max \left\{ 2,2363, 2,2380 \right\} \right) = 0,8056. \end{aligned}$$

Dies führt entsprechend (B.7) zur „*dwell time*“ $\tau_{D1} = \frac{0,8056}{0,25} = 3,2224$ Sekunden.

Folgt man Variante 2, so ergibt sich nach (B.6) und (B.8) der Abstand $d_2 = 1,6104$ und eine „*dwell time*“ von $\tau_{D2} = \frac{1,6104}{0,75} = 2,1472$ Sekunden.

Sowohl (B.7) als auch (B.8) führen zu Werten für τ_D , die in den meisten Fällen kleiner sind als die mit (4.8) berechneten Zeiten. Jedoch sind Systeme mit einer nach (B.8) berechneten „*dwell time*“ zwar stabil, aber nicht zwingend immer asymptotisch stabil (siehe Abb. B.3)).

B.3 Der „*average dwell time*“-Ansatz

Die in [Mor96] vorgestellte „*dwell time*“-Methode zur Stabilisierung geschalteter Systeme, wurde in [HM99] zur „*average dwell time*“ weiterentwickelt und soll in enger Anlehnung zu [HM99] hier wiedergegeben werden. Der Ansatz beruht auf der Tatsache, dass es nicht zwingend notwendig ist beim Schalten die mit (4.8) berechnete Zeitdauer τ_D einzuhalten, um asymptotische Stabilität für ein beliebiges Schaltsignal σ zu gewährleisten. Stattdessen wird eine „*dwell time*“ τ_{ave} eingeführt, die bei einem durchschnittlichen Einhalten der selbigen auch asymptotische Stabilität garantiert.

Ausgangspunkt ist wiederum ein geschaltetes System der Form (4.1). Zusätzlich gilt, dass eine beliebig gewählte, positive Konstante λ_0 existiert, für die alle Matrizen $(\mathbf{A}_q + \lambda_0 \mathbf{I})$ stabil sind und dass für jedes Subsystem eine Matrix \mathbf{Q} existiert, welche die Bedingung

$$\mathbf{Q}_q (\mathbf{A}_q + \lambda_0 \mathbf{I}) + (\mathbf{A}_q + \lambda_0 \mathbf{I})^T \mathbf{Q}_q = \mathbf{I}, \quad q \in \mathcal{Q} \quad (\text{B.10})$$

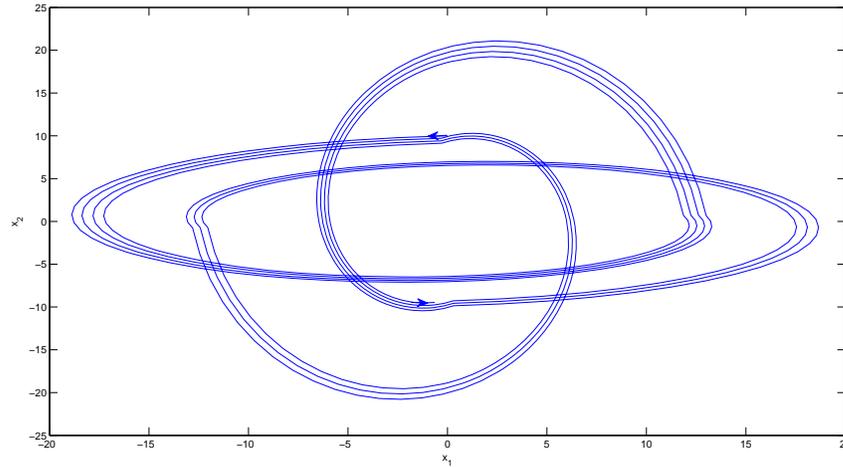


Abbildung B.3: Grenzstabiler Verlauf eines geschalteten Systems mit zwei asymptotisch stabilen Subsystemen und Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ - Das geschaltete System besteht aus den beiden an sich asymptotisch stabilen Subsystemen $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,2 & -5 \\ 1 & -0,3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,4 & -1 \\ 5 & -0,6 \end{pmatrix}$. Als zeitlicher Abstand zwischen den Schaltvorgängen wurde eine mittels (B.8) ermittelte „dwell time“ von 2,1472 Sekunden verwendet.

erfüllt. Ferner gilt dann:

$$\tau_{\text{ave}} = \max_{\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}} \frac{\ln(\sigma_{\max}[\mathbf{Q}]) - \ln(\sigma_{\min}[\bar{\mathbf{Q}}])}{2\lambda_0}, \quad (\text{B.11})$$

mit $\sigma[\mathbf{Q}]$ als Singulärwert der Matrix \mathbf{Q} (siehe [BSMM01]).

Für die Festlegung von λ_0 werden folglich die Eigenwerte der einzelnen Subsysteme betrachtet. Dabei wird für λ_0 ein Wert nahe des kleinsten Realteils aller Eigenwerte des geschalteten Systems \mathbf{A}_q gewählt. Für das geschaltete System (B.9) liegt der kleinste Realteil aller Eigenwerte beispielsweise bei $-0,25$. Wählt man $\lambda_0 = 0,2$, lösen die Matrizen

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 30,01 & 0,1 \\ 0,1 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1,0236 & 0,2953 \\ 0,2953 & 4,9409 \end{pmatrix}$$

die Gleichung (B.10). Mit (B.11) ergibt sich somit eine „average dwell time“ von

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{\ln(\sigma_{\max}[\mathbf{Q}_1]) - \ln(\sigma_{\min}[\bar{\mathbf{Q}}_2])}{2\lambda_0} = \frac{\ln(30,0104) - \ln(1,0015)}{0,4} = 8,5001.$$

Dieser Ansatz wurde in verschiedensten Arbeiten weiterentwickelt unter anderem in [ZHYM00], wo die „average dwell time“ zur Stabilisierung geschalteter

System genutzt werden, die sowohl aus stabilen als auch aus instabilen Subsystemen bestehen. Oder auch in [XQW09] und [SDZW06], wo die „*average dwell time*“ in Verbindung mit verzögerten Systemen behandelt wird.

Anhang C

Anhang zu Systemidentifikation

C.1 Methoden der Systemidentifikation

Bis zur Einführung der Zustandsraumdarstellung 1960 in [Kal60b] beruhte der auf SISO Systeme beschränkte Reglerentwurf im Wesentlichen auf Bode-, Nyquist- oder Pol-Nullstellen-Diagrammen. Die Identifikation der SISO Systeme erfolgte hierbei im Wesentlichen mittels Übergangsfunktion (Sprungantwort). Ausgehend von der Form der Übergangsfunktion kann zumindest bei einfachen Systemen leicht auf die Struktur der entsprechenden Übertragungsfunktion rückgeschlossen werden. Zusätzlich können Parameter der Übertragungsfunktion wie Zeitkonstanten oder Verstärkungsfaktoren aus der Sprungantwort berechnet werden (siehe (Abb. C.1)).

C.1.1 „Prediction Error Methods“

Zur Einführung in die auf Vorhersagefehler basierenden Identifikationsverfahren, soll an dieser Stelle zunächst basierend auf [Lju87] und [Lju99] ein weiteres einfaches Verfahren zur Bestimmung von Systemparametern unbekannter linearer SISO Systeme vorgestellt werden, das auf der Methode der kleinsten Quadrate beruht. Betrachten wir hierfür die Differenzgleichung (A.8), so ergibt sich nach deren Umstellung nach $y(k)$

$$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n) + b_2u(k-1) + \dots + b_qu(k-q).$$

Werden nun alle Koeffizienten in

$$\Theta = (a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_2 \quad b_q) \tag{C.1}$$

und alle Ein-/Ausgangsdaten in

$$\varphi(k) = (-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-q)) \tag{C.2}$$

zusammengefasst, so folgt

$$y(k) = \varphi(k)^T \Theta \tag{C.3}$$

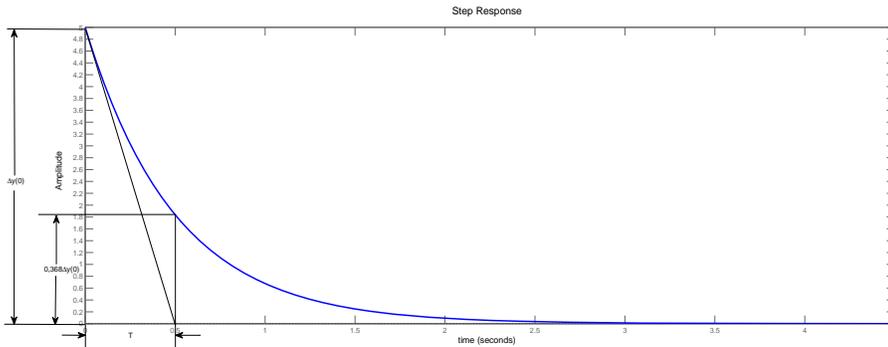


Abbildung C.1: Bei einfachen SISO Systemen kann mittels der Übergangsfunktion auf die Struktur der Strecke rückgeschlossen werden. In dem hier dargestellten Fall liegt die Übergangsfunktion eines Differenzierers mit Verzögerung 1. Ordnung vor. Des Weiteren können mittels der Übergangsfunktion die Parameter der Übertragungsfunktion bestimmt werden. So gilt für die Zeitkonstante T eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung, dass bei $t = T$ die Amplitude den 0,3679-fachen Wert der Ausgangsamplitude angenommen hat da $y(t) = ke^{-\frac{t}{T}} = ke^{-1}$ gilt. Auch wäre es möglich T mittels der in der Spitze angelegten Tangente zu bestimmen. Der Verstärkungsfaktor ergibt sich dann zu $k = T\Delta y(0)$.

oder als Prädiktor betrachtet

$$\hat{y}(k) = \varphi(k)^T \Theta. \quad (\text{C.4})$$

Der Prädiktor (C.4) stellt ein einfaches lineares Regressionsmodell dar, wobei der Prädiktor $\hat{y}(k)$ linear von Θ abhängt. Zur Bestimmung der in Θ zusammengefassten Systemkoeffizienten werden über eine bestimmte Zeitdauer $1 \leq t \leq N$ die Ein- und Ausgangswerte gemessen. Die Daten werden in

$$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)] \quad (\text{C.5})$$

zusammengefasst. Der Parametervektor $\hat{\Theta}$ wird anschließend so bestimmt (respektive geschätzt), dass der Fehler in der Vorhersage („prediction error“)

$$\epsilon(k, \hat{\Theta}) = y(k) - \hat{y}(k, \hat{\Theta}) \quad (\text{C.6})$$

möglichst gering wird. Hierfür bedient man sich der Methode der Kleinsten Quadrate („Least Squares“) um das Minimierungsproblem

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta} V_N(\Theta, Z^N) \quad (\text{C.7})$$

zu lösen, wobei sich die Kostenfunktion $V_N(\Theta, Z^N)$ über die Quadrate der Fehler in der Vorhersage der gesamten Messdaten Z^N definiert:

$$V_N(\Theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k, \Theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \varphi(k)^T \Theta)^2. \quad (\text{C.8})$$

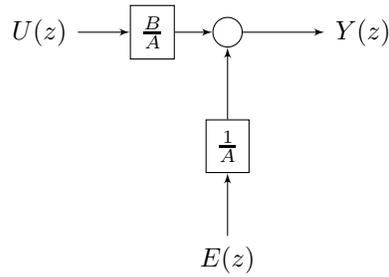


Abbildung C.2: ARX-Modell (Auto-Regression mit exogener Variable)

Um das Minimierungsproblem zu lösen wird die Kostenfunktion (C.8) abgeleitet und gleich null gesetzt:

$$0 = \frac{d}{d\Theta} V_N(\Theta, Z^N) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)(y(k) - \varphi(k)^T \Theta).$$

Der geschätzte Parametervektor $\hat{\Theta}_N$ ergibt sich folglich zu

$$\hat{\Theta}_N = \left(\sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k), \quad (\text{C.9})$$

wobei der Schätzwert $\hat{\Theta}$ sich dem wahren Parametervektor Θ für $N \rightarrow \infty$ nähert (siehe [rB65] und [Lju87]).

Die vorgestellte „Prediction Error“-Methode stellt allerdings nur einen Spezialfall dar, denn nicht nur die Kostenfunktion (C.8), für die in diesem Fall eine quadratische Norm gewählt wurde, kann beliebig gestaltet werden, sondern auch die Methode zur Lösung des Minimierungsproblems und vor allem die zugrunde liegende Modellform. Bei dem eben betrachteten Fall lag ein ideales Modell vor, da keinerlei Störung beachtet wurde. In der Differenzgleichung (A.10) wurde bereits ein Term weißen Rauschens eingeführt, was ein sogenanntes „ARX“-Modell ergibt. Führt man für die Störwertfolge $e(k)$ zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens die Funktion $H(z)$ ein, so kann das dynamische System inklusive Störverhalten im Frequenzbereich durch die allgemeine Gleichung

$$Y(z) = G(z)U(z) + H(z)E(z) \quad (\text{C.10})$$

beschrieben werden. Während $G(z)$ wie in (A.12) beschrieben vorliegt, gilt für $H(z)$ im Falle des „ARX“-Modells

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} \quad (\text{C.11})$$

(siehe auch [Lju99]). Diese Modellform bietet allerdings nur einen geringen Freiheitsgrad bei der Beschreibung der Störwertfolge $e(k)$.

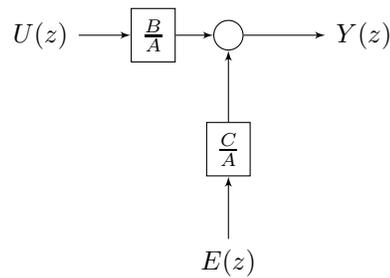


Abbildung C.3: ARMAX-Modell (Auto-Regression mit gleitenden Mittelwert -Moving Average- und exogener Variable)

Als mit [rB65] die „Maximum Likelihood“-Methode zum Schätzen der gesuchten Parameter aus der Zeitreihenanalyse in die Regelungstechnik eingeführt wurde, bezog man sich hierbei nicht mehr auf ein „ARX“-Modell sondern auf das noch allgemeinere „ARMAX“-Modell¹, wo die Störwertfolge, wie in der Differenzengleichung

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k) + \dots + b_q u(k-q) + c_1 e(k) + \dots + c_r e(k-r) \quad (\text{C.12})$$

erkenntlich, als gewichteter Mittelwert eingeht. Neben der zu maximierenden „Likelihood“-Funktion

$$L = \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{k=1}^N \epsilon_k^2 - N \log \lambda + \text{const.} \quad (\text{C.13})$$

mit der Varianz λ , werden die allgemeine Kostenfunktion $V(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \epsilon_k^2$ und das Minimierungsproblem (C.7) sowie der benötigte Lösungsalgorithmus mit [rB65] in die Regelungstechnik eingeführt. Auch wurden in [rB65] die grundlegenden Voraussetzungen formuliert, die sowohl vom zu bestimmenden System als auch von der Experimentieranordnung erfüllt werden müssen, damit die Identifizierbarkeit eines betrachteten Systems überhaupt gegeben ist. Dies wird jedoch im Abschnitt C.1.3 dieser Arbeit näher betrachtet.

Natürlich gibt es noch weitere Spezialfälle hinsichtlich Modellform wie beispielsweise das „ARARX“-, das „ARARMAX“-, das Ausgangsfehler- oder das in [BJ70] vorgestellte Box-Jenkins-Modell

$$A(z)Y(z) = \frac{B(z)}{F(z)}U(z) + \frac{C(z)}{D(z)}E(z). \quad (\text{C.14})$$

Diese verschiedenen parametrischen Modellformen lassen sich jedoch alle von der bereits vorgestellten allgemeinen Form (C.10) ableiten. Des Weiteren stel-

¹MA steht für *Moving Average* und bedeutet, dass sich die Störwertfolge als gewichteter Mittelwert in die Ausgangsfolge eingeht.

len die verschiedenen existierenden Kostenfunktionale Spezialfälle von

$$V_N(\Theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N l(\epsilon_k(\Theta)) \quad (\text{C.15})$$

dar. Diese wesentlichen Erkenntnisse wurden in [Lju78] veröffentlicht, was das Gesamtkonzept der „*Prediction Error Methods*“ vereinheitlichte. Besonders im Hinblick auf „*Prediction Error Methods*“ stellen [Lju87], [Lju99] und [SS89] bis zur Gegenwart Standardwerke für Systemidentifikation dar.

Eine Identifikation von MIMO-Systemen mittels direkter, auf Vorhersagefehler basierender Verfahren stellt sich jedoch gerade im Hinblick auf die notwendige Parametrisierung der Modelle als schwierig heraus, da hierfür viel a priori Wissen benötigt wird (beispielsweise die Systemordnung), das nicht immer gegeben ist. Nicht selten führt die Parametrisierung auch zu Divergenzverhalten bei der Lösung der zugehörigen Optimierungsprobleme. Des Weiteren bestand, zumindest bis [FL99] eine Schwierigkeit in der Identifizierung von geschlossenen Systemen, da aufgrund der Rückführung eine Korrelation der Störung $e(k)$ und der Eingangsfolge $u(k)$ auftritt.

C.1.2 „*Subspace Identification*“

Während die direkte „*Prediction Error*“-Methode auf die Bestimmung der Übertragungsfunktion ausgerichtet ist, begann mit [HK65] die parallele Entwicklung einer indirekten Identifikationsmethode, die auf das zuvor in [Kal60b] eingeführte Zustandsraummodell zurückgreift. Durch diese Arbeit werden die theoretischen Grundlagen gelegt, um aus gegebenen Ein-/Ausgangsdaten eine minimale Realisierung² des Zustandsraummodells (A.14) mit endlicher Ordnung zu ermitteln. Intention ist es, ausgehend von den, die Gewichtsfolge (A.19) beschreibenden Markov-Parametern $\mathbf{G}(k)$ ³ eine Hankel-Matrix⁴

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_4 \cdots \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_4 & \mathbf{G}_5 \cdots \\ \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_4 & \mathbf{G}_5 & \mathbf{G}_6 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

²Minimale Realisierung bedeutet in diesem Zusammenhang, dass ein Zustandsraummodell bestimmt werden soll, das die gegebenen Ein-/Ausgangsdaten reproduziert, wobei die Anzahl der hierfür eingeführten Zustände so gering wie möglich gewählt wird.

³Die Notation $\mathbf{G}(k)$ für die Markov-Parameter wurde an dieser Stelle gewählt um Konsistenz zu wahren, da die Markov-Parameter nichts anderes als die Terme der Gewichtsfolge darstellen. Sehr häufig werden die Markov-Parameter jedoch als $\mathbf{H}(k)$ dargestellt.

⁴Als Hankel-Matrizen werden jene Matrizen bezeichnet, in deren inversen Nebendiagonalen (also von rechts oben nach links unten verlaufend) nur ein konstanter Wert auftritt.

zu konstruieren, die das Produkt aus einer unendlich-dimensionalen Beobachtbarkeits- und einer unendlich-dimensionalen Steuerbarkeitsmatrix darstellt,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \end{pmatrix} (\mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d\mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d^2\mathbf{B}_d \quad \cdots), \quad (\text{C.17})$$

um so mittels des Zusammenhanges $\mathbf{G}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{k-1}\mathbf{B}_d$ die Zustandsraummatrizen $\mathbf{A}_d^{n \times n}$, $\mathbf{B}_d^{n \times m}$ und $\mathbf{C}^{r \times n}$ zu bestimmen. Der Rang von \mathcal{H} entspricht hierbei der kleinstmöglichen Systemordnung.

Natürlich beschreibt dieser in [HK65] vorgestellte Ansatz aufgrund der Verwendung unendlich-dimensionaler Matrizen zunächst ein rein theoretisches Vorgehen, er bildet jedoch die Grundlage für eine Methodik der Systemidentifikation, die aufgrund der Tatsache, dass systemrelevante Matrizen (wie beispielsweise die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix) als Untervektorräume von projizierten Ein-/Ausgangsdatenmatrizen gewonnen werden, als „*Subspace Identification*“ bezeichnet wird.

Nachfolgend werden verschiedene Ausprägungen der „*Subspace Identification*“-Methodik vorgestellt. Dabei werden Verfahrensweisen für Systeme mit rein deterministischer, rein stochastischer und deterministisch-stochastischer Eingangsfolge betrachtet.

C.1.2.1 Deterministische Systeme

„*Subspace Identification*“-Methoden sollen im Folgenden zunächst für Systeme mit rein deterministischen⁵, endlichen Eingangsfolgen betrachtet werden. Die nachfolgenden Ausführungen lehnen sich dabei stark [MMVV89] an.

Zunächst wird ein einfaches zeitdiskretes Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

betrachtet, das über einen rein deterministischen Anteil $\mathbf{u}(k)$ verfügt. Mit den gegebenen Ein-/Ausgangsdatensätzen werden zwei Block-Hankel-Matrizen

$$\mathcal{H}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{U}_p \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_f \\ \mathbf{U}_f \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

mit

$$\mathbf{Y}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \cdots & \mathbf{y}(j-1) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(j) \\ \mathbf{y}(2) & \mathbf{y}(3) & \cdots & \mathbf{y}(j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(i-1) & \mathbf{y}(i) & \cdots & \mathbf{y}(j+i-2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

⁵Deterministische Eingangsfolgen oder -signale bezeichnen Eingangsgrößen, deren Verlauf bewusst gesteuert und vor allem reproduziert werden kann.

und

$$\mathbf{Y}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(i) & \mathbf{y}(i+1) & \cdots & \mathbf{y}(i+j-1) \\ \mathbf{y}(i+1) & \mathbf{y}(i+2) & \cdots & \mathbf{y}(i+j) \\ \mathbf{y}(i+2) & \mathbf{y}(i+3) & \cdots & \mathbf{y}(i+j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(2i-1) & \mathbf{y}(2i) & \cdots & \mathbf{y}(2i+j-2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

gebildet, wobei für die Matrizen \mathbf{U}_p und \mathbf{U}_f die gleiche Bildungsvorschrift gilt. Die Variable i ist hierbei frei wählbar, sollte aber mindestens größer als die zu erwartende Anzahl an Zuständen des untersuchten Systems sein. Stehen zur Identifikation s Datensätze an Ein-/Ausgangsdaten zur Verfügung, so gilt für die Anzahl j an Spalten $j = s - 2i + 1$. Mit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ folgt $\mathbf{Y}_{p/f} \in \mathbb{R}^{ri \times j}$ und $\mathbf{U}_{p/f} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$. Die Zustände des dynamischen Systems werden durch die Zustandsmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p &= (\mathbf{x}(0) \quad \mathbf{x}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(j-1)) \\ \mathbf{X}_f &= (\mathbf{x}(i) \quad \mathbf{x}(i+1) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(i+j-1)) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

beschrieben. Des Weiteren ist mit

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}_d \\ \mathbf{CA}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}_d^{i-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix und eine Block-Toeplitz-Matrix⁶ der Form

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CB}_d & \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CA}_d\mathbf{B}_d & \mathbf{CB}_d & \mathbf{D} & \cdots & 0 \\ \mathbf{CA}_d^2\mathbf{B}_d & \mathbf{CA}_d\mathbf{B} & \mathbf{CB}_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}_d^{i-2}\mathbf{B}_d & \mathbf{CA}_d^{i-3}\mathbf{B}_d & \mathbf{CA}_d^{i-4}\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

welche die Markov-Parameter enthält, gegeben. Für das System (C.18) gelten die Ein-/Ausgangsgleichungen

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_p + \mathbf{H}_t \mathbf{U}_p, \quad (\text{C.25})$$

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_f + \mathbf{H}_t \mathbf{U}_f. \quad (\text{C.26})$$

Wie in [MMVV89] bewiesen wird, ist der Zeilenraum⁷ der Zustandsmatrix \mathbf{X}_f die Schnittmenge der Zeilenräume von \mathcal{H}_p und \mathcal{H}_f :

$$\text{ZR}(\mathbf{X}_f) = \text{ZR}(\mathcal{H}_p) \cap \text{ZR}(\mathcal{H}_f).$$

⁶Als Toeplitz-Matrizen werden jene Matrizen deklariert, deren Haupt- und Nebendiagonalen nur einen konstanten Wert aufweisen.

⁷Als Zeilenraum einer Matrix bezeichnet man die lineare Hülle der Zeilenvektoren. Die Dimension dieses Raumes wird auch als Zeilenrang deklariert.

Aus diesem Grund lässt sich, wie ebenfalls in [MMVV89] nachgewiesen wird, die Zustandsmatrix \mathbf{X}_f mittels einer Singulärwertzerlegung⁸ der aus den Hankel-Matrizen zusammengesetzten Matrix

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_p \\ \mathcal{H}_f \end{pmatrix}$$

bestimmen. Dabei gilt:

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{U}_q^T \mathbf{U}_{12}^T \mathcal{H}_p \quad (\text{C.27})$$

mit \mathbf{U}_{12} aus der Singulärwertzerlegung

$$\mathcal{H} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^T$$

und \mathbf{U}_q als Ergebnis der weiterführenden Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{U}_{12}^T \mathbf{U}_{11} \mathbf{S}_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_q & \mathbf{U}_q^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_q^T \\ \mathbf{V}_q^{\perp T} \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt $\mathbf{U}_{11} \in \mathbb{R}^{(mi+ri) \times (2mi+n)}$, $\mathbf{U}_{12} \in \mathbb{R}^{(mi+ri) \times (2ri-n)}$, $\mathbf{S}_{11} \in \mathbb{R}^{(2mi+n) \times (2mi+n)}$ und $\mathbf{U}_q \in \mathbb{R}^{(2ri-n) \times n}$.

Eine explizite Berechnung der Zustandsmatrix \mathbf{X}_f ist allerdings nicht notwendig, denn bei Umstellung der Hankel-Matrizen in die Form

$$\mathcal{H}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(j-1) \\ \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \cdots & \mathbf{y}(j-1) \\ \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(j) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(j) \\ \mathbf{u}(2) & \mathbf{u}(3) & \cdots & \mathbf{u}(j+1) \\ \mathbf{y}(2) & \mathbf{y}(3) & \cdots & \mathbf{y}(j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}(i-1) & \mathbf{u}(i) & \cdots & \mathbf{u}(j+i-2) \\ \mathbf{y}(i-1) & \mathbf{y}(i) & \cdots & \mathbf{y}(j+i-2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.28})$$

(selbiges gilt natürlich für \mathcal{H}_f), können die gesuchten Zustandsraummatrizen nach Durchführung der Singulärwertzerlegungen durch Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_q^T \mathbf{U}_{12}^T \mathbf{U}_{(m+r+1:(i+1)(m+r),:)} \mathbf{S} \\ \mathbf{U}_{(mi+ri+m+1:(m+r)(i+1),:)} \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_q^T \mathbf{U}_{12}^T \mathbf{U}_{(1:mi+ri,:)} \mathbf{S} \\ \mathbf{U}_{(mi+ri+1:mi+ri+m,:)} \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

bestimmt werden⁹.

⁸siehe [BSMM01]

⁹In dem Fall, dass nur bestimmte Teile einer Matrix in eine Gleichung eingehen, wurde an dieser als auch an nachfolgenden Stellen eine Schreibweise entsprechend den in MATLAB geltenden Konventionen gewählt.

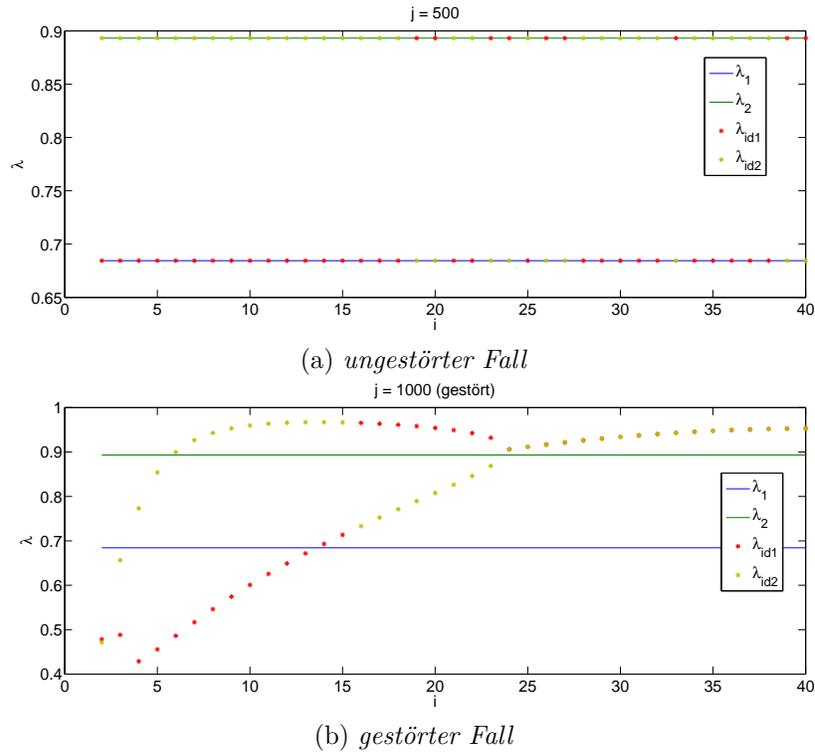


Abbildung C.4: Vergleich eines mittels Schnittmengenmethode [MMVV89] identifizierten Systems und des Originalsystems $\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 0,7024 & 0,0586 \\ 0,0586 & 0,8792 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} -1,3988 & -0,3352 \\ -1,1462 & 1,4007 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1,1490 & 0,9644 \\ -1,8854 & 1,7803 \end{pmatrix}$ anhand der Eigenwerte λ . Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ des Originalsystems sind als durchgängige Linien dargestellt. Zur Durchführung des Algorithmus wurde ein Datensatz von 500 Wertepaaren im ungestörten und von 1000 Wertepaaren im gestörten Fall verwendet. Die Eigenwerte des identifizierten Systems $\lambda_{id_{1/2}}(*)$ sind in Abhängigkeit des Parameters i dargestellt. Als deterministische Eingangsfolge wurde die sinusoidale Folge $\mathbf{u}(k) = \begin{pmatrix} 2 \sin(0,05 \cdot k/10) \\ \sin(0,05 \cdot k/10 + 0,2) \end{pmatrix}$ gewählt. Im gestörten Fall C.4b wurde weißes Rauschen mit einer Kovarianz von $5 \cdot 10^{-4}$ als Prozessrauschen hinzugefügt.

Dass es sich bei dem vorgestellten Algorithmus nach [MMVV89] um einen für rein deterministische Signale ausgelegten Algorithmus handelt, ist anhand des in (Abb. C.4) dargestellten Beispiels deutlich ersichtlich. Während in (Abb. C.4a) das Ergebnis der erfolgreichen Identifikation der Eigenwerte eines linearen zeitinvarianten Systems der Form (A.14) dargestellt ist, zeigt (Abb. C.4b) den Fall eines mit Prozessrauschen versehenen Systems (C.18). Eine Systemidentifikation mittels der eben vorgestellten Schnittmengenmethode ist hierbei nicht mehr möglich. Die identifizierten Eigenwerte sind in Abhängigkeit des Parameters i abgebildet. Für jeden Wert von i wurde eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 Durchgängen absolviert.

Grundsätzlich existieren zur Identifikation rein deterministischer Systeme zwei Klassen von Algorithmen. Zum Einem der zuvor in [MMVV89] vorgestellte Algorithmus, der sich der Tatsache bedient, dass sich die Zustandsfolge des gesuchten Systems, als Schnittmenge der Zeilenräumen zweier Hankel-

Matrizen berechnen lässt, die aus den gemessenen Ein-/Ausgangsdaten konstruiert werden. Eine andere Klasse von Algorithmen ([OMS91], [VD92a], [VD92b], [Ver93] und [Ver94]) basiert auf der in Anhang E beschriebenen Projektion des Zeilenraumes einer mit der Ausgangsfolge konstruierten Hankel-Matrix auf das orthogonale Komplement des Zeilenraumes einer Hankel-Matrix der zugehörigen Eingangsfolge.

Nimmt man die Ein-/Ausgangsgleichung (C.26) und multipliziert diese mit dem in Anhang E vorgestellten Operator für die orthogonale Projektion $\Pi_{\mathbf{U}_f^\perp}$ so hebt sich der Summand $\mathbf{H}_t \mathbf{U}_f / \mathbf{U}_f^\perp$ auf und es bleibt

$$\mathbf{Y}_f / \mathbf{U}_f^\perp = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_f / \mathbf{U}_f^\perp. \quad (\text{C.30})$$

Wie in [OMS91] und [VD92a] gezeigt wird, kann aus (C.30) mittels Singulärwertzerlegung die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}_i$, vor allem aber die Ordnung n des gesuchten Systems bestimmt werden. Hierzu bedient man sich der in Anhang E aufgeführten Tatsache, dass sich eine Matrix mittels Projektion in zwei Matrizen zerlegen lässt, deren Zeilenräume zu einander orthogonal sind. Neben den im Anhang E aufgeführten Matrixgleichungen, kann man sich auch einer LQ-Zerlegung zur Berechnung der Projektionen bedienen (siehe [OM96]). Faktorisiert man die Hankel-Matrix $\mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{Y}_f \end{pmatrix}$ entsprechend

$$\mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{pmatrix} \quad (\text{C.31})$$

so gilt für die Projektionen

$$\mathbf{Y}_f / \mathbf{U}_f = \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T \quad (\text{C.32})$$

und

$$\mathbf{Y}_f / \mathbf{U}_f^\perp = \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T. \quad (\text{C.33})$$

Die Reihenfolge von Eingangs- und Ausgangsfolge wurde in diesem Fall bei der Erstellung der Hankel-Matrix \mathcal{H}_f vertauscht (vergleiche (C.19)). Die LQ-Faktorisierung erfolgt durch QR-Zerlegung der Transponierten Hankel-Matrix mittels des Zusammenhanges

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} \mathbf{L}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Um den Rang der Projektion $\mathbf{Y}_f / \mathbf{U}_f^\perp$ zu bestimmen, folgt eine Singulärwertzerlegung der Matrix \mathbf{L}_{22} der Form

$$\mathbf{L}_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix}. \quad (\text{C.34})$$

Die Anzahl der Diagonalelemente von \mathbf{S} entspricht hierbei der Anzahl n der Zustände des gesuchten Systems.

Weiterführend erfolgt die Berechnung der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix mittels der Gleichung

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}^{1/2}. \quad (\text{C.35})$$

Zur Bestimmung der Zustandsraummatrizen \mathbf{A}_d und \mathbf{C} werden die Matrizen $\bar{\mathbf{\Gamma}}_i$ und $\underline{\mathbf{\Gamma}}_i$ durch Streichung der ersten beziehungsweise letzten r Zeilen von $\mathbf{\Gamma}_i$ gebildet, wobei r der Anzahl der Ausgänge des gesuchten Systems entspricht. Die Matrix \mathbf{C} entspricht dabei den ersten r Zeilen der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix. Die Systemmatrix \mathbf{A}_d wird mit Hilfe des Zusammenhangs

$$\mathbf{A}_d = \underline{\mathbf{\Gamma}}_i^+ \bar{\mathbf{\Gamma}}_i \quad (\text{C.36})$$

ermittelt.

Die Bestimmung der Matrizen \mathbf{B}_d und \mathbf{D} erfolgt mittels des Gleichungssystems

$$\mathbf{\Gamma}_i^\perp \mathbf{Y}_f \mathbf{U}_f^+ = \mathbf{\Gamma}_i^\perp \mathbf{H}_t, \quad (\text{C.37})$$

das man durch Linksmultiplikation von (C.26) mit $\mathbf{\Gamma}_i^\perp$ erhält. $\mathbf{\Gamma}_i^\perp \in \mathbb{R}^{(ri-n) \times ri}$ erfüllt dabei die Bedingung $\mathbf{\Gamma}_i^\perp \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{0}$ und berechnet sich mittels des Zusammenhangs

$$\mathbf{\Gamma}_i^\perp = \mathbf{U}_2^T. \quad (\text{C.38})$$

Da \mathbf{A}_d , \mathbf{C} , $\mathbf{\Gamma}_i^\perp$, \mathbf{U}_f und \mathbf{Y}_f bekannt sind, lässt sich das überbestimmte Gleichungssystem, das nur linear von \mathbf{B}_d und \mathbf{D} abhängt, unter anderem mittels der Methode der kleinsten Quadrate lösen (siehe [OM96]). Hierfür wird Gleichung (C.37) mittels der Substitutionen

$$\left(\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{M}_i \right) = \mathbf{\Gamma}_i^\perp \mathbf{Y}_f \mathbf{U}_f^+$$

und

$$\left(\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{L}_i \right) = \mathbf{\Gamma}_i^\perp,$$

mit $\mathbf{M}_k \in \mathbb{R}^{(ri-n) \times m}$ und $\mathbf{L}_k \in \mathbb{R}^{(ri-n) \times r}$, in die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \cdots & \mathbf{L}_{i-1} & \mathbf{L}_i \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 & \cdots & \mathbf{L}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_4 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{L}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{\Gamma}}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

überführt.

Ein Anwendungsbeispiel der Projektionsmethode ist in (Abb. C.5) dargestellt. Wie auch schon bei der Schnittmengenmethode wird deutlich, dass eine Systemidentifikation bei Vorhandensein von Prozessrauschen mittels dieses für rein deterministische Systeme ausgelegten Algorithmus nicht möglich ist (siehe (Abb. C.5b)). Auch bei diesem Beispiel wurde für jeden Wert des Parameters i eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 Durchführungen absolviert.

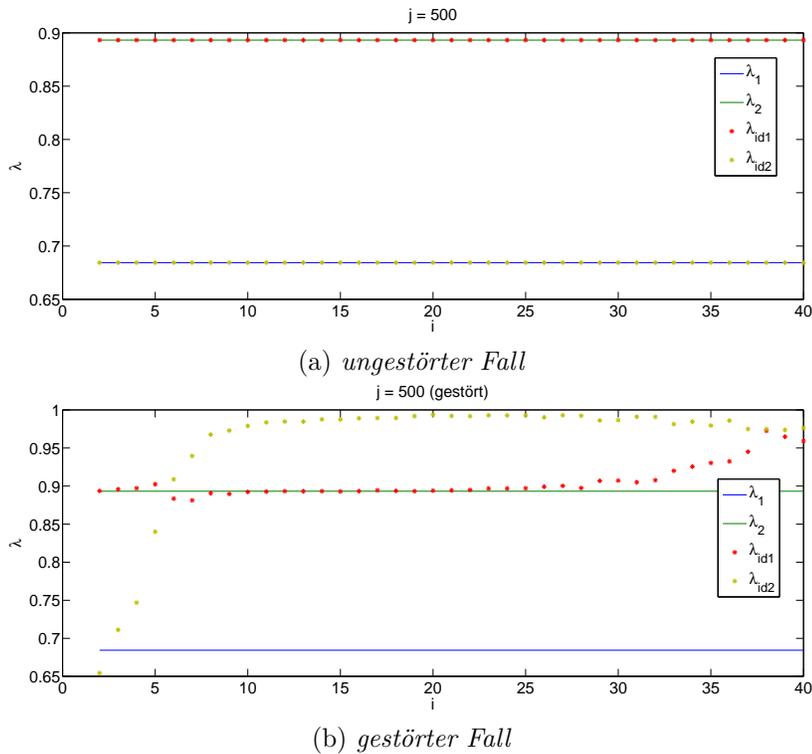


Abbildung C.5: Vergleich eines mittels Projektion [OMS91] identifizierten Systems und des Originalsystems $\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 0,7024 & 0,0586 \\ 0,0586 & 0,8792 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} -1,3988 & -0,3352 \\ -1,1462 & 1,4007 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1,1490 & 0,9644 \\ -1,8854 & 1,7803 \end{pmatrix}$ anhand der Eigenwerte λ . Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ des Originalsystems sind als durchgängige Linien dargestellt. Zur Durchführung des Algorithmus wurde ein Datensatz von 500 Wertepaaren verwendet. Die Eigenwerte des identifizierten Systems $\lambda_{id1/2}(\ast)$ sind in Abhängigkeit des Parameters i dargestellt. Als deterministische Eingangsfolge wurde die sinusoidale Folge $\mathbf{u}(k) = \begin{pmatrix} 2 \sin(0,05 \cdot k/10) \\ \sin(0,05 \cdot k/10 + 0,2) \end{pmatrix}$ gewählt. Im gestörten Fall C.5b wurde weißes Rauschen mit einer Kovarianz von $5 \cdot 10^{-4}$ als Prozessrauschen hinzugefügt.

C.1.2.2 Stochastische Systeme

Das auf deterministische Systeme ausgelegte Problem der minimalen Realisierung wurde mit [Aka74] und [Aka75] (auf deren Ausführungen der nachfolgende Abschnitt beruht) auf Systeme mit rein stochastischen¹⁰ Eingangsfolgen der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}\tag{C.40}$$

mit einer gegebenen Kovarianzfolge $\boldsymbol{\lambda}_i$, $\boldsymbol{\lambda}_i = \mathbb{E}(\mathbf{y}(k+i)\mathbf{y}(k)^T)$, übertragen. Die Vektoren $\mathbf{w}(k)$ und $\mathbf{v}(k)$ bezeichnen zwei voneinander völlig unabhängige Folgen von unkorrelierten, normalverteilten Zufallszahlen mit Erwartungswert null (weißes Rauschen) und der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{W} = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix}.\tag{C.41}$$

$\mathbb{E}()$ bezeichnet den Erwartungswert.

Bei diesem Realisierungsproblem gilt es nun ein Zustandsraummodell (\mathbf{A}_d , \mathbf{C}) mit möglichst geringer Anzahl n an Zuständen $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ und den Elementen \mathbf{Q} , \mathbf{S} und \mathbf{R} der Kovarianzmatrix zu finden, das als Kovarianz für $\mathbf{y}(k)$ die Folge $\boldsymbol{\lambda}_i$ aufweist.

Das System (C.40) wird als mittelwertstationär mit

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}_k) = 0\tag{C.42}$$

betrachtet. Die Kovarianzen der Zustandsfolge werden stationär in der Zustandskovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T)\tag{C.43}$$

zusammengefasst. Da $\mathbf{w}(k)$ und $\mathbf{v}(k)$ unabhängig von \mathbf{x}_k sind, gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T) &= 0, \\ \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T) &= 0.\end{aligned}\tag{C.44}$$

Erstellt man die Kovarianzmatrix für \mathbf{x}_{k+1}

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^T),\tag{C.45}$$

so erhält man unter Einbeziehung von (C.40) und (C.44)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{E}((\mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k)(\mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k)^T) \\ &= \mathbf{A}_d \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{A}_d \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T) + \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_k^T) \mathbf{A}_d^T + \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) \\ &= \mathbf{A}_d \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) \mathbf{A}_d^T + \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T)\end{aligned}$$

¹⁰Stochastische Eingangsfolgen oder -signale bezeichnen Eingangsgrößen, deren Verlauf weder vorhergesagt noch gezielt reproduziert werden kann. In diesem speziellen Fall wird die stochastische Eingangsfolge durch weißes Rauschen (unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswert null und konstanter Varianz) abgebildet.

Mit $E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{Q}$ aus (C.41), ergibt sich die Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}_d \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} \quad (\text{C.46})$$

zur Bestimmung der stationären Zustandskovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$.

Zu Beginn dieses Abschnittes wurden bereits die Kovarianzmatrizen der Ausgangsfolge definiert mit

$$\mathbf{\Lambda}_i = E(\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T). \quad (\text{C.47})$$

Für

$$\mathbf{\Lambda}_0 = E(\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T)$$

ergibt sich bei einem Vorgehen analog zu (C.46) die Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{C} \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}. \quad (\text{C.48})$$

Definiert man weitergehend eine Kovarianzmatrix \mathbf{G} gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= E(\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{y}_k^T) \\ &= E((\mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k)(\mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k)^T) \\ &= \mathbf{A}_d \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T + \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

so erhält man für die Kovarianzmatrizen der Ausgangsfolge

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{C.50})$$

Die Ausgangskovarianzen können folglich als Markov-Parameter des Systems $\mathbf{A}_d, \mathbf{G}, \mathbf{C}, \mathbf{\Lambda}_0$ betrachtet werden. Somit kann eine Block-Toeplitz-Matrix \mathcal{T}_i der Ausgangskovarianzen generiert werden, die sich als Produkt einer erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}_i$ und einer erweiterten, umgekehrten Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{\Delta}_i$ darstellt:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_i & \mathbf{\Lambda}_{i-1} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{\Lambda}_1 \\ \mathbf{\Lambda}_{i+1} & \mathbf{\Lambda}_i & \cdots & \mathbf{\Lambda}_3 & \mathbf{\Lambda}_2 \\ \mathbf{\Lambda}_{i+2} & \mathbf{\Lambda}_{i+1} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_4 & \mathbf{\Lambda}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{2i-1} & \mathbf{\Lambda}_{2i-2} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{i+1} & \mathbf{\Lambda}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G} & \mathbf{A}_d^{i-2} \mathbf{G} & \cdots & \mathbf{A}_d \mathbf{G} & \mathbf{G} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

Folgt man der Definition für Kovarianzen aus Anhang E.3, so folgt für $\mathbf{\Lambda}_i$

$$\mathbf{\Lambda}_i = E(\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T) = E_j \left(\sum_{n=0}^{j=1-i} \mathbf{y}_{k+n+i} \mathbf{y}_{k+n}^T \right). \quad (\text{C.52})$$

Unter Beachtung der Bildungsvorschriften (C.20) und (C.21) für die Hankel-Matrizen der Ausgangsdaten \mathbf{Y}_p und \mathbf{Y}_f , so entspricht der Term $\sum_{k=0}^{j=i} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T$ der Multiplikation der ersten Zeile von \mathbf{Y}_f mit der ersten Zeile von \mathbf{Y}_p . Mit der Definition für die Kovarianz zwischen Matrizen (E.6) folgt somit

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{\Phi}_{[\mathbf{Y}_{f(1,\cdot)}, \mathbf{Y}_{p(1,\cdot)}]}. \quad (\text{C.53})$$

Führt man diesen Schritt für alle Kovarianzeinträge der Toeplitz-Matrix \mathcal{T} sinngemäß durch, so folgt der Zusammenhang

$$\mathcal{T}_i = \mathbf{\Phi}_{[\mathbf{Y}_f, \mathbf{Y}_p]}. \quad (\text{C.54})$$

Des Weiteren wird die Toeplitz-Matrix

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i &= \mathbf{\Phi}_{[\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p]} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_0 & \mathbf{\Lambda}_{-1} & \mathbf{\Lambda}_{-2} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{1-i} \\ \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Lambda}_0 & \mathbf{\Lambda}_{-1} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{2-i} \\ \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Lambda}_0 & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{3-i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{i-1} & \mathbf{\Lambda}_{i-2} & \mathbf{\Lambda}_{i-3} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

definiert.

Bezeichnet nun die Matrix \mathcal{O}_i die orthogonale Projektion von \mathbf{Y}_f auf \mathbf{Y}_p gemäß

$$\mathcal{O}_i = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p, \quad (\text{C.56})$$

so folgt unter Beachtung von Gleichung (E.8), die unter anderem die orthogonale Projektion für den stochastischen Fall definiert, sowie von (C.51) und (C.55)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_i &= \mathcal{T}_i \mathcal{L}_i^+ \mathbf{Y}_p \\ &= \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{\Delta}_i \mathcal{L}_i^+ \mathbf{Y}_p. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Hierbei entspricht der Term $\mathbf{\Delta}_i \mathcal{L}_i^+ \mathbf{Y}_p$ der aus den Kalman-Zuständen gebildeten Matrix $\hat{\mathbf{X}}_i$ des Kalman-Filters

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k)), \quad (\text{C.58})$$

$$\mathbf{K}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T) (\mathbf{\Lambda}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T)^{-1}, \quad (\text{C.59})$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T + \mathbf{K}(k) (\mathbf{G} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T)^T. \quad (\text{C.60})$$

Diese Form des Kalman-Filters kann aus den im Anhang D vorgestellten Gleichungen mittels Substitution der ursprünglichen Zustandskovarianz $\mathbf{P}(k)$ durch den Term $\mathbf{\Sigma} - \mathbf{P}^*(k)$ hergeleitet werden. Zur Vereinfachung wird nachfolgend die Kovarianz $\mathbf{P}^*(k)$ mit $\mathbf{P}(k)$ weitergeführt.

Ein Beweis für den Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{\Delta}_i \mathcal{L}_i^+ \mathbf{Y}_p, \quad (\text{C.61})$$

der aufzeigt, dass die Kalman-Zustände als Linearkombination der Ausgangsdaten dargestellt werden können, ist in [OM96] zu finden.

Setzt man nun (C.61) in (C.57) ein, so folgt:

$$\mathcal{O}_i = \mathbf{\Gamma}_i \hat{\mathbf{X}}_i. \quad (\text{C.62})$$

Der Zeilenraum der aus den Kalman-Zuständen gebildeten Matrix $\hat{\mathbf{X}}_i$ und der Spaltenraum der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}_i$ lassen sich folglich ohne jegliche Kenntnis der Matrizen des Systems (C.40) aus den Ausgangsdaten in (C.56) berechnen.

Die Lösung des stochastischen Identifikationsproblems wäre nun unter anderem durch Anwendung des nachfolgenden Algorithmus möglich.

1. Zunächst wird aus den Ausgangsdaten die orthogonale Projektion (C.56) berechnet.
2. Durch eine Singulärwertzerlegung von \mathcal{O}_i gemäß

$$\mathcal{O}_i = (\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix}, \quad (\text{C.63})$$

kann wie beim deterministischen Fall die Anzahl der Zustände n gleich der Anzahl der von null verschiedenen Singulärwerte (Diagonalelemente der Matrix \mathbf{S}) gewählt werden.

3. Die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}_i$ wird mittels der Gleichung

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \quad (\text{C.64})$$

berechnet.

4. Die Bestimmung der Matrix \mathbf{A}_d erfolgt analog zum deterministischen Fall mittels

$$\mathbf{A}_d = \underline{\mathbf{\Gamma}}_i^+ \overline{\mathbf{\Gamma}}_i, \quad (\text{C.65})$$

wobei man $\overline{\mathbf{\Gamma}}_i(\underline{\mathbf{\Gamma}}_i)$ durch Streichung der ersten (letzten) r Zeilen von $\mathbf{\Gamma}_i$ erhält.

5. Die Matrix \mathbf{C} entspricht wiederum den ersten r Zeilen der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix während \mathbf{G} den letzten r Zeilen der erweiterten Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{\Gamma}_i^+ \Phi_{[\mathbf{Y}_f, \mathbf{Y}_p]} \quad (\text{C.66})$$

entspricht.

6. Die Kovarianz $\mathbf{\Lambda}_0$ kann schließlich mit Hilfe der Gleichung

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \Phi_{[\mathbf{Y}_{(i,\cdot)}, \mathbf{Y}_{(i,\cdot)}]} \quad (\text{C.67})$$

berechnet werden.

Mit den Matrizen \mathbf{A}_d , \mathbf{C} , \mathbf{G} und $\mathbf{\Lambda}_0$ sind somit alle Voraussetzungen gegeben um die Ausgangskovarianzfolge $\mathbf{\Lambda}_i$ des stochastischen Systems (C.40) gemäß (C.50) zu rekonstruieren.

Besteht die Notwendigkeit der Kenntnis der Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{S} und \mathbf{R} , so können diese mittels der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \text{E}_j \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_w \\ \boldsymbol{\rho}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_w^T & \boldsymbol{\rho}_v^T \end{pmatrix} \right) \quad (\text{C.68})$$

bestimmt werden. Die Matrizen $\boldsymbol{\rho}_w$ und $\boldsymbol{\rho}_v$ stellen dabei Folgen der Vektoren $\boldsymbol{q}_w \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{q}_v \in \mathbb{R}^r$ dar. Diese Vektoren sind die Residuen, die durch Abgleich des identifizierten System \mathbf{A}_d , \mathbf{C} mit dem Ausgangssatzen \mathbf{Y} entstehen:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_w \\ \boldsymbol{\rho}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{(i,:)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i. \quad (\text{C.69})$$

Diese Residuen werden auch häufig als Kalman-Filter-Residuen oder Innovation bezeichnet.

In (Abb. C.6) ist das Ergebnis der Identifikation eines stochastischen Systems der Form (C.40) dargestellt, wobei die identifizierten Eigenwerte in Abhängigkeit des Parameters i abgebildet sind. Für jedes i wurde dabei eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 Durchläufen angesetzt. Dies wurde jeweils für 2000, 4000 und 6000 Wertepaare durchgeführt. Wie im Abschnitt C.1.3 noch näher erläutert wird, ist bei Systemen mit stochastischen Anteil die Forderung nach $j \rightarrow \infty$ für eine erfolgreiche Identifikation essentiell. Dieser Zusammenhang lässt sich auch in (Abb. C.6) erkennen. Der Bedarf an einer so großen Menge an Messdaten verdeutlicht allerdings auch, dass der vorgestellte Algorithmus vor allem der „offline“ Bestimmung von Systemen im Rahmen experimenteller Systemidentifikation dient und für Echtzeitidentifikation eher ungeeignet erscheint.

Das hier vorgestellte Verfahren zur Identifikation stochastischer Systeme der Form (C.40) stellt nur einen von einer Vielzahl von Ansätzen dar, die seit Einführung des minimalen Realisierungsproblems durch [Aka74] und [Aka75] entwickelt wurde. Dieser spezielle Ansatz wird auch als „*Unweighted Principal Component*“ (UPC)-Algorithmus bezeichnet (siehe [OM96]). Eine ähnliche Vorgehensweise weißt der CVA-Ansatz („*Canonical Variate Analysis*“) auf, der sich der kanonischen Korrelationsanalyse¹¹ zur Herleitung linearer Zusammenhänge zwischen vergangenen und zukünftigen Ein-/Ausgangsdaten bedient. Während die erste Ausprägung des CVA-Ansatzes in [Lar83] und weiterführend in [Lar90] eher theoretischer Natur ist, da dieser unendlich langer Datensätze bedarf um eine adäquate Schätzung der Kovarianzmatrizen zu gewährleisten, ist eine praktische Umsetzung der in [OM91] vorgestellten Variante des CVA-Ansatzes, die sich, wie die eben vorgestellte Methode, geometrischer Ansätze

¹¹Die kanonische Korrelationsanalyse dient der Untersuchung von Abhängigkeiten zwischen zwei Gruppen von Zufallsvariablen.

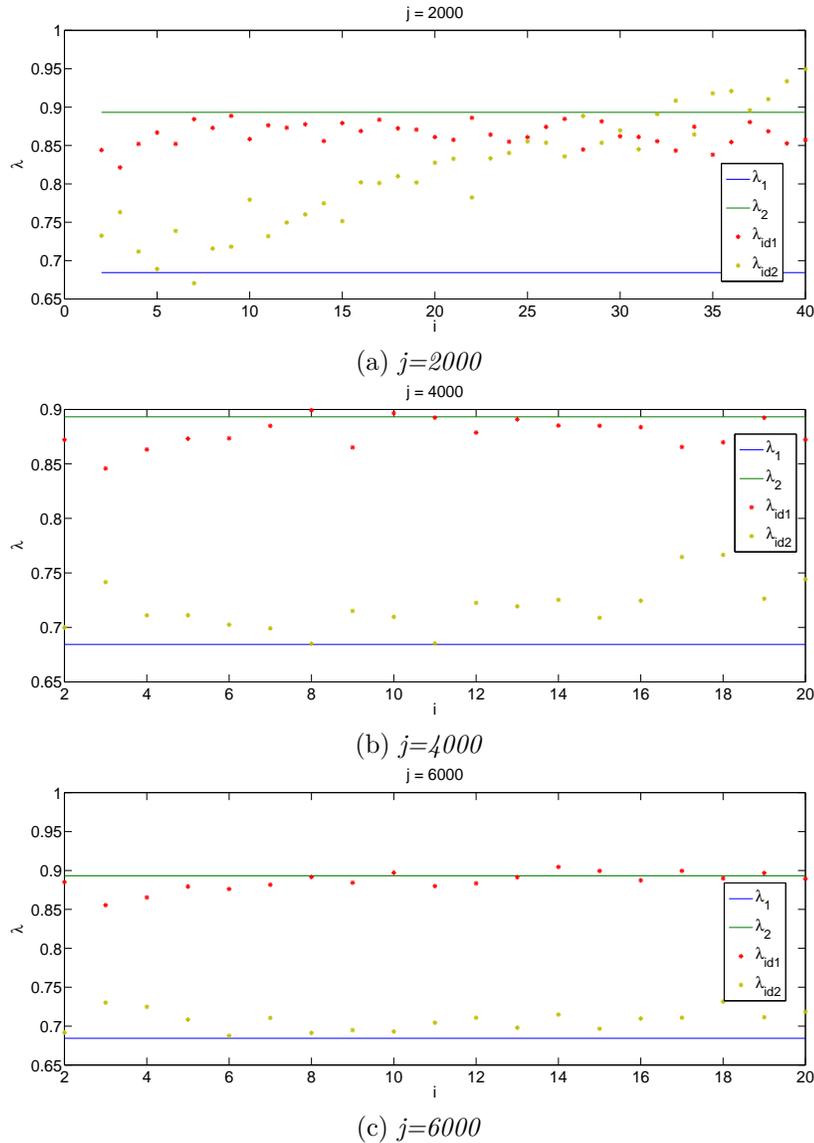


Abbildung C.6: Vergleich eines mittels Projektion [OM96] identifizierten stochastischen Systems und des Originalsystems $\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 0,7024 & 0,0,0586 \\ 0,0586 & 0,8792 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1,1490 & 0,9644 \\ -1,8854 & 1,7803 \end{pmatrix}$ anhand der Eigenwerte λ . Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ des Originalsystems sind als durchgängige Linien dargestellt. Zur Durchführung des Algorithmus wurden Datensätze von 2000, 4000 und 6000 Wertepaaren verwendet. Die Eigenwerte des identifizierten Systems $\lambda_{id1/2}$ (*) sind in Abhängigkeit des Parameters i dargestellt. Als stochastische Eingangsfolge wurde weißes Rauschen mit einer Kovarianz von $5 \cdot 10^{-2}$ verwendet. Deutlich erkennbar ist die Annäherung der identifizierten Eigenwerte an die des realen Systems bei Zunahme von j .

wie Projektion und Winkel zwischen Vektorräumen aus Ein-/Ausgangsdaten bedient, leichter realisierbar.

In [OM96] wurde ein Gesamtkonzept vorgestellt, dass die verschiedenen Ansätze vereinheitlicht. Hierfür wird die Singulärwertzerlegung der Projektionsmatrix \mathcal{O}_i (C.63) um zwei Wichtungsmatrizen zu

$$\mathbf{W}_1 \mathcal{O}_i \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix}, \quad (\text{C.70})$$

erweitert. Die frei wählbaren Matrizen \mathbf{W}_1 und \mathbf{W}_2 müssen hierbei die Bedingung erfüllen, dass \mathbf{W}_1 über vollen Rang verfügt und das $\text{Rg}(\mathbf{Y}_p) = \text{Rg}(\mathbf{Y}_p \mathbf{W}_2)$ gilt. Die verschiedenen Ansätze zur Identifikation stochastischer Systeme lassen sich nun als Ausprägungen dieser Wichtungsmatrizen beschreiben (siehe [OM96]).

C.1.2.3 Deterministisch-stochastische Systeme

Bei realen Systemen ist das Auftreten eines rein deterministischen Systems aufgrund des Vorhandenseins von Prozess- und Messrauschen nicht möglich. Die Anwendung der im vorigen Abschnitt vorgestellten Algorithmen würde im Regelfall also zu einer fehlerbehafteten Identifikation führen. Folglich ist es notwendig Identifikationsverfahren zu verwenden, die sowohl den deterministischen als auch einen stochastischen Anteil des Systems betrachten. Ein paar, der in den zwei vorherigen Abschnitten vorgestellten Verfahren wie [Lar90] oder [OMS91] verfolgen bereits diesen Ansatz, auch wenn sie bislang nur aus einer rein deterministischen oder stochastischen Sichtweise vorgestellt wurden. In [OM93] werden zwei, auf der Analyse von Vektorräumen basierende Methoden zur Identifikation deterministisch-stochastischer Systeme vorgestellt, die beide auf [MMVV89] und [OMS91] zur Bestimmung des deterministischen und auf [OM91] zur Identifikation des stochastischen Anteils aufbauen. Diese Algorithmen werden auch als „ N_4SID “¹²-Algorithmen bezeichnet. Betrachtet wird das kombinierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{W} = \text{E} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{pmatrix}^T \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

Das System (C.71) setzt sich aus dem deterministischen System (C.18) und dem stochastischen Zustandsraummodell (C.40) zusammen. Die Matrizen des deterministischen Zustandsraummodells werden mittels Analyse von Untervektorräumen bestimmt, die aus den projizierten Hankel-Matrizen der Ein-

¹² N_4SID steht für „Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification“.

und Ausgangsdaten gebildet werden. Die Hankelmatrizen \mathbf{Y}_p , \mathbf{Y}_f , \mathbf{U}_p und \mathbf{U}_f werden gemäß (C.20) und (C.21) gebildet.

Eine zentrale Rolle in diesem Identifikationsverfahren spielt dabei die Erkenntnis (siehe [OM96]):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_f /_{\mathbf{U}_f} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} &= n \\ \text{ZR}(\mathbf{Y}_f /_{\mathbf{U}_f} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix}) &= \text{ZR}(\hat{\mathbf{X}}_i) \\ \text{SR}(\mathbf{Y}_f /_{\mathbf{U}_f} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix}) &= \text{SR}(\mathbf{\Gamma}_i) \end{aligned}$$

Übersicht C.1: Grundlagen „Subspace Identification“ deterministisch-stochastischer Systeme

Dabei bezeichnet $\text{SR}()$ den Spaltenraum einer Matrix und die Matrix $\hat{\mathbf{X}}_i = (\mathbf{x}_i \ \mathbf{x}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{x}_{i+j-1})$ die Folge der Kalman-Zustände des gesuchten Systems.

Die zusammengesetzte Hankel-Matrix

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_f \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|i-1} \\ \mathbf{U}_{i|i} \\ \mathbf{U}_{i+1|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \\ \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.72})$$

(die Indizes beschreiben hierbei das jeweils erste Element der ersten und letzten Zeile einer Teilmatrix) wird zur Berechnung der Projektionen mittels LQ-Zerlegung faktorisiert:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|i-1} \\ \mathbf{U}_{i|i} \\ \mathbf{U}_{i+1|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \\ \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{41} & \mathbf{L}_{42} & \mathbf{L}_{43} & \mathbf{L}_{44} & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{51} & \mathbf{L}_{52} & \mathbf{L}_{53} & \mathbf{L}_{54} & \mathbf{L}_{55} & 0 \\ \mathbf{L}_{61} & \mathbf{L}_{62} & \mathbf{L}_{63} & \mathbf{L}_{64} & \mathbf{L}_{65} & \mathbf{L}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \\ \mathbf{Q}_4^T \\ \mathbf{Q}_5^T \\ \mathbf{Q}_6^T \end{pmatrix}. \quad (\text{C.73})$$

Zur Berechnung der orthogonalen Projektion

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Y}_{i|2i-1} / \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.74})$$

folgt nach (C.32)

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{L}_{(5:6,1:4)} \mathbf{Q}_{1:4}^T. \quad (\text{C.75})$$

Des Weiteren erhält man nach Umstellung von (C.73)

$$\mathbf{Q}_{1:4}^T = \mathbf{L}_{(1:4,1:4)}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.76})$$

Wird die Matrix $\mathbf{L}_{(5:6,1:4)}\mathbf{L}_{(1:4,1:4)}^+$ gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{L}_{(5:6,1:4)}\mathbf{L}_{(1:4,1:4)}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left(\underbrace{\mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_p}}_{ri \times mi} \mid \underbrace{\mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_f}}_{ri \times mi} \mid \underbrace{\mathbf{L}_i^{\mathbf{Y}_p}}_{ri \times ri} \right)$$

faktorisiert, so erhält man unter Beachtung von (C.75) und (C.76) für die orthogonale Projektion analog zu (C.32)

$$\mathbf{Z}_i = \left(\mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_p} \mid \mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_f} \mid \mathbf{L}_i^{\mathbf{Y}_p} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|i-1} \\ \mathbf{U}_{i-1|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.77})$$

Gleichung (C.77) stellt nun die orthogonale Projektion $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Y}_f / \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix}$ als Li-

nearkombination $\mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_p}\mathbf{U}_p + \mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_f}\mathbf{U}_f + \mathbf{L}_i^{\mathbf{Y}_p}\mathbf{Y}_p$ aus vergangenen und zukünftigen Eingangsdaten sowie vergangenen Ausgangsdaten dar. Wird aus dieser Linearkombination nun der Anteil der zukünftigen Eingangsdaten $\mathbf{U}_{i-1|2i-1}(\mathbf{U}_f)$

entfernt, so wird die orthogonale Projektion $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Y}_f / \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix}$ in die schräge

Projektion

$$\mathcal{O}_i = \mathbf{Y}_f /_{\mathbf{U}_f} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} \quad (\text{C.78})$$

überführt. Somit können zur Identifikation des gesuchten Systems (C.71) die in Übersicht C.1 dargestellten Gesetzmäßigkeiten angewendet werden.

Da nun folglich der Spaltenraum der Matrizen $\mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_p}$ und $\mathbf{L}_i^{\mathbf{Y}_p}$ mit dem der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}_i$ übereinstimmt, lässt sich die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}_i$ und die Ordnung n mittels der Singulärwertzerlegung

$$\left(\mathbf{L}_i^{\mathbf{U}_p} \mid \mathbf{L}_i^{\mathbf{Y}_p} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix} \quad (\text{C.79})$$

bestimmen. Die Berechnung von $\mathbf{\Gamma}_i$ erfolgt wie zuvor mittels Gleichung (C.35)

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}^{1/2}.$$

Um in einem nächsten Schritt die Kalman-Zustandsfolgen

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \left(\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_{i+1} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i+j-1} \right) \quad (\text{C.80})$$

und

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \left(\mathbf{x}_{i+1} \quad \mathbf{x}_{i+2} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i+j} \right) \quad (\text{C.81})$$

zu berechnen, muss zunächst die Matrix $\underline{\mathbf{\Gamma}}_i$ durch Streichen der letzten r Zeilen von $\mathbf{\Gamma}_i$ bestimmt werden. Des Weiteren bedarf es der zusätzlichen schrägen Projektion

$$\mathcal{O}_{i+1} = \mathbf{Y}_f^- /_{\mathbf{U}_f^-} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p^+ \\ \mathbf{Y}_p^+ \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} /_{\mathbf{U}_{i+1|2i-1}} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0|i} \\ \mathbf{Y}_{0|i} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.82})$$

welche analog zum zuvor beschriebenen Vorgehen für \mathcal{O}_i , jedoch mittels der orthogonalen Projektion

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{Y}_{f^-} / \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p^+ \\ \mathbf{U}_f^- \\ \mathbf{Y}_p^+ \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{6:6,1:5} \mathbf{Q}_{1:5}^T \quad (\text{C.83})$$

berechnet wird. Für die Kalman-Zustandsfolgen gilt gemäß (C.62):

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{\Gamma}_i^+ \mathcal{O}_i \quad (\text{C.84})$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{\Gamma}_{i+1}^+ \mathcal{O}_{i+1}. \quad (\text{C.85})$$

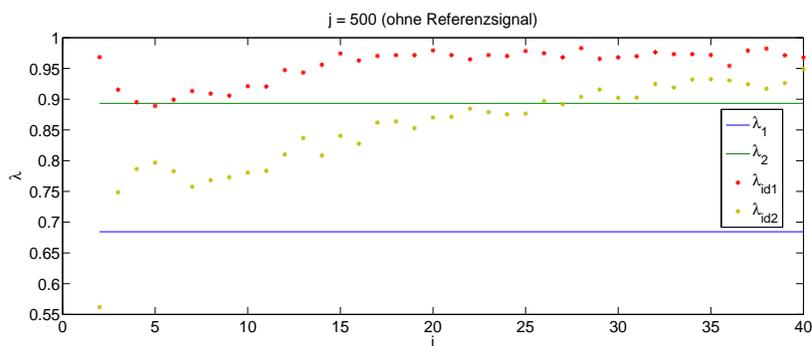
Die Zustandsraummatrizen \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C} und \mathbf{D} können anschließend durch Lösung des linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i \\ \mathbf{U}_{i|i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_w \\ \boldsymbol{\rho}_v \end{pmatrix}. \quad (\text{C.86})$$

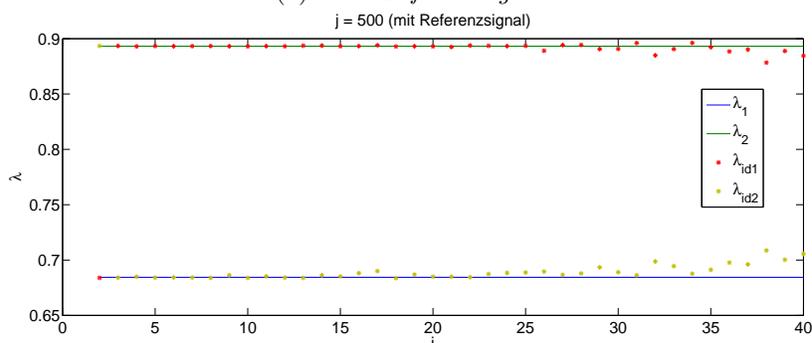
(beispielsweise mittels der Methode der kleinsten Quadrate) bestimmt werden, wobei die Vektoren $\boldsymbol{\rho}_w$ und $\boldsymbol{\rho}_v$ die Residuen darstellen. Die Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{S} und \mathbf{R} können wie beim rein stochastischen Fall mittels Gleichung (C.68) bestimmt werden.

Wie bereits bei den rein stochastischen oder rein deterministischen Systemen, stellt der „*N4SID*“-Algorithmus nur einen speziellen Fall dar. Das in [OM96] vorstellte Rahmenwerk vereinheitlicht auch die verschiedenen Ansätze für deterministisch-stochastische Systeme durch Erweiterung der schrägen Projektion \mathcal{O}_i mit zwei Wichtungsmatrizen gemäß (C.70). Verschiedene Ausprägungen der Wichtungsmatrizen führen dann zu Spezialfällen wie den „*N4SID*“-Algorithmus.

In (Abb. C.7) ist das Ergebnis einer mittels „*N4SID*“ durchgeführten Identifikation eines deterministisch-stochastischen Systems dargestellt. Hierbei ist bei einem Vergleich von (Abb. C.7a) (kein Referenzsignal) und (Abb. C.7b) (Verwendung eines zusätzlichen Referenzsignals) auch deutlich erkennbar, welchen wesentlichen Einfluss die Wahl der Eingangsfolge auf den Erfolg der Identifikation hat. Wie im nachfolgenden Abschnitt C.1.3 näher erläutert, existieren spezielle Anforderungen an die Eingangsfolge $\mathbf{u}(k)$ um eine genaue Systemidentifikation trotz des Vorhandenseins von Störungen gewährleisten zu können.



(a) ohne Referenzsignal r



(b) mit Referenzsignal r

Abbildung C.7: Vergleich eines mittels „N4SID“ [OM93] identifizierten, deterministisch-stochastischen Systems und des Originalsystems $\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 0,7024 & 0,0586 \\ 0,0586 & 0,8792 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} -1,3988 & -0,3352 \\ -1,1462 & 1,4007 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1,1490 & 0,9644 \\ -1,8854 & 1,7803 \end{pmatrix}$ anhand der Eigenwerte λ . Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ des Originalsystems sind als durchgängige Linien dargestellt. Zur Durchführung des Algorithmus wurden 500 Wertepaare verwendet. Die Eigenwerte des identifizierten Systems $\lambda_{id_{1/2}}$ sind in Abhängigkeit des Parameters i dargestellt. Für jedes i wurde eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 Durchgängen durchgeführt. Als deterministische Eingangsfolge wurde die sinusoidale Folge $\mathbf{u}(k) = \begin{pmatrix} 2 \sin(0,05 \cdot k/10) \\ \sin(0,05 \cdot k/10 + 0,2) \end{pmatrix}$ gewählt. Zusätzlich wurde das System mit einem Prozessrauschen versehen, das aus einem weißen Rauschen mit der Kovarianz $5 \cdot 10^{-4}$ bestand. Abb. C.7a zeigt das Ergebnis der Identifikation ohne Verwendung eines zusätzlichen Referenzsignals. In Abb. C.7b wurde auf das deterministische Signal \mathbf{u} das Referenzsignal \mathbf{r} addiert, welches einem weißen Rauschen mit Kovarianz 0,05 entspricht.

C.1.3 Identifizierbarkeit

Um die Identifikation eines unbekanntes Systems mittels gemessener Eingangs- und Ausgangsfolgen zu ermöglichen, sind unabhängig von der gewählten Methodik aus den vorherigen Abschnitten die Erfüllung bestimmter Kriterien essentiell.

1. Eine wesentliche Voraussetzung für die Identifizierbarkeit ist, dass die Beobachtbarkeitsbedingung

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (\text{C.87})$$

für das zu untersuchende System erfüllt ist (siehe [Lju87] und [OM96]). Denn nur dann lässt sich aus Ein- und Ausgangsdaten die Zustandsfolge rekonstruieren, die zur Bestimmung der Matrizen des Zustandsraummodells benötigt wird. Die Beobachtbarkeitsbedingung muss jedoch auch dann erfüllt werden, wenn wie in Abschnitt C.1.2.1 keine explizite Berechnung der Zustände während des Identifikationsverfahrens erfolgt, da sonst keine eindeutige Lösung der Ein-/Ausgangsgleichung (C.26) existiert.

2. Eine weitere wichtige Bedingung, die erfüllt werden muss um die Identifizierbarkeit eines System zu gewährleisten, bezieht sich auf die anliegende Eingangsfolge. Um eine korrekte Identifikation des zugrundeliegenden Systems zu ermöglichen, bedarf es, dass die gemessenen Ein-/Ausgangsdaten ausreichend Information über das gesuchte System beinhalten (vergleiche (Abb. C.7)). Dies ist genau dann der Fall wenn alle Modi (Eigenvorgänge¹³) des Systems durch die Eingangsfolge $\mathbf{u}(k)$ angeregt werden und somit ein korrekter Rückschluss auf die Eigenwerte der untersuchten Regelstrecke ermöglicht wird. Erfüllt eine Eingangsfolge diese Bedingung, so wird sie in der Systemidentifikation auch als „*persistently exciting*“ bezeichnet (siehe [Lju87] und [BC00]). Eine Eingangsfolge wird gemäß [Lju87] und [OM96] genau dann als „*persistently exciting*“ erachtet wenn gilt:

$$\text{Rg}(\Phi_{[\mathbf{u}_{0|2i}, \mathbf{u}_{0|2i}]}) = 2mi. \quad (\text{C.88})$$

3. Haben die untersuchten Systeme einen stochastischen Anteil wie in den Abschnitten C.1.2.2 und C.1.2.3, so besteht zusätzlich die Forderung

¹³Als Modi oder Eigenvorgänge werden die aus Eigenwerten λ_i eines Systems gebildeten Terme $e^{\lambda_i t}$ bezeichnet. Diese Terme gehen sowohl in den freien als auch in den erzwungenen Anteil der Bewegungsgleichung ein (vgl. Gleichung (4.6)).

nach $j \rightarrow \infty$ (vergleiche (Abb. C.6)). Die Forderung resultiert aus der Definition für E_j in E.3 und der Tatsache, dass für $j \rightarrow \infty$ eine mit Rauschen belegte Eingangsfolge $\mathbf{u}_{\text{mess}}(k)$ bereinigt werden kann, in dem der reine Rauschterm $\mathbf{e}(k)$ auf $\mathbf{u}_{\text{mess}}(k)$ projiziert wird, da $E_j(\|\mathbf{u}_{\text{mess}}(k)/\mathbf{e}(k)\|) = 0$ gilt (siehe [OM96]).

Sind all die vorangegangenen Bedingungen erfüllt, so ist es möglich ein System anhand der gemessenen Ein-/Ausgangsdaten mittels der in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Methoden zu identifizieren. Allerdings ist dies dennoch nur in einem beschränkten Maße bis hin zu einer unbekanntem Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T} \quad (\text{C.89})$$

möglich. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass sich das Ein-/Ausgangsverhalten eines Systems nicht ändert, wenn der zugehörige Zustandsvektor linear transformiert wird. Nicht betroffen von dieser Ähnlichkeitstransformation sind allerdings die Eigenwerte des Systems (siehe [OM96]).

C.2 Rekursive Systemidentifikation mit „*PBSID*“

Eine bessere Anwendbarkeit von Systemidentifikationsmethoden in Echtzeitsystemen, ist mit den unter anderen in [HWV09a] und [HWV12] vorgestellten rekursiven Versionen des „*PBSID*“-Algorithmus gegeben. Diese basieren auf einer rekursiven Umsetzung der Lösung des Minimierungsproblems (5.13) mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Mit jeder Iteration wird die Lösungsmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_k$ mittels der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_{k-1} + \left(\mathbf{y}_k - \begin{pmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(p)} \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(p)} \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}^T \mathbf{P}_k \quad (\text{C.90})$$

bestimmt, mit $\mathbf{z}_k^{(p)}$ entsprechend (5.4). Für die Aktualisierung der Fehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{p(r+m)+m \times p(r+m)+m}$ gilt

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_1} \left(\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(p)} \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \left(\lambda_1 \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(p)} \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}^T \mathbf{P}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(p)} \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(p)} \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}^T \mathbf{P}_{k-1} \right) \quad (\text{C.91})$$

und $0 \ll \lambda_1 \leq 1$.

Mit der Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_k$ kann unter Zuhilfenahme von (5.14) das Produkt $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)} \tilde{\mathcal{K}}^{(p)}$ in (5.15) aus erweiterter Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix konstruiert werden. Setzt man im Weiteren für diesen rekursiven Algorithmus voraus, dass die Anzahl n der Zustände bekannt ist, so kann aus Gleichung

(5.15)

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)} \mathbf{x}_k^{(f)} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)} \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{z}_k \quad (\text{C.92})$$

der Zustand x_k bestimmt werden. Die Einführung einer Permutationsmatrix \mathbf{S} ist dabei notwendig, um x_k aus dem Produkt $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)} \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{z}_k$ zu extrahieren. Sie unterteilt die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix gemäß

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_1^{(f)} \\ \tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(f)} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)} \mathbf{x}_k^{(f)} \quad (\text{C.93})$$

in den aus n unabhängigen Zeilen bestehenden Teil $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_1^{(f)}$ sowie den aus $fr - n$ Zeilen bestehenden Teil $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(f)}$. Sind die ersten n Zeilen der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}$ aus (C.92) bereits linear unabhängig, so setzt sich \mathbf{S} trivialerweise aus einer n -dimensionalen Einheitsmatrix sowie einer Nullmatrix gemäß

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{n \times n} & \mathbf{0}^{n \times fr - n} \end{pmatrix} \quad (\text{C.94})$$

zusammen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gilt es \mathbf{S} gemäß dem in [MBL08] beschriebenen Vorgehen zu bestimmen. Der Zustandsvektor \mathbf{x}_k ergibt sich zu

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)} \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} \mathbf{z}_k. \quad (\text{C.95})$$

Mit gegebenen \mathbf{x}_k können nun die Systemmatrizen sukzessive mittels rekursiver Umsetzung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. Zunächst erfolgt die Berechnung der Matrizen \mathbf{C}_k und \mathbf{D}_k mit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_{k-1} + \left(\mathbf{y}_{k-1} - \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}_k \quad (\text{C.96})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= \quad (\text{C.97}) \\ \frac{1}{\lambda_2} &\left(\mathbf{M}_{k-1} - \mathbf{M}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}_{k-1} \right) \quad (\text{C.98}) \end{aligned}$$

sowie $0 \ll \lambda_2 \leq 1$.

Nach Berechnung der Innovation

$$\mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{y}_{k-1} - \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.99})$$

erfolgt als letzter Schritt einer Iteration die Aktualisierung der Matrizen \mathbf{A}_{d_k} , \mathbf{B}_{d_k} und \mathbf{K}_k gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \end{pmatrix}_{k-1} + \left(\mathbf{x}_k - \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \end{pmatrix}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ e_{k-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ e_{k-1} \end{pmatrix}^T \mathbf{N}_k \quad (\text{C.100})$$

und

$$\mathbf{N}_k = \tag{C.101}$$

$$\frac{1}{\lambda_3} \left(\mathbf{N}_{k-1} - \mathbf{N}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ e_{k-1} \end{pmatrix} \left(\lambda_3 \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ e_{k-1} \end{pmatrix}^T \mathbf{N}_{k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ e_{k-1} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ e_{k-1} \end{pmatrix}^T \mathbf{N}_{k-1} \right) \tag{C.102}$$

sowie $0 \ll \lambda_3 \leq 1$.

Die Parameter $\lambda_{1,2,3}$ dienen dem Zweck aktuelle Messwerte stärker oder schwächer zu gewichten als jene aus vorangegangenen Messungen um somit Änderungen in den Systemparametern zu identifizieren. Idealerweise wird für diese Parameter ein Wert nahe Eins gewählt. Je größer der gewählte Wert für $\lambda_{1,2,3}$, umso geringer ist die Varianz der Ergebnisse bei zeitlich invarianten Systemen. Je kleiner der Wert gewählt wird, um so sensibler werden Änderungen im System detektiert. Dies führt aber auch zu einer überhöhten Empfindlichkeit gegenüber Störungen. Dies hat vor allem Einfluss auf die Kalman-Matrix \mathbf{K} , die für $\lambda_{1,2,3} < 1$ keinen stationären Wert annimmt. Diese Varianz führt zu Ungenauigkeiten in der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}$ und in der Folge zu Ungenauigkeiten bei der Berechnung des Zustandsvektors \mathbf{x}_k (siehe [HWV12]). Diese bedingte Abhängigkeit des Zustandsvektors \mathbf{x}_k von $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}$ kann jedoch durch Multiplikation von $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}$ mit der Inversen der Block-Toeplitz-Matrix

$$\tilde{\mathbf{H}}^{(f)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{K} & \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d\mathbf{K} & -\mathbf{C}\mathbf{K} & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^2\mathbf{K} & -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d\mathbf{K} & -\mathbf{C}\mathbf{K} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{f-2}\mathbf{K} & -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{f-3}\mathbf{K} & -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}_d^{f-4}\mathbf{K} & \cdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{C.103}$$

umgangen werden, was $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}$ in die Matrix $\mathbf{\Gamma}^{(f)}$ überführt. Anstelle von Gleichung (C.95) zur Berechnung von \mathbf{x}_k gilt dann

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{H}}^{(f)-1}\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(f)}\tilde{\mathcal{K}}^{(p)}\mathbf{z}_k. \tag{C.104}$$

Das Simulationsergebnis einer Systemidentifikation mittels rekursiver Implementierung ist in Abbildung C.8 dargestellt. Das zeitvariante System mit ausgangsbasierter Folgeregelung aus Beispiel 8 auf Seite 158 wird hierbei im Abstand von $T = 0,05s$ abgetastet. Als Innovation $\mathbf{e}(t)$ wird weißes Gaußsches Rauschen der Kovarianz 10^{-5} zugeführt. Neben dem sinusoidalen Sollwert der Form $\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} 0,5 \sin(\frac{2\pi}{0,1t}) \\ 0,5 \sin(\frac{2\pi}{0,07t}) + 0,5 \end{pmatrix}$ wird ebenfalls ein Referenzsignal aus

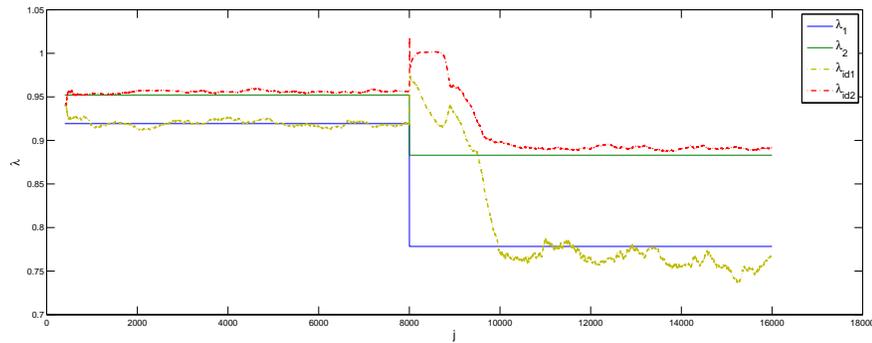


Abbildung C.8: Identifikation eines zeitvarianten det.-stoch. Systems mit Folgeregelung und Referenzsignal mittels einer rekursiven Implementierung des auf einen „VARMAX“-Modell basierenden „PBSID“-Algorithmus.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} -1,6371 & 0,1720 \\ 0,1720 & -1,0252 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0,1720 \\ 0,1720 & -2,5 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -0,7145 & -0,2248 \\ 0 & -0,5890 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -0,2938 & -1,1201 \\ -0,8479 & 2,5260 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} -1,3798 & -0,6087 \\ -0,4882 & 0,1596 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{K}_y &= \begin{pmatrix} 4,4806 & 2,7858 \\ 3,4853 & -1,8048 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_w = \begin{pmatrix} -7,6308 & -6,4630 \\ -6,4630 & 7,6308 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Beispiel 8: Geschaltetes MIMO System 2. Ordnung mit Folgeregelung und Ausgangsrückführung

weißen Gaußschen Rauschen mit einer Kovarianz von $5 \cdot 10^{-2}$ eingespeist. Für p und f wurde ein Wert von 8 sowie $\lambda_1 = 0.998$ und $\lambda_{2/3} = 0.995$ gewählt. Das System stellt ein geschaltetes System dar, wobei der Schaltzeitpunkt bei 400s liegt. Dargestellt sind sowohl die realen (durchgezogene Linie) als auch die identifizierten Eigenwerte des Systems (gestrichelte Linie). Die Simulation wurde als Monte-Carlo-Experiment mit 100 Durchläufen simuliert. Wie Abbildung C.8 entnommen werden kann, dauert es circa 100s bis sich die identifizierten Eigenwerte den realen Eigenwerten nach Umschalten des Systems angenähert haben. Des Weiteren ist vor allem nach dem Umschaltzeitpunkt eine systematische Abweichung der identifizierten Eigenwerte von den realen Eigenwerten des Systems zu erkennen. Diese Abweichung vergrößert sich, wenn für λ kleinere Werte gewählt werden um somit die Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus zu erhöhen.

Anhang D

Kalman-Filter

Wird ein System kontinuierlich durch einen Rauschprozess gestört, so ist ein direktes Abgreifen des wahren Systemzustandes nicht möglich. Vielmehr muss dieser aus den fehlerbehafteten Beobachtungen extrahiert werden. Dies geschieht mittels eines Satzes an Gleichungen, der auch als Kalman-Filter bekannt ist. Das dabei notwendige Vorgehen weist durchaus Parallelen zum Luenberger Beobachter (siehe [Lue64]) auf. Jedoch spricht man hier aufgrund des kontinuierlichen Charakters der Störung nicht von einer deterministischen¹ sondern von einer stochastischen Störung, die es gerade wegen dieser Kontinuität nicht ermöglicht, dass der Beobachtungsfehler (anders als im deterministischen Fall des Luenberger Beobachters) asymptotisch verschwindet (siehe [Lun06]).

Intention des Kalman-Filter ist es, Schätzwerte $\hat{\mathbf{x}}(k)$ aus den fehlerbehafteten Beobachtungen zu bestimmen, die im Mittel mit dem wahren Systemzustand $\mathbf{x}(k)$ übereinstimmen. Diese Schätzwerte werden auch als Kalman-Zustände bezeichnet. Zur Bestimmung von $\hat{\mathbf{x}}(k)$ ist somit ein Modell des zugrundeliegenden dynamischen Systems als auch der Störungen notwendig.

Betrachtet wird hierbei ein System der Form

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (\text{D.2})$$

mit dem Prozessrauschen $\mathbf{w}(k)$ und dem Messrauschen $\mathbf{v}(k)$. Beide Störungen sind Folgen aus unkorrelierten Zufallszahlen mit Mittelwert null (weißes Rauschen) und den Kovarianzen

$$\begin{aligned} E(\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(k)^T) &= \mathbf{Q} \text{ und} \\ E(\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)^T) &= \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

wobei $E()$ den Erwartungswert bezeichnet. Die Vektoren $\mathbf{w}(k)$ und $\mathbf{v}(k)$ sind unabhängig, das heißt

$$E(\mathbf{w}(k)\mathbf{v}(k)^T) = \mathbf{0}. \quad (\text{D.4})$$

¹Als deterministische Störungen werden impulsförmige Störungen bezeichnet.

Betrachtet man zunächst die Zustandsgleichung (D.1), so wird leicht ersichtlich, dass aufgrund der stochastischen Störung $\mathbf{w}(k)$ der Zustand $\mathbf{x}(k)$ selbst zu einer Zufallsvariable wird, die durch den Mittelwert $\hat{\mathbf{x}}(k) = E(\mathbf{x}(k))$ und der Kovarianz $E((\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))^T) = \mathbf{P}_k$ beschrieben werden kann. Die Folge $\mathbf{x}(k)$ stellt somit eine Markov-Kette dar, dass heißt $\mathbf{x}(k)$ ist eine Zufallsvariable, deren aktueller Zustand jeweils linear vom Vorgänger oder gar mehreren Vorgängern abhängt. Zur Bestimmung des Mittelwerts $\hat{\mathbf{x}}(k)$ und der Kovarianz \mathbf{P}_k müssen folglich alle bisherigen Messwerte mit eingehen. Hierfür wird eine Schätzung der beiden Größen als Linearkombination aller vorherigen Schätzwerte durchgeführt, die mittels eines neuen Messwertes korrigiert wird. Das Kalman-Filter besteht somit aus einem Prädiktor-Schritt

$$\tilde{\hat{\mathbf{x}}}(k+1) = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \quad (\text{D.5})$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} \quad (\text{D.6})$$

und einem Korrektorschritt

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\hat{\mathbf{x}}}(k+1) + \mathbf{K}(k) \bar{\mathbf{y}}(k) \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{P}(k+1) = \tilde{\mathbf{P}}(k+1) - \mathbf{K}(k) (\mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}(k)^T. \quad (\text{D.8})$$

Die Innovation

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{y}_{\text{mess}}(k) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (\text{D.9})$$

beschreibt hierbei die Abweichung zwischen dem aktuellen Messwert $\mathbf{y}_{\text{mess}}(k)$ und dem derzeit bestimmten Mittelwert $\mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k)$ der Ausgangsfolge. Die Matrix $\mathbf{K}(k)$ bezeichnet die Kalman-Matrix

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (\text{D.10})$$

Sind die Störungen $\mathbf{v}(k)$ und $\mathbf{w}(k)$ nicht unabhängig, dass heißt $E(\mathbf{w}(k) \mathbf{v}(k)^T) = \mathbf{S}$, wird die Kalman-Matrix in der Form

$$\mathbf{K}(k) = (\mathbf{A}_d \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T + \mathbf{S}) (\mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (\text{D.11})$$

definiert.

Anhang E

Geometrische Projektionen

Ziel dieses Teils des Anhangs ist es, in Anlehnung an [OM96] einen kurzen Überblick zu verschiedenen geometrischen Projektionen bereitzustellen, die auf die Zeilenräume von Matrizen anwendbar sind. Von diesen geometrischen Werkzeugen wird bei den in Kapitel 5 vorgestellten „*Subspace Identification*“-Methoden Gebrauch gemacht.

Unter dem Zeilenraum einer Matrix versteht man die lineare Hülle der Zeilenvektoren, die durch die einzelnen Elemente der Zeile einer Matrix gebildet werden. Die Dimension dieses Raumes wird auch als Zeilenrang deklariert.

Betrachtet man drei Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times j}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q \times j}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times j}$ mit gleicher Anzahl an Spalten, so bilden die Zeilenvektoren dieser Matrizen jeweils einen Vektorraum der Dimension p , q oder r (siehe [BSMM01]), der auch als Zeilenraum bezeichnet wird.

Nachfolgend werden zwei Arten von Projektion betrachtet die auf die Zeilenräume dieser Matrizen anwendbar sind.

E.1 Orthogonale Projektion

Bei der orthogonalen Projektion wird der Zeilenraum einer Matrix auf den Zeilenraum einer anderen Matrix, wie in (Abb. E.1) schematisch dargestellt, projiziert. Dies soll durch den Operator $\Pi_{\mathbf{B}}$ symbolisch dargestellt werden. Es gilt:

$$\Pi_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^+\mathbf{B}. \quad (\text{E.1})$$

Für \mathbf{A}/\mathbf{B} folgt somit

$$\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}\Pi_{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^+\mathbf{B}. \quad (\text{E.2})$$

$(\mathbf{B})^+$ bezeichnet hierbei die Pseudoinverse $\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$ einer sonst nicht invertierbaren Matrix.

Wie in (Abb. E.1) dargestellt, lässt sich somit eine Matrix \mathbf{A} durch zwei Summanden in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\Pi_{\mathbf{B}} + \mathbf{A}\Pi_{\mathbf{B}^\perp} \quad (\text{E.3})$$

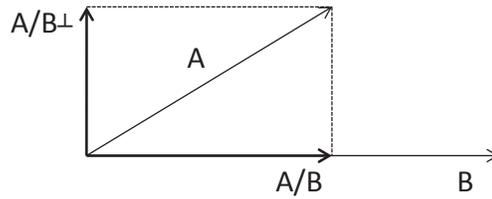


Abbildung E.1: Schematische Darstellung der orthogonalen Projektion im zwei-dimensionalen Raum. \mathbf{A}/\mathbf{B} bezeichnet die Projektion des Zeilenraums der Matrix \mathbf{A} auf den Zeilenraum der Matrix \mathbf{B} . Bei $\mathbf{A}/\mathbf{B}^\perp$ erfolgt die Projektion auf das orthogonale Komplement des Zeilenraums von \mathbf{B} .

darstellen. Für $\mathbf{A}/\mathbf{B}^\perp$ gilt folglich

$$\mathbf{A}/\mathbf{B}^\perp = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \Pi_{\mathbf{B}}) = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^+\mathbf{B}) \quad (\text{E.4})$$

E.2 Schräge Projektion

Als schräge Projektion $\mathbf{A}/_{\mathbf{B}}\mathbf{C}$ wird die Abbildung des Zeilenraums einer Matrix \mathbf{A} entlang des Zeilenraumes einer Matrix \mathbf{B} auf den Zeilenraum der Matrix \mathbf{C} bezeichnet (siehe (Abb. E.2)).

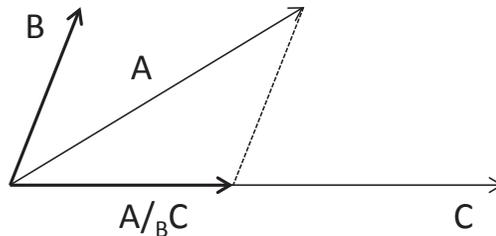


Abbildung E.2: Schematische Darstellung der schrägen Projektion im zwei-dimensionalen Raum. $\mathbf{A}/_{\mathbf{B}}\mathbf{C}$ bezeichnet die Projektion des Zeilenraums der Matrix \mathbf{A} entlang des Zeilenraums der Matrix \mathbf{B} auf den Zeilenraum der Matrix \mathbf{C} .

Es gilt:

$$\mathbf{A}/_{\mathbf{B}}\mathbf{C} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{C}^T & \mathbf{C}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{C}^T & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \end{pmatrix}^+ \right]_{(\text{Spalten } 1:r)} \mathbf{C}. \quad (\text{E.5})$$

E.3 Projektionen für den stochastischen Fall

Betrachtet werden zwei aus Skalaren bestehende Zahlenfolgen a_k und e_k mit $k = 0, 1, \dots, j$, wobei e_k eine Folge weißen Rauschens (unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswert null und konstanter Varianz) darstellt. Für den

Erwartungswert gilt somit

$$E(e_k) = 0$$

und somit für die Kovarianz

$$E(a_k e_k) = 0.$$

Unter der Voraussetzung dass die Zahlenfolgen sehr groß sind ($j \rightarrow \infty$) kann die Kovarianz auch in der Form

$$E(a_k e_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^j a_i e_i \right)$$

dargestellt werden. Hierbei wird häufig der Operator

$$E_j(\cdot) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j}(\cdot)$$

verwendet, so dass gilt:

$$E_j\left(\sum_{i=0}^j a_i e_i\right) = 0.$$

Werden aus den Elementen der Zahlenfolgen a_k und e_k Vektoren gebildet, also

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_j), \\ \mathbf{e} &= (e_0 \quad e_1 \quad \cdots \quad e_j), \end{aligned}$$

so gilt

$$E_j(\mathbf{a}\mathbf{e}^T) = 0.$$

Die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{e} , respektive deren Zeilenvektoren (in diesem speziellen Fall identisch), stehen also senkrecht aufeinander. Hieraus folgt mitunter, dass eine mit Rauschen belegte Eingangsfolge $\mathbf{u}_{\text{mess}}(k)$ mit Hilfe von Auslöschung von diesem Rauschterm befreit werden kann, in dem der reine Rauschterm $\mathbf{e}(k)$ auf $\mathbf{u}_{\text{mess}}(k)$ orthogonal projiziert wird:

$$E_j(\|\mathbf{u}_{\text{mess}}(k)/\mathbf{e}(k)\|) = 0$$

(siehe auch [OM96]).

Setzen sich die Folgen a_k und e_k aus einzelnen Vektoren anstelle von Skalaren zusammen, so werden nun die zwischen Matrizen statt zwischen Vektoren existierenden Kovarianzen betrachtet. Die Kovarianz zwischen zwei Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times j}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q \times j}$ wird nachfolgend durch $\Phi_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}$ dargestellt und als

$$\Phi_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} = E_j(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) \tag{E.6}$$

definiert. Es sei an dieser Stelle jedoch erwähnt, dass in dieser Arbeit die Kovarianz zweier Matrizen stets durch

$$\Phi_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} \approx \frac{1}{j}\mathbf{A}\mathbf{B}^T \tag{E.7}$$

angenähert wird.

Wird nun für die zuvor vorgestellten Projektionsgleichungen der Term $\mathbf{A}\mathbf{B}^T$ durch $\Phi_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$ ersetzt, ergibt sich für den stochastischen Fall:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}/\mathbf{B} &= \Phi_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]} \Phi_{[\mathbf{B},\mathbf{B}]}^+ \mathbf{B} \\
 \mathbf{A}/\mathbf{B}^\perp &= \mathbf{A} - \Phi_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]} \Phi_{[\mathbf{B},\mathbf{B}]}^+ \mathbf{B} \\
 \mathbf{A}/_{\mathbf{B}} \mathbf{C} &= \left(\Phi_{[\mathbf{A},\mathbf{C}]} \quad \Phi_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]} \right) \left[\begin{array}{cc} (\mathbf{C}\mathbf{C}^T & \mathbf{C}\mathbf{B}^T) \\ (\mathbf{B}\mathbf{C}^T & \mathbf{B}\mathbf{B}^T) \end{array} \right]_{(\text{Spalten } 1:r)}^+ \mathbf{C}.
 \end{aligned} \tag{E.8}$$

Anhang F

Weiterführende Erklärungen zu den Hamilton-Gleichungen

Die nachfolgenden Ergänzungen zur Herleitung der Transversalitätsbedingung sowie das dargestellte Anwendungsbeispiel lehnen sich an die Ausführungen in [\[FSK94\]](#) an.

F.1 Herleitung der Transversalitätsbedingung

Zur Herleitung der Transversalitätsbedingung aus dem Gütefunktional (2.14)

$$J = h(\mathbf{x}(t_e), t_e) - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{z} + \int_{t_0}^{t_e} [\boldsymbol{\psi}(t)^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)] dt,$$

betrachtet man das Gütefunktional bei einer beliebigen Variation $\delta\mathbf{x}(t)$ und $\delta\mathbf{u}(t)$ der Trajektorien. Dabei gilt, dass die Änderung der Trajektorien keine Änderung erster Ordnung in der Kostenfunktion induzieren dürfen.

In einem ersten Schritt werden zum besseren Verständnis die Standardskalarprodukte der Lagrange-Multiplikatoren als Summen dargestellt. Das Gütefunktional hat dann die Form

$$J = h(\mathbf{x}(t_e), t_e) - \sum_{k=1}^m \mu_k z_k + \int_{t_0}^{t_e} \left[\sum_{k=1}^n \psi_k(t) \dot{x}_k - H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) \right] dt. \quad (\text{F.1})$$

Des Weiteren gilt für die partielle Integration $\int_{t_0}^{t_e} [\sum_{k=1}^n \psi_k(t) \dot{x}_k dt]$:

$$\int_{t_0}^{t_e} \left[\sum_{k=1}^n \psi_k(t) \dot{x}_k dt \right] = \left[\sum_{k=1}^n \psi_k(t) x_k \right]_{t=t_0}^{t=t_e} - \int_{t_0}^{t_e} \left[\sum_{k=1}^n \dot{\psi}_k(t) x_k \right] dt. \quad (\text{F.2})$$

Führt man nun die zuvor angesprochene Variation $\delta\mathbf{x}(t)$ und $\delta\mathbf{u}(t)$ der Trajektorien unter der Forderung $\delta J = 0$ ein, folgt mit (F.1) und (F.2) für das

Gütefunktional:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta J = & \sum_{k=1}^m \frac{\partial h}{\partial x_k} \Big|_{t=t_e} \delta x_k(t_e) + \sum_{k=1}^n \psi_k(t_e) \delta x_k(t_e) - \sum_{k=1}^n \psi_k(t_0) \delta x_k(t_0) \\
 & - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \mu_j \frac{\partial z_j}{\partial x_k} \Big|_{t=t_e} \delta x_k(t_e) - \int_{t_0}^{t_e} \left[\sum_{k=1}^n \dot{\psi}_k \delta x_k(t) + \frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k(t) \right] dt \\
 & - \int_{t_0}^{t_e} \left[\frac{\partial H}{\partial u_k} \delta u_k(t) \right] dt,
 \end{aligned}$$

und mit der Forderung $\delta x_k(t_0) = 0$, da der Beginn feststeht, folgt schließlich

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{k=1}^m \frac{\partial h}{\partial x_k} \Big|_{t=t_e} \delta x_k(t_e) + \sum_{k=1}^n \psi_k(t_e) \delta x_k(t_e) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \mu_j \frac{\partial z_j}{\partial x_k} \Big|_{t=t_e} \delta x_k(t_e) \\
 & - \int_{t_0}^{t_e} \left[\sum_{k=1}^n \dot{\psi}_k \delta x_k(t) + \frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k(t) \right] dt - \int_{t_0}^{t_e} \left[\frac{\partial H}{\partial u_k} \delta u_k(t) \right] dt.
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

Da jede Variation beliebig ist, ergibt sich folglich

$$\text{aus } \delta x_k(t_e) : \quad \frac{\partial h}{\partial x_k} \Big|_{t=t_e} + \psi_k(t_e) - \boldsymbol{\mu}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_k} \Big|_{t=t_e} = 0, \tag{F.4}$$

$$\text{aus } \delta x_k(t < t_e) : \quad \dot{\psi}_k + \frac{\partial H}{\partial x_k} = 0, \tag{F.5}$$

$$\text{aus } \delta u_k(t) : \quad \frac{\partial H}{\partial u_k} = 0. \tag{F.6}$$

F.2 Anwendungsbeispiel zur Lösung der Hamilton-Gleichung mittels Laplace-Transformation

Das nachfolgende Beispiel zeigt die Lösung der Hamilton-Gleichungen aus Abschnitt 2.2 mittels Laplace-Transformation zur Bestimmung des optimalen Reglers. Die Regelstrecke ist hierbei ein Verzögerungsglied erster Ordnung:

$$T\dot{x} + x = Ku$$

oder

$$\dot{x} = -ax + bu$$

mit

$$a = \frac{1}{T}, \quad b = \frac{K}{T}$$

Für die Randbedingungen gilt:

$t_0 = 0$, $x(0) = x_0$ beliebig und t_e gegeben mit $x(t_e) = 0$.

Das Gütefunktional bezieht sich lediglich auf die Steuergröße $u(t)$ und lautet

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_e} u^2(t) dt.$$

Bevor die fünf Schritte des in Abschnitt 2.2 beschriebenen Lösungsverfahrens abgearbeitet werden können, müssen zunächst die in Übersicht 2.1 zusammengefassten Funktionen und Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{aligned} H(x(t), \psi(t), u(t), t) &= -f_0(x(t), u(t), t) + \psi^T(t)f(x(t), u(t), t) \\ &= -\frac{1}{2}u^2(t) + \psi(t)(-ax(t) + bu(t)) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = a\psi(t) \quad (\text{F.8})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u(t) + \psi(t)b = 0 \quad (\text{F.9})$$

Schritt 1: Gleichung (F.9) nach $u(t)$ auflösen, $u(t) = \psi(t)b$, und sowohl in die Systemgleichung als auch die adjungierte Gleichung einsetzen:

$$\dot{x} = -ax(t) + b^2\psi(t), \quad (\text{F.10})$$

$$\dot{\psi} = a\psi(t). \quad (\text{F.11})$$

Schritt 2: Bilden der Laplace-Transformierten

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= -aX(s) + b^2\Psi(s), \\ s\Psi(s) - \psi_0 &= a\Psi(s) \end{aligned}$$

der Differentialgleichungen und lösen der transformierten Gleichungen:

$$X(s) = \frac{x_0}{s+a} + \frac{b^2\psi_0}{(s+a)(s-a)} \circ \bullet x(t) = x_0e^{-at} + \frac{b^2\psi_0}{2a}(e^{at} - e^{-at}), \quad (\text{F.12})$$

$$\Psi(s) = \frac{\psi_0}{s-a} \circ \bullet \psi(t) = \psi_0e^{at}. \quad (\text{F.13})$$

Schritt 3: Zur Anpassung der Lösung an die Randbedingungen folgt aus $t_e = 0$

$$x(t_e) = x_0e^{-at_e} + \frac{b^2\psi_0}{2a}(e^{at_e} - e^{-at_e}) = 0. \quad (\text{F.14})$$

Dies lässt sich umstellen zu

$$\psi_0 = -\frac{2a}{b^2} \frac{e^{-at_e}}{e^{at_e} - e^{-at_e}} x_0. \quad (\text{F.15})$$

Schritt 4: Einsetzen von (F.15) in (F.12) führt zu

$$x^*(t, x_0) = x_0 \frac{e^{a(t_e-t)} - e^{-a(t_e-t)}}{e^{at_e} - e^{-at_e}} \quad (\text{F.16})$$

und

$$u^*(t, x_0) = -\frac{2a}{b} \frac{e^{-a(t_e-t)}}{e^{at_e} - e^{-at_e}} x_0. \quad (\text{F.17})$$

Schritt 5: Im letzten Schritt wird nun (F.16) nach x_0 aufgelöst und in (F.17) eingesetzt um den Optimalregler

$$u(t) = -k(t)x(t) \quad (\text{F.18})$$

mit

$$k(t) = \frac{2a}{b} \frac{e^{-a(t_e-t)}}{e^{at_e} - e^{-at_e}} \quad (\text{F.19})$$

zu erhalten.

Es ist sehr wichtig zu erwähnen, dass bei dieser Variante die klassische Lösungsmethode nicht mehr greift, sobald die Variablen beschränkt sind.

Anhang G

Anhang zur Echtzeitanpassung des optimalen Reglers

Die nachfolgend aufgeführten Sensitivitätsableitungen gehören zu dem in Abschnitt [7.3](#) aufgeführten Anwendungsbeispiel zur erweiterten Echtzeitanpassung für optimale Folgeregler mit Ausgangsrückführung.

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\rho}(\rho_0) = \begin{pmatrix} 0,0027 & 0,0022 & 4,9118 \cdot 10^6 & -8,0188 \cdot 10^5 & 0,2799 & 0,1996 & 1,7535 & 0,7888 \\ 3,3444 \cdot 10^{-4} & 8,4135 \cdot 10^{-4} & 7,2890 \cdot 10^5 & 2,4722 \cdot 10^6 & 0,0981 & 0,0846 & 0,6651 & 0,2903 \\ -0,0016 & -0,0010 & -2,1368 \cdot 10^6 & -1,1475 \cdot 10^5 & -0,0045 & -0,0062 & -1,0550 & -1,0927 \\ 1,0256 \cdot 10^{-4} & 3,3127 \cdot 10^{-4} & -1,5639 \cdot 10^5 & 2,0711 \cdot 10^6 & 0,0374 & 0,0513 & 0,2534 & 0,1106 \\ -4,2554 \cdot 10^{-6} & -3,9999 \cdot 10^{-4} & 117,7930 & -2,0013 \cdot 10^6 & -4,1681 \cdot 10^{-5} & -5,5284 \cdot 10^{-5} & -0,4004 & -0,4007 \\ 5,2552 \cdot 10^{-4} & 4,7362 \cdot 10^{-4} & 7,1595 \cdot 10^5 & 7,0901 \cdot 10^5 & 0,1690 & 0,1696 & 0,6554 & 1,9936 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\rho}(\rho_0) = \begin{pmatrix} 3,2342 \cdot 10^{-4} & 6,6998 \cdot 10^{-5} & 1,9755 \cdot 10^5 & -7,9148 \cdot 10^4 & -0,0263 & 0,0261 & 0,0435 & 0,0090 \\ -1,7658 \cdot 10^{-4} & 6,6998 \cdot 10^{-5} & 1,4755 \cdot 10^5 & -7,9148 \cdot 10^4 & -0,0263 & 0,0261 & 0,0435 & 0,0090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,7932 \cdot 10^{-4} & 6,5312 \cdot 10^{-5} & 1,1559 \cdot 10^5 & -3,3161 \cdot 10^4 & -0,0261 & -0,0259 & 0,0414 & 0,0107 \\ 5,1861 \cdot 10^{-4} & 6,6998 \cdot 10^{-6} & 6,8385 \cdot 10^4 & -7,9148 \cdot 10^3 & -0,0026 & -0,0026 & 0,0043 & 8,9980 \cdot 10^{-4} \\ 0,0016 & 0,0011 & 1,9410 \cdot 10^6 & 1,0503 \cdot 10^6 & 0,0090 & 0,0107 & 1,1435 & -1,1692 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\rho}(\rho_0) = \begin{pmatrix} -2,2323 \cdot 10^{-4} & 4,7769 \cdot 10^{-4} & 7,1739 \cdot 10^5 & 5,38 \cdot 10^5 & 0,1578 & 0,1559 & -0,7879 & 0,4707 \\ 2,1838 \cdot 10^{-4} & -6,188 \cdot 10^{-6} & -6,0386 \cdot 10^3 & 3,9042 \cdot 10^4 & 0,0021 & 0,0028 & 0,4809 & -0,4835 \end{pmatrix}.$$

Literaturverzeichnis

- [Aka74] AKAIKE, H.: Stochastic theory of minimal realization. In: *IEEE Trans. Automatic Control* 26 (1974), S. 667–673 [143](#), [147](#)
- [Aka75] AKAIKE, H.: Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 13 (1975), S. 162–173 [143](#), [147](#)
- [AM79] ANDERSON, Brian D. O. ; MOORE, John B.: *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979 [38](#)
- [Bar07] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2007
- [BC00] BITTANTI, Sergio ; CAMPI, M.C.: Persistence of excitation properties for the identification of time-varying systems. In: *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control* (2000), S. 680–684 [154](#)
- [BJ70] BOX, G. ; JENKINS, G.: *Time Series Analysis, forecasting and control*. Holden-Day, Oakland, California, 1970 [134](#)
- [BS72] BARTELS, R.H. ; STEWART, G.W.: Solution of the matrix equation $AX + XB = C$. In: *Comm. ACM* 15 (1972), Nr. 9, S. 820–826 [61](#)
- [Büs98] BÜSKENS, Christof: *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen*, Institut für Numerische Mathematik, Universität Münster, Dissertation, 1998 [72](#), [73](#)
- [Büs09] BÜSKEN, Christof: Echtzeitanpassung des klassischen Riccati-Reglers. In: *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 6, S. 269–278 [71](#), [72](#), [73](#), [74](#), [81](#), [112](#)
- [BSMM01] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001 [19](#), [31](#), [40](#), [53](#), [74](#), [78](#), [79](#), [125](#), [129](#), [138](#), [163](#)

- [Chi07] CHIUSO, Alessandro: The role of vector autoregressive modeling in predictor-based subspace identification. In: *Automatica* 43 (2007), S. 1034–1048 [37](#), [46](#), [112](#)
- [CP00] CHIUSO, A. ; PICCI, G.: Probing inputs for subspace identification. In: *IEEE Conference on Decision and Control* 39 (2000), S. 1544–1549
- [CP05a] CHIUSO, Alessandro ; PICCI, Giorgio: Consistency analysis of some closed-loop subspace identification methods. In: *Automatica* 41 (2005), S. 377–391 [37](#), [112](#)
- [CP05b] CHIUSO, Alessandro ; PICCI, Giorgio: Prediction error vs. subspace methods in closed loop identification. In: *Proceedings of the 16th IFAC world congress* 41 (2005)
- [CRS04] CALVETTI, D. ; REICHEL, L. ; SHUIBI, A.: L-Curve and Curvature Bounds for Tikhonov Regularization. In: *Numerical Algorithms* 35 (2004), Nr. 2-4, S. 301–314
- [DBH10] DEMUTH, Howarth ; BEALE, Mark ; HAGAN, Martin: *Neural Network Toolbox 6 - User's Guide*. The MathWorks, Inc., 2010 [21](#), [22](#), [24](#)
- [DBPL00] DECARLO, Raymond A. ; BRANICKY, Michael S. ; PETERSON, Stefan ; LENNARTSON, Bengt: Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems. In: *Proc. of the IEEE* 88 (2000), July, Nr. 7, S. 1069–1082 [30](#)
- [DR06] DAHMEN, Wolfgang ; REUSKEN, Arnold: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, Berlin, 2006
- [Fia83] FIACCO, A. V.: Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming. In: *Mathematics in Science and Engineering* 165 (1983) [73](#)
- [FK11] FÖLLINGER, Otto ; KLUWE, Mathias: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. VDE Verlag, 2011 [118](#), [122](#)
- [FL99] FORSELL, U. ; LJUNG, L.: Closed loop identification revisited. In: *Automatica* 35 (1999), S. 1215–1242 [135](#)
- [FSK94] FÖLLINGER, Otto ; SARTORIUS, Hans ; KREBS, Volker: *Optimale Regelung und Steuerung*. R. Oldenbourg Verlag, München-Wien, 1994 [2](#), [7](#), [9](#), [10](#), [14](#), [15](#), [167](#)

- [GB79] GEROMEL, J.C. ; BERNUSSOU, J.: An algorithm for optimal decentralized regulation of linear quadratic interconnected systems. In: *Automatica* 15 (1979), Nr. 4, S. 489 – 491 [58](#), [59](#), [71](#), [111](#)
- [GK99] GEIGER, Carl ; KANZOW, Christian: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1999 [61](#)
- [GM02] GITIZADEH, Rabin ; MARGALIOT, Michael: Stability of Switched Systems: An Optimal Control Approach. In: *Proc. of the 22nd Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel* (2002), Dec., S. 237–239 [30](#)
- [Ham93] HAMILTON, Patrick: *Künstliche neuronale Netze*. Vde-Verlag Berlin, 1993 [21](#)
- [Her94] HERTZ, John: *Introduction to the theory of neural computation*. Addison-Wesley Reading, Mass., 1994 [21](#)
- [Her11] HERMANN, Martin: *Numerische Mathematik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2011 [61](#)
- [Hil01a] HILLERMEIER, Claus: A generalized homotopy approach to multiobjective optimization. In: *J. Optimization Theory Appl.* 110 (2001), S. 557–583 [18](#)
- [Hil01b] HILLERMEIER, Claus: *Nonlinear Multiobjective Optimization: A Generalized Homotopy Approach*. Bd. 1. Birkhäuser, 2001 [18](#), [19](#)
- [HK65] HO, B. ; KALMAN, R.: Effective construction of linear state-variable models from input-output functions. In: *Regelungstechnik* 12 (1965), S. 545–548 [135](#), [136](#)
- [HM99] HESPHANA, João P. ; MORSE, A. S.: Stability of Switched Systems with Average Dwell-Time. In: *Proc. of 38th Conference on Decision and Control* (1999), Dec., S. 2655–2660 [113](#), [128](#)
- [HSS07] HESPHANA, Joao P. ; SANTESSO, Pãolo ; STEWART, Gregory: Optimal Controller Initialization fo Switching between Stabilizing Controllers. In: *Proc. of the 46th IEEE Conf. on Decision and Control* (2007), Dec., S. 5634–5639
- [HUE04] HESPANHA, J. P. ; UNBEHAUEN, H. ; ED.: Stabilization through hybrid control. (2004). – Oxford, U.K. [30](#), [113](#)

- [HWV09a] HOUTZAGER, Ivo ; WINGERDEN, Jan-Willem van ; VERHAEGEN, Michel: Fast-array Recursive Closed-loop Subspace Model Identification. In: *15th IFAC Symposium on System Identification* (2009), S. 96–101 [46](#), [155](#)
- [HWV09b] HOUTZAGER, Ivo ; WINGERDEN, Jan-Willem van ; VERHAEGEN, Michel: VARMAX-based closed-loop subspace model identification. In: *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference* (2009), S. 3370–3375 [46](#), [47](#)
- [HWV10] HOUTZAGER, Ivo ; WINGERDEN, Jan-Willem van ; VERHAEGEN, Michel: *Predictor-based subspace identification toolbox version 0.4*. 2010 [42](#)
- [HWV12] HOUTZAGER, Ivo ; WINGERDEN, Jan-Willem van ; VERHAEGEN, Michel: Recursive Predictor-Based Subspace Identification With Application to the Real-Time Closed-Loop Tracking of Flutter. In: *Control Systems Technology* 20 (2012), Nr. 4 [37](#), [155](#), [157](#)
- [Jan03] JANSSON, M.: Subspace Identification and ARX modelling. In: *Proceedings of 13th IFAC Symposium on System Identification* (2003) [37](#)
- [Kal60a] KALMAN, Rudolf E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In: *Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering* (1960), S. 35–45 [54](#)
- [Kal60b] KALMAN, Rudolf E.: On the general theory of control systems. In: *Proc. of the First IFAC Congress 1* (1960), S. 481–492 [131](#), [135](#)
- [Kno03] KNORRENSCHILD: *Numerische Mathematik*. Fachbuchverlag Leipzig, im Carl Hanser Verlag München Wien, 2003
- [Kre77] KREISSELMEIER, Gerhard: Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-22 (1977), Nr. 1, S. 2–8 [54](#)
- [KS09] KARABACAK Özkan ; SENGÖR, Neslihan S.: A dwell time approach to the stability of switched linear systems based on the distance between eigenvector sets. In: *International Journal of Systems Science* 40 (2009), S. 845–853 [126](#), [127](#)
- [LA70] LEVINE, W.S. ; ATHANS, M.: On the determination of the optimal constant output feedback gains for the linear multivariable systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 15 (1970), Nr. 1, S. 44–48 [58](#), [59](#), [111](#)

- [LA09] LIN, Hai ; ANTSAKLINS, Panos J.: Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results. In: *Proc. of the IEEE Transaction on Automatic Control* 54 (2009), February, Nr. 2, S. 308–322 [29](#), [30](#), [113](#), [126](#)
- [Lar83] LARIMORE, W.E.: System identification, reduced order filtering and modeling via canonical variate analysis. In: *Proc. of the American Control Conference* (1983), S. 445–451 [147](#)
- [Lar90] LARIMORE, W.E.: Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control. In: *Proc. of the 29th Conference on Decision and Control* (1990), S. 596–604 [147](#), [149](#)
- [Lib03] LIBERZON, Daniel: *Switching in Systems and Control*. Bd. 1. Birkhäuser, 2003 [27](#), [113](#)
- [Liu05] LIU, Kang-Zhi: Adaptive Robust Control: A New Approach To The Adaptive Control Of Linear Systems. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005* (2005), S. 137–142 [54](#)
- [Lju78] LJUNG, Lennart: Convergence analysis of parametric identification methods. In: *IEEE Trans. Automatic Control* AC-23 (1978), S. 770–783 [135](#)
- [Lju87] LJUNG, Lennart: *System Identification: Theory for the User*. Bd. 1. Prentice Hall, 1987 [112](#), [131](#), [133](#), [135](#), [154](#)
- [Lju91] LJUNG, Lennart: A simple start-up procedure for canonical form state space identification, based on subspace approximation. In: *IEEE Conference on Decision and Control* (1991)
- [Lju99] LJUNG, Lennart: *System Identification: Theory for the User (2nd Edition)*. Bd. 1. Prentice Hall, 1999 [2](#), [112](#), [121](#), [131](#), [133](#), [135](#)
- [LM96] LJUNG, L. ; MCKELVEY, T.: Subspace Identification from closed loop data. In: *Signal Processing* 52 (1996), S. 209–216 [2](#), [37](#)
- [LM99] LIBERZON, D. ; MORSE, A. S.: Basic Problems in stability and design of switched systems. In: *IEEE Control Syst. Mag.* 19 (1999), Nr. 5, S. 59–70 [30](#)
- [Loc01] LOCATELLI, Arturo: *Optimal Control: an introduction*. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2001 [2](#), [8](#), [17](#)
- [Lue64] LUENBERGER, D. G.: Observing the state of a linear system. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* 8 (1964), S. 98–108 [53](#), [161](#)

- [Lun06] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Bd. 4. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006 [2](#), [7](#), [8](#), [12](#), [53](#), [54](#), [58](#), [60](#), [88](#), [115](#), [120](#), [121](#), [122](#), [123](#), [161](#)
- [Lun07] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Bd. 6. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007 [7](#), [14](#), [31](#), [48](#), [53](#), [55](#), [115](#), [116](#), [118](#), [119](#)
- [MBL08] MERCÈRE, G. ; BAKO, L. ; LECOEUICHE, S.: Propagator-based methods for recursive subspace model identification. In: *Signal Processing* 88 (2008), Nr. 3, S. 468–491 [156](#)
- [ML03] MARGALLOT, Michael ; LANGHOLZ, Gideon: Necessary and Sufficient Conditions for Absolute Stability: The Case of Second-Order Systems. In: *Proc. of IEEE Transactions on Circuits and Systems* 50 (2003), Feb., Nr. 2, S. 227–234 [30](#)
- [MMVV89] MOONEN, M. ; MOOR, B. D. ; VANDENBERGHE, L. ; VANDERWALLE, J.: On- and off-line identification of linear state space models. In: *International Journal of Control* 49 (1989), Nr. 1, S. 219–232 [136](#), [137](#), [138](#), [139](#), [149](#)
- [Mor96] MORSE, A. S.: Supervisory Control of Families of Linear Set-Point Controllers-Part 1: Exact Matching. In: *Proc. of IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Oct., S. 1413–1431 [27](#), [30](#), [31](#), [32](#), [112](#), [128](#)
- [NB94] NARENDRA, K. S. ; BALAKRISHNAN, J.: A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting a-matrices. In: *IEEE Trans. on Auto. Cont.* 39 (1994), Nr. 12, S. 2469–2471 [126](#)
- [Obe95] OBERHOLZ, Gregor: *Differentialgleichungen für technische Berufe*. Verlag Anita Oberholz, Gelsenkirchen, 1995 [118](#)
- [OM91] OVERSCHEE, P. van ; MOOR, B. D.: Subspace algorithms for the stochastic identification problem. In: *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control* (1991), S. 1321–1326 [147](#), [149](#)
- [OM93] OVERSCHEE, P. van ; MOOR, B. D.: N4SID - Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. In: *Automatica* 30 (1993), Nr. 1, S. 75–94 [149](#), [153](#)
- [OM96] OVERSCHEE, P. van ; MOOR, B. D.: *Subspace Identification of Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*. Bd. 1. Kluwer Academic Publishers, 1996 [112](#), [140](#), [141](#), [146](#), [147](#), [148](#), [149](#), [150](#), [152](#), [154](#), [155](#), [163](#), [165](#)

- [OM97] OVERSCHEE, Peter V. ; MOOR, Bart D.: Closed Loop Subspace System Identification. In: *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control* (1997), S. 1848–1853 [2](#), [37](#)
- [OMS91] OVERSCHEE, P. van ; MOOR, B. D. ; SUYKENS, J.: Subspace algorithms for system identification and stochastic realization. In: *Proc. Conf. on Mathematical Theory for Networks and Systems, MITA Press* (1991), S. 589–595 [140](#), [142](#), [149](#)
- [Pre75] PREUSS, Gerhard: *Allgemeine Topologie*. Springer, Berlin, 1975
- [QL03] QIN, S. J. ; LJUNG, L.: Closed-loop subspace identification with closed innovation estimation. In: *Proceedings of 13th IFAC Symposium on System Identification* (2003) [37](#)
- [rB65] ÅSTRÖM, K. ; BOHLIN, T.: Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records,. In: *Proc. IFAC Symposium on Self-Adaptive Systems* (Teddington, UK, 1965) [133](#), [134](#)
- [Roj06] ROJAS, Raúl: *Theorie der neuronalen Netze - eine systematische Einführung*. Bd. 4. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006 [21](#)
- [rW08a] ÅSTRÖM, Karl J. ; WITTENMARK, Björn: *Adaptive Control - second edition*. Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street. Mineola, N.Y. 11501, 2008 [2](#), [111](#)
- [RW08b] REY, Günter D. ; WENDER, Karl F.: *Neuronale Netze : eine Einführung in die Grundlagen, Anwendungen und Datenauswertung*. Bd. 1. Huber Bern, 2008 [21](#)
- [SADG97] SYRMOS, V. L. ; ABDALLAH, C. T. ; DORATO, P. ; GRIGORIADIS, K.: Static Output Feedback - A Survey. In: *Automatica* 33 (1997), Nr. 2, S. 125–137 [57](#)
- [SB89] SASTRY, Shankar ; BODSON, Marc: *Adaptive Control - Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1989 [2](#)
- [SDZW06] SUN, Xi-Ming ; DIMIRIKOWSKI, Georgi M. ; ZHAO, Jun ; WANG, Wei: Exponential Stability for Switched Delay Systems Based on Average Dwell Time Technique and Lyapunov Function Method. In: *Proc. of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota* (2006), S. 1539–1543 [130](#)
- [SK91] SCHWETLICK ; KRETZSCHMAR: *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig, 1991

- [SK11] SCHWARZ, Hans R. ; KÖCKLER, Norbert: *Numerische Mathematik*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 2011
- [SL03] SEBER, George A. F. ; LEE, Alan J.: *Linear Regression Analysis, 2nd Edition*. Wiley, New York, 2003
- [SS89] SÖDERSTRÖM, Torsten ; STOICA, Petre: *System Identification*. Bd. 1. Prentice Hall, 1989 [112](#), [121](#), [135](#)
- [TM87] TOIVONEN, H. T. ; MÄKILÄ, P. M.: Newton's method for solving parametric linear quadratic control problems. In: *International Journal of Control* 46 (1987), Nr. 3, S. 897–911 [61](#), [111](#)
- [Unb07] UNBEHAUEN, Heinz: *Regelungstechnik II*. Vieweg, Braunschweig, 2007 [115](#)
- [Unb08] UNBEHAUEN, Heinz: *Regelungstechnik I*. Vieweg, Braunschweig, 2008 [55](#), [115](#), [118](#), [119](#)
- [VD92a] VERHAEGEN, M. ; DEWILDE, P.: Subspace model identification. Part 1: The output-error state space model identification class of algorithms. In: *International Journal of Control* 56 (1992), Nr. 5, S. 1211–1241 [140](#)
- [VD92b] VERHAEGEN, M. ; DEWILDE, P.: Subspace model identification. Part 2: Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm. In: *International Journal of Control* 56 (1992), Nr. 5, S. 1187–1210 [140](#)
- [Ver93] VERHAEGEN, M.: Subspace model identification. Part 3: Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm. In: *International Journal of Control* 58 (1993), Nr. 3, S. 555–586 [140](#)
- [Ver94] VERHAEGEN, M.: Identification of the Deterministic Part of MIMO State Space Models given in Innovations Form from Input-Output Data. In: *Automatica* 30 (1994), Nr. 1, S. 61–74 [140](#)
- [VWBMV13] VEEN, Gijs van d. ; WINGERDEN, Jan-Willem van ; BERGAMASCO, Marco ; MICHEL VERHAEGEN, Marco L.: Closed-loop subspace identification methods: an overview. In: *IET Control Theory Appl.* 7 (2013), Nr. 10, S. 1339–1358 [2](#), [37](#), [41](#)
- [WV08] WINGERDEN, Jan-Willem van ; VERHAEGEN, Michel: Subspace identification of MIMO LPV systems: the PBSID approach. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control* (2008), S. 4516–4521

- [WV09] WINGERDEN, Jan-Willem van ; VERHAEGEN, Michel: Subspace identification of Bilinear and LPV systems for open- and closed-loop data. In: *Automatica* 45 (2009), S. 372–381
- [XQW09] XIE, D. ; Q.WANG ; WU, Y.: Average dwell-time approach to \mathcal{L}_2 gain control synthesis of switched linear systems with time delay in detection of switching signal. In: *Proc. of IET Control Theory Appl.* 3 (2009), S. 763–771 [130](#)
- [Zha02] ZHANG, Quinghua: Adaptive Observer for Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO) Linear Time-Varying Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002) [54](#)
- [ZHYM00] ZHAI, Guisheng ; HU, Bo ; YASUDA, Kazunori ; MICHEL, Anthony N.: Stability Analysis of Switched Systems with Stable and Unstable Subsystems: An Average Dwell Time Approach. In: *Proc. of the American Control Conference, Chicago, Illinois* (2000), Jun., S. 200–204 [30](#), [129](#)