

# Biaxiale Experimente und numerische Simulationen mit neu entwickelten Probekörpern zur Vorhersage der Schädigung und des Versagens duktiler Metalle

Marco Schmidt

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.).

genehmigten Dissertation.

Gutachter/Gutachterin:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brünig
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Manuela Sander
3. Prof. Dr.-Ing. Wolfram Volk

Die Dissertation wurde am 16.06.2020 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften am 07.11.2020 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 04.12.2020 statt.

**Autor:**

Marco Schmidt  
*m.schmidt@unibw.de*

Nabburger Straße 19  
81737 München

## Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit werden die vom Spannungszustand abhängigen Schädigungs- und Versagensprozesse duktiler Metalle experimentell und numerisch untersucht, um diese zukünftig noch besser vorhersagen zu können. Dazu werden Experimente mit biaxialen Probekörpern aus einer Aluminium- und einer Stahllegierung unter verschiedenen Lastfällen bis zum Versagen des Materials durchgeführt und mit korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen verglichen.

Für die Simulationen wird ein kommerzielles Finite-Elemente-Programm mit eigener Materialroutine, die auf einem phänomenologischen, mikromechanisch motivierten Kontinuumsschädigungsmodell mit spannungsabhängiger Schädigungsentwicklung basiert, verwendet. Da die verschiedenen Schädigungsmechanismen in Abhängigkeit des Spannungszustands auftreten, werden die biaxialen Probekörper unter verschiedenen Lastfällen untersucht, um die maximal mögliche Bandbreite der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters festzustellen. Diese unterschiedlichen Darstellungen des Spannungszustands stellen in der Literatur eine wichtige Rolle bei der Schädigungs- und Versagensmodellierung dar. In diesem Zusammenhang werden zwei neuartige biaxiale sowie ein weiterer bereits verwendeter biaxialer Probekörper hinsichtlich ihrer Geometrie, der auftretenden Spannungszustände und der Eignung zur Untersuchung duktiler Schädigungs- und Versagensprozesse bewertet.

Die experimentell beobachtete Schädigung, die unter anderem das Entfestigungsverhalten und die auftretenden Schädigungsmechanismen umfasst, wird mit numerisch ermittelten Spannungs- und Verzerrungswerten verglichen, um Zusammenhänge darzustellen. Mit der Untersuchung von stark druckdominanten Lastfällen wird außerdem der Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität aus der Literatur diskutiert und eine neuartige spannungsabhängige Funktion für diesen vorgeschlagen.

Außerdem wird ein Risskriterium, das auf Invarianten des numerisch ermittelten Schädigungsverzerrungstensors basiert, formuliert und somit sowohl isotrope als auch anisotrope Schädigungsmechanismen berücksichtigt. Die für das Risskriterium notwendigen Materialparameter werden in Abhängigkeit des Spannungszustandes analysiert und anschließend formuliert.

## Abstract

The predictability of damage and failure processes in ductile metals, which are dependent on the stress state, are experimentally and numerically examined throughout this work. Various load cases are tested on biaxial test specimens made of aluminum and steel alloy until the material fails. They are then compared with corresponding elastic-plastic-damaging simulations.

A commercial finite element program with its own material routine that is based on a phenomenological, micromechanically motivated continuum damage model with stress-dependent damage development is used for the simulations. Because the various damage mechanisms depend on the stress state, the biaxial test specimens are examined under different load cases in order to determine the maximum possible range of stress triaxiality and lode parameter. These different representations of the stress state denoted throughout the text play an important role in damage and failure modeling. In this context, two new types of biaxials and one other previously used biaxial test specimen were assessed with regard to their geometry, the occurring stress states, as well as suitability for the investigation of ductile damage and failure processes.

The damage observed in experiments, which includes among other things the softening behavior and the damage mechanisms that occur, is compared with numerically determined stress and strain values in order to show relationships. With the investigation of strongly pressure-dominant load cases, the limit value of the negative stress triaxiality is also determined and a novel stress-dependent function for this is suggested.

Furthermore, a crack criterion that is based on invariants of the numerically determined damage strain tensor is formulated and thus, both isotropic and anisotropic damage mechanisms are also considered. The material parameters required for the crack criterion are analyzed depending on the stress state and then formulated.

## **Vorwort**

Die nachfolgende Arbeit konnte ich während meiner fünfeinhalb jährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München verfassen.

Zunächst möchte ich meinen besonderen Dank an Herrn Professor Brünig aussprechen, der mir das Arbeiten an diesem interessanten Forschungsthema ermöglichte und mir jederzeit mit wissenschaftlichen Ratschlägen zur Seite stand.

Des Weiteren möchte ich mich bei Frau Professorin Sander und Herrn Professor Volk für die investierte Zeit als Gutachter sowie Herrn Professor Kiendl für die Aufgabe des Prüfungsvorsitzes bedanken.

Ebenso möchte ich mich bei meinen Kollegen für die tollen wissenschaftlichen Diskussionsrunden und die großartige Zusammenarbeit bedanken. Ein ganz besonderer Dank gilt dabei Herrn Dr.-Ing. Gerke und Herrn Zistl für ihre Unterstützung bei experimentellen Vorhaben und fachlichen Ratschlägen zu verschiedenen Problemstellungen. Außerdem möchte ich Herrn Saur recht herzlich danken, dessen experimentelle Expertise zu jedem Zeitpunkt eine super Unterstützung war.

Ebenfalls möchte ich mich beim Institut für Werkstoffe des Bauwesens für die Bereitstellung und Nutzung des experimentellen Equipments bedanken.

Ich bedanke mich bei meinen Eltern, die während der gesamten Zeit eine tolle Unterstützung für mich waren.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>1</b>
1.1	Materialverhalten duktiler Metalle . . . . .	1
1.2	Stand der Wissenschaft . . . . .	2
1.3	Inhalte der Arbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Kontinuumsschädigungsmodell</b>	<b>9</b>
2.1	Kinematik . . . . .	9
2.2	Thermodynamik . . . . .	15
2.3	Materialgleichungen . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Numerische Umsetzung</b>	<b>27</b>
3.1	Finite-Element-Methode . . . . .	27
3.2	Numerische Integration . . . . .	29
3.3	Schnittstelle Ansys-Materialroutine . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>41</b>
4.1	1D-Versuchsaufbau . . . . .	41
4.2	2D-Versuchsaufbau . . . . .	42
4.3	Digitale Bildkorrelation . . . . .	43
4.4	Rasterelektronenmikroskop . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Materialparameter und Probekörper</b>	<b>46</b>
5.1	Aluminiumlegierung - AlCuMg1 . . . . .	47
5.2	Stahllegierung - X5CrNi18-10 . . . . .	48
5.3	Biaxiale Probekörper . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Experimente und numerische Simulationen biaxialer Probekörper</b>	<b>60</b>
6.1	Z-Probekörper aus einer Aluminiumlegierung . . . . .	60
6.2	X0-Probekörper aus einer Aluminiumlegierung . . . . .	70
6.3	X0-Probekörper aus einer Stahllegierung . . . . .	81
6.4	H-Probekörper aus einer Aluminiumlegierung . . . . .	92
6.5	H-Probekörper aus einer Stahllegierung . . . . .	104
6.6	Entwicklung eines Risskriteriums für duktile Metalle . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Schlussfolgerung</b>	<b>119</b>
<b>8</b>	<b>Ausblick</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>124</b>

# 1 Motivation

Das Bestreben, Materialien effizient und ressourcenschonend einzusetzen, wird auch in diesem Jahrhundert keine Grenzen kennen. Trotz immer besser werdender Technologien und zahlreicher neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse in den letzten Jahrzehnten bleibt der Forschungsbedarf riesig. Zum einen, um als Wirtschaft wettbewerbsfähig zu bleiben und zum anderen, um noch unerforschte Gebiete zu untersuchen. Mit dem Ziel, dass numerische Berechnungen in Zukunft kostspielige Experimente ersetzen können, werden immer mehr Materialmodelle vorgestellt und weiterentwickelt. Um möglichst realitätsnah das Materialverhalten abzubilden, müssen die unterschiedlichen Phänomene des Materialverhaltens erfasst und mathematisch beschrieben werden.

## 1.1 Materialverhalten duktiler Metalle

In dieser Arbeit liegt das Augenmerk auf der Untersuchung auftretender duktiler Schädigungs- und Versagensprozesse bei Metallen, um diese besser in Materialmodellen zu beschreiben. Dennoch ist das schädigende Materialverhalten im Kontext des gesamten Materialverhaltens zu sehen. Dazu zählen neben dem schädigenden auch das elastische und plastische Materialverhalten sowie die Entstehung von Makrorissen, die letztendlich zum Versagen führen.

Das elastische Materialverhalten tritt mit Beginn einer Belastung auf und beschreibt auf atomarer Ebene eine moderate und relative Bewegung der Atome zueinander [73]. Dieser kontinuierliche Prozess ist reversibel, wodurch nach Entlastung die Atome ihre Ursprungsposition wieder einnehmen. Mit zunehmender Belastung steigt die Bewegung und die Anziehungskräfte der einzelnen Atome werden durchbrochen. Dies beschreibt den Beginn des plastischen Materialverhaltens, das zu Verschiebungen im Kristallgitter, irreversiblen Verformungen und zu einer Verfestigung des Materials führt. Bei weiterer Laststeigerung setzt markantes irreversibles, schädigendes Materialverhalten ein, wobei verschiedene Schädigungsmechanismen in Abhängigkeit des Spannungszustandes auftreten und zu einer Entfestigung des Materials führen. Steigt die Schädigung signifikant an, führt dies zum Versagen des Materials.

Treten bei Materialien große irreversible Verformungen bis zum Versagen auf, so ist das Material sehr widerstandsfähig und wird als duktil bezeichnet. Die gute Verformbarkeit und Resistenz gegen Sprödbrüche führt dazu, dass duktile Metalle im Ingenieurbereich immer größere Bedeutung gewinnen, weshalb Kenntnisse über die Materialeigenschaften, insbesondere das Schädigungs- und Versagensverhalten, essenziell sind.

In der Realität besitzt jedes Material bereits eine Anfangs- beziehungsweise Initialschädigung, die durch Herstellungsprozesse begründet ist. Das schädigende Materialverhalten, das insbesondere begleitend zum Entstehen großer plastischer Deformationen auftritt, impliziert auf Mikroebene das markante Bilden und Aufweiten von Mikroporen sowie das Heranwachsen von Mikroscherrissen. Durch steigende Schädigung kommt es zu Zusammenschlüssen dieser Mikrodefekte, was letztendlich auf der Makroebene zum Makroriss und somit zum Versagen des Materials führt.

## 1.2 Stand der Wissenschaft

Um nachzuvollziehen, bei welchem wissenschaftlichen Stand diese Arbeit ansetzt, dient dieser Abschnitt dazu, die bisherigen Erkenntnisse zu erfassen und einzuordnen. Aufgrund des großen wirtschaftlichen Interesses an optimal auszunutzenden Materialien wurde in den letzten Jahrzehnten der Fokus in den Ingenieurdisziplinen unter anderem auf die Materialforschung gelegt.

### 1.2.1 Materialmodelle

Um effizient und ressourcenschonend das Materialverhalten zu untersuchen, gewinnen zu Experimenten begleitende numerischen Untersuchungen an immer größer werdender Bedeutung. Dadurch ist es zum einen möglich, bereits vor experimentellen Untersuchungen Maximalwerte vorherzusagen oder auch mögliche Problemfelder frühzeitig zu identifizieren. Damit zuverlässige numerische Berechnungen möglich sind, ist das Erfassen und Abbilden des auftretenden Materialverhaltens essenziell. Da dieses während einer Belastung bis zum Versagen verschiedene Charakteristika aufweist, müssen die einzelnen Prozesse zunächst separat untersucht und anschließend in ein konsistentes Materialmodell überführt werden.

Da es bereits eine Vielzahl an Modellen für elastisch-plastisches Materialverhalten gibt, liegt der aktuelle Fokus vor allem in der Schädigungsmechanik mit dem Ziel, ein konsistentes Kontinuumsschädigungsmodell aufzustellen.

Eine Reihe von Kontinuumsschädigungsmodellen entstanden in den letzten Jahrzehnten und sind entweder phänomenologisch oder mikromechanisch begründet. Mikromechanische Schädigungsmodelle beschreiben die duktile Schädigung auf der Mikroebene in elastisch-plastischen Materialien und ermöglichen eine gute Approximation von Porenwachstum und -zusammenschluss sowie Mikroscherrissen. Eines der bekanntesten mikromechanischen Kontinuumsschädigungsmodelle ist das Gurson-Tvergaard-Needleman Modell [84, 98], das eine Erweiterung des Gurson-Modells [52] darstellt. Da diese Modelle keine Unterscheidung zwischen Dehnung infolge von Plastizität und infolge von Schädigung sowie nur eine skalare Schädigungsvariable beinhalten, sind sie für eine realitätsnahe Analyse von Schädigungs- und Versagensprozessen weniger geeignet [25].

Bei phänomenologischen Modellen werden dagegen die Einflüsse der Schädigungsprozesse auf der Makroebene beschrieben und führen zu einer Entfestigung im Material, was durch Einführung von Schädigungsvariablen und entsprechenden Materialgesetzen realisiert wird. Somit sind diese Modelle eher geeignet, um konsistent komplexe Deformationsprozesse abzubilden.

Viele der entwickelten phänomenologischen Kontinuumsschädigungsmodelle lieferten grundlegende Ansätze für heutige Modelle. So verwendete beispielsweise Kachanov [58], der eines der ersten Kontinuumsschädigungsmodelle aufstellte, das Prinzip der effektiven Spannungen für geschädigtes Material. Als Ergänzung gilt das von Lemaitre [71, 72] in seinem isotropen Kontinuumsschädigungsmodell etablierte Prinzip der Dehnungsäquivalenz zwischen ungeschädigtem und geschädigtem Material. Die ersten Kontinuumsschädigungsmodelle beschrieben isotrope Schädigungseffekte, bei denen skalare Flächenvariablen zur Beschreibung der Schädigung [58, 70, 66] dienten. Um anisotrope Schädigungseffekte zu berücksichtigen, mussten komplexere Schädigungsgrößen verwendet werden. Neben vektoriellen Schädigungsvariablen [62] werden vor allem Schädigungstensoren zweiter Stufe verwendet. Um das isotrope Kontinuumsschädigungsmodell von Lemaitre [71, 72] für anisotrope Schädigungsmechanismen zu erweitern, verwendete Murakami [82] beispielsweise einen symmetrischen Schädigungstensor zweiter Stufe. Außerdem enthielt dieses Modell erstmalig die kinematische Unterteilung in geschädigte und fiktiv ungeschädigte Konfigurationen. Auch Schädigungstensoren vierter Stufe, wie sie beim Modell von Chaboche [32] eingesetzt werden, sind eine Möglichkeit. Allerdings wird dadurch auch generell das Kontinuumsschädigungsmodell komplexer, weshalb oftmals der Schädigungstensor zweiter Stufe favorisiert wird.

Das ursprünglich vorgestellte Modell von Brünig [15] zur Abbildung von elastisch-plastischem Materialverhalten basiert auf einer phänomenologischen Betrachtungsweise. Aufgrund mikromechanischer Überlegungen wurde dieses Modell erweitert [19, 20], um schädigendes Materialverhalten zu berücksichtigen. Es folgten Untersuchungen [22, 23] und mikromechanische Analysen [25, 31] zum Einfluss des Spannungszustandes auf das Schädigungsverhalten, um die Schädigungsmechanismen besser abbilden zu können. Somit eignet sich das phänomenologische Modell von Brünig [20] mit den Erweiterungen aufgrund der mikromechanischen Untersuchungen [31] zur Analyse von Schädigungsprozessen und stellt somit die Grundlage der in dieser Arbeit verwendeten Theorie dar.

### 1.2.2 Abhängigkeiten vom Spannungszustand

Der Schädigungsprozess duktiler Metalle hängt essenziell vom dreidimensionalen Spannungszustand ab [19], weshalb Spannungskomponenten eine wesentliche Rolle in der Charakterisierung von Schädigungs- und Versagensprozessen einnehmen. Aufgrund des isotropen elastisch-plastischen Materialverhaltens können die Invarianten des Spannungstensors und des -deviators zur Formulierung von

Schädigungsgesetzen verwendet werden. Zum isotropen Schädigungsmechanismus korrespondiert die erste Invariante des Spannungstensors, die auch in Form der Spannungstriaxialität dargestellt werden kann. Dieser Zusammenhang wurde bereits bei McClintock [78] dargestellt, der unter Zugbelastung einen Körper aus elastisch-plastischem Material mit zylindrischen Poren untersuchte und Porenwachstum bei hohen Spannungstriaxialitäten aufzeigte. Weitere Untersuchungen von Rice und Tracey [86] mit kugelförmigen Poren in einem elastisch-plastischen Material konnten zum einen das Porenwachstum bei hohen Spannungstriaxialitäten bestätigen und bei moderaten Spannungstriaxialitäten eine Gestaltänderung der Poren feststellen. Die zweite und dritte Invariante des Spannungsdeviators, die durch die von Mises-Vergleichsspannung beziehungsweise den Lodeparameter dargestellt werden können, korrespondieren zu den anisotropen Schädigungseffekten. Durch solch einen vollständigen Invariantensatz wird sowohl der hydrostatische als auch der deviatorische Einfluss der Spannungen auf das Schädigungsverhalten berücksichtigt. Der Einfluss des Lodeparameters ist vor allem bei moderaten und negativen Spannungstriaxialitäten feststellbar [45, 36], weshalb dessen Einfluss auf das Schädigungsverhalten berücksichtigt werden sollte. Somit sollten Schädigungs- und Versagensmodelle für die Approximation isotroper und anisotroper Schädigungsmechanismen sowohl die Spannungstriaxialität als auch den Lodeparameter einbeziehen.

Einzelne Bereiche der Spannungstriaxialität können den verschiedenen Schädigungsmechanismen gut zugeordnet werden [23]. Dennoch stellt sich die Frage, ab welcher negativen Spannungstriaxialität keine Schädigungsentwicklung mehr stattfindet. Dazu führten Bao und Wierzbicki [7], auf Basis experimenteller Daten von Bridgman [13] sowie von Kao et al. [59], und Khan und Liu [60] Untersuchungen durch und schlugen unterschiedliche Grenzwerte der negativen Spannungstriaxialität vor. Somit ist die Frage nach einem solchen Grenzwert weiterhin offen, weshalb im Rahmen dieser Arbeit auch Lastkombinationen untersucht werden, bei denen große negative Spannungstriaxialitäten auftreten.

### 1.2.3 Risskriterium

Im schädigenden Materialverhalten duktiler Metalle ist die Entwicklung der Schädigungsmechanismen nicht endlos. Ab einem gewissen Punkt führen das Porenwachstum und die Ausbreitung von Mikroscherrissen zum Zusammenwachsen von Mikrodefekten [97, 98], infolgedessen es zum Makroriss kommt und das Material versagt. Zur Bestimmung des Zusammenwachsens von Mikrodefekten verwendete beispielsweise McClintock [78] die Änderung des Porendurchmessers als Indiz für den Beginn. In den Veröffentlichungen von Brünig et al. [24, 26] und Hagenbrock [53] wird ein aus mikromechanischen Simulationen resultierendes Kriterium, das den Beginn des Zusammenwachsens auf Basis der Invarianten der Schädigungsverzerrungen beschreibt, vorgeschlagen. Dieser Ansatz könnte mit einem Risskriterium ergänzt werden, um letztendlich das Versagen des Materials zu

beschreiben. In der Literatur sind weitere Ansätze zu finden, wobei die Risskriterien meist ohne die Berücksichtigung des Beginns des Zusammenwachsens von Mikrodefekten oder sogar ohne den Einfluss von Schädigung formuliert sind. Beispielsweise verwendeten Bao et al. [6] und Coppola [35] vom Spannungszustand abhängige Risskriterien, die allerdings nur elastisch-plastisches Materialverhalten berücksichtigen und somit die während der Belastung sich weiterentwickelnde duktile Schädigung vernachlässigen. Aufgrund der verschiedenen Schädigungsvariablen in den bereits vorgestellten Kontinuumsschädigungsmodellen sind deren Risskriterien auch unterschiedlich. Somit berücksichtigen Tvergaard [97, 99] sowie Tvergaard und Needleman [98] eine skalare Volumenvariable für das Risskriterium, die der kritischen Porosität entspricht. Entsprechend führt Lemaitre [73] ein Risskriterium in Abhängigkeit seiner im Kontinuumsschädigungsmodell verwendeten skalaren Flächenvariable ein. Diese Risskriterien sind aufgrund ihrer skalaren Schädigungsvariablen nur bedingt für die Berücksichtigung isotroper und anisotroper Schädigungsmechanismen geeignet. Anders verhält es sich beim vorgestellten Risskriterium von Brüning et al. [24, 26], das aus numerischen Studien resultiert und die verschiedenen Schädigungsmechanismen durch die Verwendung der Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors und -deviators berücksichtigt. Somit wird dieser Ansatz im Rahmen dieser Arbeit verfolgt und auf Basis der aufgezeigten experimentellen und numerischen Ergebnisse ein Risskriterium vorgeschlagen.

#### 1.2.4 Entwicklung von Probekörpergeometrien

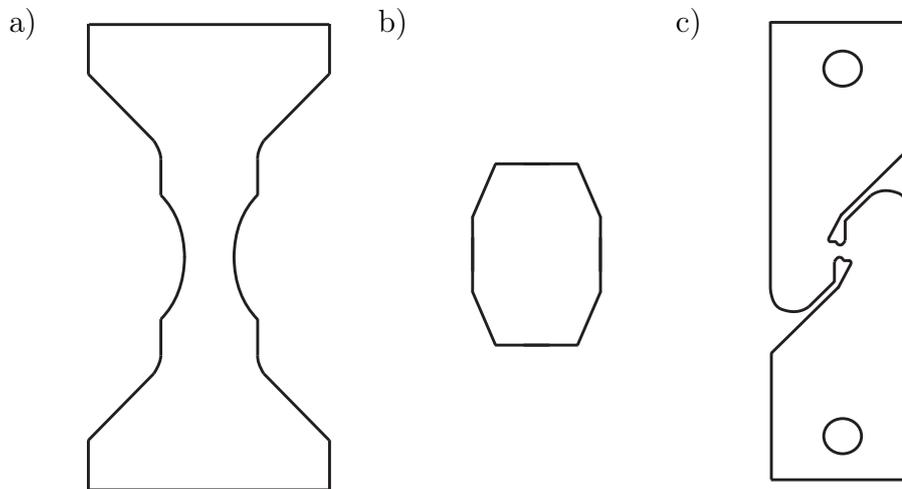
Aufgrund zahlreicher Studien, die belegen, dass das Auftreten der verschiedenen Schädigungsmechanismen bei duktilen Metallen vom Spannungszustand abhängt, liegt ein aktueller Forschungsschwerpunkt darin, Probekörper zu entwickeln, die unter Belastung verschiedene Spannungszustände erreichen.

So lag zunächst der Fokus auf der Variation eindimensionaler Probekörper, die unter Zug-, Druck- und Scherbelastungen untersucht wurden. Eine Möglichkeit die häufig verwendeten, flachen und ungekerbten Zugstäbe abzuwandeln lag darin, die Flachproben unterschiedlich zu kerben, wie es bei Dunand und Mohr [45], siehe Abbildung 1.1 a), sowie Gao et al. [48] und Driemeier et al. [44] der Fall war. Aber auch gekerbte voll- und hohlzylindrische Zugproben, wie sie bei Becker et al. [9] und Li et al. [75] untersucht wurden, fanden durchaus ihre Anwendung. Ausgehend von der Spannungstriaxialität eines gewöhnlichen Zugstabs, die bei etwa einem Drittel liegt, konnte durch die eben aufgezählten Variationen höhere Spannungstriaxialitäten erreicht werden.

Wie Gao et al. [47] andeuteten, sind Druckversuche erforderlich, um negative Spannungstriaxialitäten zu erreichen. Dies bestätigten Fourmeau et al. [46] sowie Bai und Wierzbicki [5] in ihren Untersuchungen mit vollzylindrischen Probekörpern, wobei Spannungstriaxialitäten um minus einem Drittel erreicht wurden. Im Gegensatz zur Verjüngung des Probekörpers durch Kerben untersuchten Li et al.

[75] Druckprobekörper, siehe Abbildung 1.1 b), die zur Probenmitte hin dicker sind als am Rand. Dies führte zu größeren negativen Werten der Spannungstriaxialität.

Somit wurden mit Zugversuchen unter Verwendung modifizierter Geometrien der Probekörper Spannungstriaxialitäten größer gleich einem Drittel und mit Druckversuchen kleiner gleich minus einem Drittel erreicht. Um den Bereich zwischen den erzielten Spannungstriaxialitäten abzudecken, wurden Probekörper nötig, die einer Scherbelastung ausgesetzt sind. Ab diesem Zeitpunkt musste die Kreativität in der Probekörperentwicklung nochmal deutlich gesteigert werden, da eine Scherbelastung mit einfachen Zugmaschinen und gewöhnlichen Probekörpern schwieriger zu realisieren ist. Der Probekörper muss somit so entwickelt werden,



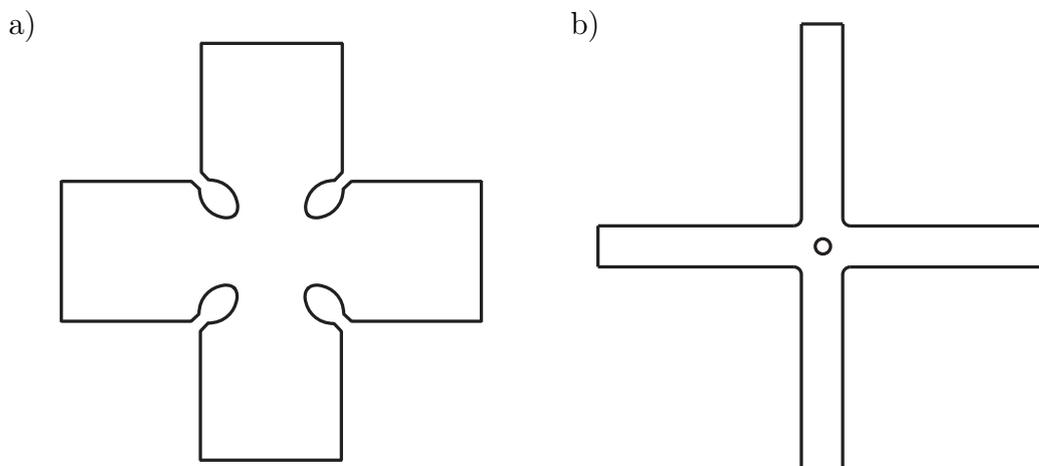
**Abb. 1.1:** 1D-Probekörper aus der Literatur: a) Zugprobekörper [45], b) Druckprobekörper [75], c) Scherprobekörper [51]

dass eine aufgebrachte Zug- oder Drucklast aufgrund der Probengeometrie zu einer Scherbeanspruchung führt. Drei geometrisch unterschiedliche Probekörper für Scherbelastungen wurden unter anderem von Bao und Wierzbicki [6], Brüning et al. [22] sowie Gruben et al. [51] untersucht. Der von Gruben untersuchte Probekörper für Scherbelastungen ist in der Abbildung 1.1 c) dargestellt und zeigt, dass im Zentrum ein schmaler Bereich senkrecht zur Belastungsrichtung die Probekörperhälften verbindet. Somit führt diese Geometrie zu einer Scherbeanspruchung in der Mitte des Probekörpers. Eine Untersuchung mit zwei Schwachstellen beziehungsweise Kerbbereichen in der Probekörpergeometrie führten Till und Hackl [96] durch. Bei allen aufgeführten Untersuchungen mit Probekörpern für Scherbelastungen wurden Spannungstriaxialitäten um Null erreicht.

Trotz dieser Ergebnisse war es nach wie vor schwierig, Bereiche der Spannungstriaxialität zu erreichen, die zwischen den Ergebnissen der Scherbelastungen und Zugbelastungen sowie Druckbelastungen liegen. Dazu mussten diese Belastungen kombiniert werden. Eine Möglichkeit war Probekörper so zu konzipieren, dass

der Kerbbereich in verschiedenen Winkeln zur Belastungsrichtung ist, wie es Bao und Wierzbicki [6] praktizierten. Das Problem dabei war, dass sehr viele unterschiedliche Probekörpergeometrien entwickelt werden mussten. Das ist natürlich nicht effizient und ressourcenschonend, weshalb Probekörper entwickelt werden mussten, die unterschiedlich belastet werden können. Dabei entwickelte sich die Idee, gekerbte Rohrprobekörper sowohl durch Zug als auch durch Torsion zu belasten, wie es beispielsweise bei Barsoum und Faleskog [8] sowie bei Haltom et al. [54] und Chen et al. [33] der Fall war. Dabei wurde das Verhältnis zwischen Normal- und Schubspannung variiert, was unterschiedliche Spannungszustände zur Folge hatte. Auch der Arcan-Probekörper, welcher bei Gruben et al. [51] untersucht wurde, zielte in diese Richtung. Es war ein Probekörper, der durch die Verbindung mit zwei Stahlplatten in verschiedene Richtungen belastet werden konnte. Durch diese beiden Probekörper konnten somit verschiedene Zug-Scher-Belastungen untersucht werden.

Aufgrund der begrenzten Möglichkeiten durch einaxiale Belastungen und der Vermeidung, zahlreiche Probekörper entwickeln zu müssen, lag die Lösung in biaxialen Lastkombinationen. Ein möglicher Probekörper für biaxiale Lastfälle ist der Butterfly-Probekörper. Dieser wird an beiden Seiten eingespannt, wobei



**Abb. 1.2:** 2D-Probekörper aus der Literatur: a) Kreuzprobe mit zentralem homogenen Bereich [65], b) Kreuzprobe mit zentralem Loch [67]

eine Einspannung vertikale und die andere horizontale Verschiebungen aufbringt. Verschiedene Untersuchungen des Butterfly-Probekörpers wurden unter anderem durch Bai und Wierzbicki [5], Dunand und Mohr [45] sowie bei Mohr und Marcardet [79] untersucht, wobei moderate und positive Spannungstriaxialitäten sowie unterschiedliche Lodeparameter erreicht wurden.

Eine weitere Kategorie an Probekörpern für biaxiale Belastungen stellen die Kreuzproben dar, die in zwei senkrecht zueinander stehenden Richtungen belastet werden. Dabei gibt es verschiedene Ansätze, wie beispielsweise bei Kuwabara

[65], dessen biaxialer Probekörper in der Abbildung 1.2 a) dargestellt ist, und Kulawinski et al. [64], wo die Probekörper im Zentrum einen großen homogenen Bereich aufweisen. Diese Probekörper haben oft den Nachteil, dass große Verformung im Zentrum der Probe auftreten, aber dennoch an anderer Stelle, meist an den Schenkeln, versagen. Außerdem sind diese Probekörper bei Druckbeanspruchungen sehr beulgefährdet. Um diesen Effekten entgegen zu wirken, reduzierten Demmerle und Boehler [40] sowie Makinde et al. [77] die Dicke des Probekörpers im zentralen Bereich. Eine weitere Möglichkeit sind Probekörper mit zentralem Loch, wodurch insgesamt vier Versagensbereiche, jeweils zwischen zwei Schenkeln, entstehen. Solche Probekörper in verschiedenen Variationen wurden beispielsweise von Lecompte et al. [67], wovon einer in der Abbildung 1.2 b) gezeigt ist, und Gerke et al. [50] untersucht.

Obwohl es wie aufgezeigt bereits einige vorgeschlagene Probekörper für biaxiale Lastfälle gibt, ist nach wie vor die Weiter- und Neuentwicklung solcher Probekörper ein aktuelles Forschungsthema, damit zukünftige Probekörper unter verschiedenen Lastkombinationen eine große Bandbreite an Spannungszuständen abdecken können.

### 1.3 Inhalte der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Schädigungs- und Versagensverhalten unterschiedlicher duktiler Metalle anhand von neuartigen Experimenten und begleitenden numerischen Simulationen analysiert und die verwendeten biaxialen Probekörper hinsichtlich verschiedener Gesichtspunkte bewertet.

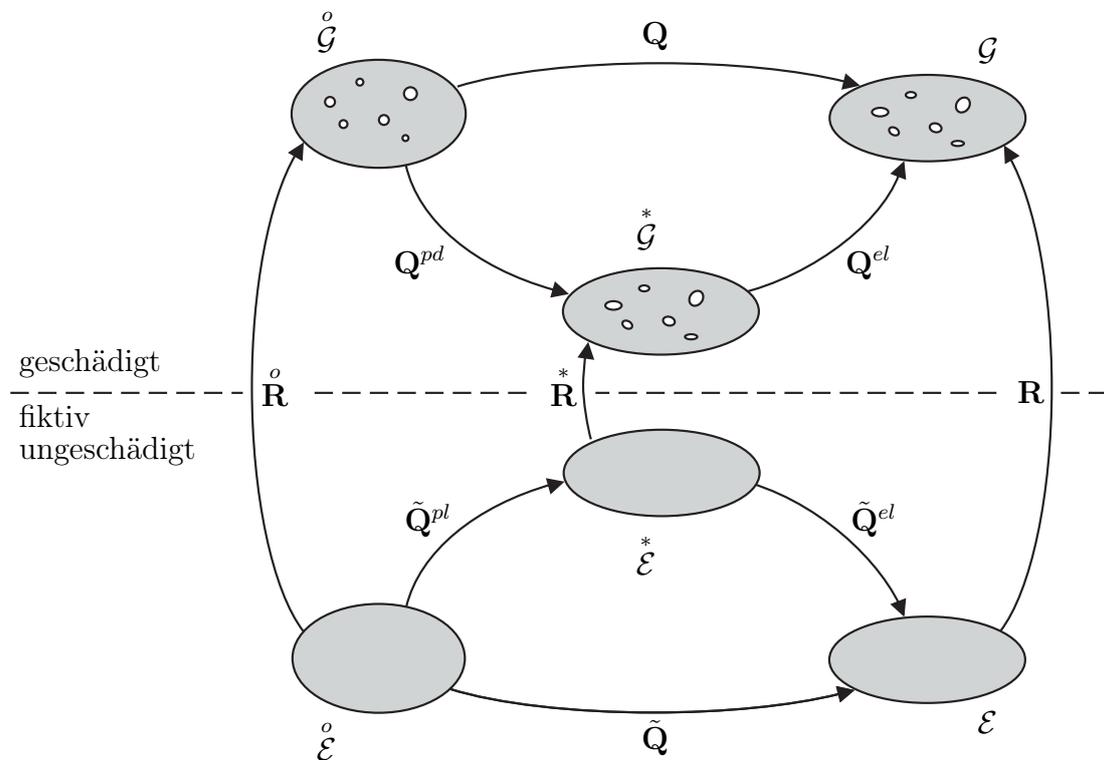
Zur Abbildung des elastisch-plastisch-schädigenden Materialverhaltens wird das mikromechanisch motivierte, phänomenologische Kontinuumsschädigungsmodell von Brünig [20] und dessen Erweiterungen [31] verwendet, dessen theoretische Grundlagen im Kapitel 2 vorgestellt und erläutert werden. Die numerische Umsetzung dieses Modells in die Finite-Element-Software folgt im Kapitel 3. Eine Beschreibung der ein- und biaxialen Versuchsaufbauten, der Anwendung der digitalen Bildkorrelation sowie der Funktionsweise des Rasterelektronenmikroskops ist im Kapitel 4 dargestellt. Um die unterschiedlich duktilen Metalle numerisch abzubilden, wurden die im Kapitel 5 dargestellten Materialparameter ermittelt und verwendet. Außerdem sind diesem Kapitel die unterschiedlichen Probekörpergeometrien für biaxiale Lastfälle, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden, zu entnehmen. Die bereits angesprochene Analyse der unterschiedlichen Probekörpergeometrien unter verschiedenen biaxialen Belastungen ist im Kapitel 6 hinsichtlich mehrerer Gesichtspunkte dargestellt. Mit den abschließenden Kapiteln 7 und 8 werden die Ergebnisse zusammengefasst und mögliche zukünftige Untersuchungsansätze aufgezeigt.

## 2 Kontinuumsschädigungsmodell

In diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen der in dieser Arbeit verwendeten phänomenologischen Theorie anhand einer kinematischen und einer thermodynamischen Betrachtung vorgestellt.

### 2.1 Kinematik

Das makroskopische kinematische Grundgerüst von Brünig [17] dient, unter Berücksichtigung anisotroper Schädigung, der Beschreibung großer irreversibler Deformationen. Die Idee, Schädigungsprozesse in die Kinematik einzubeziehen und somit deren Einfluss auf die Deformationen zu berücksichtigen, basiert auf Ansätzen von Lehmann [68, 69]. Neben einer gemischtvarianten Tensorbasis [38] wird die Einsteinsche Summenkonvention [1] angewandt. Die Kinematik des kontinu-



**Abb. 2.1:** Konfigurationen, Metriktransformations- und Schädigungstensoren

umsschädigungsmechanischen Modells ist in der Abbildung 2.1 dargestellt und basiert auf unterschiedlichen Konfigurationen. Es wird einerseits zwischen  $\mathcal{G}$ , den

geschädigten, und  $\mathcal{E}$ , den fiktiv ungeschädigten Konfigurationen unterschieden. Andererseits wird eine Unterteilung in Ausgangs- ( $\circ$ ), Zwischen- ( $*$ ) und Momentankonfigurationen ( $\cdot$ ) vorgenommen. Die geschädigten, als auch die fiktiv ungeschädigten, Konfigurationen werden durch die Metrikoeffizienten  $G_{ij}$  und  $E_{ij}$  beschrieben sowie mittels der Metriktransformationstensoren  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}})$  miteinander verknüpft. Der Zusammenhang zwischen den geschädigten und den fiktiv ungeschädigten Konfigurationen wird durch die Metriktransformationstensoren  $\mathbf{R}$  beschrieben.

### 2.1.1 Geschädigte Konfigurationen

Um die Metriktransformationstensoren der geschädigten Konfigurationen zu definieren, werden den einzelnen Konfigurationen gestreckte Basisvektoren zugeordnet. Für die unverformte Ausgangskonfiguration  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$ , welche eine Anfangsschädigung aufgrund von herstellungsbedingten Mikrodefekten enthalten kann, wird der Basisvektor  $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_i$  festgelegt. Der Basisvektor  $\mathbf{g}_i$  bezieht sich auf die deformierte und geschädigte Momentankonfiguration  $\mathcal{G}$ , welche mit der Ausgangskonfiguration  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$  die einzig realen Konfigurationen der gesamten Kinematik sind. Mit Hilfe dieser Basisvektoren werden die Metrikoeffizienten der beiden Konfigurationen

$$\overset{\circ}{G}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_j \quad \text{und} \quad G_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad (2.1)$$

formuliert und geben somit ein Maß für die Größe der Basis an. Die komplette elastische und inelastische Deformation zwischen der Ausgangs-  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$  und der Momentankonfiguration  $\mathcal{G}$  wird durch den symmetrischen Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q} = Q_{ij}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{G}^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{G}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{B} \quad (2.2)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}^i$  der materielle Deformationsgradient ist und die Starrkörperrotation sowie die Streckung des Kontinuums von der Ausgangs- zur Momentankonfiguration beschreibt. Der Metriktransformationstensor  $\mathbf{Q}$  ist somit die gemischtvariante Form des linken Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{B}$ .

Mit dem Basisvektor  $\overset{*}{\mathbf{g}}_i$  wird eine fiktive spannungsfreie Zwischenkonfiguration  $\overset{*}{\mathcal{G}}$  mit den Metrikoeffizienten

$$\overset{*}{G}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{g}}_j \quad (2.3)$$

eingeführt, die eine elastische Entlastung der Momentankonfiguration  $\mathcal{G}$  beschreibt. Aufgrund der Zwischenkonfiguration  $\overset{*}{\mathcal{G}}$  kann der Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\text{pd}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.4)$$

multiplikativ aufgespalten werden, wobei für den symmetrischen elastischen Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q}^{\text{el}} = (Q^{\text{el}})^i_{\text{j}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{*}{G}{}^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.5)$$

und für den unsymmetrischen inelastischen Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q}^{\text{pd}} = (Q^{\text{pd}})^i_{\text{j}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{o}{G}{}^{ik} \overset{*}{G}{}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.6)$$

gilt. Mit den Metriktransformationstensen der geschädigten Konfigurationen (2.2), (2.5) und (2.6), welche sich auf die verformte, geschädigte Momentankonfiguration  $\mathcal{G}$  beziehen, werden die Henckyschen Verzerrungstensen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\ln Q)^i_{\text{j}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A^i_{\text{j}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.7)$$

für die gesamte Deformation, und

$$\mathbf{A}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (\ln Q^{\text{el}})^i_{\text{j}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = (A^{\text{el}})^i_{\text{j}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.8)$$

für die rein elastische Deformation, definiert. Mit dem Metriktransformationstensor  $\mathbf{Q}$  (2.2) und dessen unsymmetrischen Oldroyd-Rate

$$\dot{\mathbf{Q}} = \overset{o}{G}{}^{ik} \dot{G}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.9)$$

wird die symmetrische und additiv aufspaltbare Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \dot{\mathbf{H}}^{\text{pd}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} \quad (2.10)$$

definiert. Durch Umformen ergibt sich

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.11)$$

für den elastischen und

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pd}} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} (\mathbf{Q}^{\text{pd}})^{-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{pd}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.12)$$

für den inelastischen Anteil.

### 2.1.2 Fiktiv ungeschädigte Konfigurationen

Analog zu den geschädigten Konfigurationen besteht die Kinematik der fiktiv ungeschädigten Konfigurationen aus einer unverformten Ausgangskonfiguration  $\overset{o}{\mathcal{E}}$  und einer verformten Momentankonfiguration  $\mathcal{E}$ . Die kinematische Betrachtung

von fiktiv ungeschädigten Konfigurationen fand in ähnlicher Form bereits bei Betten [10, 11], Murakami [82] und bei Voyiadjis und Park [100] ihre Anwendung. Aufgrund der Annahme, dass diese Konfigurationen ungeschädigt sind, enthält die Anfangskonfiguration  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$  keine Anfangsschädigung und die Momentankonfiguration  $\mathcal{E}$  ist nur elastisch-plastisch verformt. Für die beiden Konfigurationen werden ebenfalls Metrikkoeffizienten  $\overset{\circ}{E}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j$  und  $E_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  mit den entsprechenden Basisvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  und  $\mathbf{e}_i$  formuliert, aus denen der symmetrische Metriktransformationstensor

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{Q}^i_{\cdot j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \overset{\circ}{E}^{ik} E_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.13)$$

folgt. Im Folgenden sind die Tensoren der ungeschädigten Konfigurationen mit der Basis  $\mathbf{e}_i$  durch  $(\bar{\quad})$  gekennzeichnet. Durch das Einführen einer spannungsfreien Zwischenkonfiguration  $\overset{*}{\mathcal{E}}$  mit dem dazugehörigen Basisvektor  $\overset{*}{\mathbf{e}}_i$  und dem Metrikkoeffizienten  $\overset{*}{E}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{e}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{e}}_j$  erfolgt die multiplikative Aufspaltung

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.14)$$

in einen elastischen

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = (\bar{Q}^{\text{el}})^i_{\cdot j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \overset{*}{E}^{ik} E_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.15)$$

und einen rein plastischen

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} = (\bar{Q}^{\text{pl}})^i_{\cdot j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \overset{\circ}{E}^{ik} \overset{*}{E}_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.16)$$

Anteil. Um eine ganzheitliche Betrachtung der geschädigten und fiktiv ungeschädigten Konfigurationen zu erzielen, werden die Metriktransformationstensoren (2.13), (2.15) und (2.16) mit dem Schädigungsdeformationsgradienten

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{e}^i \quad (2.17)$$

auf die Basis  $\mathbf{g}_i$  transformiert. Zur Unterscheidung werden alle Tensoren der ungeschädigten Konfiguration, welche auf die Basis der geschädigten Konfigurationen transformiert sind, mit  $(\tilde{\quad})$  gekennzeichnet. Dies führt zu den auf die Basis  $\mathbf{g}_i$  transformierten nicht symmetrischen Metriktransformationstensoren der fiktiv ungeschädigten Konfigurationen

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{\circ}{E}^{ik} E_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{*}{E}^{ik} E_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.19)$$

und

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{pl}}\tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}}\overset{*}{E}_{\text{kj}}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.20)$$

Somit gelten für die Henckyschen Verzerrungstensoren der ungeschädigten Konfigurationen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\ln\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\left(\ln\tilde{\mathbf{Q}}\right)_{,j}^i\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \tilde{A}_{,j}^i\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.21)$$

für die gesamten Verzerrungen und

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \frac{1}{2}\ln\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \frac{1}{2}\left(\ln\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}}\right)_{,j}^i\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \left(\tilde{A}^{\text{el}}\right)_{,j}^i\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.22)$$

für die elastischen Anteile. Wie bereits bei den geschädigten Konfigurationen folgt aus den Metriktransformationstensoren (2.18), (2.19) und (2.20) sowie deren Oldroyd-Raten die effektive Verzerrungsrate

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{H}}} &= \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}}\right)^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} + \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{pl}}\right)^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{\text{pl}}\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{Q}}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

für die ungeschädigten Konfigurationen. Diese ist additiv in die elastische und plastische Verzerrungsrate aufspaltbar.

### 2.1.3 Metriktransformationstensoren $\mathbf{R}$

Die Metriktransformationstensoren  $\mathbf{R}$  bilden das Bindeglied zwischen den geschädigten und fiktiv ungeschädigten Konfigurationen und beschreiben die Schädigungsdeformationen zwischen den Ausgangs-, zwischen den Zwischen- und zwischen den Momentankonfigurationen. Durch die Einführung dieser Tensoren beinhaltet die Gesamtdeformation bei Brünig [20] eine explizite kinematische Beschreibung von Schädigungsverzerrungen, wie sie zuvor auch bei Lehmann [68, 69], Bruhns und Schiesse [14] sowie bei Voyiadjis und Park [100] verwendet wurde. Die Schädigung kann in Form von isotroper Porenaufweitung, deren Zusammenschluss und Bildung von Mikroscherrissen auftreten und führt zu einer Beeinflussung der elastischen Materialparameter. Die auf die geschädigten Konfigurationen bezogenen Metriktransformationstensoren sind durch

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \overset{\circ}{R}_{,j}^i\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}}\overset{\circ}{G}_{\text{kj}}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.24)$$

$$\overset{*}{\mathbf{R}} = R_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = E^{ik} G_{kj}^* \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.25)$$

und

$$\mathbf{R} = R_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = E^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.26)$$

definiert. Die beiden Ausgangskonfigurationen  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$  und  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$  sind spannungsfrei und unverformt, weshalb  $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$  somit die Anfangsschädigung der real existierenden Ausgangskonfiguration  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$ , welche durch Mikrodefekte und Einschlüsse aufgrund von Herstellungsprozessen bereits vorhanden sein kann, beschreibt. Die Metriktransformationstensoren  $\overset{*}{\mathbf{R}}$  und  $\mathbf{R}$  sind interne Zustandsgrößen und beschreiben den momentanen Schädigungszustand. Sie unterscheiden sich allerdings hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den elastischen Deformationen. Während  $\overset{*}{\mathbf{R}}$  die Schädigung unabhängig von den elastischen Deformationen beschreibt, bezieht sich  $\mathbf{R}$  auf die gesamte Deformation, somit auch auf die reversiblen Verformungen. Nach Murakami [82] und Brünig [17, 19] folgt, dass  $\mathbf{R}$  bei großen elastischen Deformationen als Zustandsgröße der Schädigung ungeeignet ist. Folglich wird  $\overset{*}{\mathbf{R}}$  zur Definition des Henckyschen Schädigungsverzerrungstensors

$$\mathbf{A}^{\text{da}} = \frac{1}{2} \ln \overset{*}{\mathbf{R}} \quad (2.27)$$

und der Schädigungsverzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \frac{1}{2} \overset{*}{\mathbf{R}}^{-1} \dot{\overset{*}{\mathbf{R}}} \quad (2.28)$$

verwendet.

#### 2.1.4 Aufspaltung der Gesamtverformung

Um die Gesamtverformung zwischen den real existierenden Konfigurationen  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$  und  $\mathcal{G}$  zu beschreiben, wird der Metriktransformationstensor  $\mathbf{Q}$  mit Hilfe der in der Abbildung 2.1 gezeigten Kinematik multiplikativ aufgespalten. Formal wird der Metriktransformationstensor der Gesamtdeformation mit

$$\mathbf{Q} = \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} \overset{*}{\mathbf{R}} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \quad (2.29)$$

beschrieben. Durch Einsetzen der Gleichung (2.29) in die Gleichung (2.10) der Verzerrungsrate ergibt sich für diese nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{Q}} \\ &= \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \left[ (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \mathbf{R}^* \mathbf{Q}^{\text{el}} \right]^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \mathbf{R}^* \mathbf{Q}^{\text{el}} + (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \\ &= \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} \mathbf{R} + (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \mathbf{Q}^{\text{el}},\end{aligned}\tag{2.30}$$

wodurch die Verzerrungsrate additiv in einen elastischen, einen effektiv plastischen und einen Schädigungsanteil aufgespalten wird. Durch die mechanische Äquivalenz, welche aus [82] folgt und besagt, dass die Konfigurationen  $\mathcal{G}^*$  und  $\mathcal{G}$  sowie die Konfigurationen  $\mathcal{E}^*$  und  $\mathcal{E}$  im gleichen Verhältnis zueinander stehen, folgt die Beziehung der elastischen Metriktransformationstensoren

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \mathbf{Q}^{\text{el}}.\tag{2.31}$$

Folglich sind auch die elastischen Verzerrungstensoren  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \mathbf{A}^{\text{el}}$  und die elastischen Verzerrungsraten  $\tilde{\dot{\mathbf{H}}}^{\text{el}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}}$  jeweils gleich. Eine Dehnungsäquivalenz, wie sie (2.31) beschreibt, fand bereits in den Modellen von Lemaitre [71] sowie von Simo und Ju [92] ihre Anwendung.

## 2.2 Thermodynamik

Da das Kontinuumsschädigungsmodell thermodynamisch konsistent sein soll, werden die Grundgleichungen der Thermodynamik angewandt, um Beziehungen der Energien mit den Spannungen und Deformationen herzustellen. Durch Betrachtung der fiktiv ungeschädigten Konfigurationen werden somit die konstitutiven Gleichungen für das elastisch-plastische Materialverhalten formuliert. Die geschädigten Konfigurationen werden für das elastisch-plastisch-schädigende Materialverhalten verwendet, um die entsprechenden konstitutiven Gleichungen aufzustellen.

Um die thermodynamische Konsistenz sicherzustellen, wird der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{w} - \dot{\phi} \geq 0\tag{2.32}$$

angewandt. Die sogenannte Clausius-Duhem-Ungleichung (2.32) beinhaltet die Raten der spezifischen mechanischen Arbeit  $\dot{w}$  und der freien Helmholtzschen Energie  $\dot{\phi}$  und bildet Restriktionen für die Formulierung von Materialgleichungen.

### 2.2.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Um die Gleichung (2.32) aufzustellen, wird zunächst der symmetrische effektive Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{T}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.33)$$

der ungeschädigten Konfigurationen definiert und anschließend mit Hilfe des Schädigungsdeformationsgradienten (2.17) auf die Basen der geschädigten Konfigurationen

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \tilde{T}_{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.34)$$

transformiert. Durch das Bilden des Skalarprodukts des effektiven Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  (2.34) mit der Verzerrungsrate  $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}$  (2.23) und das Dividieren der Anfangsdichte  $\rho_0$  folgt die Rate der effektiven spezifischen mechanischen Arbeit

$$\dot{\tilde{w}} = \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \quad (2.35)$$

der ungeschädigten Konfigurationen. Aufgrund der additiven Aufspaltbarkeit der effektiven Verzerrungsrate  $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}$  (2.23) folgt aus Gleichung (2.35)

$$\dot{\tilde{w}} = \dot{\tilde{w}}^{\text{el}} + \dot{\tilde{w}}^{\text{pl}} = \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}, \quad (2.36)$$

wobei nun die elastischen und plastischen Anteile getrennt sind. Die eingeführte Trennung vom elastischen und plastischen Materialverhalten ist ebenfalls bei der freien Helmholtzschen Energie der ungeschädigten Konfigurationen

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^{\text{el}}(\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}) + \tilde{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \quad (2.37)$$

berücksichtigt. Hierbei sind der elastische Anteil vom Henckyschen Verzerrungstensor der ungeschädigten Konfigurationen  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}$  (2.22) und der plastische Anteil von der internen plastischen Variablen  $\gamma$  abhängig. Somit folgt für die Rate der freien Helmholtzschen Energie

$$\dot{\tilde{\phi}} = \frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{\text{el}} + \dot{\tilde{\phi}}^{\text{pl}}, \quad (2.38)$$

die anschließend mit der Rate der effektiven spezifischen mechanischen Arbeit  $\dot{\tilde{w}}$  (2.36) in den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (2.32) eingesetzt wird, womit

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} - \rho_0 \frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{\text{el}} - \rho_0 \dot{\tilde{\phi}}^{\text{pl}} \geq 0 \quad (2.39)$$

folgt. Aus (2.39) werden für das reversible und das irreversible Materialverhalten Bedingungen beziehungsweise Restriktionen abgeleitet. Da das reversible elastische Materialverhalten keine Dissipation verursacht, müssen die elastischen Anteile aus (2.39) in Summe Null ergeben. Somit folgt die Gleichung

$$\left( \tilde{\mathbf{T}} - \rho_0 \frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \right) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{el}} = 0 \quad (2.40)$$

unter der Annahme, dass

$$\frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{\text{el}} = \frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{el}} \quad (2.41)$$

gilt, da in den ungeschädigten Konfigurationen isotropes elastisches Matrixmaterial angenommen wird. Um (2.40) einzuhalten, muss

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \quad (2.42)$$

gelten. Die aus (2.39) übrig bleibenden irreversiblen Anteile bilden die sogenannte Kelvin-Ungleichung

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0, \quad (2.43)$$

die eine positive plastische Dissipation beschreibt. Somit restringiert (2.43) das Fließgesetz, welches für  $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}$  formuliert wird.

### 2.2.2 Geschädigte Konfigurationen

Bei den geschädigten Konfigurationen werden nun neben den elastischen und plastischen Anteilen auch die Schädigungsanteile berücksichtigt. Die Schädigung wirkt sich im Gegensatz zum plastischen Materialverhalten auf das elastische Materialverhalten aus. Dies zeigte sich bereits in einigen Versuchsreihen [71, 73] dadurch, dass der Be- und Entlastungspfad im Spannungs-Dehnungs-Diagramm nicht parallel verlaufen.

Um den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (2.32) aufzustellen und somit die thermodynamische Konsistenz sicherzustellen, wird zunächst der Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\mathbf{T} = T_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.44)$$

für die geschädigten Konfigurationen eingeführt. Für die spezifische Formänderungsenergie

$$\rho_0 \dot{w} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}} \quad (2.45)$$

der geschädigten Konfigurationen folgt unter Verwendung der additiven Zerlegung der Rate der Gesamtdeformation (2.30)

$$\rho_0 \dot{w} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + (\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + \underbrace{[\mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{T} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1}]}_{=\hat{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}, \quad (2.46)$$

wobei  $\hat{\mathbf{T}}$  der arbeitskonjugierte Spannungstensor zur Verzerrungsrate infolge Schädigung  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$  darstellt. Dass die Energien des plastischen und schädigenden Prozesses unabhängig voneinander betrachtet werden können, wurde bereits bei Lemaitre [71] sowie bei Lu und Chow [76] gezeigt.

Die freie Helmholtzsche Energie für die geschädigte Konfiguration

$$\phi = \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}}) + \phi^{\text{pl}}(\gamma) + \phi^{\text{da}}(\mu) \quad (2.47)$$

unterscheidet sich in zwei Punkten von der der ungeschädigten Konfigurationen. Zum einen ist der elastische Energieanteil neben den elastischen Verzerrungen nun auch von den Schädigungsverzerrungen abhängig. Einen Einfluss der Schädigung auf das elastische Materialverhalten wurde bereits bei Hayakawa et al. [56] sowie auf Chow und Wang [34] diskutiert. Zum anderen wird ein weiterer Energieanteil hinzugefügt, der einzig von der Schädigung abhängt. Der Parameter  $\mu$  entspricht dem Pendant zu  $\gamma$  und ist eine interne Schädigungsvariable.

Folglich ergibt sich für den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (2.32) für die geschädigten Konfigurationen

$$0 \leq \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + (\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + \hat{\mathbf{T}}^{\text{da}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{da}}, \quad (2.48)$$

aus dem wiederum Bedingungen und Restriktionen für das Materialverhalten abgeleitet werden. Für das reversible Verhalten entsteht mit dem gleichen Ansatz wie bei (2.40) die Gleichung

$$\left( \mathbf{T} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = 0 \quad (2.49)$$

für die geschädigten Konfigurationen. Da das Schädigungsverhalten keine Auswirkung auf das plastische Verhalten des Matrixmaterials hat, siehe Brünig [19, 21], kann somit eine getrennte Betrachtung innerhalb des irreversiblen Materialverhaltens erfolgen. Somit erhält man zwei Restriktionen aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik für die geschädigten Konfigurationen. Für die plastischen Deformationen folgt

$$(\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0, \quad (2.50)$$

wobei das Fließgesetz für  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}}$  bereits in den ungeschädigten Konfigurationen formuliert wird, womit (2.50) nicht weiter betrachtet wird. Für die Deformation infolge Schädigung gilt somit

$$\hat{\mathbf{T}}^{\text{da}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{da}}(\mu) \geq 0, \quad (2.51)$$

weshalb eine Formulierung des Schädigungsgesetzes für die Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$  gewählt wird. Außerdem ist (2.51) somit eine Restriktion für die Formulierung von  $\phi^{\text{el}}$  und  $\phi^{\text{da}}$ .

## 2.3 Materialgleichungen

Mit Hilfe der thermodynamischen Betrachtungen im vorangegangenen Kapitel können nun Stoffgesetze daraus abgeleitet und formuliert werden. Somit werden die Spannungen mit den Verzerrungen im verwendeten Kontinuumsschädigungsmodell miteinander verknüpft.

### 2.3.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Bei den ungeschädigten Konfigurationen wird nun das elastische und das plastische Stoffgesetz für das ungeschädigte Material formuliert. Dieses elastische Stoffgesetz ist dabei von den Schädigungsmechanismen völlig unberührt. Für die elastische freie Energie in den ungeschädigten Konfigurationen wird für die duktilen Metalle der Ansatz

$$\rho_0 \tilde{\phi}^{\text{el}}(\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}) = G \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \frac{1}{2} \left( K - \frac{2}{3} G \right) \left( \text{tr} \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} \right)^2 \quad (2.52)$$

gewählt, wobei neben den Verzerrungen auch die elastischen Materialparameter, der Schubmodul  $G$  und der Kompressionsmodul  $K$ , enthalten sind. Unter Verwendung von (2.40), dem Einsetzen der elastischen freien Energie und dem Ableiten nach den elastischen Verzerrungen ergibt sich das hyperelastische Stoffgesetz für die effektive Spannung

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \tilde{\phi}^{\text{el}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} = 2G \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \text{tr} \tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} \mathbf{1} \quad (2.53)$$

mit dem Einheitstensor 2. Stufe  $\mathbf{1}$ . Durch ein weiteres Ableiten nach den Verzerrungen folgt der Tangentenmodul

$$\tilde{\mathbf{C}}^{\text{el}} = \frac{d\tilde{\mathbf{T}}}{d\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} = 2G \mathbf{1} + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.54)$$

mit dem Einheitstensor 4. Stufe

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2} (\delta_{,i}^i \delta_{,j}^k + \delta^{ik} \delta_{,j,l}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l, \quad (2.55)$$

der in gemischtvarianter Form so formuliert ist, dass er nur die Diagonale des Tangentenmoduls besetzt. Der ungeschädigte elastische Tangentenmodul ist aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  und des elastischen Verzerrungstensors  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}$  ebenfalls symmetrisch.

Plastisches Materialverhalten tritt beim Erfüllen einer Fließbedingung

$$f^{\text{pl}}(\tilde{\mathbf{T}}, c) = 0, \quad (2.56)$$

die in Abhängigkeit vom entsprechenden Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  und der Fließspannung  $c$  formuliert ist, zusätzlich zum elastischen Materialverhalten auf. Für das verwendete Modell wird aufgrund experimenteller Untersuchungen von Spitzig und Richmond [93] eine  $I_1$ - $J_2$ -Fließbedingung verwendet, da der hydrostatische Spannungszustand einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das plastische Fließen bei duktilen Metallen haben kann. Somit wird die Fließbedingung nach Drucker-Prager

$$\begin{aligned} f^{\text{pl}} &= a^{\text{pl}} \tilde{I}_1 + \sqrt{\tilde{J}_2} - c(\gamma) = 0 \\ &= c \left( \frac{a^{\text{pl}}}{c} \tilde{I}_1 - 1 \right) + \sqrt{\tilde{J}_2} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

gewählt, um den hydrostatischen und den deviatorischen Spannungsanteil zu berücksichtigen. Den hydrostatischen Anteil beschreibt die 1. Invariante des effektiven Spannungstensors

$$\tilde{I}_1 = \text{tr} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.58)$$

und wird durch den Parameter  $a^{\text{pl}}$  in der Fließbedingung gewichtet. Durch die Umformung in (2.57) wichtet nun der Quotient aus dem Parameter  $a^{\text{pl}}$  und der aktuellen Fließspannung  $c$  den hydrostatischen Einfluss. Der Quotient  $\frac{a^{\text{pl}}}{c}$  kann nach Spitzig et al. [94, 95] als konstanter Materialparameter verstanden werden. Der deviatorische Anteil wird durch die 2. Invariante des Spannungsdeviators

$$\tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.59)$$

beschrieben. Die plastische Konsistenzbedingung

$$\dot{f}^{\text{pl}} = a^{\text{pl}} \mathbf{1} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} - \left( 1 - \frac{a^{\text{pl}}}{c} \tilde{I}_1 \right) \dot{c} = 0 \quad (2.60)$$

folgt aus der Ableitung der Fließbedingung (2.57) und garantiert deren Einhaltung während des plastischen Fließens.

Aufgrund experimenteller Studien von Spitzig et al. [94, 95], bei denen zusätzlich Messungen der plastischen Volumendehnung stattfanden, wird bei Metallen beim plastischen Fließen von einer Volumenkonstanz ausgegangen. Dies bedeutet, dass keine volumetrischen plastischen Verzerrungen auftreten und somit die hydrostatische Spannung in Form der 1. Invarianten des Spannungstensors in der plastischen Potenzialfunktion vernachlässigt werden kann. Die in Spannungen formulierte plastische Potenzialfunktion

$$\tilde{g}^{\text{pl}} = \sqrt{\tilde{J}_2} \quad (2.61)$$

wird folglich nur mit dem deviatorischen Spannungsanteil definiert. Das Ableiten der plastischen Potenzialfunktion nach dem Spannungstensor der ungeschädigten Konfigurationen führt zum Fließgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{g}^{\text{pl}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{J}_2}} \text{dev} \tilde{\mathbf{T}}, \quad (2.62)$$

in dem ein positiver skalarer Faktor  $\dot{\lambda}$  enthalten ist. Durch die Einführung des normierten deviatorischen Spannungstensors

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\text{dev} \tilde{\mathbf{T}}}{\|\text{dev} \tilde{\mathbf{T}}\|} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{J}_2}} \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.63)$$

und das Verhältnis  $\dot{\lambda} = \sqrt{2}\dot{\gamma}$  wird das Fließgesetz (2.62) zu

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \dot{\gamma} \tilde{\mathbf{N}} \quad (2.64)$$

umgeformt. Aufgrund des formulierten Fließgesetzes (2.64) kann die interne plastische Variable  $\gamma$  auch als plastische Vergleichsverzerrung gedeutet werden. Das hier verwendete Fließgesetz wird auch als ein nicht-assoziertes Fließgesetz bezeichnet, da der hydrostatische Einfluss in der Fließbedingung berücksichtigt und in der plastischen Potenzialfunktion vernachlässigt ist, wodurch diese nicht identisch sind.

### 2.3.2 Geschädigte Konfigurationen

Aufgrund der thermodynamischen Betrachtung der geschädigten Konfigurationen werden in diesem Abschnitt das elastische Stoffgesetz in Abhängigkeit der Schädigung und das Stoffgesetz für die Schädigung formuliert.

Die elastische Potenzialfunktion

$$\begin{aligned} \phi^{\text{el}} = \frac{1}{\rho_0} \left[ G \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \frac{1}{2} \left( K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}})^2 + \eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} (\text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}})^2 \right. \\ \left. + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_4 \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot (\mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}}) \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

ist im Vergleich zu den ungeschädigten Konfigurationen um vier Schädigungsterme ergänzt, die aus einem vollständigen Invariantensatz folgen. Die Materialparameter  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  ermöglichen eine Abminderung der elastischen Materialeigenschaften.

Der Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} = 2G \mathbf{A}^{\text{el}} + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1} \\ + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1} + 2\eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}} \\ + \eta_3 [(\mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}}) \mathbf{1} + \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}}] + \eta_4 (\mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

folgt abermals aus der Ableitung der elastischen Potenzialfunktion (2.65) nach den elastischen Verzerrungen. Die Spannungen hängen somit von den elastischen Verzerrungen  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  und den Schädigungsverzerrungen  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  ab. Ableiten von (2.66) nach den elastischen Verzerrungen führt zum elastischen Tangentenmodul

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{el}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} = 2G \mathbf{1} + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ + 2\eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{1} + \eta_3 (\mathbf{A}^{\text{da}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{\text{da}}) + \eta_4 \mathbb{A}^{\text{da}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

der geschädigten Konfigurationen. Neben dem Einheitstensor 4. Stufe (2.55) wird der Schädigungsverzerrungstensor 4. Stufe verwendet und mit

$$\mathbb{A}^{\text{da}} = (A^{\text{da}})_{,1}^i \delta_{,j}^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l + (A^{\text{da}})_{,j}^k \delta_{,1}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l \quad (2.68)$$

formuliert. Der Kirchhoffsche Spannungstensor (2.66) wird außerdem nach den Schädigungsverzerrungen abgeleitet, wodurch der Schädigungstangentenmodul

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{da}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} = 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_2 \mathbf{A}^{\text{el}} \otimes \mathbf{1} \\ + \eta_3 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{\text{el}} + \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1}) + \eta_4 \mathbb{A}^{\text{el}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

entsteht, wobei der elastische Verzerrungstensor 4. Stufe durch

$$\mathbb{A}^{\text{el}} = (A^{\text{el}})_{,1}^i \delta_{,j}^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l + (A^{\text{el}})_{,j}^k \delta_{,1}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l \quad (2.70)$$

definiert ist.

Um das Materialverhalten aufgrund von Schädigung zu beschreiben, muss zu-

nächst der Beginn des Einsetzens der Schädigung anhand der im Spannungsraum formulierten Bedingung

$$f^{\text{da}}(\mathbf{T}, \sigma) = a^{\text{da}} I_1 + b^{\text{da}} \sqrt{J_2} - \sigma(\mu) = 0 \quad (2.71)$$

festgelegt werden. Ähnlich wie bei der Fließbedingung (2.57) ist der Beginn der Schädigung abhängig von hydrostatischen und deviatorischen Einflüssen, die durch die Parameter  $a^{\text{da}}$  und  $b^{\text{da}}$  gewichtet werden sowie von der aktuellen Schädigungsspannung  $\sigma(\mu)$ . Die Zeitableitung von (2.71) führt wiederum zur Konsistenzbedingung des Schädigungsverhaltens

$$\dot{f}^{\text{da}} = a^{\text{da}} \mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{T}} + b^{\text{da}} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \dot{\sigma} = 0. \quad (2.72)$$

Wie in (2.46) bereits gezeigt, ist der Spannungstensor  $\hat{\mathbf{T}}^{\text{da}}$  arbeitskonjugiert zur Verzerrungsrate  $\hat{\mathbf{H}}^{\text{da}}$ . Die gewählte Schädigungspotenzialfunktion

$$g^{\text{da}}(\hat{\mathbf{T}}) = \alpha^{\text{da}*} I_1 + \beta^{\text{da}*} \sqrt{J_2} + \delta^{\text{da}*} \sqrt[3]{J_3} \quad (2.73)$$

enthält neben der 1. und 2. auch die 3. Invariante der Spannungen. Die Ableitung der Schädigungspotenzialfunktion nach dem entsprechenden Spannungstensor liefert das Schädigungsgesetz

$$\hat{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mu} \frac{dg^{\text{da}}}{d\hat{\mathbf{T}}} = \dot{\mu} \left( \alpha^{\text{da}*} \mathbf{1} + \beta^{\text{da}*} \frac{\text{dev}\hat{\mathbf{T}}}{2\sqrt{J_2}} + \delta^{\text{da}*} \frac{\text{dev}\hat{\mathbf{S}}}{3\sqrt[3]{J_3^2}} \right), \quad (2.74)$$

wobei mit Hilfe der skalaren Parameter  $\alpha^{\text{da}*}$ ,  $\beta^{\text{da}*}$  und  $\delta^{\text{da}*}$  die Tensoren normiert werden, sodass

$$\hat{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mu} (\alpha^{\text{da}} \mathbf{1}_N + \beta^{\text{da}} \mathbf{N} + \delta^{\text{da}} \mathbf{M}) = \dot{\mu} \mathbf{C}_1 \quad (2.75)$$

mit

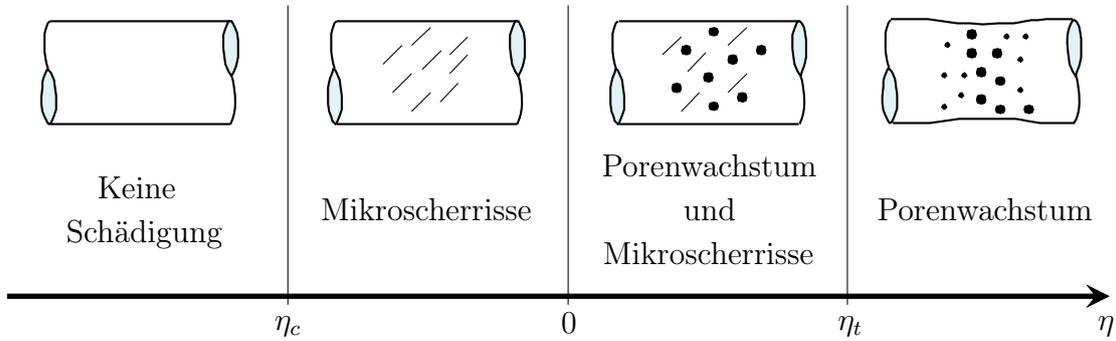
$$\mathbf{1}_N = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}, \quad \mathbf{N} = \frac{\text{dev}\hat{\mathbf{T}}}{\|\text{dev}\hat{\mathbf{T}}\|} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \frac{\text{dev}\hat{\mathbf{S}}}{\|\text{dev}\hat{\mathbf{S}}\|} \quad (2.76)$$

und abgewandelten skalaren Wichtungparametern  $\alpha^{\text{da}}$ ,  $\beta^{\text{da}}$  und  $\delta^{\text{da}}$  gilt. Der normierte Tensor  $\mathbf{M}$  ist mit dem Tensor  $\text{dev}\hat{\mathbf{S}} = \text{dev}\hat{\mathbf{T}} \text{dev}\hat{\mathbf{T}} - \frac{2}{3} \hat{J}_2 \mathbf{1}$  definiert und die tensorielle Größe  $\mathbf{C}_1$  dient lediglich der Abkürzung im weiteren Verlauf der Arbeit. Das Schädigungsgesetz beinhaltet die interne Schädigungsvariable  $\mu$ , welche somit auch als Schädigungsvergleichsverzerrung gedeutet werden kann. Im Schädigungsgesetz beschreibt der erste Term den volumetrischen Anteil und somit die isotrope Schädigung. Die anderen beiden Terme enthalten deviatorische Spannungstensoren und bilden somit die anisotrope Schädigung ab. Die Materialparameter  $a^{\text{da}}$ ,  $b^{\text{da}}$ ,  $\alpha^{\text{da}}$ ,  $\beta^{\text{da}}$  und  $\delta^{\text{da}}$  werden in Abhängigkeit von zwei skalaren Werten, die den Spannungszustand beschreiben, formuliert. Einerseits wird die

Spannungstriaxialität

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{\hat{I}_1}{3\sqrt{3\hat{J}_2}} \quad (2.77)$$

verwendet, die dem Quotienten aus der hydrostatischen Vergleichsspannung  $\sigma_m = \hat{I}_1/3$  und der von Mises-Vergleichsspannung  $\sigma_{eq} = \sqrt{3\hat{J}_2}$  entspricht. Mit Hilfe der Spannungstriaxialität können auftretende Schädigungsmechanismen nach Brüning et al. [23], wie in Abbildung 2.2, vorhergesagt werden, weshalb sie eine wesentliche Rolle in der Charakterisierung des Schädigungsverhaltens spielt. Es kön-



**Abb. 2.2:** Schädigungsmechanismen in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität

nen grundsätzlich zwei unterschiedliche Schädigungsmechanismen auftreten. Es gibt zum einen das isotrope Porenwachstum, was sowohl das Bilden neuer Poren als auch das Aufweiten von vorhandenen Poren beinhaltet und somit als isotrope Schädigung bezeichnet wird. Zum anderen tritt anisotrope Schädigung auf, das das Entstehen und Fortbilden von Mikroscherrissen beinhaltet. Der Abbildung 2.2 entsprechend treten somit bei hohen positiven Spannungstriaxialitäten ( $\eta > \eta_t$ ) isotropes Porenwachstum, bei moderaten positiven Spannungstriaxialitäten ( $\eta_t \geq \eta \geq 0$ ) eine gemischte Schädigungsform aus beiden Schädigungsmechanismen und bei moderaten negativen Spannungstriaxialitäten ( $0 > \eta > \eta_c$ ) Mikroscherrisse auf. Des Weiteren soll es einen Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität  $\eta_c$  geben, wie von Bao und Wierzbicki [7] sowie von Khan und Liu [60] untersucht, unter dem aufgrund des hohen hydrostatischen Drucks keine weitere Schädigungsentwicklung stattfindet. Außerdem entspricht  $\eta_t$  dem Übergang zwischen der gemischten Schädigungsform und dem isotropen Porenwachstum.

Außerdem wird der Lodeparameter

$$\omega = \frac{2\hat{T}_2 - \hat{T}_1 - \hat{T}_3}{\hat{T}_1 - \hat{T}_3} \quad \text{mit} \quad \hat{T}_1 \geq \hat{T}_2 \geq \hat{T}_3 \quad (2.78)$$

verwendet, der in den Hauptspannungen  $\hat{T}_i$  formuliert ist und einen Wert zwischen -1 und 1 annimmt. Untersuchungen zum Lodeparameter [83] zeigten, dass  $\omega = -1$  einem einaxialen Zug,  $\omega = 0$  einer Schubspannung und  $\omega = 1$  einem einaxialen Druck jeweils mit überlagerter hydrostatischer Spannung entsprechen. Der Einfluss des Lodeparameters auf die Schädigungsentwicklung wurde vor allem bei moderaten und kleinen Spannungstriaxialitäten beobachtet [36, 45]. Aufgrund dessen, dass anhand der Spannungszustände verschiedene Schädigungsmechanismen auftreten, enthalten die Schädigungsbedingung (2.71) und das Schädigungsgesetz (2.74) vom Spannungszustand abhängige Materialparameter  $a^{\text{da}}$ ,  $b^{\text{da}}$ ,  $\alpha^{\text{da}}$ ,  $\beta^{\text{da}}$  und  $\delta^{\text{da}}$ . Diese wurden durch aufwendige Mikroporensimulationen von Brünig et al. [24, 25, 26] und Hagenbrock [53] bestimmt und später durch Brünig et al. [27] basierend auf experimentellen Daten vereinfacht. Aufgrund dieser Ergebnisse werden die vom Spannungszustand abhängigen Materialparameter der Schädigungsbedingung (2.71)

$$a^{\text{da}}(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 > \eta > \eta_c \\ \frac{1}{3}, & \text{für } \eta \geq 0 \end{cases} \quad (2.79)$$

und

$$b^{\text{da}}(\eta, \omega) = b_1^{\text{da}}(\eta) + b_2^{\text{da}}(\omega) \geq 0 \quad (2.80)$$

mit

$$b_1^{\text{da}}(\eta) = -1,28\eta + 0,85 \quad \text{und} \quad b_2^{\text{da}}(\omega) = -0,017\omega^3 - 0,065\omega^2 - 0,078\omega \quad (2.81)$$

für die Studien in dieser Arbeit festgelegt. Die entsprechenden Materialparameter des Schädigungsgesetzes (2.74) sind mit

$$\alpha^{\text{da}}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \geq \eta > 0 \\ 0,5714\eta & \text{für } 1,75 \geq \eta > 0 \\ 1 & \text{für } \eta > 1,75 \end{cases} \quad (2.82)$$

für die isotrope Schädigung und

$$\beta^{\text{da}}(\eta, \omega) = \beta_1^{\text{da}}(\eta) + \beta_2^{\text{da}}(\eta)\beta_3^{\text{da}}(\omega) \quad (2.83)$$

mit

$$\beta_1^{\text{da}}(\eta) = \begin{cases} 0,87 & \text{für } \frac{1}{3} \geq \eta > \frac{\eta_c}{3} \\ 0,97875 - 0,32625\eta & \text{für } \frac{1}{3} \geq \eta > \frac{1}{3} \\ 0 & \text{für } \eta > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad (2.84)$$

$$\beta_2^{\text{da}}(\eta) = -0,0252 + 0,0378\eta \quad (2.85)$$

sowie

$$\beta_3^{\text{da}}(\omega) = \begin{cases} 1 - \omega^2 & \text{für } \frac{2}{3} \geq \eta > \eta_c \\ 0 & \text{für } \eta > \frac{2}{3} \end{cases} \quad (2.86)$$

für die anisotrope Schädigung definiert. Der Parameter  $\delta^{\text{da}}$  wird aufgrund der Ergebnisse aus [27, 89] auf Null gesetzt, da der Einfluss des dritten Terms des Schädigungsgesetzes (2.74) vernachlässigbar klein ist.

Bei fortschreitender Schädigung wachsen die Mikrodefekte stark an, sodass es schließlich zu einem Makroriss kommt. Dieser Vorgang soll ebenfalls mit dem phänomenologischen Modell beschrieben werden. In Anlehnung an die Fließbedingung (2.57) und Schädigungsbedingung (2.71) wird im Rahmen dieser Arbeit ein Risskriterium für duktile Metalle

$$f^{\text{fr}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, \varepsilon^{\text{fr}}) = a^{\text{fr}} I_1^{\text{da}} + b^{\text{fr}} \sqrt{J_2^{\text{da}}} - \varepsilon^{\text{fr}} \quad (2.87)$$

vorgestellt und die entsprechenden Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  (2.27)

$$I_1^{\text{da}} = \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}, \quad (2.88)$$

beziehungsweise -deviators  $\text{dev} \mathbf{A}^{\text{da}}$

$$J_2^{\text{da}} = \frac{1}{2} \text{dev} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \text{dev} \mathbf{A}^{\text{da}} \quad (2.89)$$

bei verschiedenen Versuchen ausgewertet. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ansatz verfolgt, dass der Parameter  $\varepsilon^{\text{fr}}$ , der hierbei den Grenzwert der Schädigungszunahme und somit den Beginn des Makrorisses definiert, einen konstanten Materialparameter darstellt. In dessen Abhängigkeit werden die Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$  unter Berücksichtigung der spannungsabhängig auftretenden Schädigungsmechanismen ermittelt.

Aufgrund der Abhängigkeit der Schädigungsmechanismen vom Spannungszustand ist es wichtig, verschiedene Spannungszustände hinsichtlich ihres Schädigungsverhaltens zu untersuchen. Da bei eindimensionalen Lastfällen nur wenige unterschiedliche Spannungszustände auftreten, müssen auch biaxiale Lastfälle untersucht werden, um die ganze Bandbreite von möglichen Spannungszuständen abzudecken.

## 3 Numerische Umsetzung

In diesem Kapitel werden die numerischen Grundlagen der zu den Experimenten korrespondierenden Simulationen beschrieben und erläutert. Die numerischen Simulationen werden mit der Finiten-Element-Software Ansys Classic Mechanical APDL 18.0 durchgeführt. Dabei wird die komplette Modellbildung in der für Ansys notwendigen Skriptsprache Ansys Parametric Design Language (APDL) in einem Editor formuliert. Um eigene Materialgesetze in Ansys zu verwenden, muss eine entsprechende Materialroutine in Microsoft Visual Studio 2012 formuliert und anschließend mit dem Intel Fortran Compiler 15.0.2 kompiliert werden. Dabei muss beachtet werden, welche Werte über die Schnittstelle zwischen Ansys und der Materialroutine übergeben werden können.

Somit umfasst dieses Kapitel die Grundlagen der Finiten-Element-Methode (FE-Methode), die numerische Integration und die Beschreibung der Schnittstelle beziehungsweise der Übergabeparameter.

### 3.1 Finite-Element-Methode

Die verwendete Software Ansys Classic Mechanical APDL basiert auf der Standardformulierung der FE-Methode, der sogenannten FE-Verschiebungsmethode, wobei die Verschiebungen die primären Unbekannten darstellen. Zunächst wird das zu simulierende Modell in endlich viele Elemente segmentiert. Dabei spricht man auch von der Diskretisierung des Modells. Um die mathematische Grundgleichung der FE-Verschiebungsmethode zu erhalten, wird zunächst die Impulsbilanz

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho_0\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

formuliert, wobei  $\mathbf{b}$  der Massenkraftdichte und  $\rho_0$  der Anfangsdichte entspricht. Unter Verwendung der Randbedingung  $\mathbf{t}_{\text{out}} = \mathbf{t}$ , wonach der äußere Spannungsvektor  $\mathbf{t}_{\text{out}}$  und der innere Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  gleich sind, werden diese und (3.1) skalar mit einer Testfunktion  $\delta\mathbf{u}$ , die einer virtuellen Verschiebung entspricht, multipliziert. Durch die anschließende Integration über das Volumen  $\overset{\circ}{v}$  beziehungsweise der Randfläche  $\overset{\circ}{a}$  des jeweiligen Elementes folgt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\overset{\circ}{G}} (\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho_0\mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\overset{\circ}{v} + \int_{\overset{\circ}{\partial G}} (\mathbf{t}_{\text{out}} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\overset{\circ}{a} = 0, \quad (3.2)$$

das aufgrund der Integration und der skalaren Multiplikation auch als schwache Formulierung des Gleichgewichts bezeichnet wird. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt aus (3.2) das Variationsprinzip

$$\delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\mathring{G}} \text{grad}^T \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \, d\mathring{v} - \int_{\mathring{G}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\mathring{v} - \int_{\partial\mathring{G}} \mathbf{t}_{\text{out}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\mathring{a} = 0 \quad (3.3)$$

der FE-Methode, wobei der erste Term mit der virtuellen Formänderungsenergie und die beiden hinteren Terme mit der virtuellen Arbeit der äußeren Belastung gleichzusetzen sind. Für die iterative Lösung wird das Newton-Raphson-Verfahren [4] angewandt. Dieses häufig verwendete Standardverfahren dient der numerischen Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen. Dabei erfolgt eine Linearisierung einer stetig differenzierbaren Funktion am Ausgangspunkt. Die Bestimmung der Nullstellen der linearisierten Funktion, was der Tangente entspricht, führt dann zur Näherungslösung. Aufgrund des gewählten iterativen Verfahrens erfolgt die erforderliche konsistente Linearisierung des Variationsprinzips (3.3), siehe Hughes und Pister [57], durch eine Taylorreihenentwicklung

$$\delta\Pi(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial\delta\Pi}{\partial\mathbf{u}} \cdot \Delta\mathbf{u} + \dots = 0, \quad (3.4)$$

die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Durch anschließendes Einsetzen von Ansatzfunktionen und Einbinden der Stoffgesetze folgt die in Matrizen formulierte, auf ein Element bezogene, mathematische Grundgleichung der FE-Verschiebungsmethode

$$\mathbf{k}_T \Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{p} + \text{Randterme}, \quad (3.5)$$

wobei  $\mathbf{k}_T$  der tangentialen Steifigkeitsmatrix entspricht, die, wie Brüning [20] zeigte, vom aktuellen Tangentenmodul abhängt. Der Vektor  $\Delta\mathbf{p}$  gibt hingegen das Residuum des Kraftvektors an. Durch das Aufsummieren der Elementmatrizen (3.5) zu globalen Systemmatrizen

$$\mathbf{K}_T = \sum \mathbf{k}_T, \quad \Delta\mathbf{V} = \sum \Delta\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \Delta\mathbf{P} = \sum \Delta\mathbf{p} \quad (3.6)$$

folgt somit die globale mathematische Grundgleichung der FE-Verschiebungsmethode

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{P} \quad (3.7)$$

mit der die inkrementellen Verschiebungen  $\Delta\mathbf{V}$  bestimmt werden. Diese kann nun mit der Newton-Raphson-Methode gelöst werden.

## 3.2 Numerische Integration

Die numerischen Simulationen sind iterative Berechnungen, bei denen zum Zeitpunkt  $t_n = t$  alle Größen bekannt sind. Durch Aufbringen des Inkrementes  $\Delta\mathbf{P}$  müssen alle notwendigen Größen zum Zeitpunkt  $t_{n+1} = t + \Delta t$  im Gaußpunkt bestimmt werden. Dazu dienen der Metriktransformationstensor  $\mathbf{Q}$  (2.2) zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  und die Verschiebungen des Zeitinkrementes  $\Delta t$ .

Des Weiteren muss ein geeignetes Integrationsverfahren gewählt werden, wobei einige explizite und implizite Methoden denkbar sind. Eine Möglichkeit sind elastische Prädiktor - plastische Korrektor - Methoden, wie sie bei Dodds [42], Krieg und Krieg [63] sowie Wilkins [101] verwendet werden. Erweiterungen dieser Methode um eine Schädigungsvariable wurden von de Souza Neto und Peric [39] sowie Doghri [43] aufgezeigt. Allerdings sind diese Methoden vorrangig bei assoziierten Materialgesetzen einsetzbar, womit diese für die hier vorgestellte Theorie des Kontinuumsschädigungsmodells weniger geeignet erscheinen. Das hier in dieser Arbeit verwendete Verfahren ist die inelastischer Prädiktor - elastischer Korrektor - Methode. Diese entstand aus den bei Brünig [15, 16] sowie Nemat-Nasser und Li [85] verwendeten plastischer Korrektor - elastischer Prädiktor - Methoden und wurde anschließend von Brünig [18, 20] um die Schädigungsanteile erweitert. Mit diesem Verfahren werden zunächst alle Verzerrungsinkremente als reine inelastische Verzerrungen gedeutet. Anschließend werden diese Inkremente um die elastischen Anteile korrigiert. Die nun näherungsweise bestimmten inelastischen Verzerrungen werden anschließend durch Lösen eines Gleichungssystems in plastische Inkremente und Schädigungsinkremente separiert. Ein Vorteil dieser Methode besteht außerdem darin, dass sowohl bei kleinen als auch bei großen Schrittweiten numerische Stabilität vorhanden ist.

Im Folgenden werden jeweils bei den ungeschädigten und geschädigten Konfigurationen vier Teilprozesse beschrieben, die für die numerische Integration im hier verwendeten Kontinuumsschädigungsmodell notwendig sind. Zunächst müssen die tensoriellen Größen in skalare Größen umgerechnet werden. Anschließend erfolgt mit Hilfe der skalaren Größen die numerische Integration. Um diese Ergebnisse verwenden zu können, folgt daraufhin die Rückrechnung auf die tensoriellen Größen, mit denen am Ende der notwendige Tangentenmodul ermittelt wird.

### 3.2.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Bei den ungeschädigten Konfigurationen tritt elastisch-plastisches Materialverhalten auf, weshalb das Inkrement der plastischen Vergleichsdehnung ermittelt wird.

#### a) Skalare Grundgleichung

Dazu wird die plastische Konsistenzbedingung (2.60) herangezogen und mit Hilfe

der Rate des Spannungstensors

$$\dot{\mathbf{T}} = 2G\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \left(K - \frac{2}{3}G\right) \text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}}\mathbf{1} \quad (3.8)$$

die enthaltenen Skalarprodukte

$$\mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 3K\text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 2G\tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} \quad (3.9)$$

aufgestellt. Unter Verwendung der additiven Aufspaltbarkeit der Verzerrungsraten (2.23) und der Annahme der plastischen Volumenkonstanz, wodurch  $\text{tr}\dot{\mathbf{H}} = \text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}}$  ist, folgt somit aus der plastischen Konsistenzbedingung

$$\left(1 - \frac{a^{\text{pl}}}{c} \tilde{I}_1\right) \dot{c} = \sqrt{2}G\tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}} - \sqrt{2}G\tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + a^{\text{pl}}3K\text{tr}\dot{\mathbf{H}}. \quad (3.10)$$

Durch Einsetzen der Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\epsilon} = \tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}} + \frac{3a^{\text{pl}}K}{\sqrt{2}G} \text{tr}\dot{\mathbf{H}} \quad (3.11)$$

und der plastischen Vergleichsdehnungsrate (2.64) folgt die für die numerische Integration notwendige skalare Gleichung der Rate der plastischen Vergleichsspannung

$$\dot{c} = \sqrt{2}G_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\gamma}) \quad \text{mit} \quad G_1 = \frac{G}{1 - \frac{a^{\text{pl}}}{c} \tilde{I}_1}. \quad (3.12)$$

## b) Plastischer Prädiktor - elastischer Korrektor

Es folgt die Integration von (3.12) über das Zeitinkrement  $\int_{t_n}^{t_{n+1}}$ , was zu

$$\Delta c = \sqrt{2}G_{1,m} (\Delta\epsilon - \Delta\gamma) \quad \text{mit} \quad G_{1,m} = \frac{G}{1 - \frac{a^{\text{pl}}}{c} \tilde{I}_{1,m}} \quad (3.13)$$

führt. Um eine bessere Approximation zu erreichen, wird hierbei die Mittelpunkintegration  $\tilde{I}_{1,m}$  und  $G_{1,m}$  verwendet. Im Falle der ungeschädigten Konfigurationen wird zunächst angenommen, dass das Verzerrungsinkrement rein plastisch ist. Somit ist der plastische Prädiktor mit

$$\Delta\gamma_{\text{pr}} = \Delta\epsilon \quad (3.14)$$

und die dazugehörige Prädiktorspannung mit

$$c_{\text{pr}} = c(\gamma_n + \Delta\gamma_{\text{pr}}) \quad (3.15)$$

definiert. Da die plastischen Prädiktorwerte größer als die wirklichen plastischen Werte sind, erfolgt der elastische Korrektor. Werden die Verzerrungsincremente betrachtet, entspricht das elastische Verzerrungsincrement somit dem Fehler

$$\Delta_{\text{er}}\gamma = \Delta\varepsilon - \Delta\gamma \quad (3.16)$$

des Prädiktors. Der Fehler der Fließspannung ist mit

$$\Delta_{\text{er}}c = c_{\text{pr}} - c_{n+1} \quad (3.17)$$

formuliert und ergibt sich durch Umformungen mit (3.13) und (3.16) zu

$$\Delta_{\text{er}}c = c_{\text{pr}} - c_n - G_{1,m}\Delta_{\text{er}}\gamma. \quad (3.18)$$

Der Fehler kann allerdings auch approximativ mit

$$\Delta_{\text{er}}c \cong \frac{\partial c}{\partial \gamma} \Delta_{\text{er}}\gamma \quad (3.19)$$

angenommen werden. Durch Gleichsetzen von (3.18) und (3.19) wird der Fehler im plastischen Verzerrungsincrement bestimmbar, wodurch der Prädiktorwert mit dem berechneten Fehler korrigiert werden kann und letztendlich das gewünschte annähernd real auftretende plastische Verzerrungsincrement

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma_{\text{pr}} - \Delta_{\text{er}}\gamma \quad (3.20)$$

liefert. Für den plastischen Vergleichswert ergibt sich somit

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \Delta\gamma. \quad (3.21)$$

### c) Tensorielle Größen

Mit den skalaren Größen erfolgt nun eine Rückrechnung auf die tensoriellen Größen. Das berechnete plastische Verzerrungsincrement  $\Delta\gamma$  wird in das inkrementelle plastische Stoffgesetz

$$\Delta\tilde{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \Delta\gamma\tilde{\mathbf{N}}_m \quad (3.22)$$

eingesetzt, wobei die Spannungsrichtung

$$\tilde{\mathbf{N}}_m = \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{N}}_n + \tilde{\mathbf{N}}_{n+1} \right) \quad (3.23)$$

der gemittelte Wert der Anfangsrichtung und der Richtung am Ende des Inkrementes ist. Um die neue Spannungsrichtung zu ermitteln, wird zunächst der inkrementelle deviatorische Spannungstensor

$$\text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{T}} = \text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{T}}_{n+1} - \text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{T}}_n = 2G\text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{H}}^{\text{el}} \quad (3.24)$$

formuliert. Durch Einsetzen der deviatorischen Spannungstensoren

$$\text{dev}\tilde{\mathbf{T}}_{n+1} = \sqrt{2\tilde{J}_{2,n+1}}\tilde{\mathbf{N}}_{n+1} \quad \text{und} \quad \text{dev}\tilde{\mathbf{T}}_n = \sqrt{2\tilde{J}_{2,n}}\tilde{\mathbf{N}}_n \quad (3.25)$$

in (3.24) und der additiven Aufspaltung des Verzerrungsinkrementes folgt nach Umformung der normierte deviatorische Spannungstensor

$$\tilde{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{2G\text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{H}} + \left( \sqrt{2\tilde{J}_{2,n}} - G\Delta\gamma \right) \tilde{\mathbf{N}}_n}{\sqrt{2\tilde{J}_{2,n+1} + G\Delta\gamma}} \quad (3.26)$$

zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ , mit dem alle weiteren Größen berechnet werden können.

#### d) Tangentenmodul

Des Weiteren ist die Bestimmung der Tangentenmodule ein wesentlicher Schritt in der numerischen Implementierung. Bei den ungeschädigten Konfigurationen können zwei Fälle auftreten: Zum einen tritt rein elastisch-ungeschädigtes Materialverhalten auf, dessen Tangentenmodul (2.54) bereits bestimmt wurde, und zum anderen tritt elastisch-plastisch-ungeschädigtes Materialverhalten auf, dessen Tangentenmodul noch bestimmt werden muss. Ausgehend vom Zusammenhang der ungeschädigten Spannungen mit den ungeschädigten elastischen Verzerrungen wird das Differenzial

$$d\tilde{\mathbf{T}} = \frac{d\tilde{\mathbf{T}}}{d\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}}} d\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \mathbf{C}^{\text{el}} d\tilde{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \mathbf{C}^{\text{el}} d\tilde{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \mathbf{C}^{\text{el}} \left( d\tilde{\mathbf{H}} - d\tilde{\mathbf{H}}^{\text{pl}} \right) \quad (3.27)$$

aufgrund der additiven Aufspaltbarkeit der Verzerrungen umgeformt. Das Differenzial der plastischen Verzerrungen

$$d\tilde{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \tilde{\mathbf{N}}_m d\gamma = \tilde{\mathbf{N}}_m (d\gamma_{\text{pr}} - d\gamma_{\text{er}}) \quad (3.28)$$

wird bis auf die Differenziale der skalaren plastischen Vergleichswerte umformuliert. Durch Einsetzen von

$$d\gamma_{\text{pr}} = \tilde{\mathbf{N}} \cdot d\tilde{\mathbf{H}} \quad (3.29)$$

und

$$d\gamma_{\text{er}} = \left( \sqrt{2}G_{1,m} + \frac{\partial c}{\partial \gamma} \right)^{-1} dc_{\text{pr}} = \left( \sqrt{2}G_{1,m} + \frac{\partial c}{\partial \gamma} \right)^{-1} \frac{\partial c}{\partial \gamma} d\gamma_{\text{pr}} \quad (3.30)$$

entsteht der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Gesamtverzerrungen, in dem Fall die elastisch-plastisch-ungeschädigten Verzerrungen,

$$d\tilde{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^{\text{ep}} d\tilde{\mathbf{H}} \quad (3.31)$$

mit dem Tangentenmodul

$$\mathbb{C}^{\text{ep}} = \mathbb{C}^{\text{el}} - 2G \left[ \left( \sqrt{2}G_{1,m} + \frac{\partial c}{\partial \gamma} \right)^{-1} \sqrt{2}G_{1,m} \right] \tilde{\mathbf{N}}_m \otimes \tilde{\mathbf{N}}. \quad (3.32)$$

### 3.2.2 Geschädigte Konfigurationen

Bei den geschädigten Konfigurationen muss die Vergleichsspannung  $c$  neu bestimmt werden, da die additive Aufspaltung der Gesamtverzerrungsrate (2.30) anders formuliert ist und im Gegenteil zur ungeschädigten Konfiguration noch einen Schädigungsanteil enthält.

#### a) Skalare Grundgleichungen

Aus der plastischen Konsistenzbedingung (2.60) folgt nach Einsetzen der Skalarprodukte (3.9) und der Umformulierung der Verzerrungsraten der geschädigten Konfigurationen

$$\left( 1 - \frac{a^{\text{pl}}}{c} \tilde{I}_1 \right) \dot{c} = \mathbf{C}_2 \cdot \dot{\mathbf{H}} - \sqrt{2}GR\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{R}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{N}}\dot{\gamma} - \mathbf{Q}^{\text{el}}\mathbf{C}_2 (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \cdot \mathbf{C}_1\dot{\mu} \quad (3.33)$$

mit den Tensoren  $\mathbf{C}_1$  aus (2.75) und

$$\mathbf{C}_2 = \sqrt{2}G\tilde{\mathbf{N}} + 3a^{\text{pl}}K\mathbf{1}. \quad (3.34)$$

Durch weiteres Zusammenfassen ergibt sich die Rate der Vergleichsspannung der geschädigten Konfigurationen

$$\dot{c} = \sqrt{2}G_1 (\dot{\varepsilon}_1 - k_1\dot{\gamma} - k_2\dot{\mu}) \quad (3.35)$$

mit den skalaren Größen  $G_1$  aus (3.12),

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2G}} \mathbf{C}_2 \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad k_1 = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{R}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{N}} \quad (3.36)$$

und

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{2G}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{C}_2 (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \cdot \mathbf{C}_1. \quad (3.37)$$

Um die skalare Gleichung der Rate der Vergleichsspannung  $\sigma$  zu erhalten, wird analog zur Rate der Vergleichsspannung  $c$  vorgegangen. Zunächst werden unter Verwendung der Rate des Spannungstensors

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^{\text{el}} \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \mathbf{C}^{\text{da}} \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} \quad (3.38)$$

die Skalarprodukte

$$\mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 3K_1 \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + c_1 \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + c_2 \left( \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} \right), \quad (3.39)$$

mit

$$K_1 = K + \left( 2\eta_1 + \frac{2}{3}\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_3 \right) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}, \quad (3.40)$$

$$c_1 = (6\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \quad \text{und} \quad c_2 = 3\eta_3 + 2\eta_4,$$

sowie

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 2G_2 \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + c_3 \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} \\ + c_4 \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbf{A}^{\text{el}}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}}, \quad (3.41)$$

mit

$$G_2 = G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}, \quad (3.42)$$

$$c_3 = \eta_3 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{\text{da}} \quad \text{und} \quad c_4 = 2\eta_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}},$$

der Konsistenzbedingung der Schädigung (2.72) gebildet und eingesetzt

$$\left( a^{\text{da}} + \frac{b^{\text{da}}}{\sqrt{3}} \right) \dot{\sigma} = \mathbf{C}_3 \cdot \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{R} \mathbf{C}_3 \mathbf{R}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{N}} \dot{\gamma} - \left[ \mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{C}_3 (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} - \mathbf{C}_4 \right] \cdot \mathbf{C}_1 \dot{\mu}, \quad (3.43)$$

wobei die tensoriellen Größen

$$\mathbf{C}_3 = 2b^{\text{da}} G_2 \mathbf{N} + (3a^{\text{da}} K_1 + b^{\text{da}} c_3) \mathbf{1} + b^{\text{da}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{N}) \\ + a^{\text{da}} c_2 \mathbf{A}^{\text{da}} \quad (3.44)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_4 = & b^{\text{da}} \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{N} + (b^{\text{da}} c_4 + a^{\text{da}} c_1) \mathbf{1} + b^{\text{da}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{N}) \\ & + a^{\text{da}} c_2 \mathbf{A}^{\text{el}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

entsprechen. Die Umformulierung nach der Rate der Vergleichsspannung

$$\dot{\sigma} = \sqrt{2} G_2^* (\dot{\varepsilon}_2 - k_3 \dot{\gamma} - k_4 \dot{\mu}), \quad (3.46)$$

mit den skalaren Größen

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2} G_2} \mathbf{C}_3 \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (3.47)$$

$$G_2^* = \frac{G_2}{a^{\text{da}} + \frac{b^{\text{da}}}{\sqrt{3}}}, \quad (3.48)$$

$$k_3 = \frac{1}{\sqrt{2} G_2} \mathbf{R} \mathbf{C}_3 \mathbf{R}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{N}} \quad \text{und} \quad (3.49)$$

$$k_4 = \frac{1}{\sqrt{2} G_2} \left[ \mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{C}_3 (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} - \mathbf{C}_4 \right] \cdot \mathbf{C}_1, \quad (3.50)$$

stellt somit die zweite skalare Grundgleichung für die numerische Integration dar.

### b) Inelastischer Prädiktor - elastischer Korrektor

Die Integration der skalaren Gleichungen (3.35) und (3.46) über das Zeitintervall  $\int_{t_n}^{t_{n+1}}$  liefert die Vergleichsspannungssinkremente

$$\Delta c = \sqrt{2} G_1 (\Delta \varepsilon_1 - k_1 \Delta \gamma - k_2 \Delta \mu) \quad (3.51)$$

und

$$\Delta \sigma = \sqrt{2} G_2^* (\Delta \varepsilon_2 - k_3 \Delta \gamma - k_4 \Delta \mu). \quad (3.52)$$

Da die skalaren Gleichungen sowohl das Inkrement der plastischen Vergleichsdehnung als auch das der Schädigungsvergleichsdehnung enthalten, wird ein inelastischer Prädiktor verwendet. Die inkrementellen Prädiktorverzerrungen werden durch Lösen des Gleichungssystems

$$\Delta \mathbf{f}_{\text{pr}} = \mathbf{k}^{-1} \Delta \mathbf{e} \quad (3.53)$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \Delta \gamma_{\text{pr}} \\ \Delta \mu_{\text{pr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

berechnet und zur Bestimmung der Prädiktorspannungen

$$c_{\text{pr}} = c(\gamma_n + \Delta\gamma_{\text{pr}}) \quad (3.55)$$

und

$$\sigma_{\text{pr}} = \sigma(\mu_n + \Delta\mu_{\text{pr}}) \quad (3.56)$$

verwendet. Für den elastischen Korrektur werden die Fehler der inkrementellen Vergleichsverzerrungswerte benötigt, da diese als elastische Verzerrungen zu interpretieren sind, und somit den inelastischen Prädiktor korrigieren. Dazu werden zunächst die Fehler des Fließspannungsinkrementes

$$\Delta_{\text{er}}c \cong \frac{\partial c}{\partial \gamma} \Delta_{\text{er}}\gamma = c_{\text{pr}} - c_n - \Delta c \quad (3.57)$$

und des Schädigungsspannungsinkrementes

$$\Delta_{\text{er}}\sigma \cong \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \Delta_{\text{er}}\mu = \sigma_{\text{pr}} - \sigma_n - \Delta\sigma \quad (3.58)$$

definiert und das darauf aufbauende Gleichungssystem

$$\Delta \mathbf{f}_{\text{er}} = \mathbf{a}^{-1} \Delta \mathbf{r} \quad (3.59)$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\text{er}}\gamma \\ \Delta_{\text{er}}\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}G_1k_1 + \frac{\partial c}{\partial \gamma} & \sqrt{2}G_1k_2 \\ \sqrt{2}G_2^*k_3 & \sqrt{2}G_2^*k_4 + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{\text{pr}} - c_n \\ \sigma_{\text{pr}} - \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

gelöst. Mit den Fehlern der Verzerrungen können nun die tatsächlich auftretenden Verzerrungsinkremente

$$\Delta \mathbf{f} = \Delta \mathbf{f}_{\text{pr}} - \Delta \mathbf{f}_{\text{er}} \quad (3.61)$$

bestimmt werden.

### c) Tensorielle Größen

Mit den inelastischen Verzerrungsinkrementen  $\Delta\gamma$  und  $\Delta\mu$  erfolgt nun die Bestimmung der neuen Spannungsrichtung. Dazu wird zunächst das deviatorische ungeschädigte Spannungsinkrement

$$\text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{T}} = \text{dev}\tilde{\mathbf{T}}_{n+1} - \text{dev}\tilde{\mathbf{T}}_n = 2G\text{dev}\Delta\tilde{\mathbf{H}}^{\text{el}} = 2G\text{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{el}} \quad (3.62)$$

aufgestellt. Mit der Umformulierung der elastischen Verzerrungen

$$\operatorname{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{el}} = \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} - \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{pl}} - \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{da}} \quad (3.63)$$

und dem Einsetzen der inelastischen deviatorischen Verzerrungsinkremente

$$\operatorname{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{pl}} = \frac{1}{2}\Delta\gamma \left( \tilde{\mathbf{N}}_n + \tilde{\mathbf{N}}_{n+1} \right) \quad (3.64)$$

und

$$\operatorname{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{da}} = \frac{\beta^{\text{da}}}{2}\Delta\mu \left( \hat{\mathbf{N}}_n + \hat{\mathbf{N}}_{n+1} \right) + \frac{\delta^{\text{da}}}{2}\Delta\mu \left( \hat{\mathbf{M}}_n + \hat{\mathbf{M}}_{n+1} \right) \quad (3.65)$$

folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \sqrt{2\tilde{J}_{2,n+1}}\tilde{\mathbf{N}}_{n+1} - \sqrt{2\tilde{J}_{2,n}}\tilde{\mathbf{N}}_n &= 2G\operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} - G\Delta\gamma \left( \tilde{\mathbf{N}}_n + \tilde{\mathbf{N}}_{n+1} \right) \\ &\quad - \beta^{\text{da}}G\Delta\mu \left( \hat{\mathbf{N}}_n + \hat{\mathbf{N}}_{n+1} \right) \\ &\quad - \delta^{\text{da}}G\Delta\mu \left( \hat{\mathbf{M}}_n + \hat{\mathbf{M}}_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Um die neue Spannungsrichtung  $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$  zu bestimmen, bedarf es drei weiterer Annahmen. Zunächst wird die linke Seite der Gleichung (3.66) Null gesetzt, da diese in der Regel sehr klein ist. Außerdem wird angenommen, dass  $\tilde{\mathbf{N}}_{n+1} \cong \tilde{\mathbf{N}}_n \cong \tilde{\mathbf{N}}_m$  und  $\hat{\mathbf{M}}_{n+1} \cong \hat{\mathbf{M}}_n \cong \hat{\mathbf{M}}_m$  sind. Somit folgt

$$\hat{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{2G\operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} - 2G\Delta\gamma\tilde{\mathbf{N}}_n - \beta^{\text{da}}G\Delta\mu\hat{\mathbf{N}}_n - \delta^{\text{da}}2G\Delta\mu\hat{\mathbf{M}}_n}{\beta^{\text{da}}G\Delta\mu} \quad (3.67)$$

als neue Spannungsrichtung der geschädigten Konfigurationen.

#### d) Tangentenmodul

Um den Tangentenmodul zu erhalten, der den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Gesamtverzerrungen beschreibt, wird zunächst das Spannungsdifferenzial

$$d\mathbf{T} = \mathbb{C}^{\text{el}}d\mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbb{C}^{\text{da}}d\mathbf{A}^{\text{da}} \quad (3.68)$$

aufgestellt. Das Ziel muss es sein, alle Verzerrungsdifferenziale auf  $d\mathbf{H}$  umzuformulieren, um dann die Anteile der Tangentenmodule zusammenzubringen. Zunächst einmal gilt

$$d\mathbf{A}^{\text{el}} \cong d\mathbf{H}^{\text{el}} = d\mathbf{H} - \mathbf{R}^{-1}d\tilde{\mathbf{H}}^{\text{pl}}\mathbf{R} - (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1}d\mathbf{H}^{\text{da}}\mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (3.69)$$

und

$$d\mathbf{A}^{\text{da}} \cong d\mathbf{H}^{\text{da}}, \quad (3.70)$$

wo anschließend die inelastischen Differenziale mit

$$d\mathbf{H}^{\text{da}} = d\mu \mathbf{C}_1 \quad \text{und} \quad d\tilde{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = d\gamma \tilde{\mathbf{N}}_m \quad (3.71)$$

umgeformt werden können. Unter der Verwendung von (3.61),

$$d\mathbf{r} = \mathbf{h} d\mathbf{f}_{\text{pr}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

und

$$\mathbf{b} = \mathbf{k}^{-1} - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{h} \mathbf{k}^{-1} \quad (3.73)$$

folgt

$$d\mathbf{f} = \mathbf{b} d\mathbf{e} \quad (3.74)$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} d\gamma \\ d\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_2 \cdot d\mathbf{H} \\ \frac{1}{\sqrt{2}G_3} \mathbf{C}_3 \cdot d\mathbf{H} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Durch das Einsetzen von  $d\gamma$  und  $d\mu$  aus (3.75) in (3.71) ergibt sich für das Spannungsdifferenzial

$$d\mathbf{T} = \mathbf{C}^{\text{epd}} d\mathbf{H} \quad (3.76)$$

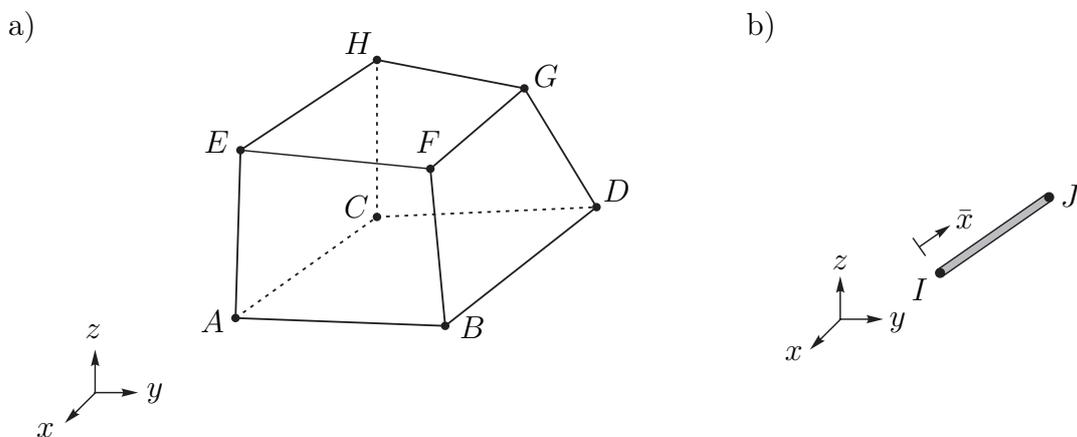
mit dem Tangentenmodul

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\text{epd}} &= \mathbf{C}^{\text{el}} - \left( \mathbf{C}^{\text{el}} \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_m \mathbf{R} \right) \otimes \left( \frac{b_{11}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_2 + \frac{b_{12}}{\sqrt{2}G_3} \mathbf{C}_3 \right) \\ &\quad - \left[ \mathbf{C}^{\text{el}} \left( \alpha^{\text{da}} \mathbf{1}_N + \beta^{\text{da}} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \mathbf{N}_m \mathbf{Q}^{\text{el}} + \delta^{\text{da}} (\mathbf{Q}^{\text{el}})^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{Q}^{\text{el}} \right) \right] \\ &\quad \otimes \left( \frac{b_{21}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_2 + \frac{b_{22}}{\sqrt{2}G_3} \mathbf{C}_3 \right) \\ &\quad + \left[ \mathbf{C}^{\text{da}} \left( \alpha^{\text{da}} \mathbf{1}_N + \beta^{\text{da}} \mathbf{N}_m + \delta^{\text{da}} \mathbf{M}_m \right) \right] \otimes \left( \frac{b_{21}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_2 + \frac{b_{22}}{\sqrt{2}G_3} \mathbf{C}_3 \right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

unter Verwendung der Mittelpunktintegration für die Spannungsrichtungen.

### 3.3 Schnittstelle Ansys-Materialroutine

Ein wichtiger Aspekt bei der Verwendung einer eigenen Materialroutine in Ansys Classic ist die Schnittstelle der beiden Komponenten. Dabei ist zunächst darauf zu achten, dass in Ansys die richtigen Elemente ausgewählt werden, da nicht alle Elementtypen mit einer eigenen Materialroutine funktionieren. Die Wahl fiel schließlich auf 8-knotige Solid185-Elemente [3], wie die Abbildung 3.1 a) zeigt, mit drei Freiheitsgraden (Translationen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung) an jedem Knoten. Den Elementen werden mit dem `tb,user`-Befehl zum einen das zu verwenden-



**Abb. 3.1:** Elementtypen: a) Solid185-Element b) Link180-Element

de Materialmodell und zum anderen material- und modellbezogene Ausgangsparameter zugeordnet, die im Lösungsteil des APDL-Codes der Materialroutine übergeben werden. Außerdem wird mit dem `tb,state`-Befehl die Anzahl der sogenannten History-Variablen festgelegt. Diese Variablen werden vom Nutzer in der Materialroutine definiert und entsprechen internen Variablen der Materialroutine, die am Ende des jeweiligen Zeitinkrementes aktualisiert und für den nächsten Lastschritt wieder zur Verfügung gestellt werden. Darüber hinaus werden bei einem Probekörper Link180-Elemente (Abbildung 3.1 b)) verwendet, um eine gelenkig gelagerte Randbedingung in Form eines Bolzens zu simulieren. Diese sind ebenfalls mit einer eigenen Materialroutine kompatibel. Das Link180-Element besitzt drei Verschiebungsfreiheitsgrade an jedem Knoten und kann selbst nur eine Druck- oder Zugbelastung in Stabrichtung aufnehmen.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Kenntnis über mögliche Ein- und Ausgabeparameter der Materialroutine, um zu wissen, welche Größen vorhanden und welche am Ende bestimmt werden müssen. Eine genaue Auflistung aller möglichen Ein- und Ausgabeparameter ist in [2] zu finden. Der wichtigste ist dabei der von Ansys zu übergebende Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = F_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{g}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}^j. \quad (3.78)$$

Dessen Komponenten sind in der kovarianten Darstellung  $F_{ij}$  formuliert. Da das verwendete Modell allerdings auf der gemischtvarianten Formulierung beruht, muss aus dem Deformationsgradienten eine gemischtvariante Größe resultieren. Aufgrund des kartesischen Koordinatensystems gilt

$$\overset{o}{\mathbf{g}}_i = \overset{o}{\mathbf{g}}^i, \quad (3.79)$$

weshalb die kovarianten Komponenten bereits den gemischtvarianten Komponenten  $F_{ij}^i$  entsprechen. Der Deformationsgradient ist die Basis des Kontinuumschädigungsmodells und führt letztendlich zu allen weiteren Größen in der Materialroutine.

Mit Hilfe des gemischtvarianten Deformationsgradienten wird anschließend der gemischtvariante rechte Cauchy-Green-Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \overset{o}{G}^{ik} G_{kj} \overset{o}{\mathbf{g}}_i \otimes \overset{o}{\mathbf{g}}_j \quad (3.80)$$

gebildet. Aus (3.80) folgen die Metriken  $\overset{o}{G}^{ik} G_{kj}$ , die zur Bestimmung des Metriktransformationstensors (2.2) bezogen auf die Momentankonfiguration

$$\mathbf{Q} = \overset{o}{G}^{ik} G_{kj} \overset{o}{\mathbf{g}}_i \otimes \overset{o}{\mathbf{g}}_j \quad (3.81)$$

dienen. Somit ist der Metriktransformationstensor  $\mathbf{Q}$ , der die Gesamttransformation zwischen der Ausgangs- und der Momentankonfiguration in der Kinematik (2.1) beschreibt, formuliert.

Am Ende eines jeden Durchlaufs der Materialroutine werden der Spannungstensor und der entsprechende Tangentenmodul bestimmt. Diese müssen am Ende in die für Ansys notwendige Form gebracht werden. Dies bedeutet, dass der in der Materialroutine verwendete Kirchhoffsche Spannungstensor in den Cauchy-Spannungstensor umgerechnet und in eine 1x6 Matrix umgewandelt werden muss. Außerdem wird der Tangentenmodul von einem Tensor 4. Stufe in eine 6x6 Matrix überführt.

## 4 Experimenteller Aufbau

Um das Kontinuumsschädigungsmodell zu validieren, erfolgt zunächst die Erfassung experimenteller Daten. Dazu wurden sowohl einaxiale als auch biaxiale Experimente durchgeführt. Um diese Experimente nachvollziehen zu können, beschreibt dieses Kapitel den experimentellen Aufbau der 1D- und 2D-Versuche. Außerdem wird die Funktionsweise der digitalen Bildkorrelation erläutert, die es ermöglicht, Verschiebungen während des Experimentes auf der Oberfläche der Probengeometrie zu erfassen. Im Anschluss an die Versuche wurden die Bruchflächen der Probekörper in einem Rasterelektronenmikroskop untersucht, dessen Arbeitsweise im letzten Abschnitt beschrieben wird.

### 4.1 1D-Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau der eindimensionalen Zugversuche ist in der Abbildung 4.1 dargestellt. Als Prüfmaschine wurde die Inspekt 50-1 Table der Firma Hegewald und Peschke Meß- und Prüftechnik GmbH des Instituts für Werkstoffe des Bauwesens verwendet. Diese ist auf eine maximale Prüfkraft von 50kN ausgelegt und besitzt eine Genauigkeit der Wegmessung von  $0,1\mu\text{m}$ . Die Traversengeschwindigkeit ist zwischen  $0,01 - 200\text{mm/s}$  einstellbar. Die eindimensional belasteten Probekörper (siehe Kapitel 5 Abbildung 5.2) werden in der Mitte der Prüfmaschine in die annähernd kreisförmigen Klemmbacken eingespannt. Die Zugversuche werden mit einer Traversengeschwindigkeit von  $0,05\text{mm/s}$  weggesteuert durchgeführt, um einer quasi-statischen Belastung zu entsprechen. Des Weiteren gehört zum eindimensionalen Versuchsaufbau ein Kamerasystem, bestehend aus 4 Kameras, welches Verschiebungen auf der Probenoberfläche während des Versuchs aufzeichnet. Diese Daten werden mit ei-

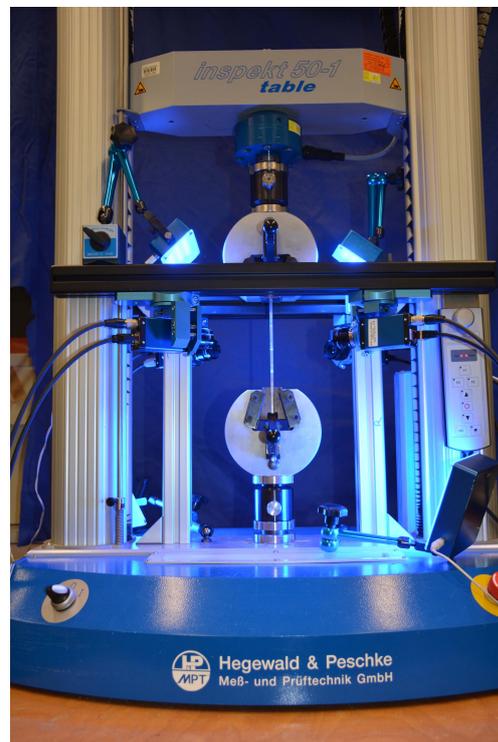
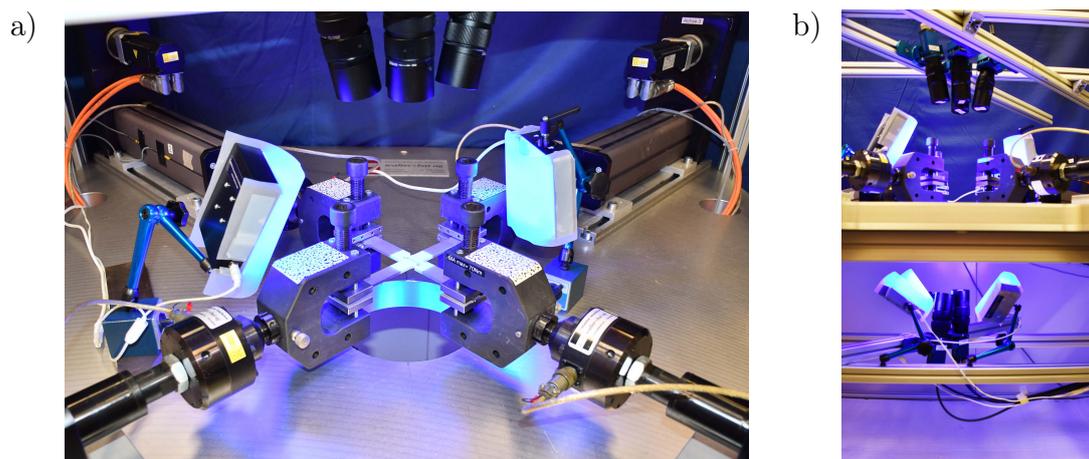


Abb. 4.1: 1D-Versuchsaufbau [80]

ner Software der digitalen Bildkorrelation verarbeitet und liefern anschauliche Ergebnisse über den Belastungszeitraum. Eine detailliertere Beschreibung der Funktionsweise der digitalen Bildkorrelation ist im Kapitel 4.3 zu finden. Die digitale Bildkorrelation erfordert eine ausreichende Beleuchtung des aufzunehmenden Bereichs. Deshalb dürfen Lampen, wie in der Abbildung 4.1 gezeigt, beim Versuchsaufbau nicht fehlen.

## 4.2 2D-Versuchsaufbau

Für die Experimente unter biaxialer Belastung wurde die elektromechanische Biaxial-Prüfmaschine LFM-BIAX 20kN der Firma Walter und Bai AG verwendet. Diese ist in der Abbildung 4.2 a) dargestellt und besteht aus vier unabhängig voneinander steuerbaren elektromechanischen Prüfzylindern. Die Prüfzylinder können sowohl weg- als auch kraftgesteuert fahren. Die Prüfzylinder des Typs EC-

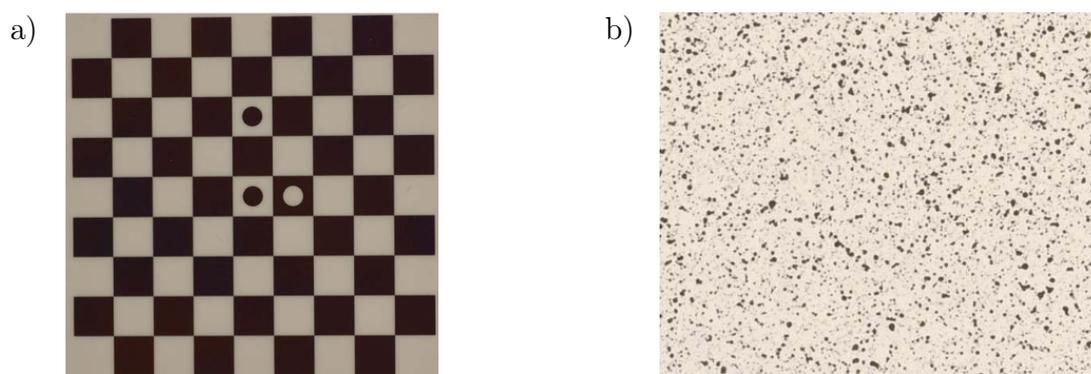


**Abb. 4.2:** 2D-Versuchsaufbau [90]: a) Draufsicht b) Seitenansicht

20 enthalten jeweils eine integrierte 1730 EGX-20kN Kraftmessdose, womit ein Kräftebereich zwischen  $-20\text{kN}$  für eine Druckbelastung und  $20\text{kN}$  für eine Zugbelastung möglich ist. Die biaxialen Probekörper können in der Mitte der Prüfzylinder entweder gelenkig gelagert oder fest eingespannt werden. Beide Varianten finden in dieser Arbeit ihre Anwendung. Wie bereits beim 1D-Versuchsaufbau gehören ein Kamerasystem und die Beleuchtung dazu. Deren Anordnung können beispielhaft der Abbildung 4.2 b) entnommen werden. Es werden somit bei den biaxialen Untersuchungen Kameras oberhalb und unterhalb des Versuchstisches angebracht. Die Anzahl der Kameras variiert in dieser Arbeit zwischen vier und sechs Stück. Das hängt zum einen damit zusammen, dass bei den ersten Versuchsreihen nur vier Kameras zur Verfügung standen und zum anderen, dass abhängig von der Probengeometrie mal vier und mal sechs Kameras erforderlich waren.

### 4.3 Digitale Bildkorrelation

Die digitale Bildkorrelation ist ein optisches Verfahren zur Messung von Oberflächenverschiebungen und wird beispielsweise in Untersuchungen von Hartmann et al. [55] sowie von Dunand und Mohr [45] zur experimentellen Auswertung eingesetzt. Das in dieser Arbeit für die digitale Bildkorrelation verwendete System besteht im Wesentlichen aus zwei Komponenten. Zum einen aus dem Q-400-Messsystem, bestehend aus Kameras und zugehörigen Objektiven, welches von der Firma LIMESS Messtechnik und Software GmbH vertrieben wird und zum anderen aus der Auswertesoftware ISTR4D von Dantec Dynamics [37]. Das Kamerasystem wird, wie in Abbildung 4.2 gezeigt, um den aufzunehmenden Interessenbereich aufgestellt. Es reichen bereits zwei Kameras aus, um die Oberfläche eines Probekörpers auszuwerten. Je mehr Kameras allerdings verwendet werden, desto genauer werden die Ergebnisse. Um zusätzliche Informationen in Dickenrichtung zu erlangen, werden auf der gegenüberliegenden Oberfläche mindestens zwei weitere Kameras angebracht. Dadurch resultiert eine zweiseitige Auswertung des Probekörpers. Je nachdem wie groß der Interessenbereich ist, der aufgenommen werden soll, muss ein entsprechendes Objektiv gewählt und der Abstand zwischen Kamera und Probekörper angepasst werden. Die verwendeten Kameras liefern zunächst einmal nur voneinander unabhängige Bilder an die Auswertesoftware. Um die Kameras miteinander zu verknüpfen, die globalen Koordinaten der Kameras festzustellen und die Lichtverhältnisse und Fokuseinstellung zu überprüfen, muss das System kalibriert werden. Dazu werden eigens von Dantec Dynamics angefertigte Kalibrierplatten verwendet, siehe Abbildung 4.3 a). Die hier verwendeten Kalibrierplatten sind doppelseitig, da aufgrund der Information in Dickenrichtung immer doppelseitig ausgewertet wurde. Die Kalibrierplatten weisen ein



**Abb. 4.3:** a) Kalibrierplatte b) Specklemuster

schachbrettartiges Muster auf, wodurch an den Eckpunkten der einzelnen Quadrate eindeutig identifizierbare Punkte sind. Da die Auswertesoftware die Graustufen der einzelnen Pixel vergleicht, muss die Beleuchtung ausreichend sein, um

die Konturen zu erkennen. Allerdings sollte die Beleuchtung nicht zu stark sein, da die Objektive gegen einfallendes Licht sehr empfindlich sind. Durch mehrmaliges Aufnehmen der Kalibrierfläche in unterschiedlichen Winkeln von allen Kameras berechnet die Software ISTR4D die aktuellen globalen Positionen der Kameras im Raum. Da die Kalibrierplatte für die Kalibrierung im Interessenbereich der zu untersuchenden Probe positioniert sein muss, wird auch der Abstand der Kameras zur Probe ermittelt. Sobald der berechnete Fehler der Kalibrierung klein genug ist, war die Kalibrierung erfolgreich und es darf von einer möglichst flächendeckenden und genauen Auswertung ausgegangen werden. Damit die digitale Bildkorrelation überhaupt funktioniert, muss dafür gesorgt werden, dass die Oberfläche des zu untersuchenden Probekörpers auch mit unterschiedlichen Graustufen versehen ist. Dazu werden die Probekörper im Interessenbereich zunächst mit einem matten weißen Lack besprüht. Dieser soll Reflektionen der metallischen Oberflächen verhindern. Nach der weißen Grundierung erfolgt das Aufsprühen eines feinen unregelmäßigen Punktemusters, auch Specklemuster genannt. Hierdurch entstehen die unterschiedlichen Graustufen, die dann von der Auswertesoftware erkannt und ausgewertet werden können. Die Feinheit des Specklemusters, siehe Abbildung 4.3 b), hängt vom Kamerasystem und der Größe des Auswertebereichs ab. Das Ziel muss sein, dass ein Speckle annähernd  $3 \times 3$  Pixel groß ist, da diese das Auswerteverfahren optimieren. Sobald das System kalibriert und der Probekörper bespeckelt ist, sind die Vorbereitungen abgeschlossen. Das Kamerasystem nimmt je nach Vorgabe in einem bestimmten Zeitintervall den Interessenbereich auf. Nach dem Versuch vergleicht die Software die Graustufen der einzelnen Pixel innerhalb der Kameras und anschließend den verformten mit dem unverformten Zustand. Aufgrund der Verschiebung und Verformung der Speckle berechnet die Software die Oberflächenverschiebung. Diese kann anschließend, genauso wie die daraus resultierenden Verzerrungen, grafisch ausgegeben werden. Somit kann neben dem Auswerten der Kraft- und Verschiebungswerte aus der Prüfmaschine auch das Verschiebungs- und Verzerrungsfeld auf der Oberfläche durch die digitale Bildkorrelation visualisiert werden. Dadurch können Ergebnisse aus Experimenten und korrespondierenden numerischen Simulationen viel weitreichender verglichen werden.

#### 4.4 Rasterelektronenmikroskop

Da das Materialversagen durch unterschiedliche Schädigungsmechanismen begründet sein kann, werden diese durch Aufnahmen der Bruchfläche des Probekörpers mittels eines Rasterelektronenmikroskops, wie es beispielsweise auch bei Roth und Mohr [87] sowie bei Sander et al. [88] durchgeführt wurde, genauer betrachtet. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Rasterelektronenmikroskop EVO MA 15 der Firma Zeiss verwendet, dessen Hauptgerät und dazugehörige spezielle Tastatur in der Abbildung 4.4 dargestellt sind. Allgemein wird bei einem Rasterelektronenmikroskop ein Elektronenstrahl über die Probenfläche gerastert und

die von der Oberfläche unterschiedlich zurückstrahlenden Elektronen über einen Detektor aufgefangen und verarbeitet. Durch die Auswertung der zurückstrahlenden Elektronen kann ein deutlich vergrößertes Abbild der Bruchfläche erzeugt werden. Das Hauptsystem des Rasterelektronenmikroskops, das in der Abbildung 4.4 auf der linken Seite gezeigt ist, besteht aus mehreren Teilsystemen. Zunächst emittiert eine Kathode die Elektronen, welche benutzerdefiniert zur Anode beschleunigt werden. Auf dem Weg zur Anode werden die Elektronen durch einen Wehneltzylinder erstmals gebündelt. Des Weiteren führen Magnetspulen dazu,



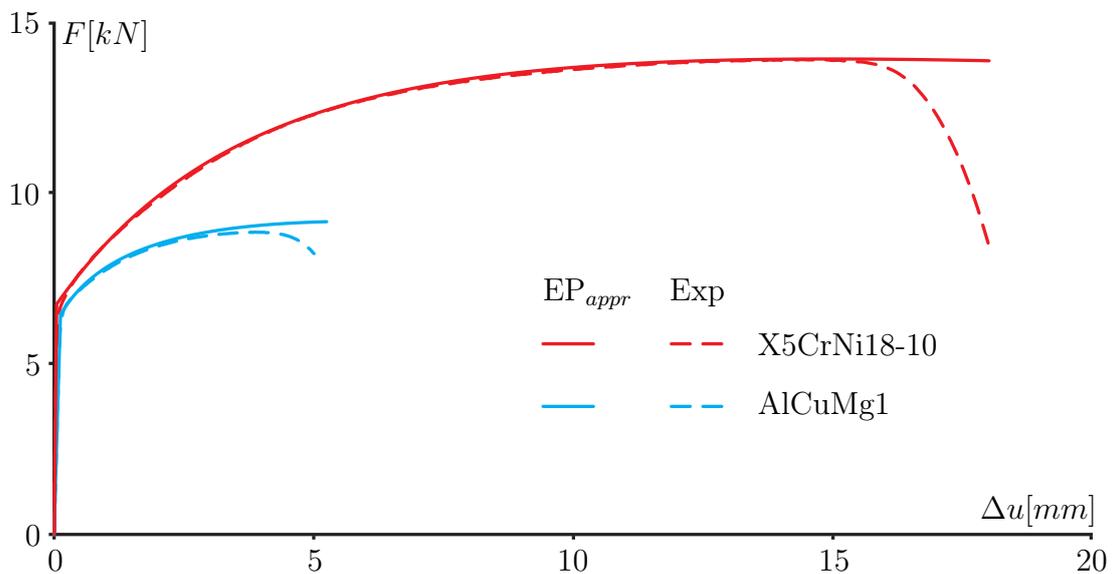
**Abb. 4.4:** REM EVO MA der Firma Zeiss [102]

dass die Elektronen zu einem gesättigten Elektronenstrahl gebündelt werden. Die Magnetspulen nehmen in diesem Rasterelektronenmikroskop eine besondere Rolle ein, da diese als elektrische Linsen dienen, deren Brennweite durch den Benutzer vorgegeben werden kann. Mit Hilfe von Ablenspulen wird der Elektronenstrahl zeilenförmig über einen vorgegebenen Bereich der Probenoberfläche bewegt, um an jeder Stelle Informationen durch zurückstrahlende Elektronen zu erhalten. Damit der Elektronenstrahl nicht durch gasförmige Moleküle abgelenkt wird, wodurch sich die Bildqualität deutlich verschlechtern würde, findet der gesamte Prozess in einem Hochvakuum statt. Die vom Probekörper zurückstrahlenden Elektronen werden zwischen Sekundär- und Rückstreuungselektronen unterschieden. Diese werden durch separate Detektoren aufgenommen und verarbeitet. Die Sekundärelektronen entstehen durch Ablösung von der Probenoberfläche, nachdem diese kinetische Energie durch den Elektronenstrahl aufgenommen hat. Diese Elektronen führen hauptsächlich zur Bildgewinnung, sodass die untersuchte Probenoberfläche topografisch nachgebildet werden kann. Durch die Verwendung dieses Rasterelektronenmikroskops können im Anschluss an die Experimente die Bruchflächen hinsichtlich auftretender Schädigungsmechanismen untersucht werden.

## 5 Materialparameter und Probekörper

In diesem Kapitel werden die zwei verwendeten duktilen Metalllegierungen vorgestellt und die jeweils aus Zugversuchen ermittelten elastischen, plastischen und schädigenden Materialparameter dargestellt. Außerdem werden anschließend die Probekörper zur Untersuchung biaxialer Lastfälle vorgestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden das Materialverhalten der duktilen Stahllegierung X5CrNi18-10 und der duktilen Aluminiumlegierung AlCuMg1 analysiert. Diese beiden Metalllegierungen wurden ausgewählt, da diese im Ingenieurbau häufig verwendet werden und eine hohe Duktilität aufweisen. Außerdem unterscheiden sich beide hinsichtlich ihres Verfestigungsverhaltens. Um dies zu verdeutlichen, sind in der Abbildung 5.1 die Kraft-Verschiebungs-Kurven der Zugversuche mit ungekerbten Zugproben (Abbildung 5.2 beider Materialien dargestellt). Während die Aluminiumlegierung eine maximale Kraft  $F \cong 8kN$  und eine maxi-



**Abb. 5.1:** Experimentelle und approximierte elastisch-plastische Kraft-Verschiebungs-Kurven der ungekerbten Zugversuche beider Metalllegierungen

male Verschiebung  $\Delta u \cong 5mm$  erreicht, weist die Stahllegierung deutlich größere Werte auf. Mit einer maximalen Kraft  $F \cong 13kN$  und einer maximalen Verschiebung  $\Delta u \cong 18mm$  ist die Stahllegierung wesentlich duktiler. Die damit verbundenen großen irreversiblen Verformungen führen zu deutlich ausgeprägteren Verfestigungs- und Entfestigungsverhalten. Somit eignen sich diese beiden Me-

Aluminiumlegierung sehr gut, um Analysen des Schädigungs- und Versagensverhaltens durchzuführen und gegebenenfalls Unterschiede zwischen den Materialien festzustellen. Die approximierten elastisch-plastischen Kraft-Verschiebungs-Kurven, die in der Abbildung 5.1 mit durchgezogenen Linien dargestellt sind, entsprechen jeweils den in den Tabellen 5.1 und 5.2 angegebenen Materialparametern.

## 5.1 Aluminiumlegierung - AlCuMg1

Die Aluminiumlegierung AlCuMg1 ist aufgrund ihrer ausgeprägten Duktilität und ihrer hohen Ermüdungsfestigkeit ein oft verwendeter Werkstoff in der Luftfahrtindustrie und im Maschinenbau. Somit besteht großes Interesse daran, die Materialeigenschaften tiefer zu verstehen und das Materialverhalten besser numerisch abbilden zu können. Eine ganze Reihe von Untersuchungen mit dieser Legierung führte Brenner [12] durch. Neben gekerbten Zugversuchen wurde auch eine Versuchsreihe unter biaxialer Belastung durchgeführt. Um diese zu ergänzen, wurden die Materialparameter von Brenner [12] übernommen und in der Tabelle 5.1 zusammengefasst. Um den elastischen Bereich zu beschreiben, wird das Hookesche Gesetz mit dem Elastizitätsmodul  $E = 65000 N/mm^2$  und der Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$  verwendet. Die plastischen Materialparameter der Tabelle 5.1 werden zur Charakterisierung der Verfestigung verwendet. Die Materialparameter wurden bei Brenner [12] anhand von Zugversuchen ermittelt und ergaben mit dem potenziellen Verfestigungsgesetz

$$c(\gamma) = c_0 \left( \frac{H\gamma}{n_h c_0} + 1 \right)^{n_h} \quad (5.1)$$

eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Die Fließspannung  $c(\gamma)$  wird somit durch die Initialfließspannung  $c_0$ , den Verfestigungsparameter  $H$ , den Verfestigungsexponenten  $n_h$  sowie durch die plastische Vergleichsverzerrung  $\gamma$  beschrieben. Der Einfluss der hydrostatischen Spannung in der Fließbedingung (2.57) konnte nicht festgestellt werden, weshalb der hydrostatische Spannungskoeffizient  $\frac{a^{pl}}{c} = 0$  gewählt wurde. Um die auftretende Entfestigung des Materials infolge Schädigung zu beschreiben, wird das Entfestigungsgesetz

$$\sigma(\mu) = \sigma_0 + D_1 \mu + D_2 (1 - e^{-n_d \mu}) \quad (5.2)$$

verwendet. Hierbei ergibt sich die Schädigungsvergleichsspannung  $\sigma(\mu)$  aus der Initialschädigungsspannung  $\sigma_0$ , den Entfestigungsparametern  $D_1$  und  $D_2$ , dem Entfestigungsexponenten  $n_d$  sowie aus der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$ . Die angegebenen elastischen Schädigungsmodule  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  werden im Rahmen dieser Arbeit nur für die Versuche mit dem Z-Probekörper, siehe Kapitel 5.3.1, verwendet, um die Versuchsreihe von Brenner [12] fortzusetzen. Für die Versuche mit der X0- und H-Probe, siehe Kapitel 5.3.2 und 5.3.3, aus der Aluminiumlegie-

**Tab. 5.1:** Elastische, plastische und schädigende Materialparameter der Aluminiumlegierung

<b>AlCuMg1</b>			
Beschreibung	Variable	Wert	Einheit
<i>elastische Materialparameter</i>			
Elastizitätsmodul	$E$	65000	$[N/mm^2]$
Querkontraktionszahl	$\nu$	0,3	$[-]$
<i>plastische Materialparameter</i>			
Initialfließspannung	$c_0$	186	$[N/mm^2]$
Verfestigungsparameter	$H$	1800	$[N/mm^2]$
Verfestigungsexponent	$n_h$	0,23	$[-]$
hydrost. Spannungskoeffizient	$\frac{a^{pl}}{c}$	0	$[mm^2/N]$
<i>schädigende Materialparameter</i>			
Initialschädigungsspannung	$\sigma_0$	400	$[N/mm^2]$
Entfestigungsparameter 1	$D_1$	700	$[N/mm^2]$
Entfestigungsparameter 2	$D_2$	18	$[N/mm^2]$
Entfestigungsexponent	$n_d$	200	$[-]$
elastisches Schädigungsmodul 1	$\eta_1$	-100000	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 2	$\eta_2$	-50000	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 3 für $\eta \geq 0$	$\eta_3$	-600000	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 3 für $\eta < 0$	$\eta_3$	600000	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 4 für $\eta \geq 0$	$\eta_4$	-600000	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 4 für $\eta < 0$	$\eta_4$	600000	$[N/mm^2]$

rung werden die elastischen Schädigungsmodule aufgrund der besseren Ergebnisse variiert und angepasst. Die angepassten Werte sind der jeweiligen Auswertung der biaxialen Lastfälle zu entnehmen.

## 5.2 Stahllegierung - X5CrNi18-10

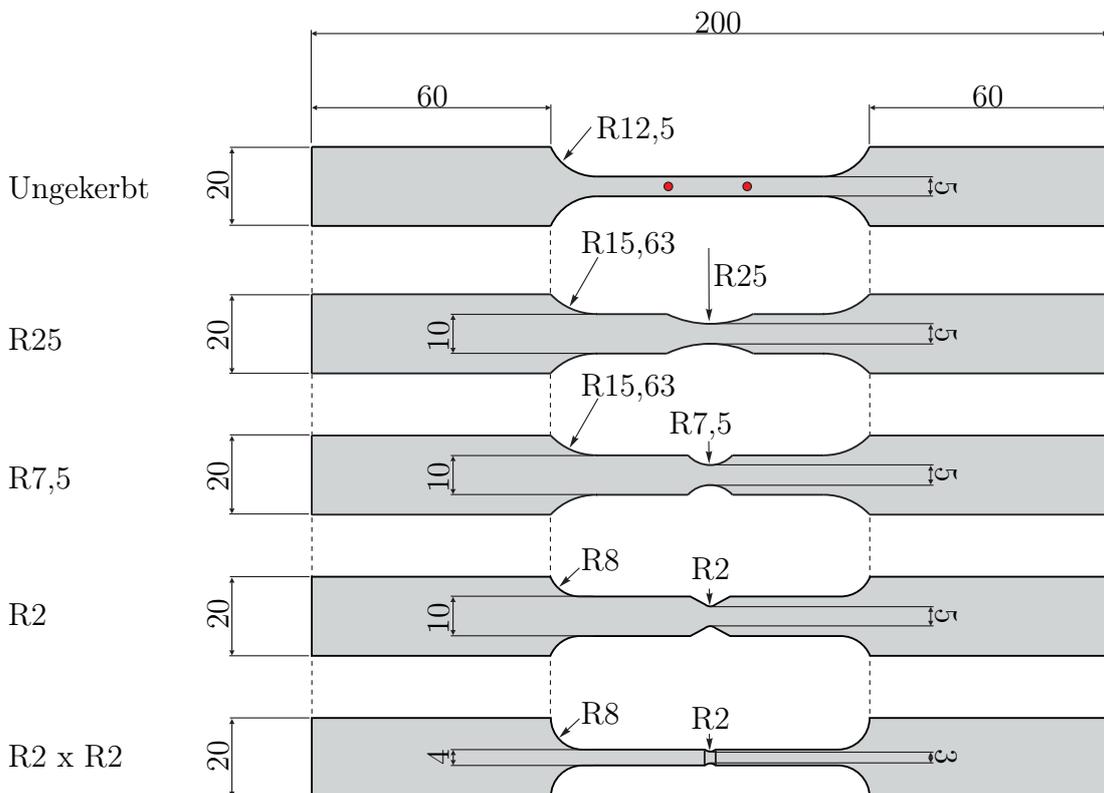
Die Stahllegierung X5CrNi18-10 gehört zu den nichtrostenden Stählen und besitzt eine sehr hohe Duktilität, weshalb diese Legierung ein häufig verwendetes Material bei Stahlkonstruktionen darstellt. Aufgrund der hohen Steifigkeit und der deutlich ausgeprägten Duktilität bietet sich dieses Material an, um Schädigungs- und Versagensprozesse zu analysieren. Die elastisch-plastischen Materialparameter wurden an einem ungekerbten Zugstab, siehe Abbildung 5.2, bestimmt und ergaben für das elastische Materialverhalten einen Elastizitätsmodul  $E = 180000 N/mm^2$  und eine Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$ . Im Gegensatz zur Alumi-

niumlegierung ergab das exponentielle Voce-Verfestigungsgesetz

$$c(\gamma) = c_0 + H_1\gamma + H_2(1 - e^{-n_h\gamma}) \quad (5.3)$$

die bessere Übereinstimmung zwischen Experiment und numerischen Simulationen. Dabei hängt die Fließspannung  $c(\gamma)$  von den Verfestigungsparametern  $H_1$  und  $H_2$ , dem Verfestigungsexponenten  $n_h$  sowie von der plastischen Vergleichsverzerrung  $\gamma$  ab.

Durch die Untersuchung gekerbter Zugstäbe mit unterschiedlichen Kerbradien, die in der Abbildung 5.2 abgebildet sind, wurde festgestellt, dass der hydrostatische Spannungskoeffizient  $\frac{a^{pl}}{c}$  auch bei diesem Material zu Null gesetzt werden kann. Außerdem diene diese Untersuchung der Bestimmung der schädigenden

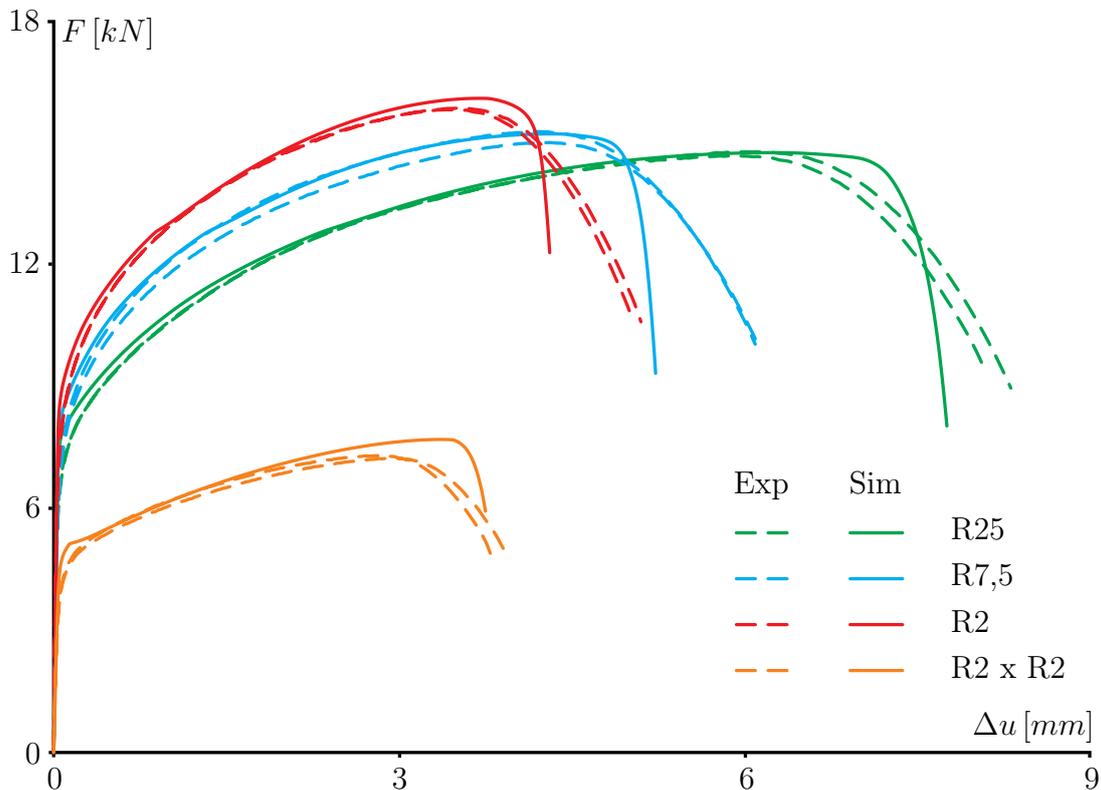


**Abb. 5.2:** Ungekerbter und gekerbte 1D-Zugprobekörper; Angaben in [mm]

Materialparameter. Eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und numerischen Simulationen lieferte das Entfestigungsgesetz

$$\sigma(\mu) = \sigma_0 - \left(\frac{\mu}{D_1}\right)^2, \quad (5.4)$$

mit einem anfangs nahezu horizontalen und bei größerer Schädigung stärker abfallenden Verlauf im  $\sigma$ - $\mu$ -Diagramm. Dabei hängt die Schädigungsspannung  $\sigma(\mu)$  von der Initialschädigungsspannung  $\sigma_0$ , einem Entfestigungsparameter  $D_1$  und der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  ab. Die experimentelle und numerische Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven der verschiedenen Zugprobekörper ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Hierbei resultiert die Verschiebung  $\Delta u$  aus den Verschiebungen zweier Auswertungspunkte, die in der Abbildung 5.3 beispielhaft beim ungekerbten Zugprobekörper mit roten Punkten markiert sind und einen Abstand von etwa  $25\text{mm}$  aufweisen. Bei allen vier gekerbten Zugprobekörpern ist eine gute Übereinstimmung im elastisch-plastischen Bereich zwischen Experiment und Simulation zu erkennen. Die Kraft-Verschiebungs-Kurven der numerischen Simulationen fallen allerdings im Bereich der Entfestigung stärker ab als die der Experimente. Trotz zahlreicher Variationen der elastischen Schä-



**Abb. 5.3:** Vergleich der Kraft-Verschiebungs-Kurven der experimentell und numerisch untersuchten gekerbten Zugproben der Stahllegierung

digungsmodule  $\eta_1$ - $\eta_4$  und der Verwendung unterschiedlicher Entfestigungsgesetze war es nicht möglich, die Diskrepanz im Bereich der Entfestigung zwischen Experiment und numerischer Simulation zu beheben. Der Einfluss der elastischen Schädigungsmodule sollte im Anschluss an diese Arbeit anhand von Mikrosimulationen mit Entlastung weiter untersucht werden. Aufgrund der schwierigen Deutung und Interpretation der elastischen Schädigungsmodule wurden diese für

die numerischen Simulationen zunächst auf  $\eta_{1-4} = -150000 N/mm^2$  für positive Spannungstriaxialitäten und auf  $\eta_{1-4} = 150000 N/mm^2$  für negative Spannungstriaxialitäten festgelegt. Diese Werte entsprechen einer sinnvollen Größenordnung und der Vorzeichenwechsel berücksichtigt den Einfluss des hydrostatischen Zugs beziehungsweise des hydrostatischen Drucks. Waren die Ergebnisse der elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen im Kraft-Verschiebungs-Diagramm der biaxialen Untersuchungen unzureichend, so wurden die elastischen Schädigungsmodul so lange angepasst, bis eine gute Übereinstimmung oder bestmögliche Annäherung zwischen Experiment und Simulation erreicht wurde. Die an-

**Tab. 5.2:** Zusammenfassung der elastischen, plastischen und schädigenden Materialparameter der Stahllegierung

<b>X5CrNi18-10</b>			
Beschreibung	Variable	Wert	Einheit
<i>elastische Materialparameter</i>			
Elastizitätsmodul	$E$	180000	$[N/mm^2]$
Querkontraktionszahl	$\nu$	0,3	$[-]$
<i>plastische Materialparameter</i>			
Initialfließspannung	$c_0$	194	$[N/mm^2]$
Verfestigungsparameter 1	$H_1$	477	$[N/mm^2]$
Verfestigungsparameter 2	$H_2$	184	$[N/mm^2]$
Verfestigungsexponent	$n_h$	5,3	$[-]$
hydrost. Spannungskoeffizient	$\frac{a^{pl}}{c}$	0	$[mm^2/N]$
<i>schädigende Materialparameter</i>			
Initialschädigungsspannung	$\sigma_0$	840	$[N/mm^2]$
Entfestigungsparameter 1	$D_1$	0,2	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 1-4 für $\eta > 0$	$\eta_{1-4}$	-150000	$[N/mm^2]$
elastisches Schädigungsmodul 1-4 für $\eta \leq 0$	$\eta_{1-4}$	150000	$[N/mm^2]$

gepassten elastischen Schädigungsmodul sind den jeweiligen Auswertungen der Untersuchung mit biaxialen Probekörpern zu entnehmen. Alle aus den verschiedenen Zugversuchen ermittelten elastischen, plastischen und schädigenden Materialparameter sind in der Tabelle 5.2 noch einmal zusammenfassend dargestellt.

### 5.3 Biaxiale Probekörper

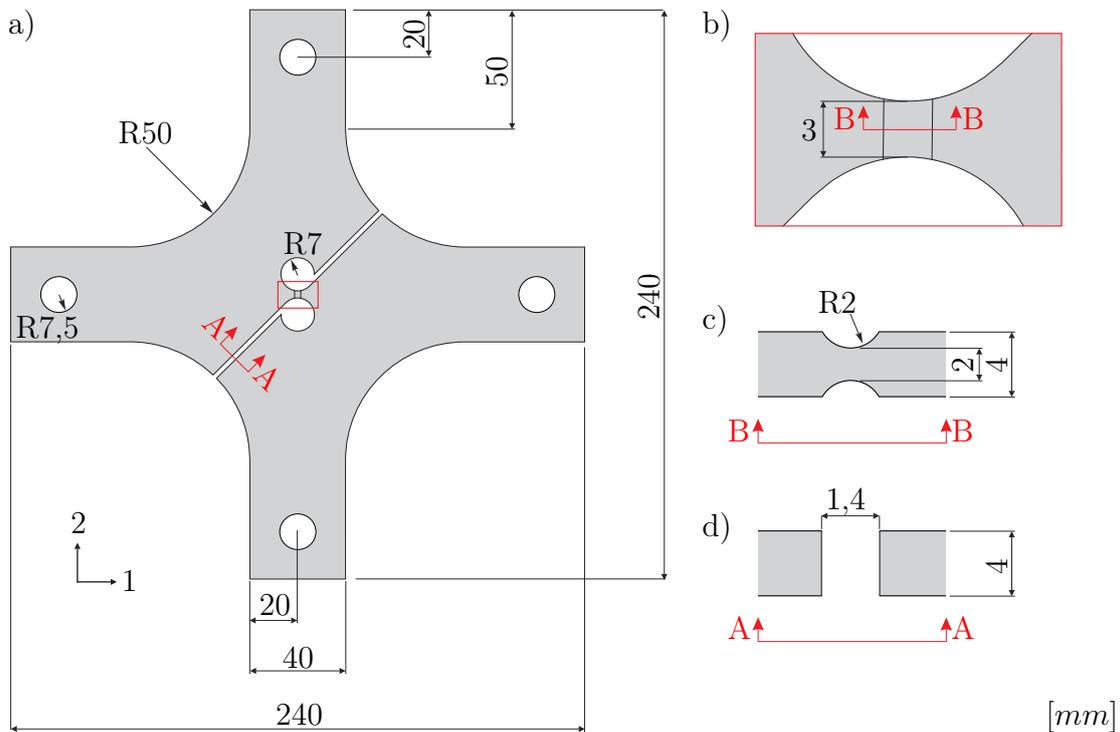
Die Entwicklung von Probekörpergeometrien zur Charakterisierung von Materialverhalten spielt seit Jahrzehnten eine wichtige Rolle in der Materialforschung. Auch die stetig neugewonnenen Erkenntnisse führen dazu, dass Probekörper neu-

beziehungsweise weiterentwickelt werden müssen. Für die in dieser Arbeit zu untersuchenden Schädigungs- und Versagensprozesse duktiler Metalle wurde bereits eine signifikante Abhängigkeit vom Spannungszustand nachgewiesen [23], weshalb dieser eine tragende Rolle in der Probekörperentwicklung einnimmt. Das Auftreten eines Schädigungsmechanismus ist somit abhängig vom Spannungszustand, der oft auch durch die Spannungstriaxialität charakterisiert wird. Daraus folgt, dass die gesamten Schädigungs- und Versagensprozesse nur bei einer maximal möglichen Bandbreite von Spannungszuständen untersucht werden können. Die Verwendung eindimensionaler Probekörper für Zug- [45, 48], Scher- [6, 51] und Druckbelastungen [46, 5] führte jeweils nur zu kleinen Bereichen der Spannungstriaxialität. So entstand die Idee Probekörper für biaxiale Lastfälle zu entwickeln, um einerseits Zug-, Druck, und Scherbelastungen zu kombinieren und andererseits damit eine große Bandbreite an Spannungszuständen mit einem Probekörper abzudecken. Bei der Entwicklung von Probekörpern für biaxiale Belastungen sind neben dem Spannungszustand noch zwei weitere Faktoren entscheidend. Zum einen treten Schädigungs- und Versagensprozesse nur sehr lokal auf, weshalb es wichtig ist, die Deformationen zu lokalisieren, indem Probekörper an bestimmten Stellen geschwächt werden und dort versagen. Zum anderen ist es bei einer experimentellen Auswertung mittels digitaler Bildkorrelation, die Verschiebungsfelder auf der Oberfläche erfasst und immer häufiger verwendet wird, wichtig, dass die Bereiche der lokalisierten Deformationen auch aufnehmbar sind. Um diese Kriterien zu berücksichtigen kann die Entwicklung von Probekörpern in mehrere Phasen unterteilt werden. Zunächst sollten numerische Studien zur Analyse der auftretenden Spannungszustände durchgeführt werden. Nach positivem Abschluss der ersten Phase werden entsprechende Testprobekörper angefertigt. Auch dabei ist die Machbarkeit sowie die Abwägung von Vor- und Nachteilen in der Probenherstellung zu diskutieren. In der dritten Phase werden Experimente mit den angefertigten Testprobekörpern durchgeführt und die experimentelle Durchführung sowie Auswertbarkeit bewertet. Mit positivem Fazit nach der dritten Phase kann eine größere Versuchsreihe durchgeführt werden. In der Literatur wurden bereits einige Probekörper für biaxiale Lastfälle vorgestellt. Häufig wurden dabei biaxiale Probekörper mit einem großen, in Dickenrichtung reduzierten, zentralen Bereich verwendet [91, 81, 103, 77, 65]. Diese sind zur Untersuchung von Schädigungs- und Versagensprozessen allerdings weniger geeignet, da oftmals große Deformationen und Materialversagen an verschiedenen Stellen auftreten. Kleinere Lokalisierungsbereiche, wie sie beispielsweise durch die Dickenreduzierung mittels Kerben möglich sind, führen zu den gewünschten Ergebnissen. Mehrere verschiedene biaxiale Probenkörper, bei denen eine Deformationslokalisierung durch Kerben in Dickenrichtung erreicht werden soll, wurden in einer Vorstudie von Gerke et al. [49, 50] hinsichtlich des Spannungs- und Deformationsverhaltens numerisch untersucht. Die besten Ergebnisse zeigten die doppeltsymmetrischen X0- und H-Probekörper, die jeweils vier voneinander unabhängige Lokalisierungsbereiche aufweisen. Diese wurden aufgrund numerischer Parameterstudien hinsichtlich des Einflusses der Kerblängen und Kerbradien, auf die bei der jeweiligen Probekörpervorstellung

eingegangen wird, angepasst und führten zu den in dieser Arbeit verwendeten neuartigen Probekörpern. Neben diesen beiden Geometrien wird außerdem eine ergänzende Versuchsreihe mit dem Z-Probekörper durchgeführt, die die Studie von Brenner [12] um die druckdominanten biaxiale Belastungen ergänzen soll.

### 5.3.1 Z-Probekörper

Der Z-Probekörper, der in der Abbildung 5.4 a) in der Draufsicht dargestellt ist, ist der erste von drei kreuzförmigen Probekörpern zur Untersuchung biaxialer Lastfälle und weist eine Länge und Breite von  $240\text{mm}$  sowie eine Dicke von  $4\text{mm}$  auf. Jeder Arm der Kreuzprobe ist  $40\text{mm}$  breit und enthält ein Bohrloch mit einem Radius von  $7,5\text{mm}$ , durch die der Probekörper mit Bolzen an der Prüfmaschine befestigt wird. Durch die maschinengesteuerte Bolzenverschiebung wird



**Abb. 5.4:** Z-Probe: a) Draufsicht, b) zentraler Bereich, c) Schnitt B-B, d) Schnitt A-A

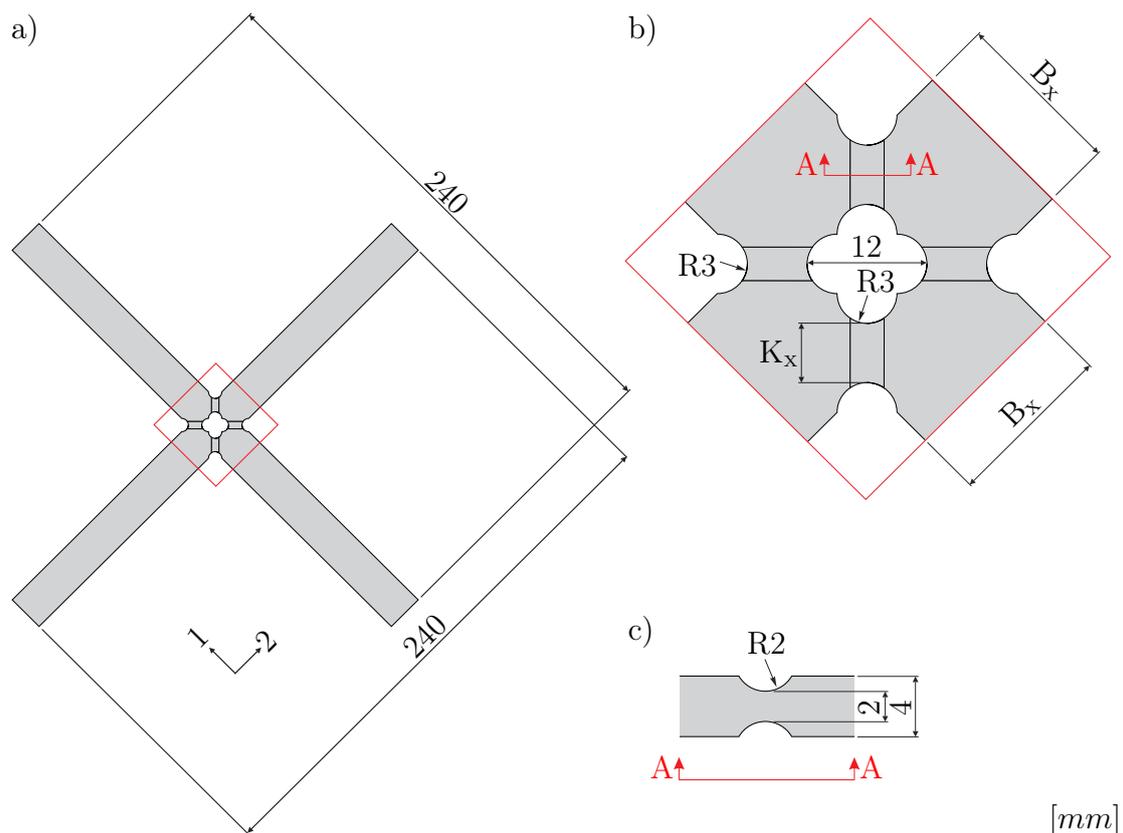
der Probekörper belastet und die Halterung entspricht einer gelenkig gelagerten Randbedingung. Durch zwei Einschnitte im  $45^\circ$  Winkel und zwei inneren Bohrlochern mit dem Radius  $7\text{mm}$  ist die Probe beinahe zweigeteilt und ist nur noch mit dem kleinen zentralen Bereich miteinander verbunden. Die Einschnitte sind  $1,4\text{mm}$  breit, wie die Abbildung 5.4 d) zeigt. Durch die Kerben in Dickenrichtung, siehe Abbildung 5.4 c), und durch die inneren Bohrlocher ist der zentrale

Bereich somit doppelt gekerbt. Durch diese Geometrie wird das wesentliche Verformungsverhalten im zentralen Bereich lokalisiert [28], wodurch sich der Fokus der Auswertung auf diese Stelle konzentrieren kann. Die Abbildung 5.4 b) zeigt den zentralen Bereich in der Draufsicht, wodurch deutlich wird, dass die Kerblänge  $3\text{mm}$  beträgt. Aufgrund der Kerbung in Dickenrichtung ist der zentrale Bereich im Zentrum noch  $2\text{mm}$  dick. Somit ergibt sich eine Querschnittsfläche der Kerbe von  $6\text{mm}^2$ . Die allgemeine Idee biaxialer Lastfälle ist die Kombination verschiedener einaxialer Lastfälle. Somit ähnelt die vertikale 2-Achse dem ein-dimensionalen Schubprobekörper in Abbildung 1.1 c) und ist um zwei Arme in horizontaler 1-Richtung ergänzt. Aufgrund der Anordnung der Kerbe resultiert durch eine Zuglast in 2-Richtung eine Schubbeanspruchung. Lasten in horizontaler 1-Richtung führen zu einer Zug- beziehungsweise einer Druckbelastung. Somit kann der Z-Probekörper aufgrund seiner Geometrie mit verschiedenen biaxialen Zug-Scher- und Druck-Scher-Belastungen im Kerbbereich untersucht werden. Dieser Probekörper wurde bereits bei Brenner [12] weitreichend für verschiedene Zug-Scher-Kombinationen untersucht und deckte einen breiten Bereich moderater und positiver Spannungstriaxialitäten ab. Um den Bereich der negativen Spannungstriaxialitäten zu analysieren, werden im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Druck-Scher-Lastkombinationen untersucht. Der Z-Probekörper ist durch seine kleine Querschnittsfläche für die Untersuchung von druckdominanten Lastfällen geeignet [29, 30]. Außerdem ist er durch den einzelnen zentralen Kerbbereich gut durch das Kamerasystem der digitalen Bildkorrelation zu erfassen. Allerdings besitzt der Z-Probekörper auch Schwachstellen. Einerseits kann sich der Kerbbereich aufgrund der sehr kleinen Kerblänge deutlich stärker verdrehen als bei den anderen im Folgenden vorgestellten Probekörpern, was zu Änderungen im Spannungszustand führen kann. Andererseits besitzt ein biaxialer Probekörper mit nur einem zentralen Kerbbereich immer eine starke Kopplung zweier Kraftachsen. Dies führt dazu, dass eine gelenkig gelagerte Randbedingung notwendig ist, die ebenfalls eine Verdrehung des Probekörpers zulässt.

### 5.3.2 X0-Probekörper

Der X0-Probekörper ist der zweite Probekörper zur Untersuchung biaxialer Lastfälle und besitzt im Vergleich zum Z-Probekörper vier Kerbbereiche, wo lokales Versagen auftreten kann. Zunächst ist die Gesamtgeometrie in der Abbildung 5.5 in der Draufsicht dargestellt. Die Gesamtlänge und -breite von  $240\text{mm}$  sowie die Dicke von  $4\text{mm}$  werden weiterhin beibehalten. Die Kerben sind im  $45^\circ$  Winkel zu den Lastachsen angeordnet und resultieren durch beidseitige Bohrungen in der Ebene mit dem Radius von  $3\text{mm}$ . Durch die Bohrungen im Zentrum der Probe, siehe Abbildung 5.5 b), entsteht ein Loch, wodurch jeweils nur noch zwei Arme des Probekörpers durch einen kleinen doppelseitig gekerbten Bereich miteinander verbunden sind. Die Kerben in Dickenrichtung, wie sie in der Abbildung 5.5 aufgezeigt sind, haben den Radius  $2\text{mm}$  und reduzieren den zentra-

len Kerbbereich auf eine Dicke von  $2\text{mm}$ . Die Breite  $B_x$  der Probekörperarme hängt von der Kerblänge  $K_x$  ab. Für die Aluminiumlegierung wurde eine Kerblänge  $K_x = 6\text{mm}$  verwendet, was zu einer Breite  $B_x = 16,97\text{mm}$  führt. Für die Stahllegierung musste die Kerblänge auf  $K_x = 5\text{mm}$  reduziert werden, da in einer numerischen Vorstudie [61] festgestellt wurde, dass ansonsten die maximalen Kräfte der Maschine überschritten werden. Daraus folgt eine Breite der Arme von  $B_x = 15,56\text{mm}$  für die Stahllegierung. Die resultierenden Querschnittsflächen sind für die Aluminiumlegierung  $12\text{mm}^2$  und für die Stahllegierung  $10\text{mm}^2$ . Aufgrund der im  $45^\circ$  Winkel zur Lastrichtung angeordneten Kerben ist eine resultierende Belastung im Kerbbereich schwierig vorherzusagen. Aus ingenieurmäßigen Überlegungen folgt, dass eine Lastkombination mit gleichgroßen positiven Lastfaktoren in beiden Lastrichtungen zur zugdominantesten Belastung führen sollte. Gleichgroßen negativen Lastfaktoren entsprechen demnach der druckdominantesten Belastung im Kerbbereich. Alle anderen Lastkombinationen sollten zu einer ausgewogeneren Zug-Scher- beziehungsweise Druck-Scher-Belastung führen. Durch die Anordnung der vier Kerbbereiche kann eine starke Kopplung der



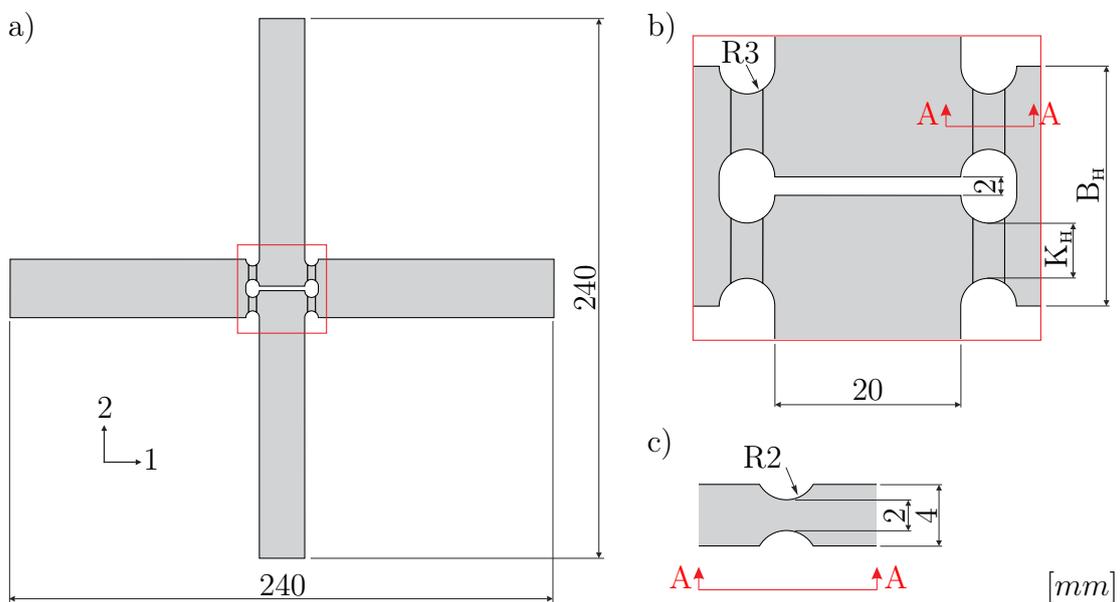
**Abb. 5.5:** X0-Probe: a) Draufsicht, b) zentraler Bereich, c) Schnitt A-A

Kraftachsen im Gegensatz zur Z-Probe verhindert werden. Bei Probekörpern mit vier Kerbbereichen sollte darauf geachtet werden, dass unter Belastung in allen

Kerben annähernd gleiche Deformationen auftreten. Dies ist vor allem bei lokal auftretenden Schädigungsprozessen schwieriger, da letztendlich immer nur zwei der vier Kerben im Experiment versagen. Diese Kerben haben demnach auch eine etwas größere Deformation als die der nicht versagten Kerben. Das annähernd gleichmäßige Verhalten der Kerbbereiche wurde experimentell für den X0-Probekörper und den im Kapitel 5.3.3 vorgestellten H-Probekörper nachgewiesen [50]. Außerdem ist es bei Proben mit vier Kerben deutlich schwieriger druckdominante Belastungen durchzuführen, da eine größere Fläche der Druckkraft gegenüber steht und es eher zum Beulen kommt.

### 5.3.3 H-Probekörper

Der H-Probekörper ist der dritte Probekörper, der unter biaxialen Lastfällen untersucht wurde. Die Geometrie des Probekörpers ist in der Abbildung 5.6 a) in der Draufsicht dargestellt und zeigt die maximalen Abmessungen von  $240\text{mm}$ . Außerdem besitzt dieser Probekörper vier Kerbbereiche, wie es auch schon bei der X0-Probe der Fall war. Die Anordnung der vier Kerben ist hierbei an der Vertikalen ausgerichtet und jeweils zwei Arme des Probekörpers sind durch einen Kerbbereich miteinander verbunden, wie die Abbildung 5.6 b) zeigt. Die vertikalen Schenkel haben eine Breite von  $20\text{mm}$ , wohingegen die Breite  $B_H$  der horizontalen Schenkel von der jeweiligen Kerblänge abhängt. Aus einer durchgeführten



**Abb. 5.6:** H-Probe: a) Draufsicht, b) zentraler Bereich, c) Schnitt A-A

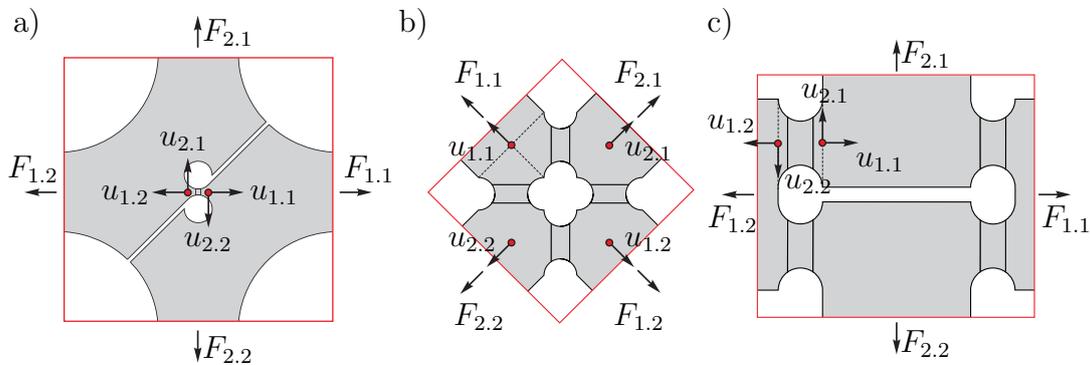
Geometriestudie des H-Probekörpers aus der Aluminiumlegierung [41], wobei die Kerblängen  $3\text{mm}$ ,  $6\text{mm}$ ,  $9\text{mm}$  und  $12\text{mm}$  untersucht wurden, folgte, dass mit zunehmender Kerblänge sich die Kerben weniger verdrehen und somit konstantere

Spannungszustände erreicht werden können. Um diesen Probekörper aber auch für die Untersuchung von Druck-Scher-Belastungen verwenden zu können, wobei eher kleinere Kerben vorteilhaft sind, wurde eine Kerblänge von  $K_H = 6\text{mm}$  für die Aluminiumlegierung festgelegt. Dadurch haben die Schenkel, unter Beibehaltung der Einkerbungen mit dem Radius  $3\text{mm}$  und dem vertikalen Abstand von  $2\text{mm}$  im Zentrum der Probe, eine Breite von  $B_H = 26\text{mm}$ . Für die Stahllegierung wurde die Kerblänge auf  $K_H = 5\text{mm}$  reduziert, wodurch die Breite der horizontalen Schenkel  $B_H = 24\text{mm}$  aufweist. Die Abbildung 5.6 c) zeigt den Schnitt A-A durch die Kerbe, wodurch die Eindringtiefe der Kerben in Dickenrichtung deutlich wird. Die Dicke der Metallbleche ist  $4\text{mm}$  und wird im Kerbbereich durch eine Kerbung in Dickenrichtung mit dem Radius  $2\text{mm}$  von beiden Seiten um jeweils  $1\text{mm}$  verringert. Somit sind alle vier Kerbbereiche doppelt gekerbt. Aufgrund der Kerblängen und Einkerbungen besitzt die Aluminiumlegierung in der Kerbe eine Querschnittsfläche von  $12\text{mm}^2$  und die Stahllegierung eine Querschnittsfläche von  $10\text{mm}^2$ . Aufgrund der parallelen und an der Vertikalen ausgerichteten Kerben ist die Belastung auf die Kerbbereiche, die aufgrund der äußeren Lastaufbringung resultiert, im Gegensatz zur X0-Probe gut zu deuten. Eine Zuglast in der vertikalen Achse führt demnach zu einer Scherbelastung im Kerbbereich. In der horizontalen Achse führt eine Zuglast zu einer Zugbeanspruchung und eine Drucklast zu einer Druckbeanspruchung. Somit sind durch verschiedene Lastkombinationen unterschiedliche Zug-Scher- und Druck-Scher-Belastungen im Kerbbereich möglich. Der Nachteil gegenüber des Z-Probekörpers liegt darin, dass aufgrund der vier Kerben dieser Probekörper weniger für druckdominante Lastfälle geeignet ist. Allerdings werden sich die Kerben aufgrund der größeren Kerblänge weniger verdrehen.

#### 5.3.4 Notation und Auswertungspunkte

Um die späteren Auswertungen von Kraft-Verschiebungs-Diagrammen in den unterschiedlichen Richtungen nachzuvollziehen, soll dieses Kapitel die verwendete Notation für Kräfte und Verschiebungen erläutern. Für eine anschauliche Darstellung der Notation sind in der Abbildung 5.7 die zentralen Bereiche der drei Biaxialprobekörper dargestellt. In diesen Abbildungen ist jede angegebene Kraft  $F$  und Verschiebung  $u$  mit zwei Indizes versehen. Dabei gibt der erste Index die Richtung der Achse und der zweite Index die positive beziehungsweise negative Richtung an. Dies bedeutet beispielsweise für die Kraft  $F_{1,2}$ , dass diese in der 1-Achse in die negative Richtung wirkt. Wäre der zweite Index eine 1, würde diese Kraft in positiver Richtung wirken. Diese Notation gilt in gleicher Weise für die Verschiebungen. Zusätzlich zu den Wirkungslinien der Kräfte und Verschiebungen müssen die Auswertungspunkte beachtet werden, deren Abstände als Referenzlänge für die Verschiebungen  $\Delta u_1$  und  $\Delta u_2$ , die aus den gegenseitigen Verschiebungen  $u_{1,1}$  und  $u_{1,2}$  sowie  $u_{2,1}$  und  $u_{2,2}$  bestimmt werden, gelten. Außerdem entsprechen die in der Abbildung 5.7 aufgezeigten Kräfte nur den Wirkungslinien

und nicht den Lastangriffspunkten. Die Verschiebungen hingegen werden an den in rot dargestellten Auswertepunkten ermittelt. In der Abbildung 5.7 a) sind die zwei Auswertungspunkte mit den entsprechenden Kräften und Verschiebungen des Z-Probekörpers dargestellt. Zunächst ist noch einmal zu entnehmen, dass die horizontale Achse der 1-Achse und die vertikale Achse der 2-Achse entsprechen. Für diese Probengeometrie werden zwei Auswertungspunkte verwendet, die sich sehr nah am doppeltgekerbten zentralen Bereich befinden und sowohl bei der experimentellen als auch bei der numerischen Auswertung verwendet werden. Die beiden Auswertungspunkte haben in 1-Richtung einen Abstand von  $6\text{mm}$  und in 2-Richtung einen Abstand von Null. Durch diese Nähe zum zu erwartenden Versagensbereich werden die gewonnenen Verschiebungswerte die Verformungen des Kerbbereichs sehr gut abbilden können. Im Gegensatz zur Z-Probe besitzt die X0-Probe, wie die Abbildung 5.7 b) zeigt, vier Kerbbereiche, die im  $45^\circ$  Winkel zu den Kraftachsen liegen. Damit die Kräfte und die Verschiebungen in einer Richtung erfasst werden können, werden vier Auswertungspunkte, jeweils einer pro Probenarm, verwendet. Hierbei werden die Auswertungspunkte auf der 1-Achse auch nur zur Bestimmung der Verschiebung in 1-Richtung verwendet und entsprechend dasselbe Vorgehen in der 2-Achse. Die Auswertungspunkte liegen an dem Punkt, wo sich die beiden gestrichelten Linien, wie beispielhaft im linken oberen Probenarm gezeigt, schneiden. Da im Rahmen dieser Arbeit die Kerblän-



**Abb. 5.7:** Notation der Kräfte und Verschiebungen: a) Z-Probe, b) X0-Probe, c) H-Probe

ge für die Aluminium- und für die Stahllegierung unterschiedlich ist, haben auch die Auswertungspunkte eine unterschiedliche Referenzlänge. Für die Aluminiumlegierung besitzt die X0-Probe eine Kerblänge von  $6\text{mm}$ , wodurch die Referenzlänge der auf einer Achse liegenden Auswertungspunkte etwa  $25,5\text{mm}$  beträgt. Aufgrund der Reduzierung der Kerblänge auf  $5\text{mm}$  für die X0-Proben aus der Stahllegierung resultiert in diesem Fall eine Referenzlänge von etwa  $24\text{mm}$ . Durch die Position der Auswertungspunkte sind die Werte der Verschiebungen deutlich globaler zu bewerten als beispielsweise bei der Z-Probe. Außerdem berücksichti-

gen die Verschiebungswerte  $\Delta u_1$  und  $\Delta u_2$  die Verformungen aller vier Kerben, wodurch lokal unterschiedliche Verformungen der Kerbbereiche gemittelt werden. Bei der H-Probe werden dagegen zwei Auswertungspunkte, wie in der Abbildung 5.7 c) dargestellt verwendet. Wie bei der Z-Probe beträgt die Referenzlänge zwischen den beiden Auswertungspunkten  $6mm$  in der 1-Richtung. Der Abstand in 2-Richtung liegt wieder bei etwa Null. Hierbei ist festzuhalten, dass bei unterschiedlichen Lastfällen nicht immer der gleiche Kerbbereich versagt, weshalb die Auswertungspunkte je nachdem, wo die Kerben versagen, platziert werden. Obwohl bei der H-Probe ebenfalls unterschiedliche Kerblängen für die beiden Legierungen verwendet werden, ändert sich dadurch die Referenzlänge zwischen den Auswertungspunkten nicht. Zusammenfassend sind die Auswertungspunkte bei der Z-Probe und der H-Probe an den versagenden Kerbbereichen orientiert. Bei der X0-Probe werden dagegen die Verformungen von versagten und nicht versagten Kerbbereichen berücksichtigt.

### 5.3.5 Experimentelle Belastungsprozedur

Um die Probekörper biaxialen Lastfällen auszusetzen, wird eine Kombination aus weg- und kraftgesteuerter Belastung verwendet. Trotz der unterschiedlichen Randbedingungen durch die Bolzenhalterung und der Einspannung ist die Belastungsaufbringung die gleiche. Im Folgenden werden zur Unterscheidung von den in den Auswertungspunkten ermittelten Verschiebungen die Auflagerverschiebungen mit  $u^A$  dargestellt. Mit dem Ziel, dass die biaxialen Lastfälle einem proportionalen Kraftverhältnis entsprechen sollen, wird zunächst eine inkrementelle Verschiebung  $u_{2,1}^A$  aufgebracht. Die daraus resultierende Kraft  $F_{2,1}$  wird auf die Kraft  $F_{2,2}$  übertragen und führt gleichzeitig durch Multiplikation mit einem Lastfaktor, im Folgenden mit LF abgekürzt, zur Kraft  $F_{1,1}$ . Nach dem Aufbringen dieser beiden ermittelten Kräfte wird die Verschiebung  $u_{1,1}^A$  ausgelesen und als Verschiebung  $u_{1,2}^A$  aufgebracht. Die eben beschriebene Prozedur erfolgt zwar nacheinander, kann aber aufgrund der kleinen Schrittweiten und der hohen Frequenz der einzelnen Schritte als annähernd simultan betrachtet werden. Durch diese Belastungssteuerung kann gewährleistet werden, dass in den jeweiligen Achsen annähernd die gleichen Verschiebungen und Kräfte wirken sowie zeitgleich ein konstantes Kraftverhältnis zwischen den Achsen vorliegt.

## 6 Experimente und numerische Simulationen biaxialer Probekörper

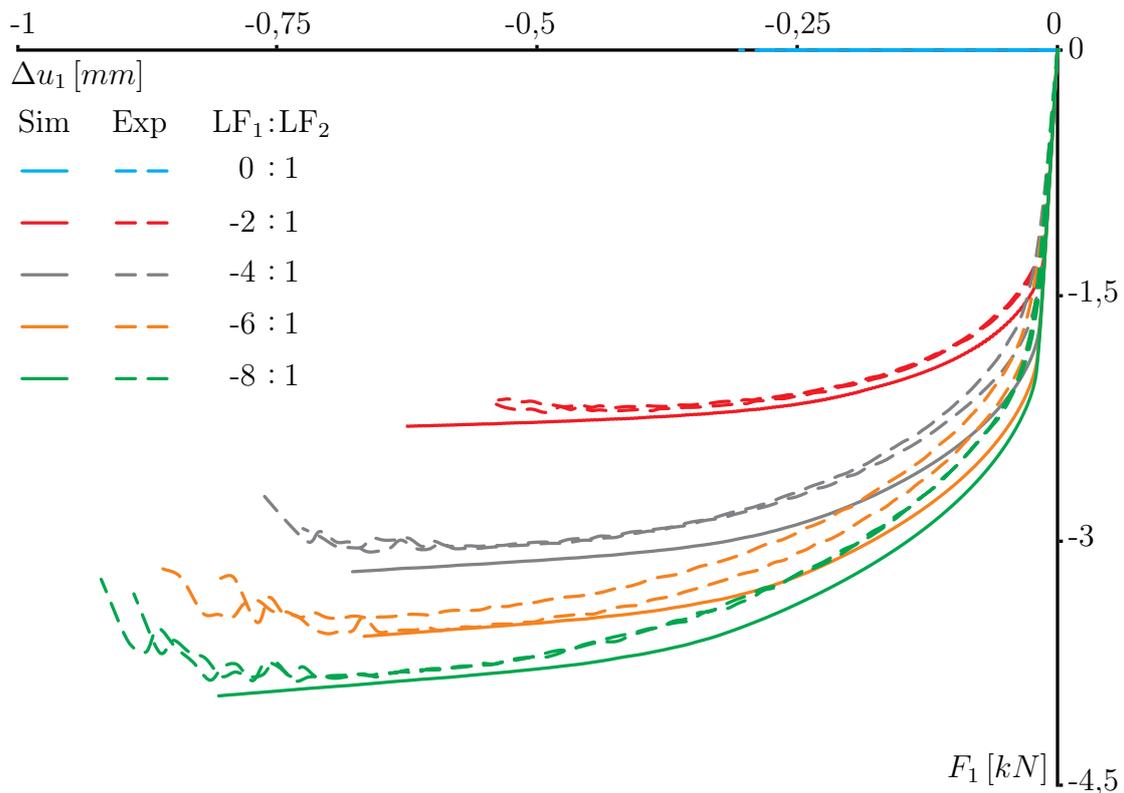
In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Versuche mit den im Kapitel 5.3 vorgestellten biaxialen Probekörpern aus zwei unterschiedlichen Metalllegierungen vorgestellt. Die Probekörper wurden unter verschiedenen einaxialen und biaxialen Lastfällen experimentell sowie mit korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen untersucht, um zunächst eine große Bandbreite an auftretenden Spannungstriaxialitäten  $\eta$  abzudecken. Um eine globale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den Simulationen feststellen zu können, werden die jeweiligen Kraft-Verschiebungs-Kurven in den beiden Belastungsrichtungen miteinander verglichen. Da das Auftreten von Schädigungsmechanismen ein lokales Phänomen ist, wird ebenfalls eine lokale Übereinstimmung zwischen Experiment und korrespondierender Berechnung hinsichtlich verschiedener Daten überprüft. Mit dem Feststellen der globalen und lokalen Übereinstimmungen kann gewährleistet werden, dass sowohl aus dem Experiment als auch aus der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung aussagekräftige Ergebnisse über das Schädigungs- und Versagensverhalten erzielt werden.

### 6.1 Z-Probekörper aus einer Aluminiumlegierung

Dieses Kapitel beinhaltet die Auswertung verschiedener biaxialer und einer einaxialen Belastung des Z-Probekörpers (Abbildung 5.4) aus der Aluminiumlegierung AlCuMg1 (Tabelle 5.1). Wie bereits erwähnt, ergänzt diese Versuchsreihe die Untersuchungen von Brenner [12] um die druckdominanten Lastkombinationen. Daher wurde der Z-Probekörper unter neun verschiedenen Lastkombinationen untersucht. Dazu gehört die einaxiale Belastung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  und acht biaxiale Lastkombinationen, bei denen der Lastfaktor  $LF_2 = 1$  bleibt und der Lastfaktor  $LF_1$  von -1 bis -8 in 1er-Schritten vorgegeben wird. Aufgrund der Probengeometrie entspricht die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  einer scherdominanten Belastung im Kerbbereich. Dadurch dass der Lastfaktor  $LF_1$  in den weiteren Experimenten negativer wird, treten Druck-Scher-Belastungen auf, wobei die überlagerte Druckbelastung immer dominanter wird. Mit diesen starken Drucküberlagerung kann ein Bereich negativer Spannungstriaxialitäten untersucht werden, der bisher experimentell für Proben aus dünnen Blechen noch nicht erreicht wurde. In diesem Zusammenhang kann der Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität analysiert werden, weshalb darauf in diesem Kapitel gesondert eingegangen wird.

### 6.1.1 Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven

Die neun verschiedenen Lastkombinationen wurden sowohl experimentell als auch numerisch untersucht. Um zunächst die globale Übereinstimmung zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender Berechnung aufzuzeigen, ist in der Abbildung 6.1 das Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung ausgewählter Lastkombinationen dargestellt. Zunächst einmal ist sehr gut zu erkennen, dass



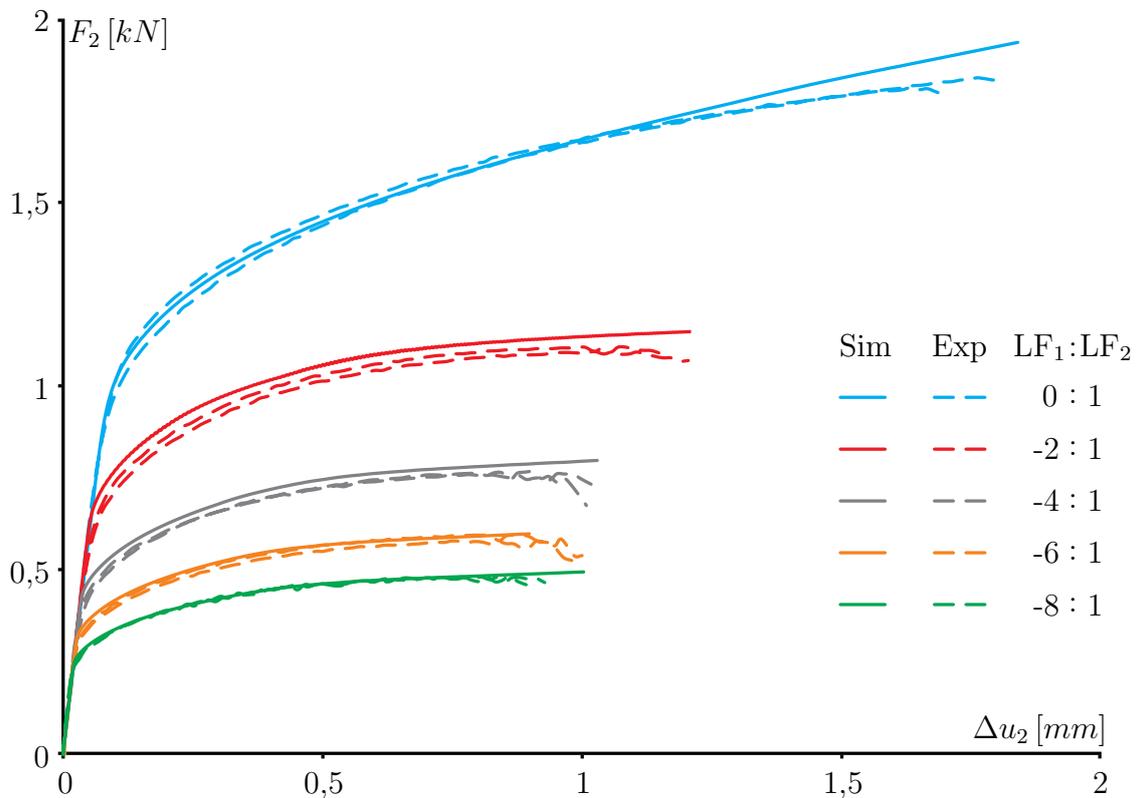
**Abb. 6.1:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung der Z-Probe aus AlCuMg1

jeweils die beiden experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven (gestrichelte Linien) der jeweiligen Lastkombination wenig voneinander abweichen. Des Weiteren zeigen die Kraft-Verschiebungs-Kurven der elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen (durchgezogene Linien) eine gute Übereinstimmung zu den experimentellen Kurven. Die Kraft-Verschiebungs-Kurve der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  zeigt aufgrund des Lastfaktors  $LF_1 = 0$  keine Veränderung der Kraft  $F_1$ . Aufgrund der aufgebrachtten Last in 2-Richtung folgt allerdings eine negative Verschiebung in 1-Richtung. Dabei werden sowohl in den Experimenten als auch in der numerischen Simulation eine Verschiebung von  $\Delta u_1 \cong -0,28mm$  erreicht. Die Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -2 : 1$  weisen eine Maximalkraft  $F_1 \cong 2,2kN$  auf, wobei die Verschiebung mit  $\Delta u_1 \cong -0,6mm$

bei der numerischen Simulation etwas größer ist. Mit zunehmendem Druck zeigen die Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$ ,  $LF_1 : LF_2 = -6 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  eine etwas deutlichere Abweichung im Verfestigungsbereich als die anderen Lastkombinationen. Dennoch verringern sich diese Abweichungen im weiteren Verlauf der jeweiligen Kraft-Verschiebungs-Kurven. Bei diesen drei Lastkombinationen ist vor allem der Entfestigungsbereich auffällig, da dieser schlängelförmig verläuft und auf ein Wechselspiel zwischen teilweisem Entfestigen und kurzer Stabilisierung hindeutet. Es zeigt sich außerdem, dass mit zunehmender Drucklast die Verschiebung in negativer 1-Richtung zunimmt. Demnach erreichen die Versuche der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  eine Kraft  $F_1 \cong -3kN$  und eine Verschiebung  $\Delta u_1 \cong -0,75mm$ . Durch die Steigerung des Drucklastfaktors werden bei den Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -6 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  die Kräfte  $F_1 \cong -3,5kN$  und  $F_1 \cong -4kN$  erreicht und es resultieren Verschiebungen von  $\Delta u_1 \cong -0,85mm$  und  $\Delta u_1 \cong -0,9mm$  für die jeweilige Lastkombination. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  ist die druckdominanteste Belastung, bei der der Z-Probekörper versagte ohne zu beulen. Dabei ist festzuhalten, dass bei dieser Lastkombination die Bruchflächen nach dem Materialversagen ineinander verkeilt waren, was darauf hindeutet, dass der Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität bald erreicht ist. Für die drei stark druckdominanten Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$ ,  $LF_1 : LF_2 = -6 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  deuten die Kraft-Verschiebungs-Kurven in 1-Richtung eine Entfestigung des Materials an, was durch den betragsmäßigen Kraftabfall am Ende der Kurven sichtbar wird. Diese Entfestigung konnte mit den verwendeten elastischen Schädigungsmodulen  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  nicht abgebildet werden.

Um die Kraft-Verschiebungs-Kurven ebenfalls in 2-Richtung auszuwerten, sind die entsprechend Kurven in der Abbildung 6.2 dargestellt. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Kraft-Verschiebungs-Kurven für alle Lastkombinationen zwischen den Experimenten und den korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  erreicht in der betrachteten 2-Richtung eine maximale Kraft  $F_{2,max} \cong 2kN$  und eine maximale Verschiebung von  $\Delta u_{2,max} \cong 1,8mm$ . Die Kraft-Verschiebungs-Kurve der numerischen Simulation weicht im letzten Drittel der Kurve etwas von den experimentellen Ergebnissen ab, was oftmals bei scherdominanten Lastfällen auftritt. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -2 : 1$  werden im Vergleich zur Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  aufgrund der Druckkraft in 1-Richtung eine kleinere Maximalkraft von  $F_{2,max} \cong 1kN$  und eine kleinere Verschiebung  $\Delta u_{2,max} \cong 1,2mm$  erreicht. Dieser Trend setzt sich für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  fort, wo die maximale Kraft bei etwa  $F_{2,max} \cong 0,75kN$  und die maximale Verschiebung bei  $\Delta u_{2,max} \cong 1mm$  liegen. Für die letzten beiden Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -6 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  ist interessanter Weise gegenüber der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  nur ein Unterschied im auftretenden Kraftniveau zu erkennen. Die erreichten Verschiebungen liegen alle annähernd im gleichen Bereich. Die ermittelten Maximalkräfte liegen bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -6 : 1$  bei  $F_{2,max} \cong 0,5kN$  und bei der Lastkombination

$LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  bei etwa  $F_{2,max} \cong 0,4kN$ . Bei allen experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven in 2-Richtung der vier Druck-Scher-Lastkombinationen ist ebenfalls am Ende des Versuchs ein kleiner Entfestigungsbereich zu erkennen, der allerdings nicht so ausgeprägt wie in der 1-Richtung ist. Trotz dieser Entfestigung kommt es in 2-Richtung nur zu einem minimalen Kraftabfall kurz vorm Versagen. Auffallend ist außerdem, dass die Verschiebungen in den elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen in 2-Richtung gut zum Experiment passen und in 1-Richtung bei den meisten Lastkombination zu klein oder zu groß sind. Dies



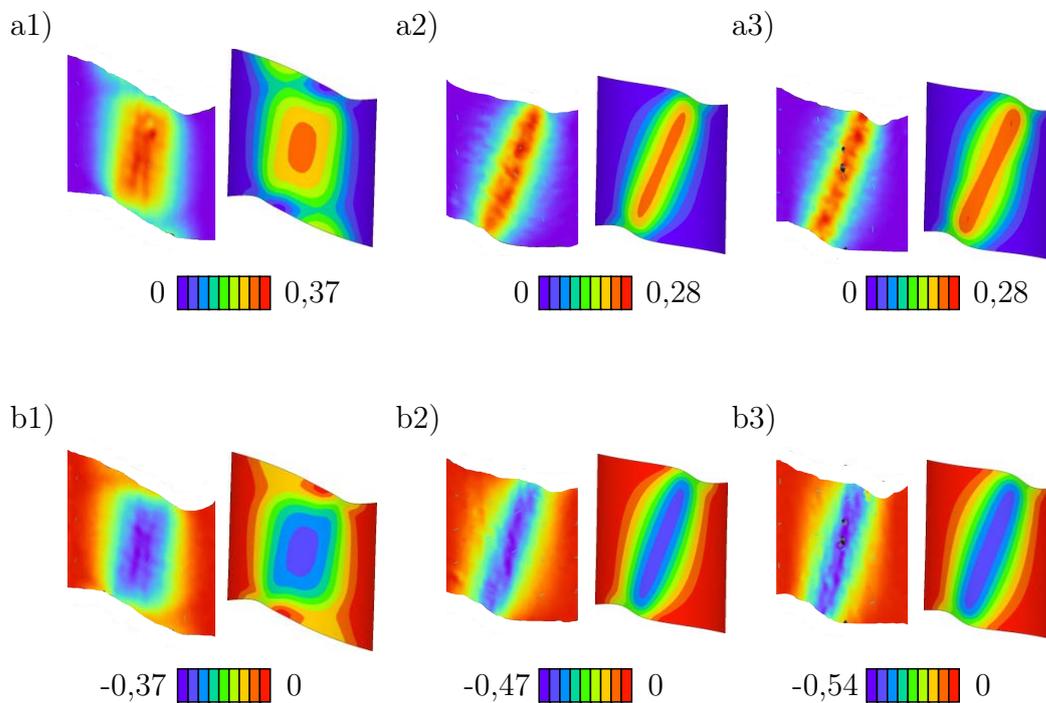
**Abb. 6.2:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 2-Richtung der Z-Probe aus AlCuMg1

könnte darin begründet liegen, dass die gelenkig gelagerte Randbedingung durch die Bolzen im Experiment nur annähernd durch die Randbedingung im Modell abgebildet wird. Aufgrund der gezeigten Kraft-Verschiebungs-Diagramme in 1- und 2-Richtung ist eine gute globale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und deren korrespondierender numerischer Berechnungen gegeben.

### 6.1.2 Lokale Auswertung ausgewählter Lastkombinationen

Bei der lokalen Analyse werden zunächst die Hauptverzerrungen in der Abbildung 6.3 zwischen ausgewählten Experimenten und korrespondierenden elastisch-

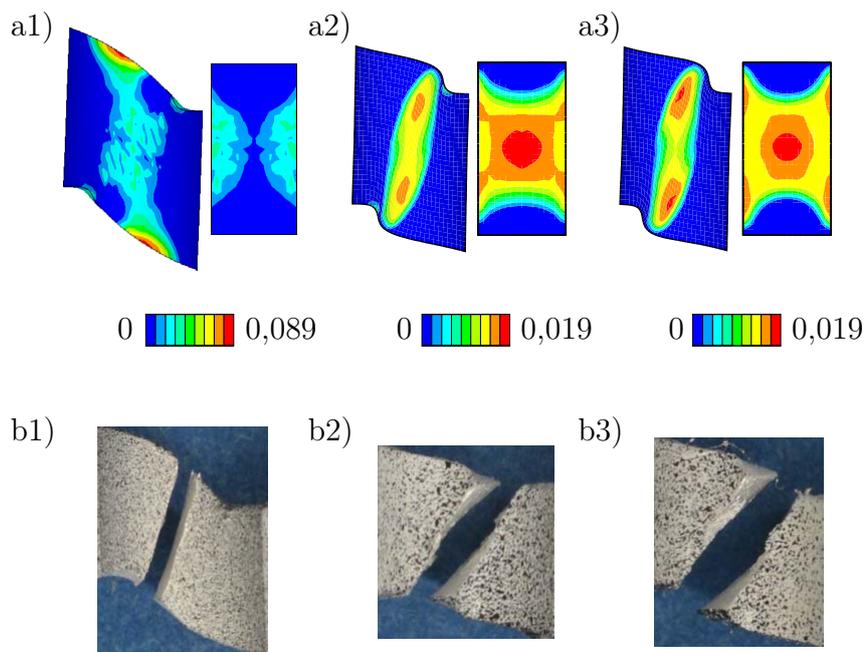
plastisch-schädigenden Berechnung bei einer Verschiebung  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$  miteinander verglichen. Die Lastkombinationen wurden hinsichtlich ihrer auftretenden Spannungstriaxialität  $\eta$  ausgewählt, sodass die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ , die den größten Wert der Spannungstriaxialität erreicht und die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$ , die den negativsten Wert der Spannungstriaxialität erreicht, untersucht werden. Hinzu kommt die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$ , die Werte zwischen den Extremwerten erreicht. Die Abbildung 6.3 a1) zeigt den Vergleich der Hauptverzerrung  $A_{max}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ . Es zeigt sich sowohl im Experiment als auch in der numerischen Berechnung, dass zentral auf der Kerbenoberfläche eine markante Lokalisierung stattfindet. Diese



**Abb. 6.3:** Vergleich der Hauptverzerrungen auf der Kerbenoberfläche bei  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$ : a) Hauptverzerrung  $A_{max}$  (v.l. Exp + Sim); b) Hauptverzerrung  $A_{min}$  (v.l. Exp + Sim); 1)  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$

ist im Experiment etwas ausgeprägter. Dennoch erreichen beide in etwa eine Verzerrung von  $A_{max} \cong 0,37$ . Im Gegensatz zur Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  ist bei den Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  in den Abbildungen 6.3 a2) und a3) ein schmales Verzerrungsband zu erkennen, welches von der Vertikalen aus betrachtet etwa  $20^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht ist. Auch hierbei stimmen die Maximalwerte zwischen den Experimenten und begleitenden numerischen Simulationen gut überein. Auffällig ist dabei, dass sowohl bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  als auch bei  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  der gleiche

Maximalwert von  $A_{max} \cong 0,28$  auftritt und trotz der größeren Drucküberlagerung bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  keine weitere Rotation des Verzerrungsbands sichtbar ist. Die Hauptverzerrung  $A_{min}$  ist in den Abbildungen 6.3 b1) bis b3) dargestellt und zeigt zunächst eine sehr ähnliche Verteilung wie die Hauptverzerrung  $A_{max}$ . Für alle drei Lastkombinationen gilt, dass die Hauptverzerrung  $A_{min}$  im Experiment etwas ausgeprägter ist. Die Extremwerte stimmen ebenfalls zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender Berechnung überein, wobei diesmal die betragsmäßig kleinsten Verzerrungswerte mit  $A_{min} \cong -0,37$  bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  auftreten. Dieser Wert wird mit zunehmendem Druck extremer und erreicht bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  etwa  $A_{min} \cong -0,54$ . Des Weiteren ist der Abbildung 6.3 die Verformung der Kerbenoberfläche zu entnehmen. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  die größten Verschiebungen vertikal, also in 2-Richtung auftritt. Durch den zunehmenden Druck zeigt sich



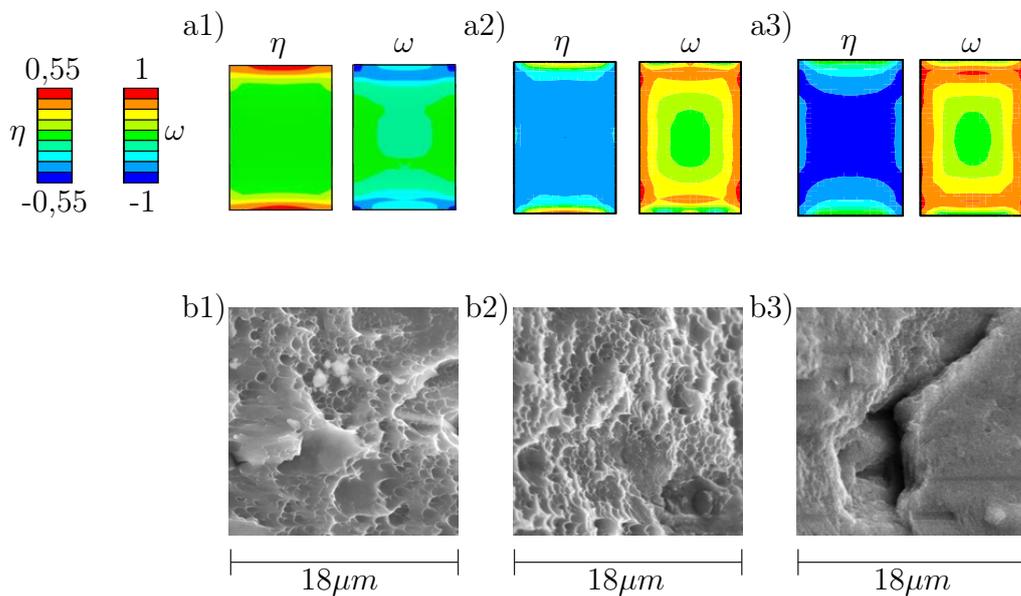
**Abb. 6.4:** Vergleich des Schädigungsverhaltens: a) Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$ : links Kerbenoberfläche und rechts Querschnittsfläche (Sim); b) Rissbild (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$

außerdem, dass die Kerbenoberfläche immer mehr zusammengedrückt wird in der horizontalen 1-Richtung. Insgesamt zeigen diese Verzerrungsbilder eine sehr gute lokale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und der numerischen Simulation, sowohl was die Verteilung als auch die Maximalwerte angeht.

Für eine lokale Betrachtung des Schädigungs- und Versagensverhaltens werden die

numerisch ermittelten Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\mu$  den experimentellen Rissbildern in der Abbildung 6.4 gegenübergestellt. Beginnend mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  zeigt die Abbildung 6.4 a1) die Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  auf der Kerbenoberfläche und Kerbenquerschnittsfläche. Dabei ist auf der Kerbenoberfläche die Ausbildung eines Schädigungsverzerrungsbands zu erkennen, das von der Vertikalen aus leicht gegen den Uhrzeigersinn geneigt ist. Hierbei treten die maximalen Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\mu_{max} \cong 0,089$  sehr lokal am oberen und unteren Rand des Schädigungsverzerrungsbands auf. In der Mitte der Kerbenoberfläche treten deutlich kleinere Schädigungsvergleichsverzerrungen auf, die sich allerdings flächenmäßig etwas breiter ausbilden. Außerdem werden lokal an den Einbuchtungen am oberen und unteren Rand der Kerbenoberfläche ebenfalls mittlere Werte erreicht. Mit Blick auf die Querschnittsfläche ist zu erkennen, dass vorrangig am rechten und linken Rand der Fläche Schädigungen auftreten, die allerdings nur einer kleinen Schädigungsvergleichsverzerrung entsprechen. Das korrespondierende experimentell ermittelte Rissbild, das in der Abbildung 6.4 b1) dargestellt ist, zeigt einen von der Vertikalen aus leicht im Uhrzeigersinn geneigten Riss im Kerbbereich. Bei der Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  in der Abbildung 6.4 a2) ist ebenfalls ein Schädigungsverzerrungsband zu erkennen, das diesmal leicht im Uhrzeigersinn geneigt ist und am oberen sowie unteren Rand neben den markanten Einbuchtungen verläuft. Das Schädigungsverzerrungsband besitzt in der oberen und unteren Hälfte jeweils einen kleinen Bereich maximaler Schädigungsvergleichsverzerrungen. Markanter ist die Schädigungsvergleichsverzerrung in der Kerbenquerschnittsfläche ausgeprägt, wo im Zentrum der Fläche ein größerer kreisrunder Bereich mit dem Maximum  $\mu_{max} \cong 0,019$  auftritt. Diese Werte nehmen zum rechten und linken Rand der Fläche etwas und zum oberen und unteren Rand hin deutlicher ab. Das Rissbild dieser Lastkombination, siehe Abbildung 6.4 b2), zeigt einen Riss, der etwas mehr als das Schädigungsverzerrungsband geneigt ist. Außerdem ist im Rissbild eine leichte gegenseitige Verdrehung der Bruchflächen zu einander festzustellen, was möglicherweise auf die Lastkombination des hohen Drucks in 1-Richtung und der Scherbeanspruchung in 2-Richtung zurückzuführen ist. Die Schädigungsvergleichsverzerrung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$ , die in der Abbildung 6.4 a3) dargestellt ist, weist eine ähnliche Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrungen wie bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  auf. Die Kerbenoberfläche zeigt ein leicht im Uhrzeigersinn geneigtes Schädigungsverzerrungsband mit zwei lokalen Bereichen höherer Schädigungsvergleichsverzerrung. Hierbei treten die Maxima von  $\mu_{max} \cong 0,019$  sowohl in der Kerbenoberfläche als auch in der Kerbenquerschnittsfläche auf. In der Querschnittsfläche liegt das Maximum der Schädigungsvergleichsverzerrungen im Zentrum der Fläche und nimmt zum Rand hin meist ab. Aufgrund der Ähnlichkeit zur Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  zeigt auch das Rissbild einen nahezu gleichen Rissverlauf. Außerdem ist ebenfalls eine leichte gegenseitige Verdrehung der Bruchflächen zueinander festzustellen. Insgesamt zeigt die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung der drei Lastkombina-

tionen, dass bei der schubdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  die Maxima am oberen beziehungsweise am unteren Rand der Kerbenoberfläche auftreten, wohingegen die druckdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  die größten Lokalisierungen im Zentrum der Querschnittsfläche aufweisen. Es werden bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  die größten Schädigungsvergleichsverzerrungen aller drei Lastkombinationen erreicht, die in etwa dem vierfachen der anderen beiden Lastkombinationen entspricht. Die Auswertung der korrespondierenden Rissbilder zeigt, dass die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung durchaus zum Vorhersagen des Rissverlaufs verwendet werden könnte. Auffällig ist außerdem, dass bei allen drei Lastkombinationen die



**Abb. 6.5:** a) Numerisch ermittelte Spannungstriaxialität  $\eta$  und Lodeparameter  $\omega$  in der Kerbenquerschnittsfläche bei  $\frac{2}{3}\Delta u_2$ , b) Ausschnitt des zentralen Bereichs der Bruchfläche mittels Rasterelektronenmikroskop, 1)  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ , 2)  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$ , 3)  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$

Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung in der Querschnittsfläche sowohl ausgehend von der horizontalen als auch von der vertikalen Achse symmetrisch ist. Zudem unterscheiden sich die Schädigungsvergleichsverzerrungen und das Rissverhalten der Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  nur punktuell, das aufgrund des deutlich unterschiedlichen Lastfaktors  $LF_1$  so nicht zu erwarten war. Außerdem tritt bei diesen Lastkombination aufgrund des großen Drucks Gleiten auf, dessen Einfluss auf die endgültige Geometrie nicht auszuschließen ist. Insgesamt kann aufgrund der Auswertung in der Abbildung 6.4 eine recht gute lokale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den korrespondierenden Simulationen festgestellt werden.

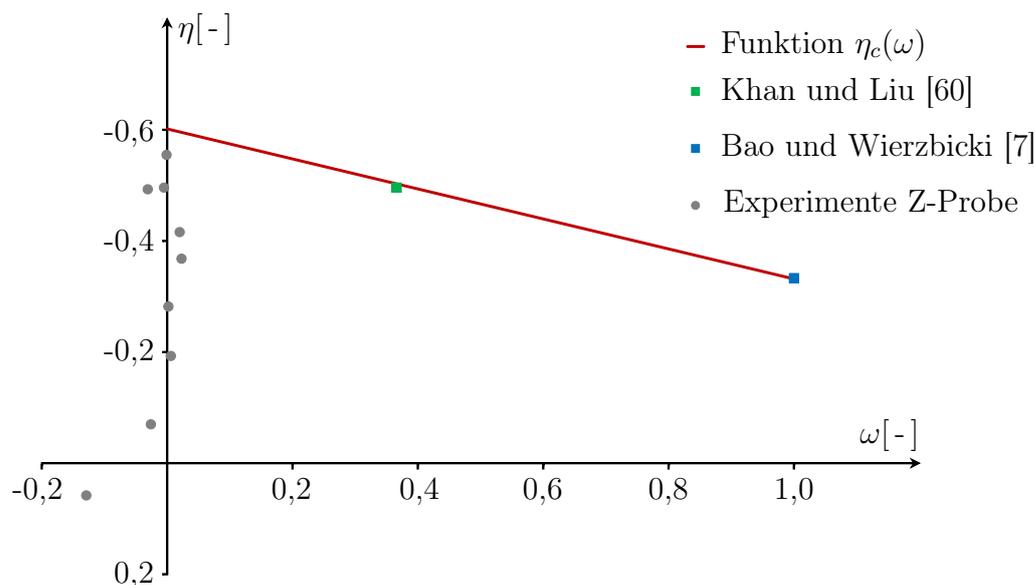
Eine weitere Möglichkeit das Schädigungsverhalten zu analysieren ist, den Spannungszustand der numerischen Simulation mit den Aufnahmen des Rasterelek-

tronenmikroskops der Bruchflächen zu verbinden. Die Abbildung 6.5 zeigt in Reihe a) die Spannungstriaxialität  $\eta$  und den Lodeparameter  $\omega$  aus der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung, die korrespondierend bei  $2/3$  der maximalen Verschiebung  $\Delta u_2$  im Experiment ausgewertet sind, und in Reihe b) die Bruchfläche der jeweiligen Lastkombination. Die gezeigten Ausschnitte des Probekörpers bei der Auswertung der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters zeigen die Querschnittsfläche der Kerbe. Diese Fläche wurde als Näherung zur Bruchfläche gewählt, da sonst die Schnittflächen in unterschiedlichen Winkeln, wie die Risse im realen Experiment, hätten betrachtet werden müssen. Die Spannungstriaxialität der drei dargestellten Lastfälle zeigt zunächst einmal die Bandbreite der erreichten Werte. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  in Abbildung 6.5 a1) treten moderate positive Spannungstriaxialitäten auf, welche sehr homogen verteilt sind. Mit zunehmendem Druck nimmt die Spannungstriaxialität deutlich ab und erreicht bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  einen Wert von  $\eta = -0,37$ . Beim Lastfaktor  $LF_1 = -8$  erreicht die Spannungstriaxialität sogar einen Wert von  $\eta = -0,56$  im Zentrum der Querschnittsfläche. Die homogene Verteilung der Spannungstriaxialität nimmt mit zunehmendem Druck etwas ab. Die Verteilung des Lodeparameters bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  ist wiederum recht homogen mit moderaten Werten. Auch hier zeigt sich, dass mit zunehmendem Druck die Verteilung des Lodeparameters inhomogener wird. Der Lodeparameter erreicht bei allen drei Lastfällen im Zentrum einen Wert von  $\omega \cong 0$ . Mit zunehmendem Druck nimmt der Lodeparameter deutlich größere positive Werte im Randbereich der Querschnittsfläche an. Um die numerisch gewonnenen Spannungszustände mit dem realen Versuch zu vergleichen, wurden Aufnahmen der Bruchflächen mit dem Rasterelektronenmikroskop im Anschluss an die Experimente durchgeführt. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  sind in der Abbildung 6.5 b1) sowohl Poren als auch Schermechanismen zu erkennen. Mit zunehmendem Druck werden die Poren komprimiert, wie bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -4 : 1$  zu erkennen ist. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -8 : 1$  hingegen sind so gut wie keine Poren mehr zu erkennen, da diese zusammengepresst wurden. Die aufgetretenen Schädigungsmechanismen entsprechen in allen drei Lastkombinationen der in dieser Arbeit verwendeten Theorie, die für moderate Spannungstriaxialitäten eine gemischte Schädigungsform aus Poren und Mikroscherrissen und für stark negative Spannungstriaxialitäten eine Entwicklung von Mikroscherrissen vorhersagt.

### 6.1.3 Grenzwert der Spannungstriaxialität

In den hier untersuchten biaxialen Lastkombinationen anhand des Z-Probekörpers trat Versagen auch bei negativen Spannungstriaxialitäten auf, die unterhalb der bereits vorgeschlagenen Grenzwerte der Spannungstriaxialität von Bao und Wierzbicki [7] sowie Khan und Liu [60] liegen. Um diesen Sachverhalt genauer zu untersuchen, ist in der Abbildung 6.6 ein Spannungstriaxialität-Lodeparameter-

Diagramm dargestellt. In diesem werden zunächst die in der Literatur vorgeschlagenen Grenzwerte in Abhängigkeit des Lodeparameters in grün und blau abgebildet. Hinzu kommen alle neun untersuchten Lastkombinationen des Z-Probekörpers, deren Spannungstriaxialität ebenfalls in Abhängigkeit des Lodeparameters in grau dargestellt sind. Zunächst einmal wird deutlich, dass die vorgeschlagenen Grenzwerte für die Spannungstriaxialität bei verschiedenen Lodeparametern,  $\omega \cong 0,4$  und  $\omega \cong 1$ , festgestellt wurden. Auch der in dieser Arbeit



**Abb. 6.6:** Spannungstriaxialität-Lodeparameter-Diagramm

ermittelte Grenzwert der Spannungstriaxialität von etwa  $\eta_c \cong -0,6$  tritt nur bei einem Lodeparameter  $\omega \cong 0$  auf. Bei dieser Betrachtung ist zu erkennen, dass sich die bereits vorgeschlagenen und der in dieser Arbeit ermittelte Grenzwert der Spannungstriaxialität in ihrem zugehörigen Lodeparameter unterscheiden. Daraus resultiert, dass der Grenzwert der Spannungstriaxialität in Abhängigkeit vom Lodeparameter definiert werden sollte. Auf Basis der drei verschiedenen Grenzwerte kann eine Funktion für den Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität

$$\eta_c(\omega) = -0,6 + 0,267\omega \quad (6.1)$$

in Abhängigkeit des Lodeparameters aufgestellt werden. Durch diese Funktion kann mittels der Kombination aus Spannungstriaxialität und Lodeparameter abgeschätzt werden, ob der Versuch experimentell zum Versagen des Materials führt, da man somit im Diagramm 6.6 unter der roten Funktion liegen müsste. Aufgrund dieses Ergebnisses sollte die Abhängigkeit des Lodeparameters für hier nicht erreichte Werte untersucht werden.

### 6.1.4 Bewertung der Z-Probengeometrie für AlCuMg1

Der Z-Probekörper aus der Aluminiumlegierung wurde im Rahmen dieser Arbeit unter neun verschiedenen Lastkombinationen untersucht, die im Schädigungs- und Versagensbereich zu moderaten bis stark negativen Spannungstriaxialitäten führten. Bei allen Experimenten trat aufgrund der Belastung Versagen ein, ohne dass es zum Beulen kam. Die korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen zeigen eine gute globale und lokale Übereinstimmung mit den Experimenten. Die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  zeigte, dass diese mit zunehmender Druckbelastung geringere Maximalwerte erreicht. Des Weiteren korrespondieren die Schädigungsmechanismen, die durch die Betrachtung unter dem Rasterelektronenmikroskop identifiziert wurden, zu den aufgetretenen Spannungszuständen. Der Lastfaktor  $LF_1$ , der die Druckbelastung steuert, konnte sehr weit gesteigert werden, sodass Spannungstriaxialitäten von  $\eta = -0,55$  erreicht wurden. Somit wurde mit diesem Probekörper eine Spannungstriaxialität erreicht, die unter den bisher veröffentlichten Grenzwerten der negativen Spannungstriaxialität liegt. Somit ist der Z-Probekörper, der bei Brenner [12] eine Eignung für zug- und scherdominante Lastfälle aufwies, ebenfalls für druckdominante Lastfälle geeignet. Im Vergleich zu den weiteren biaxialen Probekörpern, die in dieser Arbeit untersucht wurden, weist der Z-Probekörper nur einen Kerbbereich auf, in dem die Probe versagen kann. Dies stellt in Bezug auf die druckdominanten Lastfälle einen Vorteil dar, da dadurch die Querschnittsfläche kleiner ist als die Querschnittsflächen mehrerer Kerben zusammen. Dennoch weist der Z-Probekörper Schwächen auf. Zum einen führt die Geometrie des Z-Probekörpers zu einer starken Kopplung zweier senkrecht zueinander stehender Achsen. Dies kann dazu führen, dass der Kraftabfall beim Versagen der Probe nicht von der Prüfmaschine erkannt wird, da die Kraft durch die eben erwähnte Kopplung nahezu aufrecht gehalten wird. Somit wäre es im Sinne der experimentellen Durchführbarkeit besser, den Probekörper im Verbindungsbereich der beiden Achsen deutlich abzuschwächen. Ein weiterer Punkt ist die gelenkige Randbedingung, die einerseits deutlich schwieriger numerisch nachzubilden ist als eine Einspannung und andererseits zu einer leichten Verdrehung der starr gekoppelten Probekörperhälften führt, wodurch sich die Lastrichtung ändert. Aus Sicht der Bestimmung von Materialparametern ist es mit diesem Probekörper aus der Aluminiumlegierung schwierig die Schädigungsmaterialparameter zu bestimmen, da nur eine minimale Entfestigung stattfindet. Somit müssen beispielsweise die Schädigungsmodule  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  nur so gewählt werden, dass deren Einfluss nicht zu groß ist, um eine Übereinstimmung in den Kraft-Verschiebungs-Kurven zu erzielen.

## 6.2 X0-Probekörper aus einer Aluminiumlegierung

Die Versuchsreihe mit dem X0-Probekörper (Abbildung 5.5) aus der Aluminiumlegierung AlCuMg1 mit den Materialparametern (Tabelle 5.1) umfasst fünf

verschiedene Lastkombinationen, die sowohl experimentell als auch numerisch durchgeführt wurden. Die erste untersuchte Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  führt aufgrund der Probengeometrie zu einer annähernd reinen Zugbelastung im Kerbbereich. Die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  entsprechen leicht unterschiedlichen Zug-Scher-Belastungen, wohingegen die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  zu einer annähernd reinen Scherbeanspruchung im Kerbbereich führt. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -2 : 1$  wurde ebenfalls experimentell untersucht, wurde allerdings aufgrund von Beulen nicht weiter berücksichtigt.

### 6.2.1 Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven

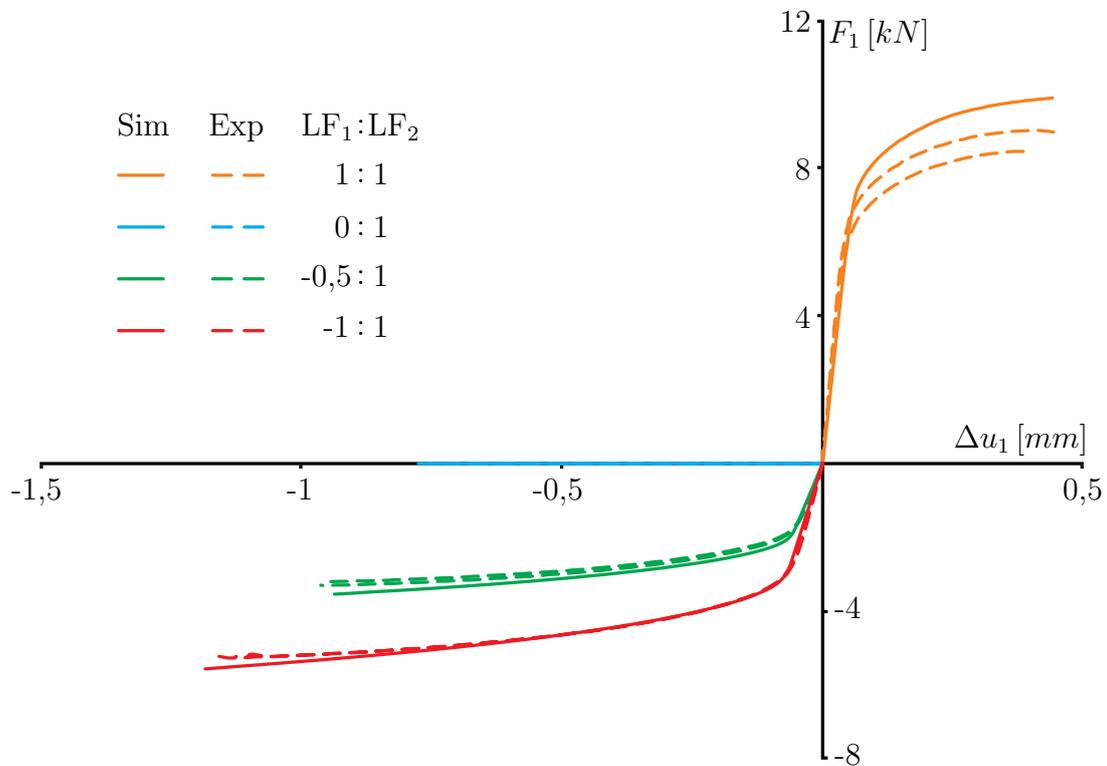
Die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven in den beiden Lastrichtungen dient der Überprüfung der globalen Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen. Außerdem konnten aufgrund dieser Ergebnisse die elastischen Schädigungsmodul  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  angepasst werden, was letztendlich zu den Werten in der Tabelle 6.1 führte. Mit diesen angepassten Materialparametern wurden letztendlich die im Fol-

**Tab. 6.1:** Übersicht der verwendeten elastischen Schädigungsmodul für die jeweiligen Lastkombinationen

Lastkombination	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta > 0$	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta < 0$	Einheit
$LF_1 : LF_2 = 1 : 1$	-1000	1000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 0 : 1$	-10000	10000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = -1 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$

genden ausgewerteten numerischen Berechnungen durchgeführt. Die experimentell und numerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven in 1-Richtung der vier Lastkombinationen sind in der Abbildung 6.7 dargestellt. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  ergaben sich aus den beiden durchgeführten Experimenten die in orange dargestellten, gestrichelten Kraft-Verschiebungs-Kurven. Diese zeigen trotz eines kleinen Unterschieds im Kraftniveau eine übereinstimmende Form. Für die parallel durchgeführte elastisch-plastisch-schädigende Berechnung dieser Lastkombination sind die gleichen Ergebnisse festzustellen, da ebenfalls die Verlaufform ähnlich ist, allerdings größere Kraftwerte erreicht werden. Diese Kraftunterschiede treten bereits im elastisch-plastischen Bereich auf und ziehen sich bis zum Ende der Versuche durch. Maximal treten bei dieser Lastkombinationen

Verschiebungen bis  $\Delta u_{1,max} \cong 0,45mm$  auf und experimentell werden Kräfte bis  $F_{1,max} \cong 9kN$  erreicht. Die in der korrespondierenden Simulation erreichte Maximalkraft liegt mit  $F_{1,max} \cong 10kN$  nochmal etwas darüber. Die in blau dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  verlaufen entlang der Verschiebungsachse und erreichen, aufgrund des Lastfaktors  $LF_1 = 0$ , Kraftwerte um Null. Dennoch resultiert aus der Belastung in 2-Richtung eine Verschiebung in 1-Richtung, die sowohl bei den experimentellen als auch der numerischen Kurve einen Extremwert von  $\Delta u_1 \cong -0,8mm$  erreicht. Die in grün dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  erreichen insgesamt eine Verschiebung von  $\Delta u_1 \cong -1mm$  und zeigen sowohl zwischen den beiden experimentellen Kurven als auch zwischen den experimentellen und der numerischen Kurve gute Übereinstimmungen im Kurvenverlauf. Solch

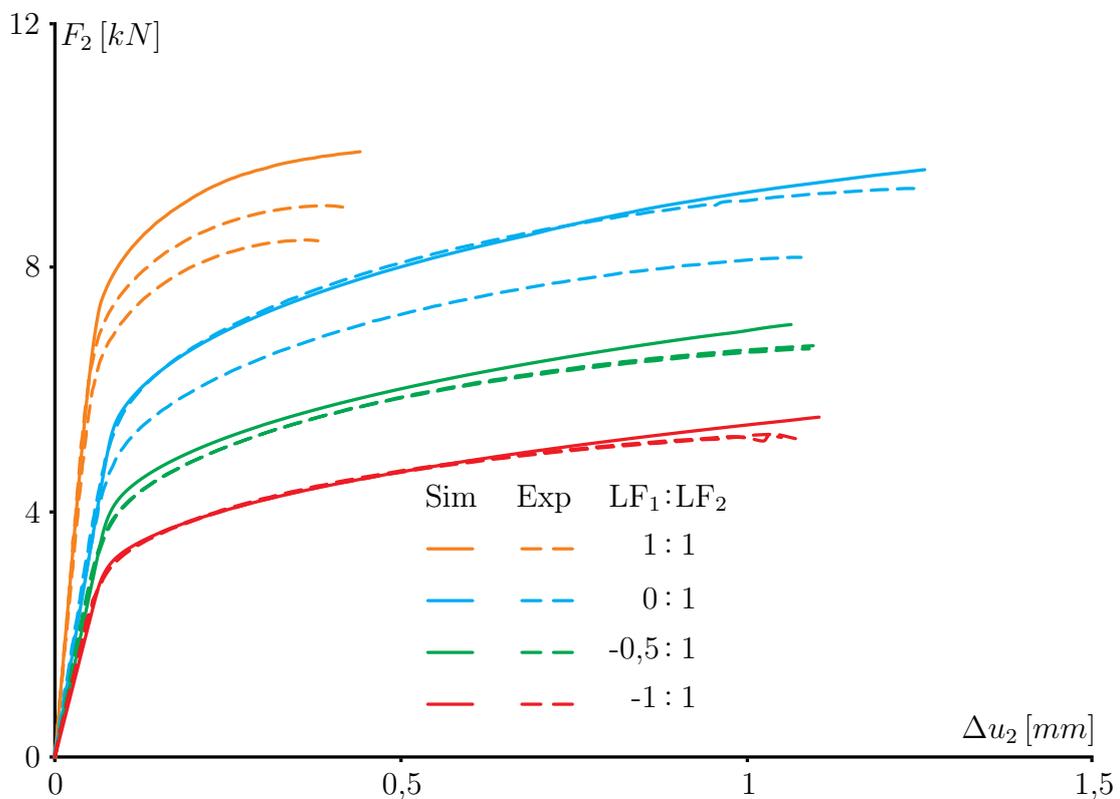


**Abb. 6.7:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung der X0-Probe aus AlCuMg1

gute Übereinstimmungen sind auch bei den roten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  festzustellen, wo erst im letzten Drittel des Versuchs minimale Abweichungen zwischen den experimentellen und der numerischen Kurve auftreten. Durch die Erhöhung der Druckbelastung durch den Lastfaktor  $LF_1 = -1$  werden noch größere negative Verschiebungen erreicht als bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ . Der ermittelte Extremwert der Verschiebung für diese Lastkombination liegt bei  $\Delta u_1 \cong -1,2mm$  und es

werden Kräfte bis  $F_1 \cong 5,5kN$  erreicht. Insgesamt zeigte die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven in 1-Richtung, dass für fast alle Lastkombinationen, außer der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experimenten und korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen vorliegt. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  ist zumindest eine ähnliche Tendenz im Kurvenverlauf zu erkennen, die sich einzig durch die resultierenden Kraftniveaus unterscheiden.

Die ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven in 2-Richtung der vier Lastkombinationen sind in der Abbildung 6.8 abgebildet. Für die in orange dargestellten



**Abb. 6.8:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 2-Richtung der X0-Probe aus AlCuMg1

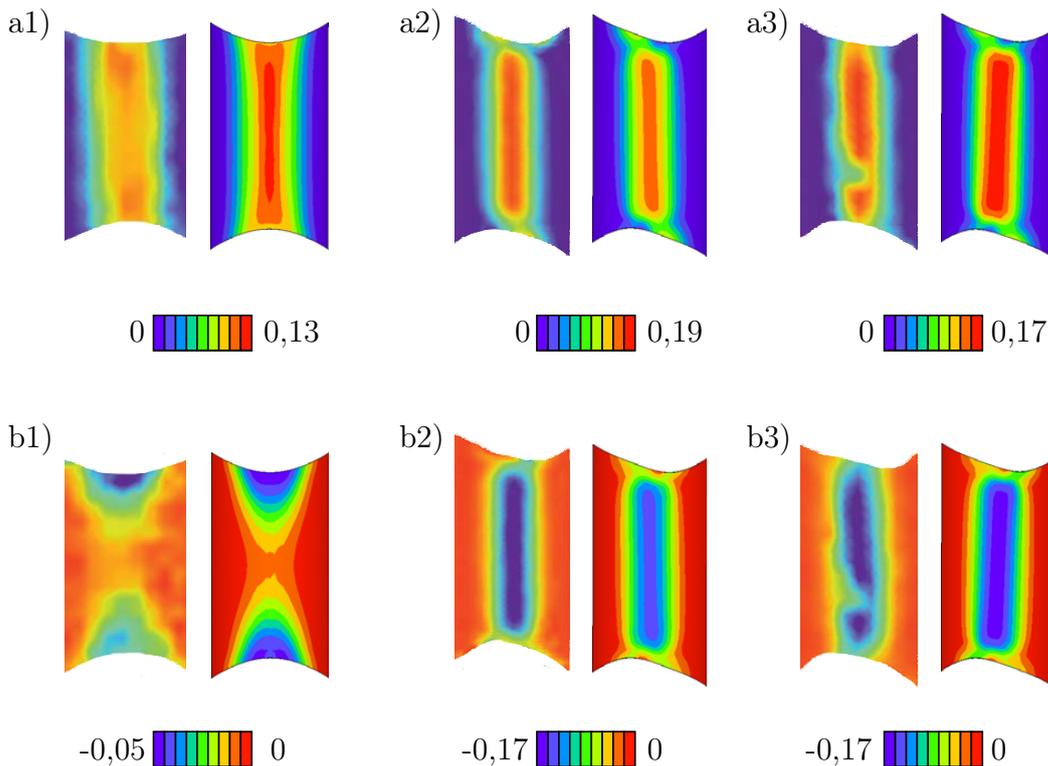
Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  werden annähernd gleiche Kraft- und Verschiebungswerte erreicht wie in 1-Richtung. Dies resultiert aus der Probengeometrie und aus den gleichen Lastfaktoren in 1- und 2-Richtung. Somit zeigt sich auch in 2-Richtung, dass die drei ermittelten Kurven eine ähnliche Form aber unterschiedliche Kraftniveaus aufweisen. Die blauen experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  weichen in 2-Richtung deutlich voneinander ab. Der Kraftunterschied dieser beiden Kurven liegt bei etwas mehr als einem Kilonewton. Allerdings verläuft die numerisch ermittelte Kraft-Verschiebungs-Kurve sehr ähnlich zu einer

der experimentellen Kurven, weshalb die andere Kurve vorerst nicht berücksichtigt wird. Für diese Lastkombination werden demnach eine maximale Kraft von  $F_{2,max} \cong 9,5kN$  und eine maximale Verschiebung, die insgesamt die größte Verschiebung aller Lastkombinationen in 2-Richtung darstellt, von  $\Delta u_{2,max} \cong 1,3mm$  erreicht. Die grünen experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  liegen auch in 2-Richtung sehr nah beieinander. Die korrespondierende, numerisch ermittelte Kraft-Verschiebungs-Kurve liegt zwar etwas über den experimentellen Kurven und weicht im letzten Drittel etwas mehr ab, bildet dennoch insgesamt eine gute Annäherung. Mit einer maximalen Verschiebung von  $\Delta u_{2,max} \cong 1,1mm$  wird bei dieser Lastkombination etwas weniger erreicht als bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ . Die in rot dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  liegen ebenfalls sehr nah beieinander. Allerdings zeigt sich auch hier, dass im letzten Drittel des Versuchs die Kraft-Verschiebungs-Kurve der numerischen Simulation etwas abweicht. Diese Lastkombination erreicht den niedrigsten maximalen Kraftwert von  $F_{2,max} \cong 5,5kN$  bei einer maximalen Verschiebung von  $\Delta u_{2,max} \cong 1,1mm$ . Die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven in 2-Richtung hat gezeigt, dass bei drei Lastkombinationen, ausgenommen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , eine gute Übereinstimmung zwischen mindestens einem Experiment und der korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung vorliegt. Auffällig ist außerdem, dass die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  annähernd die gleiche Verschiebung in 2-Richtung erreicht, obwohl deren Verschiebung in 1-Richtung unterschiedlich ist. Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass aufgrund der Kraft-Verschiebungs-Diagramme in 1- und 2-Richtung bei drei Lastkombinationen, ausgenommen die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , eine gute globale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und der korrespondierenden Simulation vorliegt. Außerdem zeigen die Experimente eindeutig, dass die Entfestigung, somit die Schädigung des Materials, zu keinem markanten Abfall im letzten Drittel der Kraft-Verschiebungs-Kurven führt.

### 6.2.2 Lokale Auswertung ausgewählter Lastkombinationen

Die lokale Auswertung wird hinsichtlich verschiedener Gesichtspunkte bei drei verschiedenen Lastkombinationen durchgeführt. Dafür wurden zunächst die zugdominante Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  und die scherdominante Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  ausgewählt. Als drittes wurde die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  untersucht, die gegenüber den anderen beiden zu einer ausgeglichenen Zug-Scher-Belastung führt. Für die lokale Bewertung des Deformationsverhaltens werden die Hauptverzerrungen  $A_{max}$  und  $A_{min}$  eines experimentellen Versuchs je Lastkombination mit den Werten der korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung verglichen. Diese Auswertung ist in der Abbildung 6.9 dargestellt, wobei die obere Reihe die maximale und die untere Reihe die minimale Hauptverzerrung zeigen. Beginnend mit der Hauptverzerrung  $A_{max}$

der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , ist der Abbildung 6.9 a1) zu entnehmen, dass bei der rechts, aus der numerischen Berechnung ermittelten, dargestellten Hauptverzerrung auf der Kerbenoberfläche die größeren Verzerrungswerte auftreten. Obwohl sich sowohl experimentell als auch numerisch ein vertikales Verzerrungsband bildet, unterscheiden sich diese hinsichtlich ihrer Form und Werte. Im

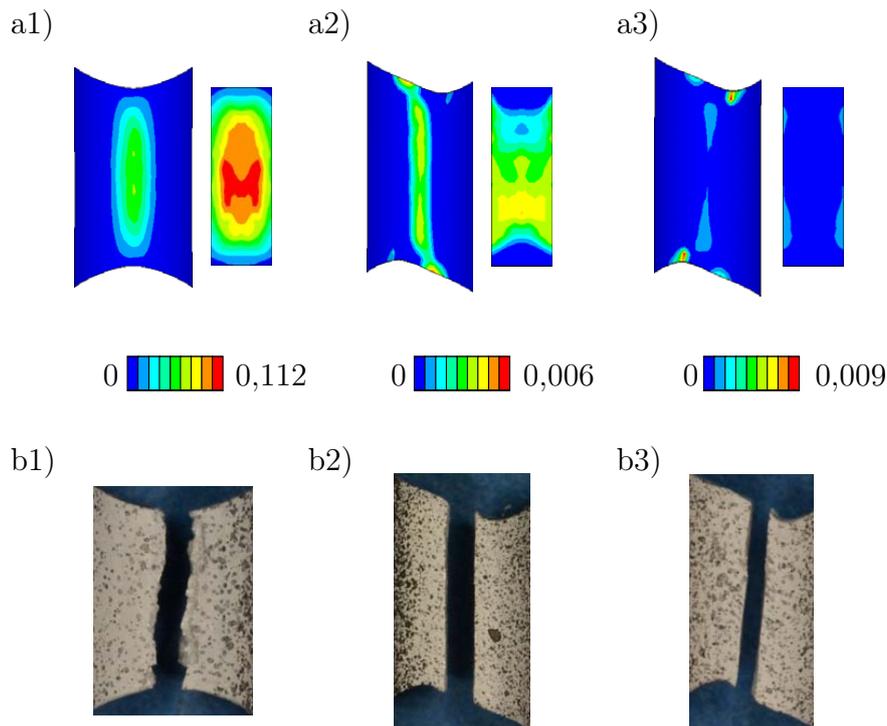


**Abb. 6.9:** Vergleich der Hauptverzerrungen auf der Kerbenoberfläche bei  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$ : a) Hauptverzerrung  $A_{max}$  (v.l. Exp + Sim); b) Hauptverzerrung  $A_{min}$  (v.l. Exp + Sim); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$

Experiment führte die Belastung zu einem etwas breiteren Verzerrungsband mit einer maximalen Verzerrung von etwa  $A_{max} \cong 0,1$ . Dabei liegen die Maximalwerte im oberen und unteren Drittel des Verzerrungsbandes. Im Gegensatz dazu werden bei der numerischen Simulation maximale Verzerrungswerte von  $A_{max} \cong 0,13$  ermittelt. Hinsichtlich der Verformung der Kerbenoberfläche stimmen Experiment und Simulation gut überein, wobei sich die Kerbe im Bereich des Verzerrungsbandes einschnürt. Bei der Darstellung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  in der Abbildung 6.9 b1) sind sowohl im Experiment als auch in der numerischen Berechnung Lokalisierungen am oberen und unteren Rand der Kerbenoberfläche zu erkennen. Die Verzerrungsverteilung und die maximalen Verzerrungswerte stimmen am oberen Rand zwischen Experiment und Simulation gut überein. Hierbei werden Ver-

zerrungen bis  $A_{min} \cong -0,05$  erreicht. Am unteren Rand hingegen treten zunächst einmal etwas kleinere Werte auf als am oberen Rand. Des Weiteren ist die Verzerrung in diesem Bereich in der Simulation etwas ausgeprägter, weshalb sich diese Bereiche farblich unterscheiden. Somit treten bei dieser Lastkombination größere Verzerrungen in der elastisch-plastisch-schädigenden Simulation auf. Werden allerdings die Ergebnisse aus den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen berücksichtigt, wo die numerisch ermittelte Kurve etwas deutlicher über den experimentellen Kurven liegt, ist das Ergebnis der größeren Verzerrungen in der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung nachvollziehbar. Die ermittelte Hauptverzerrung  $A_{max}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  ist in der Abbildung 6.9 a2) dargestellt. In der experimentellen und numerischen Auswertung sind fast durchgehende Verzerrungsbänder zu erkennen. Nur am oberen und unteren Rand treten breiter gefächert kleine Verzerrungen auf. Die Verzerrungsverteilung stimmt insgesamt sehr gut überein und es werden Verzerrungen von  $A_{max} \cong 0,19$  erreicht. Auch ein gleiches Verformungsverhalten ist erkennbar, wobei aufgrund der Lastkombination eine Scherbelastung resultiert und diese sich in den versetzten Kerbrändern links und rechts widerspiegelt. Bei der Auswertung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  in der Abbildung 6.9 b2) ist eine ähnliche Verzerrungsverteilung wie bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$ , allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen, zu erkennen. Auch die extremen Verzerrungswerte von  $A_{min} \cong -0,17$  liegen betragsmäßig in der gleichen Größenordnung. Insgesamt treten bei dieser Lastkombination die minimal größten Verzerrungen im Experiment auf. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  ist die Hauptverzerrung  $A_{max}$  in der Abbildung 6.9 a3) dargestellt. Zunächst einmal ist bei der experimentellen Darstellung zu erkennen, dass im unteren Bereich der Kerbenoberfläche eine lokale Unregelmäßigkeit auftritt. Diese wird höchstwahrscheinlich wegen abplatzender Farbe auf der Probenoberfläche entstanden sein, die für die digitale Bildkorrelation vor dem Experiment aufgesprüht wurde und eventuell bereits zu trocken war und den Verformungen nicht stand hielt. Somit ist diese Unregelmäßigkeit auf die Versuchsdurchführung zurückzuführen und soll somit für die Bewertung des Materialverhaltens nicht betrachtet werden. Die zu erkennende Verzerrungsverteilung ähnelt der der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ , was darin begründet liegt, dass die Lastkombinationen von den Lastfaktoren her nicht weit auseinander liegen. Es ist ein großer lokaler Verzerrungsbereich zu erkennen, der sowohl experimentell als auch numerisch auftritt. Die maximale Verzerrung liegt bei  $A_{max} \cong 0,17$  und wird annähernd in beiden Auswertungen erreicht. Ein kleiner Unterschied besteht dennoch in der Neigung des Verzerrungsbereichs. Bei der numerischen Simulation ist der lokale Verzerrungsbereich, ausgehend von der Vertikalen, leicht im Uhrzeigersinn geneigt. Dieses Verhalten zeigt sich auch bei der Darstellung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  in der Abbildung 6.9 b3). Ansonsten kann auch für diese Lastkombination von einer ähnlichen Verteilung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  wie bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$  gesprochen werden. Die extremen Hauptverzerrungen liegen hierbei ebenfalls etwa um  $A_{min} \cong -0,17$ . Auch dem Verformungsverhalten der Kerbenoberflächen kann eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und

korrespondierender Simulation festgestellt werden. Insgesamt kann für die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender Berechnung festgestellt werden. Außerdem ähneln sich die Verzerrungsverteilung und -werte dieser Lastkombinationen, was auf den nur kleinen Unterschied des Lastfaktor  $LF_1$  zurückzuführen ist. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  kann eine



**Abb. 6.10:** Vergleich des Schädigungsverhaltens: a) Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$ : links Kerbenoberfläche und rechts Querschnittsfläche (Sim); b) Rissbild (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$

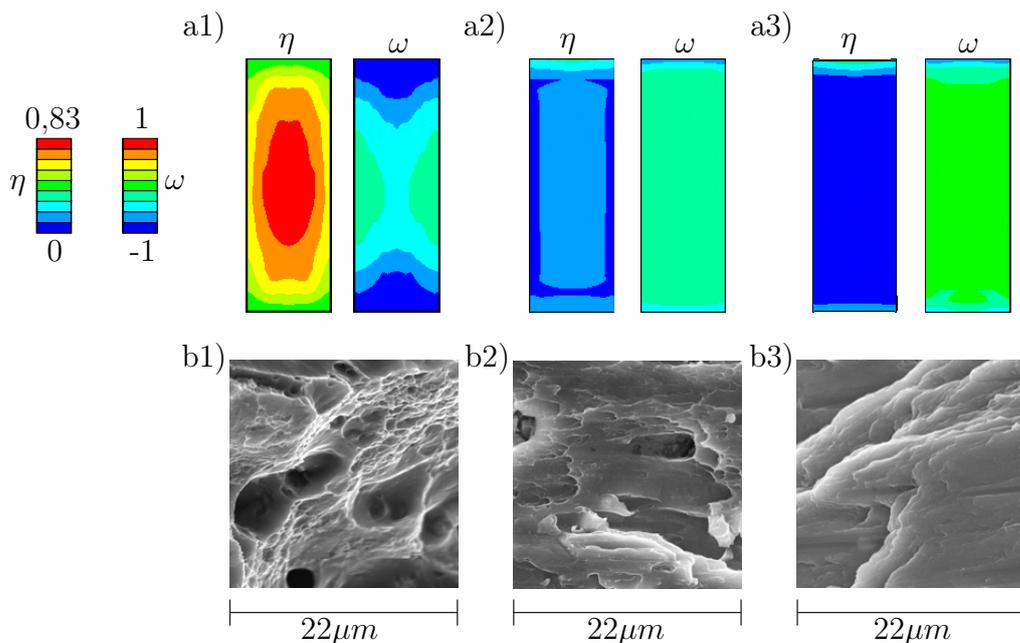
gute Tendenz bezüglich der ermittelten Hauptverzerrungen festgehalten werden. Die unterschiedlichen Maximalwerte sind hierbei eindeutig auf den bereits festgestellten Unterschied in den Kraft-Verschiebungs-Verläufen zurückzuführen. Die maximalen Hauptverzerrungen  $A_{max}$  der drei Lastkombinationen unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander, wobei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  etwas kleinere Werte zugeordnet werden können. Bei dieser Lastkombination tritt auch der betragsmäßig kleinste Extremwert der Hauptverzerrung  $A_{min}$  auf.

Um eine lokale Betrachtung des Schädigungs- und Versagensverhaltens durchzuführen, sind in der Abbildung 6.10 die numerisch ermittelte Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  der Kerbenoberfläche und Kerbenquerschnittsfläche dargestellt und dem Rissbild der Experimente gegenübergestellt. Bei der Lastkombi-

nation  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , deren Schädigungsvergleichsverzerrung in der Abbildung 6.10 a1) dargestellt ist, tritt die größte Schädigungsvergleichsverzerrung aller Lastkombinationen, mit einem Wert von  $\mu_{max} \cong 0,112$ , auf. Dabei ist die Schädigungsvergleichsverzerrung auf der Kerbenoberfläche ovalförmig ausgebildet und erreicht nur etwa die Hälfte des maximalen Werts dieser Lastkombination. Der Blick auf die Querschnittsfläche der Kerbe verrät, dass dort die größeren Schädigungsvergleichsverzerrungen auftreten. Fast auf der gesamten Querschnittsfläche treten Schädigungsvergleichsverzerrungen auf, die ebenfalls eine ovalförmige Form aufweisen. Nur der in rot dargestellte maximale Bereich wirkt unregelmäßig und sehr lokal. Die Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung ist typisch für eine zugdominante Belastung, wonach im Zentrum der Kerbe die größte Schädigung auftritt. Das entsprechende Rissbild des Experiments dieser Lastkombination deutet ebenfalls auf eine zugdominante Belastung hin, da die Kerbe förmlich auseinandergerissen ist und sehr unregelmäßige Risskanten zeigt. Somit ist für diese Lastkombination eine Verbindung zwischen Experiment und korrespondierender Simulation hinsichtlich des Schädigungsverhaltens aufgrund dieser Ergebnisse herstellbar. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  in der Abbildung 6.10 a2) ist auf der Kerbenoberfläche ein Schädigungsverzerrungsband zu erkennen. Dieses verläuft vom Zentrum aus nahezu vertikal und ist nur am oberen und unteren Rand leicht geknickt. Insgesamt erreicht die Schädigungsvergleichsverzerrung einen sehr kleinen maximalen Wert von  $\mu_{max} \cong 0,006$ , der nur sehr lokal am oberen und unteren Rand der Kerbenoberfläche auftritt. Die Darstellung der Querschnittsfläche zeigt außerdem, dass sehr große Teile dieser Fläche geschädigt sind und die meiste Schädigung in der unteren Hälfte auftritt. Das Rissbild des korrespondierenden Experiments, das in der Abbildung 6.10 b2) dargestellt ist, zeigt einen vertikalen Riss, der dem numerisch ermittelten Schädigungsverzerrungsband entspricht. Außerdem sind die Risskanten glatt, was auf ein Versagen unter Schubbelastung hindeutet. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  in der Abbildung 6.10 a3) zeigt sich, dass in der elastisch-plastisch-schädigende Berechnung kein Schädigungsverzerrungsband zu erkennen ist. Viel mehr treten kleine lokale Schädigungsverzerrungsbereiche auf, von denen die maximalen Werte am oberen und unteren Rand der Kerbenoberfläche festzustellen sind. Die maximale Schädigungsvergleichsverzerrung liegt hier bei etwa  $\mu_{max} \cong 0,009$  und somit in der Größenordnung der Werte der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ . Das Rissbild dieser Lastkombination, siehe Abbildung 6.10 b3), zeigt einen von der Vertikalen aus leicht im Uhrzeigersinn geneigten Riss. Dieser ist in diesem Fall nicht wirklich aus der Schädigungsvergleichsverzerrung abzuleiten, auch wenn leicht versetzte Bereiche der Schädigungsvergleichsverzerrung dies andeuten könnten. Dies zeigt zum einen auf, dass für diesen Lastfall die elastischen Schädigungsmodule nochmals angepasst werden sollten, damit auch Schädigung zum Zeitpunkt der Versagens vorhanden ist. Insgesamt zeigt die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung und der Rissbilder, dass bei scherdominierenden Lastfällen  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  nur sehr kleine Schädigungsvergleichsverzerrungen auftreten. Außerdem kann für die

Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  eine gute Übereinstimmung hinsichtlich des Schädigungs- und Versagensverhaltens zwischen Experiment und korrespondierender Simulation festgestellt werden.

Um die Bandbreite der Spannungszustände aufzuzeigen, die unter ein- und biaxialer Belastung der X0-Probe aus der Aluminiumlegierung erreicht werden, sind in der Abbildung 6.11 die numerisch ermittelten Spannungstriaxialität und Lodeparameter der jeweiligen Lastkombination bei einer Verschiebung von  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$  in der Kerbenquerschnittsfläche dargestellt. Diesen Spannungszuständen werden die Bilder der Bruchfläche, die mittels Rasterelektronenmikroskop gewonnen wurden, gegenübergestellt. In der Abbildung 6.11 a1) sind die Spannungszustände der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  abgebildet. Die Verteilung der Spannungstriaxialität ist in der Querschnittsfläche ovalförmig und besitzt im Zentrum der Fläche ihr Maximum mit  $\eta \cong 0,83$ . Dies entspricht der größten Spannungstriaxialität der drei dargestellten Lastkombinationen. Der dazugehörige Lodeparameter



**Abb. 6.11:** Auswertung der Spannungszustände und Vergleich mit Bruchflächen: a) v.l. Spannungstriaxialität  $\eta$  und Lodeparameter  $\omega$  (Sim); b) Bruchfläche im REM (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$

ist in der gesamten Querschnittsfläche negativ. Dabei liegen die Werte am oberen und unteren Rand der Querschnittsfläche um  $\omega \cong -1$ , welche Richtung Zentrum der Querschnittsfläche etwas positiver werden. Die korrespondierende Aufnahme des Rasterelektronenmikroskops in der Abbildung 6.11 b1), die einen zentralen Ausschnitt der Querschnittsfläche darstellt, zeigt einige sehr große und mehrere kleine Poren. Dadurch folgt, dass bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$

hauptsächlich Porenbildung und -wachstum die auftretenden Schädigungsmechanismen sind und somit zum Versagen des Materials führen. Diese Schädigungsmechanismen entsprechen der ermittelten Spannungstriaxialität, da die Entwicklung großer Poren fast ausschließlich bei großen Spannungstriaxialitäten auftritt. Die Spannungstriaxialität der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  ist neben dem Lodeparameter in der Abbildung 6.11 a2) dargestellt und zeigt eine sehr homogene Verteilung mit moderaten positiven Werten. Einzig am oberen Rand der Querschnittsfläche, tritt in einem kleinen Bereich eine etwas größere Spannungstriaxialität auf. Die homogene Verteilung der Spannung wird ebenfalls beim Lodeparameter sichtbar, der für diese Lastkombination im leicht negativen Bereich liegt. Verglichen mit den auftretenden Schädigungsmechanismen in der Bruchfläche dieser Lastkombination, dessen zentraler Bereich in der Abbildung 6.11 b2) abgebildet ist, ist ein Zusammenhang feststellbar, da vorrangig Schermechanismen zu sehen sind, die bei moderaten Spannungstriaxialitäten auftreten. Auch bei der dritten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  zeigt sich eine sehr homogene Spannungsverteilung. Sowohl die Spannungstriaxialität als auch der Lodeparameter nehmen hierbei Werte um Null an. Die korrespondierende Aufnahme der Bruchfläche im Rasterelektronenmikroskop weist ausschließlich Schermechanismen auf, die bei der scherdominanten Lastkombination auch zu erwarten waren. Somit korrespondieren die auftretenden Schädigungsmechanismen bei allen drei Lastkombinationen den ermittelten Spannungszuständen.

### 6.2.3 Bewertung der X0-Probengeometrie für die Aluminiumlegierung

Mit der X0-Probe aus AlCuMg1 wurden vier verschiedene Lastkombinationen durchgeführt, die eine Bandbreite an Spannungstriaxialitäten von  $0 \leq \eta \leq 0,83$  und an Lodeparametern von  $-0,5 \leq \omega \leq 0$  im Zentrum der Querschnittsfläche abdecken konnte. Somit ist dieser Probekörper für ein- und biaxiale Lastkombinationen geeignet, die Zug-, Scher- und Zug-Scher-Belastungen hervorrufen. Die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Diagramme zeigte, dass die experimentell und numerisch ermittelten Kurven bei den scherdominanten Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  besser übereinstimmen. Außerdem trat bei keiner der untersuchten Lastkombinationen eine sichtbare Entfestigung im Kraft-Verschiebungs-Diagramm auf. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass die numerisch ermittelte Schädigungsvergleichsverzerrung bei der zugdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  deutlich größer ist als bei den scherdominanten Lastkombination, bei denen nur sehr kleine Schädigungsvergleichsverzerrungen auftraten. Das experimentell festgestellte Schädigungs- und Versagensverhalten entsprach größtenteils der numerischen Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrungen und Spannungszuständen. Nur beim Lastfall  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  müssten die elastischen Schädigungsmodule angepasst werden, um auch eine deutliche Schädigungsentwicklung vor dem Versagen des Materials in der numerischen Simulation abzubilden. Das bereits angesprochene Beulen

beim Experiment der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -2 : 1$  weist darauf hin, dass die X0-Probe mit diesem Material nicht für Druck-Scher-Lastkombinationen geeignet ist. Diese Lastkombination bewirkt eine scherdominante Druck-Scher-Beanspruchung, wonach die Druckbelastung im Kerbbereich noch recht klein ist und trotzdem zum Beulen führt. Die in der numerischen Simulation verwendeten elastischen Schädigungsmodule, die je nach Lastkombination ausgewählt beziehungsweise angepasst wurden, zeigen, dass bei Lastkombinationen mit höheren Spannungstriaxialitäten eher betragsmäßig kleiner Werte und betragsmäßig größere Werte bei kleineren und negativen Spannungstriaxialitäten zu besseren Ergebnissen führte.

### 6.3 X0-Probekörper aus einer Stahllegierung

Der X0-Probekörper (Abbildung 5.5) aus der Stahllegierung X5CrNi18-10 mit den Materialparametern (Tabelle 5.2) wurde unter vier verschiedenen Lastkombinationen experimentell und numerisch untersucht. Der Lastfaktor  $LF_2$  ist bei allen Versuchen gleich 1. Der Lastfaktor  $LF_1$  variiert je nach Lastkombination zwischen 1 und -0,5, bleibt aber konstant während der Versuche. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  wurde ebenfalls experimentell untersucht, wurde allerdings aufgrund von auftretendem Beulen nicht weiter berücksichtigt. Die Versuchsreihe enthält mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  aufgrund der Probengeometrie eine sehr stark zugdominante Belastung im Kerbbereich. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  bewirkt im Kerbbereich eine scherdominante Zug-Scher-Belastung. Diese beiden Lastkombinationen bilden somit die extremen Zug-Scher-Belastungen. Die anderen beiden zeigen ein ausgeglicheneres Verhältnis zwischen Zug- und Scherbelastung. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  bewirkt eine leicht zugdominante und  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  führt zu einer ausgewogenen Zug-Scher-Belastung im Kerbbereich.

#### 6.3.1 Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven

Um die globale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen zu bewerten, sind in den Abbildungen 6.12 und 6.13 die Kraft-Verschiebungs-Kurven der vier untersuchten Lastkombinationen in 1- und 2-Richtung dargestellt. Aufgrund erster Auswertungen der Kraft-Verschiebungs-Kurven der numerischen Simulation wurden die elastischen Schädigungsmodule  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  für die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  angepasst und weichen dementsprechend vom ursprünglichen Materialparametersatz der Tabelle 5.2 ab. Zusammenfassend sind in der Tabelle 6.2 die elastischen Schädigungsmodule aufgelistet, die zu den folgenden Ergebnissen der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung führten. Im Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung, Abbildung 6.12, zeigt zu jeder Lastkombination die drei experimentellen Untersuchungen (gestrichelte Linien) und die

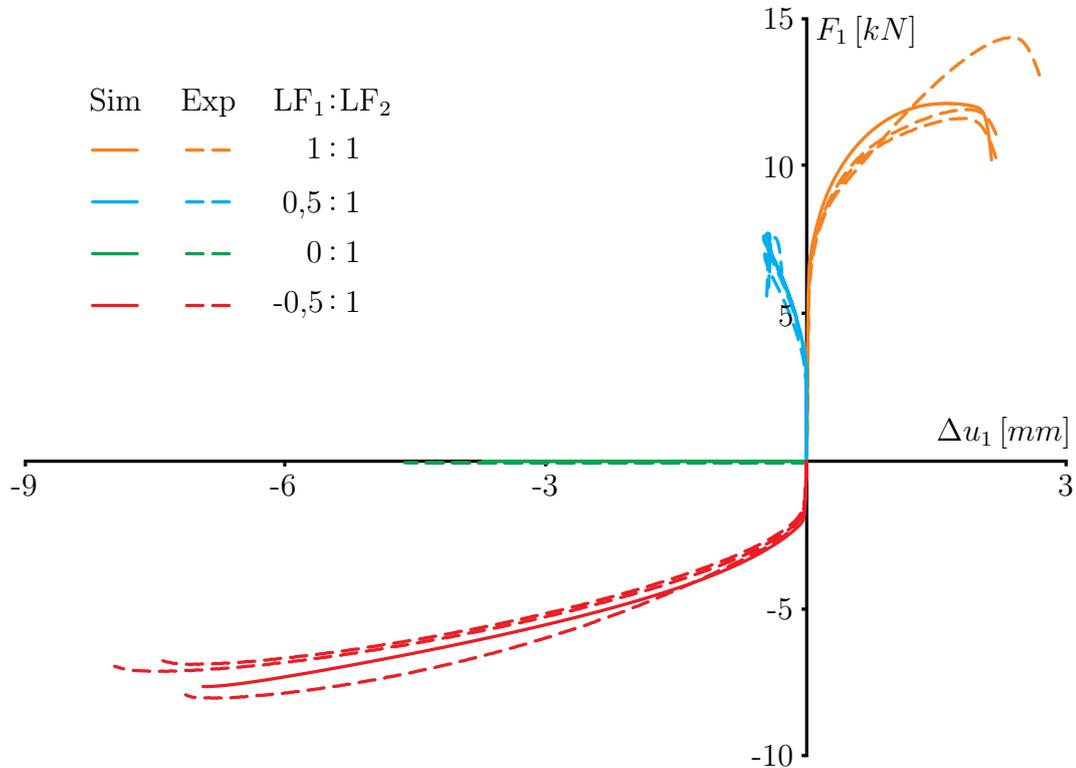
korrespondierende elastisch-plastisch-schädigende Simulation (durchgezogene Linien). Die in orange dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven in 1-Richtung der

**Tab. 6.2:** Übersicht der verwendeten elastischen Schädigungsmodule für die Stahllegierung bei den jeweiligen Lastkombinationen

Lastkombination	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta > 0$	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta < 0$	Einheit
$LF_1 : LF_2 = 1 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 0 : 1$	-1500000	1500000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$	-1500000	1500000	$[N/mm^2]$

Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  befinden sich im 1. Quadranten. Somit ist sowohl die Kraft  $F_1$  als auch die Verschiebung  $\Delta u_1$  positiv. Bei den drei durchgeführten Experimenten dieser Lastkombination weicht eine Kraft-Verschiebungs-Kurve deutlich von den anderen beiden ab. Vor allem das Verfestigungsverhalten zeigt einen steileren Anstieg. Ob dieser markante Unterschied auf Imperfektionen zurückzuführen ist, ist abschließend schwierig zu bewerten. Die elastisch-plastisch-schädigende Berechnung dieser Lastkombination stellt eine gute Annäherung zu den beiden ähnlich verlaufenden experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven dar, auch wenn der Verlauf während der Verfestigung etwas höher liegt und rundlicher wirkt. Der Verlauf der numerischen Kraft-Verschiebungs-Kurve im Entfestigungsbereich mittelt die beiden experimentellen Kurven sehr gut. Die Maximalwerte für diese Lastkombination liegen etwa bei  $F_{1,max} \cong 12kN$  und  $\Delta u_{1,max} \cong 2,2mm$ , sofern die stark abweichende experimentelle Kraft-Verschiebungs-Kurve nicht berücksichtigt wird. Die in blau dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  erreicht eine negative Verschiebung  $\Delta u_1$  trotz positivem Lastfaktor und positiver Kraft  $F_1$ . Dies liegt darin begründet, dass der Einfluss der Last in 2-Richtung so stark ist, dass die durch die 2-Richtung resultierende negative Verschiebung in 1-Richtung betragsmäßig größer ist als die positive Verschiebungskomponente, die aufgrund der Last in 1-Richtung entstehen würde. Die drei experimentellen und die numerische Kurve liegen somit im 2. Quadranten und haben eine sehr gute Übereinstimmung. Die maximal erreichte Kraft liegt bei etwa  $F_{1,max} \cong 8kN$  und der Extremwert der Verschiebung liegt bei  $\Delta u_{1,min} \cong -0,5mm$ . Die in grün dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  liegen bei der zu erwartenden Kraft  $F_1 = 0$  sehr gut übereinander. Die Zugbelastung in 2-Richtung führt dazu, dass die Verschiebung  $\Delta u_1$  bei allen vier Kurven negativ ist. Der einzige Unterschied zwischen den experimentellen und der numerischen Kurve liegt im Extremwert der Verschiebung. Die elastisch-plastisch-schädigende Berechnung

erreicht eine Verschiebung von  $\Delta u_1 \cong -3,7\text{mm}$ , wohingegen die Verschiebung der experimentellen Ergebnisse bei etwa  $\Delta u_{1,min} \cong -4,6\text{mm}$  liegt. Die in rot darge-

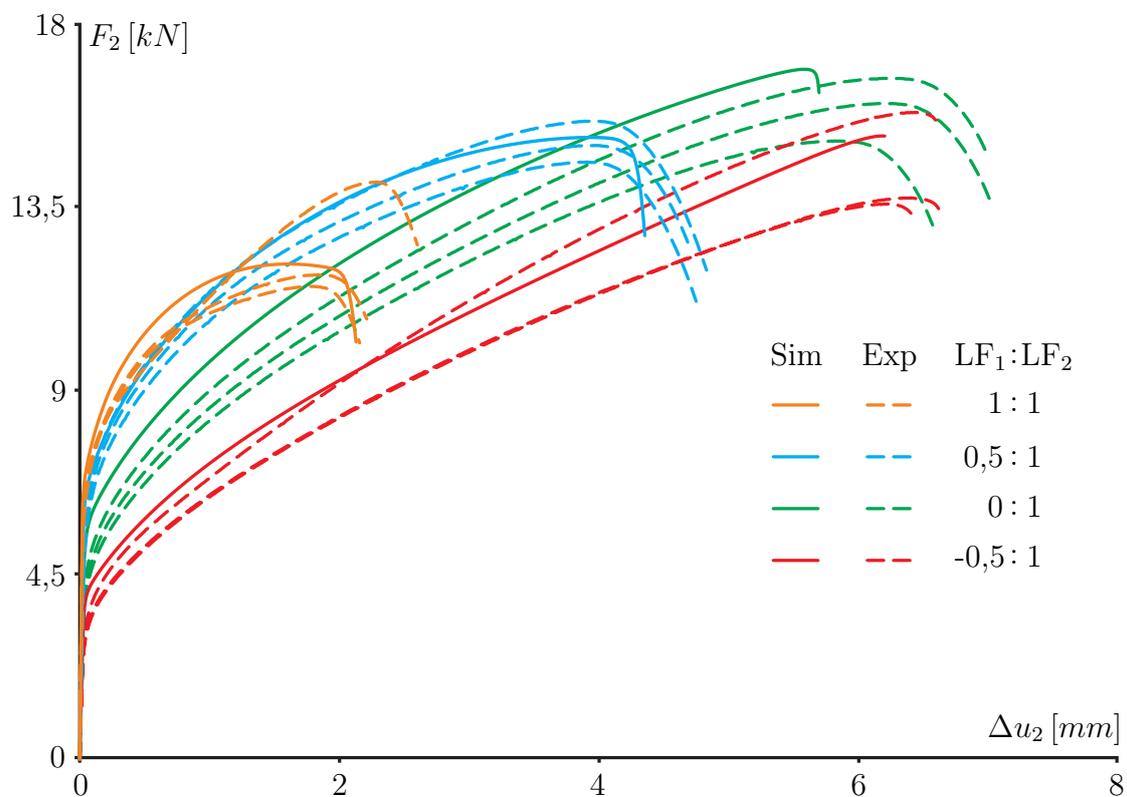


**Abb. 6.12:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung der X0-Probe aus X5CrNi18-10

stellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  liegen im 3. Quadranten des Diagramms und liefern eine gute Übereinstimmung. Aufgrund des negativen Lastfaktors in 1-Richtung liegt eine negative Kraft  $F_1$  vor. Die drei experimentellen Kurven können trotz minimaler Abweichungen im Kraftniveau als recht gute Übereinstimmung angesehen werden. Im Gegensatz zu den Lastkombinationen mit positiven Lastfaktoren  $F_1$  zeigt diese Lastkombination im Kraft-Verschiebungs-Diagramm einen sehr kleinen Entfestigungsbereich, bei dem die Kraft  $F_1$  kurz vor dem Versagen kaum abfällt. Die bei dieser Lastkombination erreichten Extremwerte liegen bei  $F_{1,min} \cong -8\text{kN}$  und  $\Delta u_{1,min} \cong -8\text{mm}$ . Insgesamt kann bei Betrachtung der Kraft-Verschiebungs-Kurven eine gute globale Übereinstimmung der einzelnen Lastkombinationen festgestellt werden.

Die Abbildung 6.13 zeigt die Kraft-Verschiebungs-Kurven der Experimente und der korrespondierenden Simulationen in 2-Richtung. Hierbei sind alle Kräfte  $F_2$  aufgrund des positiven Lastfaktors  $LF_2 = 1$  positiv. Auch die erreichten Verschiebungen  $\Delta u_2$  sind allesamt positiv. Die orangen Kraft-Verschiebungs-Kurven der Experimente und der numerischen Simulation der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  entsprechen sehr genau den Ergebnissen aus dem  $F_1$ - $\Delta u_1$ -Diagramm,

was bei gleichem Lastfaktor aufgrund der Punktsymmetrie des Probekörpers und der Isotropie des Materials auch zu erwarten war. Diese Lastkombination erreicht im Vergleich zu den restlichen Lastkombinationen die kleinste Maximalkraft und -verschiebung in 2-Richtung. Die in blau dargestellte Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  weist drei minimal voneinander abweichende experimentelle Kraft-Verschiebungs-Kurven auf. Der Verlauf dieser drei Kurven ist sehr ähnlich und unterscheidet sich lediglich leicht im Kraftniveau. Die elastisch-plastisch-schädigende Berechnung liefert auch dazu eine gut angenäherte Kraft-Verschiebungs-Kurve. Einzig der Abfall der Kurve im Bereich der Entfestigung ist



**Abb. 6.13:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 2-Richtung der X0-Probe aus X5CrNi18-10

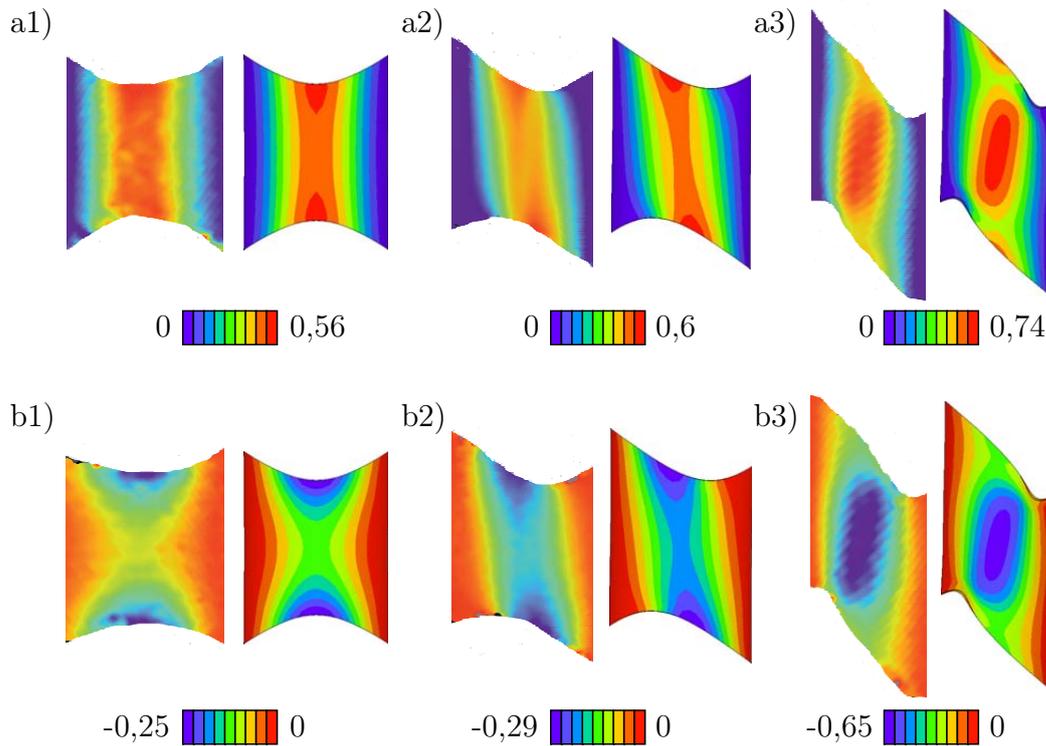
etwas zu steil. Maximal werden bei dieser Lastkombination Kräfte um  $F_{2,max} \cong 15,5kN$  und Verschiebungen bis  $\Delta u_2 \cong 4,8mm$  erreicht. Die in grün dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  zeigen zunächst eine ähnliche Streuung bei den experimentellen Ergebnissen, wie es bereits bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  der Fall war. Dennoch zeigt die Form der experimentellen Kurven eine gute Übereinstimmung. Die Kurve der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung liegt hierbei etwas über den experimentellen Kurven. Die Kurve der numerischen Simulation weist am Ende eine sehr steile Entfestigung auf. Diese ist auf das Erhöhen der Schädigungsmodulle um den Faktor 10 zurückzuführen, da ohne diese Erhöhung keine sichtbare

Entfestigung in der Kraft-Verschiebungs-Kurve aufgetreten wäre. Festzuhalten ist außerdem, dass bei dieser Lastkombination die Entfestigung der numerischen Kurve deutlich früher beginnt als bei den Experimenten. Diese Lastkombination erreicht die maximalen Kraft- und Verschiebungswerte in 2-Richtung aller Lastkombinationen. Die maximale Kraft liegt bei  $F_{2,max} \cong 17kN$  und es werden Verschiebungen bis  $\Delta u_{2,max} \cong 7mm$  erreicht. Die Streuung der experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven zeigt sich auch bei der in rot dargestellten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ . Hierbei liegen zwei Experimente sehr gut übereinander und eins weicht etwas ab. Vor allem der steile Anstieg der abweichenden experimentellen Kurve ist signifikant. Alle drei experimentellen Kurven weisen am Ende einen sehr kleinen Bereich von Entfestigung auf. Die Kraft-Verschiebungs-Kurve der numerischen Berechnung liegt wie bei der Lastkombination zuvor etwas über den experimentellen Kurven zu Beginn des plastischen Materialverhaltens. Im weiteren Verlauf kreuzt diese die abweichende experimentelle Kurve und liegt somit am Ende des Verlaufs zwischen den experimentellen Ergebnissen. Die Kurve der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung besitzt am Ende einen ähnlichen Entfestigungsverlauf wie bei den experimentellen Kurven. Diese leichte Entfestigung der numerischen Kurve ist wie bereits erwähnt nur durch die Erhöhung der Schädigungsmodule möglich gewesen. Trotz des unterschiedlichen Kraftniveaus stimmt die Form der numerischen Kraft-Verschiebungs-Kurve mit der der experimentellen Kurven gut überein. Insgesamt zeigt das  $F_2$ - $\Delta u_2$ -Diagramm, dass experimentell mit dieser Probengeometrie und diesem Material eine gewisse Streuung in den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen zu verzeichnen ist. Insgesamt wurden recht gute globale numerische Approximationen für alle untersuchten Lastkombinationen erreicht.

### 6.3.2 Lokale Auswertung ausgewählter Lastkombinationen

Für die lokale Auswertung der Experimente und korrespondierender elastisch-plastisch-schädigender Berechnungen werden die beiden Lastkombinationen mit den Extremwerten der Spannungstriaxialität und eine dazwischenliegende Lastkombination genauer betrachtet. Die extremen Lastkombinationen sind der zugdominante Lastfall  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  und der scherdominante Lastfall  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ . Als dritte Lastkombination wurde die leicht zugdominante Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  gewählt. Für diese drei Lastkombinationen werden zunächst die Hauptverzerrungen  $A_{max}$  und  $A_{min}$  der Experimente mit denen der numerischen Simulation verglichen, um auch eine lokale Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation nachzuweisen. Die Hauptverzerrungen wurden bei einer Verschiebung von  $\frac{2}{3}\Delta u_2$  der jeweiligen Lastkombination ermittelt und in der Abbildung 6.14 mit den Ergebnissen der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung verglichen. In der Abbildung 6.14 a1) ist die Hauptverzerrung  $A_{max}$  der experimentellen (links) und numerischen (rechts) Auswertung gegenübergestellt. Bei dieser ist sowohl im Experiment als auch bei der nume-

rischen Simulation ein vertikales Verzerrungsband mit annähernd gleichmäßig hohen Verzerrungswerten zu erkennen. Das Verzerrungsband ist im Experiment etwas breiter als bei der Simulation. Die Maximalwerte von  $A_{max} \cong 0,56$  liegen dabei am oberen und unteren Rand des Verzerrungsbandes und sind in der numerischen Berechnung eindeutiger zu erkennen. Neben der Verteilung der Verzerrungen sind den Abbildungen auch die Verformungen der Kerbenoberflächen zu entnehmen. Die Verformung der Kerben in der Abbildung 6.14 a1) zeigen



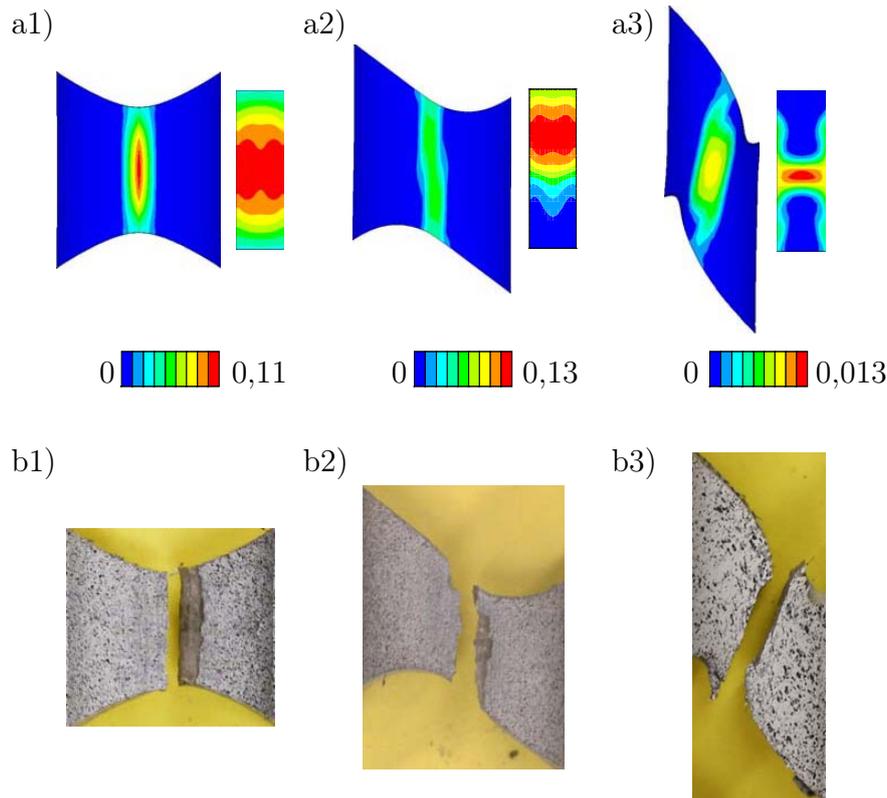
**Abb. 6.14:** Vergleich der Hauptverzerrungen auf der Kerbenoberfläche bei  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$ : a) Hauptverzerrung  $A_{max}$  (v.l. Exp + Sim); b) Hauptverzerrung  $A_{min}$  (v.l. Exp + Sim); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$

deutlich, dass keine vertikale Verformung auftritt. Außerdem ist eine vertikale Einschnürung im Bereich des Verzerrungsbandes zu erkennen. Aufgrund dieser Verformungen und des vertikalen Verzerrungsbandes resultiert, dass die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  annähernd einer reinen Zugbelastung der Kerben in horizontaler Richtung entspricht. Die Auswertung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  dieser Lastkombination, siehe Abbildung 6.14 b1), zeigt ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation. Hierbei ist ebenfalls ein Verzerrungsband zu erkennen ist, dessen Extremwerte bei  $A_{min} \cong -0,25$ , wie bereits bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$ , am oberen und unteren Rand der Kerbe im Bereich der Einschnürung liegen. Die Hauptverzerrung  $A_{max}$  der Lastkombi-

nation  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  in der Abbildung 6.14 a2) zeigt ein leicht gegen den Uhrzeigersinn geneigtes Verzerrungsband. Diese Neigung entspricht der Interpretation der Lastkombination, dass eine Zugbelastung wie bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  mit einer Scherbelastung kombiniert wird. Dementsprechend ist der linke Rand der Kerbe auch weiter nach oben verschoben und das Verzerrungsband neigt sich etwas. Insgesamt ist hierbei eine gute Übereinstimmung der Hauptverzerrung  $A_{max}$  zu erkennen. Auch die Maximalwerte von  $A_{max} \cong 0,6$  werden sowohl im Experiment als auch in der Simulation am oberen und unteren Rand des Verzerrungsbandes erreicht. Die Hauptverzerrung  $A_{min}$  in der Abbildung 6.14 b2) zeigt eine ähnliche Verteilung wie bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$ , allerdings mit kleineren Extremwerten von  $A_{min} = -0,29$ . Die Abbildungen 6.14 a3) und b3) zeigen den Vergleich der Hauptverzerrungen  $A_{max}$  und  $A_{min}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ , somit der leicht schubdominanten Zug-Scher-Belastung im Kerbbereich. Zunächst fällt auf, dass die Verteilung sowohl bei der maximalen als auch bei der minimalen Hauptverzerrung sehr ähnlich ist. Nur der Extremwert der Hauptverzerrungen ist betragsmäßig etwas größer bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$ . Des Weiteren fällt auf, dass hierbei die Verzerrungen mehr lokal und ellipsenförmig im Zentrum der Kerbenoberfläche auftreten. Bei dieser Lastkombination ist die lokale ellipsenförmige Verzerrung im Zentrum leicht im Uhrzeigersinn geneigt. Insgesamt bleibt festzuhalten, dass für alle drei Lastkombinationen eine sehr gute lokale Übereinstimmung zwischen Experimenten und Simulationen hinsichtlich der Verteilung und der Extremwerte der Hauptverzerrung sowie hinsichtlich des Verformungsverhaltens auftritt.

Nachdem die Hauptverzerrungen ausgewertet wurden, folgt die Auswertung des Schädigungsverhaltens. Dazu sind in der Abbildung 6.15 die Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  auf der Kerbenoberfläche und der Querschnittsfläche im letzten Lastschritt der numerischen Berechnung sowie der tatsächlich im Experiment aufgetretene Riss im Kerbbereich dargestellt. Die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , welche in Abbildung 6.15 a1) dargestellt ist, zeigt auf der Kerbenoberfläche ein vertikales Band. Hierbei liegen die maximalen Schädigungsvergleichsverzerrungen im Zentrum und werden vom Zentrum ausgehend ellipsenförmig kleiner. Die Schädigungsvergleichsverzerrung ist trotz des sichtbaren Bands als sehr lokal im Zentrum zu betrachten. Das gleiche Bild zeigt sich in der dazugehörigen Querschnittsfläche. Auch da liegen die Maximalwerte, die etwa  $\mu_{max} \cong 0,11$  erreichen, im Zentrum der Querschnittsfläche. Allerdings ist hierbei die Abnahme der Schädigungsvergleichsverzerrung zum oberen und unteren Rand hin mehr kreis- als ellipsenförmig. Aus der Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung dieser Lastkombination folgt, dass bei einer annähernd reinen Zugbelastung die Schädigung im Zentrum der Probe am größten ist. Das dazugehörige Rissbild dieser Lastkombination ist in Abbildung 6.15 b1) dargestellt und zeigt einen vertikalen Riss im Kerbbereich. Dieses experimentelle Ergebnis stimmt sehr gut mit der auftretenden Schädigungsvergleichsverzerrung überein, nach der ein vertikaler Riss zu erwarten war. Die auftretende Schädigungsvergleichsverzerrung der

Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  ist in der Abbildung 6.15 a2) dargestellt. Aufgrund der im Vergleich zur Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zugenommenen Schubbelastung ist das auftretende Band auf der Kerbenoberfläche leicht geneigt und hat dort eher moderate Werte im Vergleich zum auftretenden Maximum  $\mu_{max} \cong 0,13$  in der Querschnittsfläche. Bei der Querschnittsfläche zeigt sich



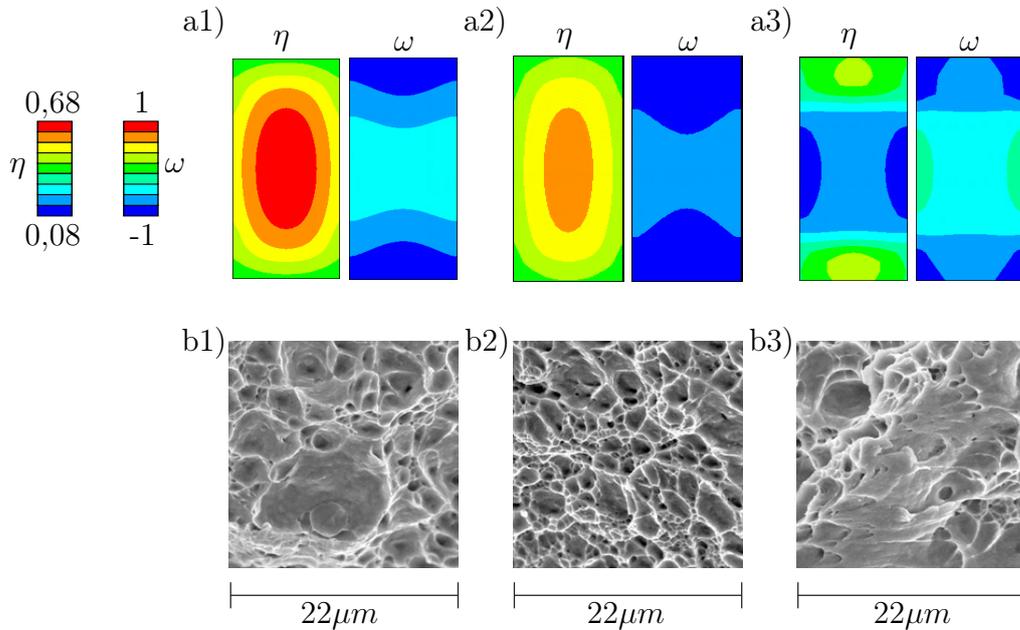
**Abb. 6.15:** Vergleich des Schädigungsverhaltens: a) Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$ : links Kerbenoberfläche und rechts Querschnittsfläche (Sim); b) Rissbild (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$

eine klare Lokalisierung in der oberen Hälfte der Fläche. Dies hängt damit zusammen, dass die Querschnittsfläche der linken Hälfte der Kerbe betrachtet wird. Aufgrund der kleinen Neigung des Schädigungsverzerrungsbands tritt somit die Lokalisierung in der oberen Hälfte auf. Würde man die Querschnittsfläche der rechten Kerbenhälfte betrachten, wäre im unteren Bereich die Lokalisierung. Der zur Lastkombination dazugehörige Riss des Probekörpers, siehe Abbildung 6.15 b2), zeigt eine sehr ähnliche Neigung des Risses, wie sie beim Schädigungsverzerrungsband auf der Kerbenoberfläche zu erkennen war. Somit zeigt sich auch hierbei eine gute Übereinstimmung im Schädigungsverhalten zwischen Experiment und Simulation dieser Lastkombination. Bei der schubdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  zeigt sich in der Abbildung 6.15 a3) ein im

Uhrzeigersinn geneigtes Schädigungsverzerrungsband auf der Kerbenoberfläche. Dieses ist allerdings nicht so geradlinig entwickelt wie bei den anderen Lastkombinationen. Hierbei zeigt sich eine breiter ausgebildete Lokalisierung der Schädigungsvergleichsverzerrung im Zentrum der Oberfläche. In der Querschnittsfläche ist ebenfalls eine klar sichtbare Lokalisierung im Zentrum zu erkennen. Dort treten auch die Maximalwerte  $\mu_{max} \cong 0,013$  auf. Dieser Maximalwert liegt etwa bei einem Zehntel der in den anderen Lastkombinationen festgestellten Maximalwerte. Interessant ist auch die Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung in der Querschnittsfläche. Bis auf die maximalen Werte im Zentrum der Querschnittsfläche tritt vor allem mehr am linken und rechten Rand der Querschnittsfläche Schädigung auf. Das der Lastkombination entsprechende Rissbild, welches in der Abbildung 6.15 b3) gezeigt ist, zeigt einen im Uhrzeigersinn zur Vertikalen geneigten Riss, was somit der Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung auf der Kerbenoberfläche entspricht. Insgesamt zeigt somit das Schädigungsverhalten hinsichtlich der numerisch ausgewerteten Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  und des Rissbildes eine gute Übereinstimmung. Die Schädigungsvergleichsverzerrung ist bei den zugdominanten Belastungen zehnfach größer als bei der schubdominanten Belastung. Dabei muss allerdings festgehalten werden, dass bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  mit höheren Schädigungsmodulen gerechnet wurde, wodurch die Schädigungsvergleichsverzerrung kleiner wird.

Ein weiterer wichtiger Aspekt um das Schädigungsverhalten zu analysieren, ist eine Auswertung der Spannungszustände und der auftretenden Schädigungsmechanismen. Dazu zeigt die Abbildung 6.16 die Auswertung der Spannungstriaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  der numerischen Berechnung bei einer Verschiebung von  $\frac{2}{3}\Delta u_2$  sowie einen zentralen Ausschnitt der unter dem Rasterelektronenmikroskop untersuchten Bruchfläche der jeweiligen Lastkombination. Beginnend mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , siehe Abbildung 6.16 a1), treten große positive Werte der Spannungstriaxialität auf. Die Verteilung ist dabei ellipsenförmig mit dem Maximum  $\eta_{max} = 0,68$  im Zentrum der Querschnittsfläche. Der dazugehörige Lodeparameter ist über die gesamte Querschnittsfläche negativ verteilt und nimmt Werte zwischen -0,5 und -1 an. Die Bruchfläche des versagten Probekörpers der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  ist in der Abbildung 6.16 b1) dargestellt und zeigt eine Vielzahl an großen Poren. Aufgrund der stark positiven Spannungstriaxialität und der damit laut Theorie verbundenen Porenaufweitung zeigt die Bruchfläche ein erwartetes Bild an Schädigungsmechanismen. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$ , siehe Abbildung 6.16 a2), ist die Verteilung der Spannungstriaxialität ebenfalls ellipsenförmig mit dem auftretendem Maximum von  $\eta \cong 0,57$  im Zentrum der Querschnittsfläche. Aufgrund der Abnahme der Zugdominanz der Zug-Scher-Belastung gegenüber der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  ist die Spannungstriaxialität dementsprechend etwas kleiner. Der Lodeparameter ist auch für diese Lastkombination stark negativ, mit den Minima am oberen und unteren Rand der Querschnittsfläche. Die auftretenden Schädigungsmechanismen in der Bruchfläche sind in der Abbildung 6.16 b2) dargestellt. Es sind viele kreisrunde Poren zu erkennen, die kleiner sind als die

Poren bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ . Aber auch hier entspricht das Schädigungsverhalten der auftretenden Spannungstriaxialität, die stark positiv ist und zu einer Porenbildung und -aufweitung führt. Die Spannungstriaxialität



**Abb. 6.16:** Auswertung der Spannungszustände und Vergleich mit Bruchflächen: a) v.l. Spannungstriaxialität  $\eta$  und Lodeparameter  $\omega$  (Sim); b) Bruchfläche im REM (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$

und Lodeparameter der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  sind in der Abbildung 6.16 a3) dargestellt. Die Spannungstriaxialität zeigt drei unterschiedliche Bereiche. Am oberen und unteren Rand der Querschnittsfläche treten Spannungstriaxialitäten um  $\eta \cong 0,3$  auf, wohingegen in der Mitte kleinere Spannungstriaxialitäten zwischen 0,08 und 0,15 auftreten. Der Lodeparameter ist am oberen und unteren Rand stark negativ nahe  $\omega \cong -1$ . Im Zentrum erreicht der Lodeparameter negative Werte um  $\omega \cong -0,4$ . Aufgrund der auftretenden Schädigungsvergleichsverzerrung (Abbildung 6.15 a3)) ist vor allem der zentrale Bereich der Querschnittsfläche ausschlaggebend für die Schädigungsmechanismen. Somit entspricht die Spannungstriaxialität dieser Lastkombination im Zentrum der Querschnittsfläche der gemischten Schädigungsform, wobei Poren und Mikroscherrisse zu erwarten sind. Genau diese Schädigungsform ist auch auf der Bruchfläche in der Abbildung 6.16 b3) zu erkennen. Neben sichtbaren Poren, vor allem in der linken Ecke des Bruchflächenausschnittes, sind auch Schermechanismen im Zentrum des Ausschnittes deutlich zu erkennen. Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass bei allen drei Lastkombinationen die auftretenden Schädigungsmechanismen zu den numerisch ermittelten Spannungszuständen korrespondieren. Die ermittelten

Spannungstriaxialitäten für diesen Probekörper aus der Stahllegierung ergeben somit eine Bandbreite von  $0,08 \leq \eta \leq 0,68$ . Die Lodeparameter sind bei allen Lastkombinationen negativ.

### 6.3.3 Bewertung der X0-Probengeometrie für die Stahllegierung

Ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit liegt in der Bewertung der Probengeometrien vor allem hinsichtlich möglicher Lastkombinationen und auftretender Spannungszustände. Zunächst muss einmal festgehalten werden, dass dieser Probekörper aufgrund der Geometrie in seiner möglichen Belastbarkeit beschränkt ist. Damit ist gemeint, dass beispielsweise die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  sowie  $LF_1 : LF_2 = -2 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  aufgrund der Geometrie und der Isotropie des Materials der gleichen Belastung entsprechen. Das ist auch die Begründung dafür, warum die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  nicht durchgeführt wurde, da diese Belastung bereits mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0,5 : 1$  abgedeckt ist. Des Weiteren konnte der Probekörper in 1-Richtung nicht mehr als mit dem Lastfaktor  $LF_1 = -0,5$  druckbelastet werden, da sonst Beulen aufgetreten ist. Auch ein Lastfaktor  $LF_1 \geq 3$  hätte zu keinen weiteren Ergebnissen geführt, da diese Belastung nur die Zugdominanz der Zug-Scher-Belastung abmindert aufgrund der Symmetrie. Somit war es sinnvoll, nur vier Lastkombinationen detailliert zu untersuchen. Zunächst muss aufgrund der Ergebnisse in den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen festgehalten werden, dass die experimentellen Kurven je Lastkombination eine gewisse Streuung mit sich bringen. Die Begründung dafür könnte sein, dass bei der Stahllegierung X5CrNi18-10 die Herstellung aufgrund der höheren Steifigkeit schwieriger ist, weshalb mehr herstellungsbedingte Mikrodefekte auftreten. Andererseits könnten sich auch die herstellungsbedingten Mikrodefekte bei der Stahllegierung stärker auswirken als bei der Aluminiumlegierung, da größere Deformationen auftreten. Außerdem zeigten die experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven am Ende des Versuchs eine sichtbare Entfestigung des Materials. Diese Entfestigung wurde ebenfalls mit der numerischen Simulation versucht nachzubilden und ergab zumindest eine ähnliche Tendenz in den Kurven. Um den Entfestigungsbereich besser zu approximieren, müssen weitere Studien zu den elastischen Schädigungsmodulen durchgeführt werden. Mit der hier getroffenen Vereinfachung, dass die elastischen Schädigungsmodule  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  innerhalb einer Lastkombination gleich sind, ist das Entfestigungsverhalten nur sehr schwer nachzubilden. Trotz der kleiner Unterschiede in den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen zeigte die Auswertung der Hauptverzerrungen, dass im Kerbbereich eine gute lokale Übereinstimmung zwischen Experiment und korrespondierender Simulation vorlag. Außerdem entsprechen die numerisch ermittelten Schädigungsvergleichsverzerrungen dem im Experiment aufgetretenen Riss im Kerbbereich sehr gut, wodurch mittels dieser eine Rissvorhersage denkbar wäre. Die Bandbreite der Spannungstriaxialität im Zentrum der Kerbenquerschnittsfläche liegt bei etwa  $0 \leq \eta \leq 0,68$  und deckt

somit nur die gemischte Schädigungsform sowie die Schädigung in Form von Porenbildung und -aufweitung ab. Anders ausgedrückt ist dieser Probekörper aus der Stahllegierung nur für Zug-, Scher- und Zug-Scher-Belastungen geeignet. Die aufgetretenen Schädigungsmechanismen, die mittels des Rasterelektronenmikroskops erfasst wurden, entsprachen den Spannungszuständen der jeweiligen Lastkombination. Die Bandbreite der aufgetretenen Lodeparameter liegt bei etwa  $-1 \leq \omega \leq -0,5$  und ist somit immer negativ. Außerdem ist bei der Anpassung der elastischen Schädigungsmodule für die numerische Simulation festgestellt worden, dass bei größeren Spannungstriaxialitäten betragsmäßig kleinere Werte sinnvoll sind und umgekehrt.

## 6.4 H-Probekörper aus einer Aluminiumlegierung

Die Versuchsreihe des H-Probekörpers (Kapitel 5.3.3) aus der Aluminiumlegierung AlCuMg1 umfasst eine Vielzahl an untersuchten Lastkombinationen, wovon fünf verschiedene Lastkombinationen für die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven herangezogen werden. Dazu gehören die einaxialen Lastfälle  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  und  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$ , die Zug-Scher-Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$  sowie die Druck-Scher-Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$ . Aufgrund nicht ausreichender Probekörper konnten nicht alle Experimente doppelt durchgeführt werden. Um dennoch die numerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven mit zwei experimentellen Kurven zu vergleichen, wurden bei den Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$ ,  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  jeweils die Kraft-Verschiebungs-Kurven an beiden versagten Kerben ermittelt und dargestellt. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -2 : 1$  wurde ebenfalls experimentell durchgeführt, wurde aber aufgrund von auftretendem Beulen nicht weiter berücksichtigt.

### 6.4.1 Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven

In diesem Abschnitt sind die experimentell und numerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven der bereits genannten Lastkombinationen in 1- und 2-Richtung dargestellt, um eine globale Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen aufzuzeigen. Der Vergleich dieser Kurven führte außerdem zur Anpassung der elastischen Schädigungsmodule, die somit von den ursprünglich ermittelten Materialparametern (Tabelle 5.1) abweichen, um eine bessere Übereinstimmung im Bereich der Entfestigung des Materials zu erreichen. Die für die jeweiligen Lastkombinationen verwendeten elastischen Schädigungsmodule sind in der Tabelle 6.3 zusammengefasst dargestellt. Die Abbildung 6.17 zeigt die Kraft-Verschiebungs-Kurven der fünf Lastkombinationen in 1-Richtung, wobei die experimentell ermittelten Kurven gestrichelt und die numerisch ermittelten Kurven mit einer durchgezogenen Linie dargestellt sind. Die in blau dargestellten Kraft-Verschiebungs-

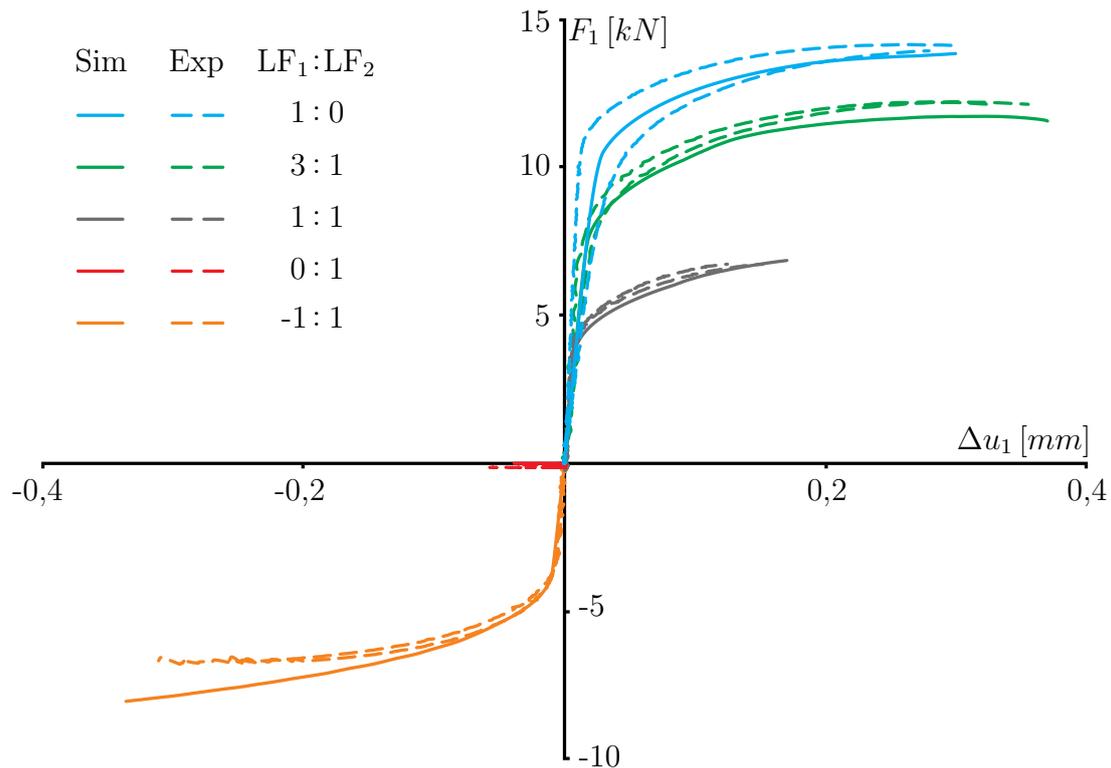
Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  erreichen im Gegensatz zu den anderen Lastkombinationen das größte Kraftniveau in 1-Richtung. Die dabei ermittelte Maximalkraft liegt im Experiment bei  $F_{1,max} \cong 14kN$ . Die Kurven der beiden Experimente dieser Lastkombination weisen im elastischen und im elastisch-plastischen Bereich deutliche Abweichungen auf. Eine mögliche Ursache dafür könnte sein, dass kleine Imperfektionen vorhanden waren, da insbesondere Abweichungen im elastischen Bereich sehr ungewöhnlich sind, was abschließend allerdings schwierig zu belegen ist. Dennoch liegt die Kraft-Verschiebungs-Kurve der

**Tab. 6.3:** Übersicht der verwendeten elastischen Schädigungsmodule der Aluminiumlegierung bei den jeweiligen Lastkombinationen

Lastkombination	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta > 0$	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta < 0$	Einheit
$LF_1 : LF_2 = 1 : 0$	-1000	1000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 3 : 1$	-10000	10000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 1 : 1$	-40000	40000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 0 : 1$	-100000	100000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = -1 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$

numerischen Simulation relativ mittig zwischen den beiden experimentellen Kurven und bildet somit eine gutes Mittelmaß. Außerdem liegen die drei Kurven im letzten Drittel des Versuchs wieder recht gut beieinander, wodurch in diesem Bereich eine gute Näherung erzielt wird. Die maximale Verschiebung in 1-Richtung dieser Lastkombination liegt bei  $\Delta u_{1,max} \cong 0,3mm$ , was dem zweithöchsten Wert aller dargestellten Lastkombinationen entspricht. Einzig die in grün dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$  erreichen mit  $\Delta u_{1,max} \cong 0,37mm$  größere Verschiebungswerte. Die experimentellen Kurven dieser Lastkombination liegen sehr nah beieinander und weisen auch zur numerischen Kurve nur kleine Abweichungen auf. Insgesamt liegen die experimentellen Kurven etwas höher als die numerische und erreichen eine Maximalkraft von  $F_{1,max} \cong 12kN$ . Die drei in grau dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zeigen einen sehr ähnlichen Verlauf, sowohl zwischen den experimentellen Kurven als auch zwischen den Kurven der Experimente und der korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulation. Bei dieser Lastkombination ist das Lastverhältnis ausgeglichen, wodurch kleinere positive Kräfte und Verschiebungen in 1-Richtung auftreten als bei den Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  und  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$ . So wird bei dieser Lastkombination eine maximale Kraft von  $F_{1,max} \cong 6,5kN$  und eine maximale Verschiebung von  $\Delta u_{1,max} \cong 0,15mm$  erreicht. Hierbei ist für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  eine guten Übereinstimmung zwischen Experiment und

Simulation zu erkennen. Die Kraft-Verschiebungs-Kurven der einaxialen Belastung mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  sind mit roten durchgezogenen beziehungsweise gestrichelten Linien dargestellt. Da bei dieser Lastkombination nur in 2-Richtung belastet wird, ist in den entsprechenden Kurven in 1-Richtung auch kein Kraftzuwachs zu erkennen. Dennoch resultiert aufgrund der Kraft in 2-Richtung eine negative Verschiebung in 1-Richtung. Der Extremwert dieser Ver-

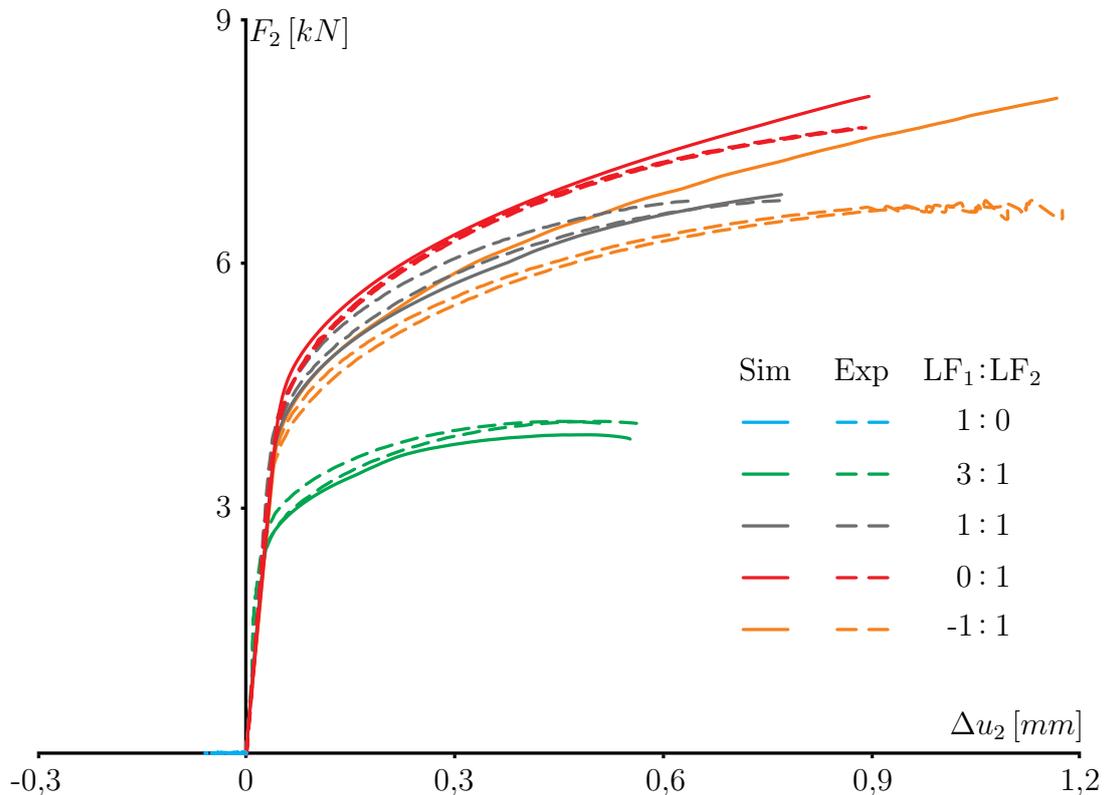


**Abb. 6.17:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung der H-Probe aus AlCuMg1

schiebung liegt sowohl in den Experimenten als auch bei der numerischen Berechnung bei  $\Delta u_{1,max} \cong -0,05mm$ . Für diese Lastkombination kann ebenfalls eine gute Approximation der Experimente angenommen werden. Die bei der Druck-Scherlastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven in 1-Richtung sind in orange dargestellt. Aufgrund des negativen Lastfaktors  $LF_1$  werden sowohl negative Kräfte also auch negative Verschiebungen in 1-Richtung erreicht. Dabei zeigt sich zunächst, dass die experimentellen Kurven nur minimale Abweichungen voneinander aufweisen. Dagegen zeigt die Kraft-Verschiebungs-Kurve der korrespondierenden Simulation nur eine gute Übereinstimmung im elastischen und elastisch-plastischen Bereich gegenüber den experimentellen Kurven. Ab einer Verschiebung von etwa  $\Delta u_1 \cong -0,2mm$  nimmt die Abweichung stetig zu, die auch durch einfache Variationen der elastischen Schädigungsmodule nicht minimiert werden konnte. Insgesamt liegen für diese Lastkombination die

experimentellen Extremwerte der Kraft bei  $F_1 \cong 6,5kN$  und der Verschiebung bei  $\Delta u_1 \cong -0,3mm$ . Die elastisch-plastisch-schädigende Berechnung erreicht im Gegensatz dazu eine Kraft von  $F_1 \cong 8kN$ . Zusammenfassend zeigt sich, dass bei fast allen untersuchten Lastkombinationen, ausgenommen der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$ , eine gute Übereinstimmung anhand der dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven zwischen Experimenten und elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen festzustellen ist.

Um diese Übereinstimmung auch in die 2-Richtung zu überprüfen, ist das ent-



**Abb. 6.18:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 2-Richtung der H-Probe aus AlCuMg1

sprechende Kraft-Verschiebungs-Diagramm in der Abbildung 6.18 dargestellt. Die roten Kraft-Verschiebungs-Kurven der einaxialen Belastung mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  zeigen auf, dass die experimentellen Kurven sehr gut übereinander liegen und die Kurve der numerischen Berechnung bis zum letzten Drittel ebenfalls gut angenähert ist. Am Ende des Versuchs liegt die Kraft-Verschiebungs-Kurve der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung etwas über den experimentellen Kurven. Der dabei ermittelte maximale Kraftwert liegt bei  $F_{2,max} \cong 8kN$ , der damit auch der größte Wert in 2-Richtung aller Lastkombinationen ist. Die in grau dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zeigen in 2-Richtung nur minimale Abweichungen zwischen den experimentellen Kurven und der numerischen Kurve.

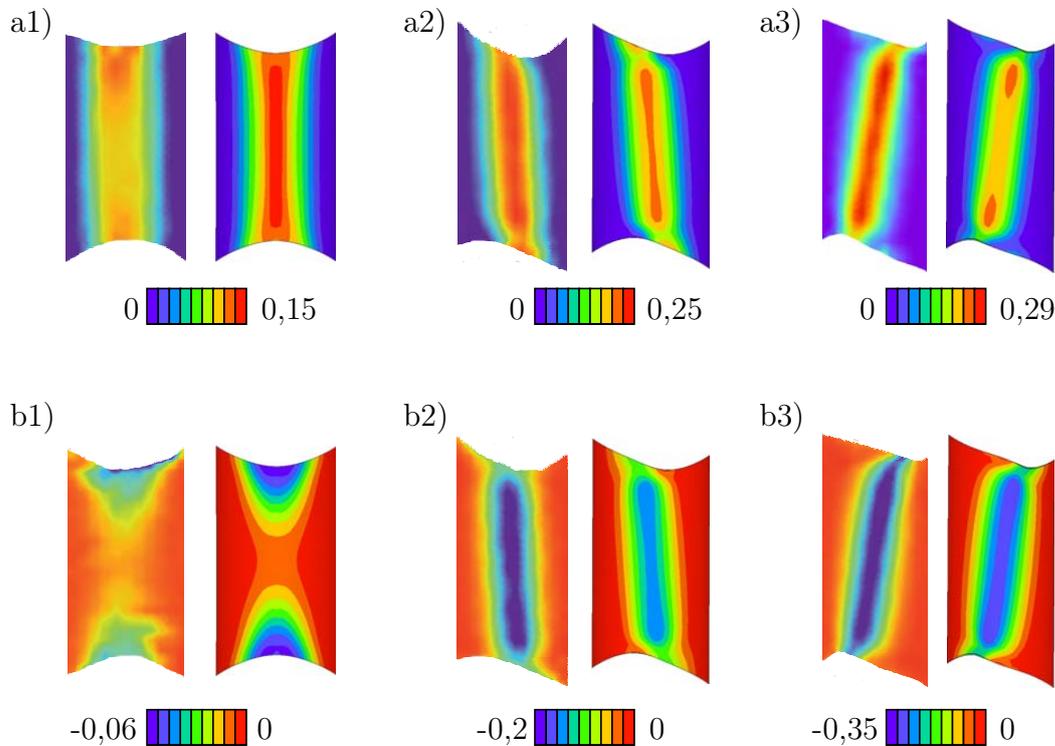
Das erreichte Kraftniveau in 2-Richtung entspricht dem der 1-Richtung. Aufgrund der gleichen Lastfaktoren in beiden Richtungen war dies auch zu erwarten. Allerdings ist die Verschiebung in 2-Richtung eine andere, die aufgrund der Geometrie und der vorgegebenen konstanten Kraftverhältnisse nichtproportional zur 1-Richtung sein kann. Die maximale Verschiebung liegt in 2-Richtung bei  $\Delta u_{2,max} \cong 0,8mm$  und ist somit viermal so groß wie die Verschiebung in 1-Richtung. Für die in orange dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  ist zunächst die gute Übereinstimmung der experimentellen Kurven festzuhalten. Dagegen zeigt die Kurve der korrespondierenden Simulation wie bereits in der 1-Richtung deutliche Abweichungen zu den Experimenten. Dies spiegelt das bekannte Problem wieder, dass bei Belastungen mit hoher Scherbeanspruchung die aus Zugversuchen gewonnenen Materialparameter teilweise nicht zu dem experimentell beobachteten Materialverhalten führen. Bei dieser Lastkombination liegt die maximale Kraft der Experimente bei  $F_{2,max} \cong 6kN$  und es wird eine maximale Verschiebung von  $\Delta u_{2,max} \cong 1,2mm$  erreicht, die der größten Verschiebung in 2-Richtung aller Lastkombinationen entspricht. Die Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$  sind in der Abbildung 6.18 in grün dargestellt und zeigen sowohl zwischen den experimentellen Kurven als auch zwischen den experimentellen und der numerischen Kurve eine recht gute Übereinstimmung. Aufgrund des dominanten Lastfaktors in 1-Richtung liegt die maximale Kraft in 2-Richtung bei nur  $F_{2,max} \cong 4kN$  und die maximale Verschiebung bei  $\Delta u_{2,max} \cong 0,6mm$ . Auch wenn die Kraft-Verschiebungs-Kurve der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung im letzten Drittel etwas unter den experimentellen Kurven liegt, kann dennoch von einer guten Approximation gesprochen werden. Die blauen Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  liegen aufgrund der Lastfaktoren bei einem Kraftniveau von Null in 2-Richtung. Trotz der konstanten Kraft  $F_2 = 0$  resultiert aufgrund der Kraft in 1-Richtung eine Verschiebung von  $\Delta u_{2,max} \cong -0,05mm$ , die sowohl in den Experimenten als auch bei der korrespondierenden Simulation annähernd erreicht werden. Resultierend aus den gezeigten Kraft-Verschiebungs-Diagrammen ist festzuhalten, dass bei allen experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven keine Entfestigung des Materials sichtbar wird. Alle hier untersuchten H-Probekörper aus der Aluminiumlegierung versagen, sobald die Kraft-Verschiebungs-Kurven annähernd horizontal verlaufen. Außerdem zeigt sich bei den Lastkombinationen mit großen Scherbeanspruchungen, dass die Kurven der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen zum Teil deutlicher von den experimentellen Kurven abweichen. Dieses Verhalten wird bei der Druck-Scher-Belastung noch sichtbar verstärkt. Dies führt im Endeffekt dazu, dass aufgrund der Kraft-Verschiebungs-Diagramme nur für die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ,  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  von einer guten globalen Übereinstimmung zwischen Experimenten und korrespondierenden Simulationen gesprochen werden kann. Für die Lastkombinationen mit größerem Schereinfluss, somit  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$ , kann zumindest von einer guten Tendenz in den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen gesprochen

werden.

### 6.4.2 Lokale Auswertung ausgewählter Lastkombinationen

Ausgehend von den zu erwartenden Spannungstriaxialitäten der jeweiligen Versuche werden zur lokalen Auswertung die Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , entspricht der Belastung mit der größten Spannungstriaxialität, und  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$ , die die niedrigste Spannungstriaxialität erwarten lässt, verwendet. Hinzu kommt die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , bei der die Spannungstriaxialität zwischen den beiden Wertebereichen der erstgenannten Lastkombinationen liegt. Eine Möglichkeit, die lokale Übereinstimmung zwischen Experimenten und korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen zu überprüfen, ist die Auswertung der lokal auftretenden Hauptverzerrungen. Dazu sind in der Abbildung 6.19 die experimentell und numerisch bei einer Verschiebung  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$  ermittelten Hauptverzerrungen  $A_{max}$  und  $A_{min}$  auf der Kerbenoberfläche der jeweiligen Lastkombinationen gegenübergestellt. Die Auswertung der Hauptverzerrung  $A_{max}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , die in der Abbildung 6.19 a1) dargestellt ist, zeigt zunächst eine recht ähnliche Verteilung zwischen den experimentellen (links) und den numerischen Verzerrungswerten (rechts). Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass zwar sowohl im Experiment als auch in der Simulation ein markantes vertikales Verzerrungsband entstanden ist, die sich aber hinsichtlich der Maximalwerte unterscheiden. Es fand somit in der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung eine etwas stärkere Lokalisierung statt, wodurch das Verzerrungsband etwas schmaler ist und größere Verzerrungswerte um  $A_{max} \cong 0,15$  aufweist. Bei der experimentellen Auswertung treten die größten Verzerrungswerte am oberen und unteren Rand der Kerbe auf, wohingegen in der Simulation im Zentrum die größten Werte festzustellen sind. Die Verformung der Kerbenoberfläche ist zwischen Experiment und Simulation nahezu gleich und zeigt das für einaxialen Zugbelastungen typische Verhalten einer leichten Einschnürung in vertikaler Richtung. Die ermittelten Hauptverzerrungen  $A_{max}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , siehe Abbildung 6.19 a2), zeigen ebenfalls eine ähnliche Verteilung zwischen Experiment und numerischer Berechnung. Hierbei entwickelt sich ein Verzerrungsband, das von der vertikalen Achse aus leicht gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist. Dieser Abbildung ist außerdem zu entnehmen, dass das Verzerrungsband im Experiment deutlich breiter ausgeprägt ist und auch größere Werte um  $A_{max} \cong 0,25$  annimmt. Die durch den Lastfaktor  $LF_2 = 1$  hervorgerufene Scherbelastung bewirkt im Kerbbereich, dass sich der rechte und linke Rand der Kerbenoberfläche gegenläufig in vertikaler Richtung verschoben haben. Dieses Verformungsverhalten ist sowohl im Experiment als auch in der Simulation deutlich zu erkennen. Die für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  ermittelten Hauptverzerrungen  $A_{max}$  sind in der Abbildung 6.19 a3) veranschaulicht und zeigen ein Verzerrungsband, das aufgrund des Lastfaktors  $LF_1 = -1$  von der Vertikalen aus im Uhrzeigersinn geneigt ist. Trotz der

zu erkennenden ähnlichen Verzerrungsverteilung ist das Verzerrungsband im Experiment deutlich ausgeprägter als in der elastisch-plastisch-schädigenden Simulation. So zeigt das experimentell ermittelte Verzerrungsband über die gesamte Länge Verzerrungen um  $A_{max} \cong 0,29$  auf, wohingegen sichtbar kleinere Werte in der Simulation auftreten und es nur zwei kleine Bereiche gibt, bei denen die Verzerrung annähernd an die Maximalwerte des Experiments herankommt. Eine gute Übereinstimmung ist hierbei im Verformungsverhalten festzustellen. Aufgrund der Scherbelastung sind der linke und rechte Rand der Kerbenoberfläche sowohl im Experiment als auch in der Simulation gegenseitig versetzt. Außerdem ist die Auswirkung der Druckbelastung in 1-Richtung zu erkennen, da die Kerbenoberflächen in der horizontalen Richtung etwas gestaucht sind. Insgesamt



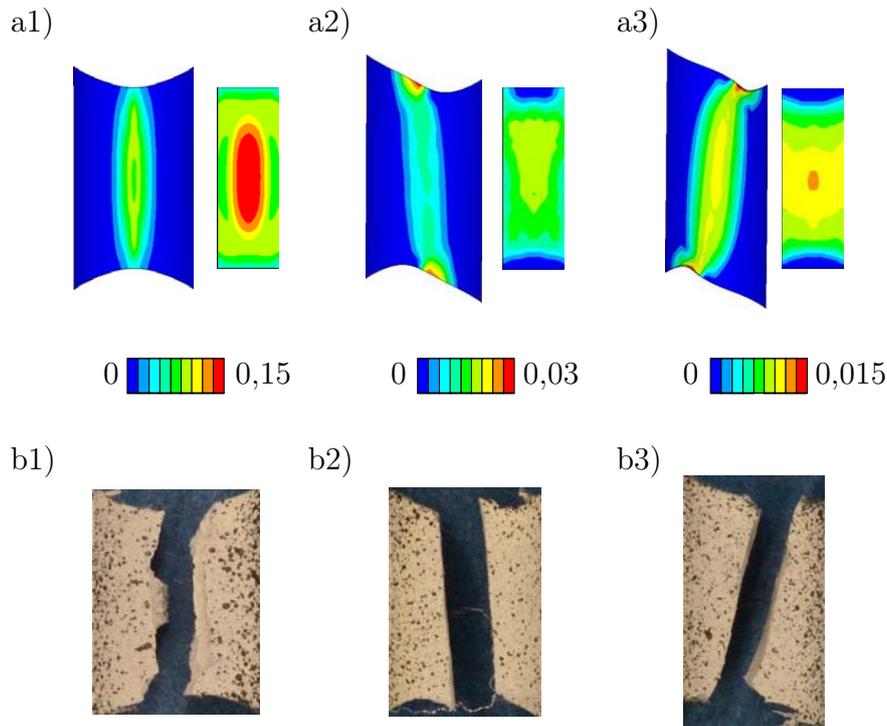
**Abb. 6.19:** Vergleich der Hauptverzerrungen auf der Kerbenoberfläche bei  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$ : a) Hauptverzerrung  $A_{max}$  (v.l. Exp + Sim); b) Hauptverzerrung  $A_{min}$  (v.l. Exp + Sim); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$

zeigen die drei Vergleiche der Hauptverzerrung  $A_{max}$  in den Abbildungen 6.19 a1) bis a3), dass eine gute Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den korrespondierenden numerischen Simulationen hinsichtlich der Verzerrungsverteilung und des Verformungsverhalten gibt. Dennoch zeigt sich die Tendenz, dass die Verzerrungsbänder in den Experimenten etwas breiter ausgeprägt sind. Außerdem werden nur bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  in der elastisch-

plastisch-schädigenden Berechnung höhere Verzerrungswerte erreicht. Bei den anderen beiden Lastkombinationen ist dies umgekehrt. Des Weiteren bleibt festzuhalten, dass durch Zunahme der Scherbelastung auch größere Verzerrungen  $A_{max}$  erreicht werden. Die Auswertung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  ist den Abbildungen 6.19 b1) bis b3) für die jeweiligen Lastkombinationen dargestellt. Für die in der Abbildung 6.19 b1) repräsentierte Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  ist zumindest eine ähnliche Tendenz der Verzerrungsverteilung zu erkennen. Die Extremwerte von  $A_{min} \cong -0,06$  liegen am oberen und unteren Rand der Kerbenoberfläche und scheinen in der numerischen Simulation ausgeprägter zu sein. Bei der Auswertung der experimentellen Verzerrungen  $A_{min}$  müssen allerdings zwei Dinge berücksichtigt werden. Zum einen sind die Randbereiche der Probe schwer auszuwerten und teilweise leicht fehlerbehaftet, was zu dieser unterschiedlichen Ausprägung geführt haben könnte. Zum anderen sind die Verzerrungswerte so klein, sodass die Messgenauigkeit mit der optischen Erfassung mittels der digitalen Bildkorrelation an ihre Grenzen kommt. Dies könnte auch erklären, warum die Verzerrungsverteilung im Experiment etwas verschwommen wirkt. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zeigt sich bei der Auswertung der Hauptverzerrung  $A_{min}$  in der Abbildung 6.19 b2) ein annähernd gleiches Bild wie bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$ . Zwar haben die Verzerrungswerte ein anderes Vorzeichen, dennoch ist die Verzerrungsverteilung sehr ähnlich. Das Verzerrungsband ist ebenfalls im Experiment ausgeprägter und leicht gegen den Uhrzeigersinn geneigt. Auch die erreichten Extremwerte von  $A_{min} \cong -0,2$  entsprechen betragsmäßig in etwa der Hauptverzerrung  $A_{max}$ . Die in der Abbildung 6.19 b3) dargestellte Hauptverzerrung  $A_{min}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experiment und korrespondierender numerischer Berechnung hinsichtlich der Verteilung und der Extremwerte. Das Verzerrungsband ist wie bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$  leicht im Uhrzeigersinn gedreht und erreicht einen Extremwert von  $A_{min} \cong -0,35$ . Somit bleibt festzuhalten, dass auch bei der Hauptverzerrung  $A_{min}$  bei allen Lastkombinationen von einer recht guten lokalen Übereinstimmung gesprochen werden kann, auch wenn es an manchen Stellen minimale Abweichungen gibt. Zusammenfassend ist aufgrund der gezeigten Hauptverzerrungen  $A_{max}$  und  $A_{min}$  auf der Kerbenoberfläche für alle Lastkombinationen eine gute lokale Übereinstimmung zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender Berechnung festzustellen.

Um das Schädigungs- und Versagensverhalten genauer beurteilen zu können, liefert die Auswertung der numerisch ermittelten Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  zum Zeitpunkt des Versagens im Experiment wichtige Informationen. Um diese mit den experimentellen Ergebnissen in Verbindung zu bringen, ist in der Abbildung 6.20 die Schädigungsvergleichsverzerrung im Kerbbereich den Rissbildern der versagten Kerben der jeweiligen Lastkombination gegenübergestellt. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  ist die Schädigungsvergleichsverzerrung der Kerbenoberfläche und der Querschnittsfläche der Kerbe in der Abbildung 6.20 a1) dargestellt. Auf der Kerbenoberfläche ist ein vertikales Band zu erkennen, dessen Form leicht oval ist und dessen Maximalwerte im Zentrum der Kerbeno-

berfläche liegen. Mit Blick auf die Querschnittsfläche zeigt sich allerdings, dass im Zentrum der Fläche eine starke Lokalisierung stattgefunden hat und dort fast doppelte so große Schädigungsvergleichsverzerrungen auftreten wie auf der Kerbenoberfläche. Das Maximum liegt hierbei etwa bei  $\mu_{max} \cong 0,15$ . Außerdem zeigt



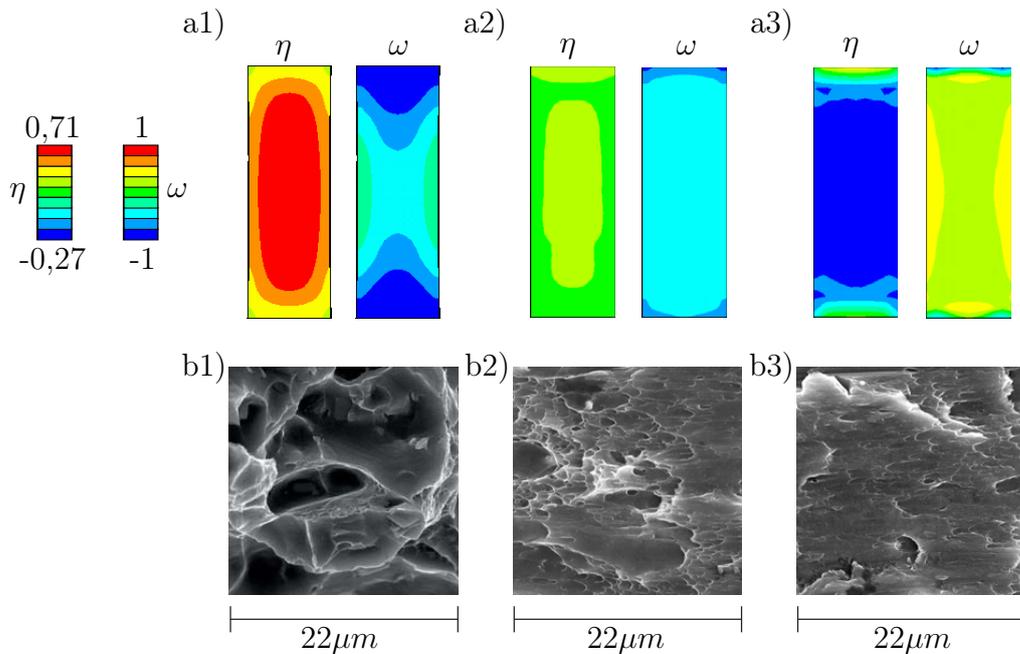
**Abb. 6.20:** Vergleich des Schädigungsverhaltens: a) Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$ : links Kerbenoberfläche und rechts Querschnittsfläche (Sim); b) Rissbild (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$

sich deutlich, dass in der gesamten Querschnittsfläche Schädigungsvergleichsverzerrungen auftreten, die vom Zentrum aus zum Rand hin abnehmen. Das auf der Kerbenoberfläche ermittelte Band passt sehr gut zum in der Abbildung 6.20 b1) dargestellten Rissbild dieser Lastkombination. Das Rissbild zeigt ein vertikales Versagen im Kerbbereich und eine ungleichmäßige Risskante. Aufgrund der hohen Zugbeanspruchung dieser Lastkombination wird der Probekörper förmlich auseinandergerissen, was die scharfen und unregelmäßigen Kanten erklären könnte. Außerdem deutet die hohe Schädigungsvergleichsverzerrung im Zentrum der Querschnittsfläche darauf hin, dass das Versagen des Materials in der Mitte der Kerbe begonnen haben könnte. Die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  ist in der Abbildung 6.20 a2) dargestellt und zeigt ebenfalls ein Band auf der Kerbenoberfläche, das leicht gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist. Die maximalen Werte  $\mu_{max} \cong 0,03$  liegen am oberen

und unteren Rand des Bands, wo sich zwei Lokalisierungen gebildet haben. Die Werte sind deutlich kleiner als bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , was auf den Einfluss der Scherbelastung zurückzuführen ist. Die Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung in der Querschnittsfläche zeigt, dass bis auf kleine Bereiche am oberen und unteren Rand überall Schädigungsvergleichsverzerrungen auftreten. Die größten Werte treten dabei in der oberen Hälfte der Querschnittsfläche auf, die zum Rand hin abnehmen. Das korrespondierende experimentell ermittelte Rissbild dieser Lastkombination, das in der Abbildung 6.20 b2) dargestellt ist, zeigt einen Riss, der ebenfalls wie das numerisch ermittelte Schädigungsverzerrungsband leicht gegen den Uhrzeigersinn geneigt ist. Im Gegensatz zur zugdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  sind die Risskanten deutlich glatter, was auf die Abscherung aufgrund der Scherbelastung zurückzuführen ist. Aufgrund der ermittelten maximalen Schädigungsvergleichsverzerrungen ist es außerdem denkbar, dass der Riss am oberen beziehungsweise unteren Rand begonnen haben könnte. Die Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$ , siehe Abbildung 6.20 a3), zeigt auf der Kerbenoberfläche ein Band, das diesmal aufgrund der Druckbelastung in 1-Richtung leicht im Uhrzeigersinn gedreht ist. Die Maximalwerte von  $\mu_{max} \cong 0,015$  werden am oberen und unteren Rand des Schädigungsverzerrungsbands erreicht und sind damit die kleinsten aller Lastkombinationen. In der Querschnittsfläche zeigt sich, dass die größten Werte im Zentrum der Fläche auftreten und zum oberen und unteren Rand hin abnehmen, wo annähernd keine Schädigungsvergleichsverzerrung ermittelt wurde. Der dargestellte Riss des Probekörpers in der Abbildung 6.20 besitzt eine ähnliche Neigung wie das numerisch ermittelte Schädigungsverzerrungsband. Zusammenfassend gilt für alle drei Lastkombinationen, dass aufgrund der Schädigungsentwicklung jeweils Schädigungsverzerrungsbänder entstehen, die die Risse in den Experimenten sehr gut prognostizieren können. Außerdem treten bei Lastkombinationen mit Scherbeanspruchung die größten Schädigungsvergleichsverzerrungen am oberen beziehungsweise unteren Rand der Kerbenoberfläche auf, wohingegen bei stark dominanter Zugbeanspruchung die Lokalisierung sehr markant im Zentrum der Querschnittsfläche auftritt. Die numerisch ermittelten Schädigungsvergleichsverzerrungen zeigen ebenfalls auf, dass bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  der Maximalwert das fünf- beziehungsweise zehnfache der Maximalwerte der anderen beiden Lastkombinationen darstellt.

Um die auftretenden Schädigungsmechanismen, die letztendlich zum Versagen des Materials führen, zu identifizieren und dem korrespondierenden Spannungszustand gegenüberzustellen, sind in der Abbildung 6.21 die numerisch ermittelte Spannungstriaxialität und der Lodeparameter in der Kerbenquerschnittsfläche sowie Ausschnitte der unter dem Rasterelektronenmikroskop untersuchten Bruchflächen der jeweiligen Lastkombination dargestellt. Die Spannungszustände der zugdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , die in der Abbildung 6.21 a1) dargestellt sind, zeigen eine große Spannungstriaxialität von  $\eta \cong 0,71$ , die ovalförmig einen Großteil der Querschnittsfläche abdeckt. Ausgehend vom Zentrum der Querschnittsfläche nehmen die Werte der Spannungstriaxialität leicht ab. Der

ermittelte Lodeparameter ist auf der gesamten Querschnittsfläche negativ und erreicht am oberen und unteren Rand einen Wert von  $\omega \cong -1$ . Am rechten und linken Rand der Querschnittsfläche treten die größten Werte des Lodeparameters auf, die leicht negativ sind. Im Zentrum der Fläche liegt der Lodeparameter bei



**Abb. 6.21:** Auswertung der Spannungszustände bei  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$  und Vergleich mit Bruchflächen: a) v.l. Spannungstriaxialität  $\eta$  und Lodeparameter  $\omega$  (Sim); b) Bruchfläche im REM (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$

etwa  $\omega \cong -0,5$ . Aufgrund der hohen Spannungstriaxialität wird die auftretende Schädigung in Form von Porenaufweitung erwartet. Dieser Schädigungsmechanismus ist in der Auswertung der Bruchfläche in der Abbildung 6.21 b1) auch sichtbar, da sehr große Poren und keine Schermechanismen zu sehen sind. Im Gegensatz dazu sind in der Bruchfläche der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , siehe Abbildung 6.21 b2), sowohl Poren als auch Schermechanismen erkennbar. Die Poren sind dabei deutlich kleiner als bei der zugdominanten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , was deren Porenaufweitung somit bestätigt. Zur festgestellten gemischten Schädigungsform bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  passt die numerisch ermittelte Spannungstriaxialität der Abbildung 6.21 a2), die etwa im Bereich  $0,2 \leq \eta \leq 0,3$  liegt. Die Verteilung des Lodeparameters dieser Lastkombination ist sehr homogen mit Werten um  $\omega \cong -0,5$ . Nur in kleinen Bereichen am oberen und unteren Rand der Querschnittsfläche nimmt der Lodeparameter etwas kleinere Werte an. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  sind die numerisch ermittelten Spannungszustände in der Abbildung 6.21 a3) dargestellt und zeigen für die Spannungstriaxialität einen großen homogenen Bereich mit

Werten um  $\eta \cong -0,27$  im Zentrum der Fläche. Am oberen und unteren Rand der Kerbenquerschnittsfläche nimmt die Spannungstriaxialität etwas zu. Der Lodeparameter dieser Lastkombination ist fast auf der gesamten Fläche positiv mit Werten zwischen  $0,3 \leq \omega \leq 0,4$ . Auch hierbei treten am oberen und unteren Rand leichte Veränderungen auf, an denen der Lodeparameter etwas kleiner wird. Die negative Spannungstriaxialität in der Querschnittsfläche deutet auf Schädigung infolge von Schermechanismen hin. Diese sind in der Abbildung 6.21 b3) im Ausschnitt der Bruchfläche auch deutlich zu erkennen. Des Weiteren sind keine Poren zu erkennen, was im Umkehrschluss bedeutet, dass vorhandene Poren zusammengedrückt und/oder keine Porenbildung stattfand. Somit korrespondieren bei allen drei Lastkombinationen die festgestellten Schädigungsmechanismen in der Bruchfläche den numerisch ermittelten Spannungszuständen.

### 6.4.3 Bewertung der H-Probengeometrie für die Aluminiumlegierung

In dieser Versuchsreihe wurde die H-Probe aus AlCuMg1 unter verschiedenen einaxialen und biaxialen Belastungen untersucht. Die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Diagramme zeigte eine gute globale Übereinstimmung zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender Berechnung für die beiden Zug-Scher-Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 3 : 1$  sowie für die einaxiale Zugbelastung  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ . Bei der annähernd reinen Scherbelastung  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  und der Druck-Scher-Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  traten spätestens im letzten Drittel deutlichere Abweichungen zwischen den Kraft-Verschiebungs-Kurven auf. Außerdem ist auch bei dieser Probengeometrie aus der Aluminiumlegierung festzustellen, kann keine sichtbare Entfestigung des Materials auftreten. Die lokale Betrachtung der Hauptverzerrungen zeigte, dass bei den drei im Detail untersuchten Lastkombinationen zwischen Experiment und Simulation zwar ähnliche Tendenzen bis teilweise gute Annäherungen zu erkennen sind, aber keine der drei Lastkombinationen eine gute Übereinstimmung in beiden Hauptverzerrungen aufweist. Die Verteilung der numerisch ermittelten Schädigungsvergleichsverzerrungen entsprechen den im Experiment festgestellten Rissen des Kerbbereichs. Außerdem wurden bei der einaxialen Zugbelastung  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  annähernd fünf beziehungsweise zehnfach größere Schädigungsvergleichsverzerrungen erreicht als bei den anderen beiden Lastkombinationen. Mit den unterschiedlichen Lastkombination konnte die H-Probe eine Bandbreite der Spannungstriaxialität von  $-0,27 \leq \eta \leq 0,71$  und des Lodeparameters von  $-0,5 \leq \omega \leq 0,5$  im zentralen Bereich der Kerbenquerschnittsfläche abdecken. Die unter dem Rasterelektronenmikroskop festgestellten Schädigungsmechanismen in der Bruchfläche passen zum jeweiligen numerisch ermittelten Spannungszustand. Insgesamt ist die H-Probe aus der Aluminiumlegierung somit für sämtliche Zug-, Scher- und Zug-Scher-Kombinationen geeignet. Außerdem können Druck-Scher-Lastkombinationen durchgeführt werden, bei denen die Scherbelastung dominiert. Von druckdominanten Lastkombinationen mit dieser

Probe aus der Aluminiumlegierung ist aufgrund der festgestellten Ergebnisse abzurufen. Um diesen Probekörper unter höherem Druck untersuchen zu können, müssten die Querschnittsflächen der Kerben verringert werden. Aufgrund der vier Kerben ist allerdings eine deutlichere Reduzierung der Querschnittsfläche notwendig, um Materialversagen vor auftretendem Beulen zu gewährleisten. Die angepassten und in der numerischen Simulation verwendeten elastischen Schädigungsmoduldeuten darauf hin, dass bei Lastkombination mit großer Spannungstriaxialität eher betragsmäßig kleine Werte angenommen wurden. Die kleineren Spannungstriaxialitäten, die bei den anderen Lastkombinationen auftraten, konnten mit betragsmäßig größeren elastischen Schädigungsmodulen besser abgebildet werden.

## 6.5 H-Probekörper aus einer Stahllegierung

Die Untersuchung des H-Probekörpers aus der Stahllegierung X5CrNi18-10 mit den Materialparametern der Tabelle 5.2 umfasst fünf verschiedene Lastkombinationen. Dazu gehört die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , die einer einaxialen Belastung entspricht und zugleich der zugdominanteste Lastfall ist. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  führt aufgrund der Probengeometrie zu einer Scherbelastung. Die restlichen drei Lastkombinationen entsprechen biaxialen Belastungen. Diese beinhalten mit den Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zwei Zug-Scher-Belastungen und mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  eine Druck-Scher-Beanspruchung. Die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  führte zu Beulen und wird somit nicht berücksichtigt.

### 6.5.1 Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven

Zur Überprüfung der globalen Übereinstimmung zwischen den Experimenten und korrespondierender elastisch-plastisch-schädigender Berechnung werden im Folgenden die ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven dargestellt, die mit angepassten elastischen Schädigungsmodulen  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  (siehe Tabelle 5.2) errechnet wurden. In der Abbildung 6.22 sind zunächst die experimentell und numerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven der 1-Richtung dargestellt. Die gestrichelten roten Kraft-Verschiebungs-Kurven entstammen den beiden durchgeführten Experimenten mit der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  und zeigen in der zweiten Hälfte des Versuchs deutliche Abweichungen in ihren Kurven. Auch die rote durchgezogene Kraft-Verschiebungs-Kurve der korrespondierenden numerischen Simulation unterscheidet sich nochmal deutlich von beiden experimentellen Kurven. Besonders der große Unterschied im elastisch-plastischen Bereich ist zum jetzigen Zeitpunkt nicht ganz nachvollziehbar. Da dieses Verhalten aber auch bei den beiden Zug-Scher-Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , deren Auswertung gleich anschließt, auftritt, könnten sich Mikrodefekte bei der Stahllegierung unter bei Zug- und Zug-Scher-Belastungen

verstärkt auswirken. Die maximale Kraft  $F_{1,max} \cong 19kN$  und maximale Verschiebung  $\Delta u_{1,max} \cong 1,9mm$  dieser Lastkombination werden in einem der beiden Experimente erreicht. Für die experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven der

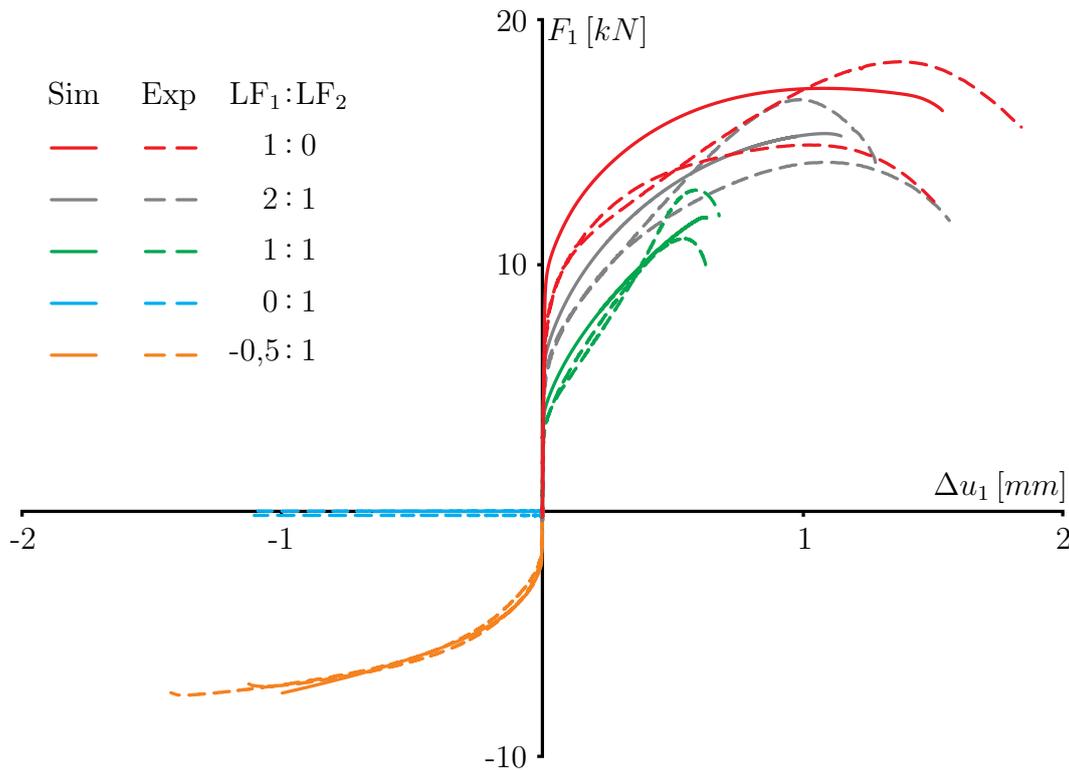
**Tab. 6.4:** Übersicht der verwendeten elastischen Schädigungsmodule für die Stahllegierung bei den jeweiligen Lastkombinationen

Lastkombination	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta > 0$	$\eta_1$ bis $\eta_4$ für $\eta < 0$	Einheit
$LF_1 : LF_2 = 1 : 0$	-10000	10000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 2 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 1 : 1$	-70000	70000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = 0 : 1$	-150000	150000	$[N/mm^2]$
$LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$	-1500000	1500000	$[N/mm^2]$

Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  gilt vom Verlauf her das gleiche wie bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ . Die Kurven liegen im elastisch-plastischen Bereich noch sehr gut beieinander, verlaufen aber plötzlich in der zweiten Hälfte des Versuchs in unterschiedliche Richtungen. Auch die numerisch ermittelte Kraft-Verschiebungs-Kurve liegt im elastisch-plastischen Bereich zunächst über den Experimenten und am Ende wieder zwischen ihnen. Beim einen Experiment wird die maximale Kraft  $F_{1,max} \cong 16,5kN$  und beim anderen die maximale Verschiebung  $\Delta u_{1,max} \cong 1,5mm$  dieser Lastkombination erreicht. Die grün dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zeigen ebenfalls die gleiche Tendenz im Verlauf wie bei den Lastkombinationen zuvor. Allerdings sind aufgrund der kleineren Maximalkraft von  $F_{1,max} \cong 13kN$  auch kleineren Abweichungen zwischen den Kurven zu erkennen. Die maximale Verschiebung dieser Lastkombination liegt bei etwa  $\Delta u_{1,max} \cong 0,68mm$ , was der betragsmäßig kleinsten Verschiebung in 1-Richtung aller Lastkombinationen darstellt. Für die blauen Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  wird aufgrund des Lastfaktors  $LF_1 = 0$  kein Kraftzuwachs festgestellt. Aufgrund der Belastung in 2-Richtung resultiert allerdings eine Verschiebung in negativer 1-Richtung. Hierbei liegen die experimentellen Kurven gleich auf und erreichen annähernd eine Verschiebung von  $\Delta u_1 \cong -1,1mm$ . Die korrespondierende numerische Berechnung führt allerdings nur zu einer Verschiebung von  $\Delta u_1 \cong -0,65mm$ . Die Kraft-Verschiebungs-Kurven der einzigen untersuchten Druck-Scher-Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation während der gesamten Belastung, auch wenn eine der experimentellen Kurven etwas weiter verläuft. Bei dieser Lastkombination werden Kräfte von  $F_1 \cong -7,5kN$  und Verschiebungen bis  $\Delta u_1 \cong -1,4mm$  erreicht, was der größten Verschiebung aller Lastkombinationen

in negativer 1-Richtung entspricht. Die experimentellen Kurven der Lastkombinationen mit Zugbeanspruchung, demnach  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ,  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ , weisen am Ende einen Kraftabfall, der als Entfestigung des Materials zu deuten ist, auf. Bei den korrespondierenden Simulationen war es trotz verschiedener Variationen der elastischen Schädigungsmodule nicht möglich, diesen Bereich der Entfestigung abzubilden.

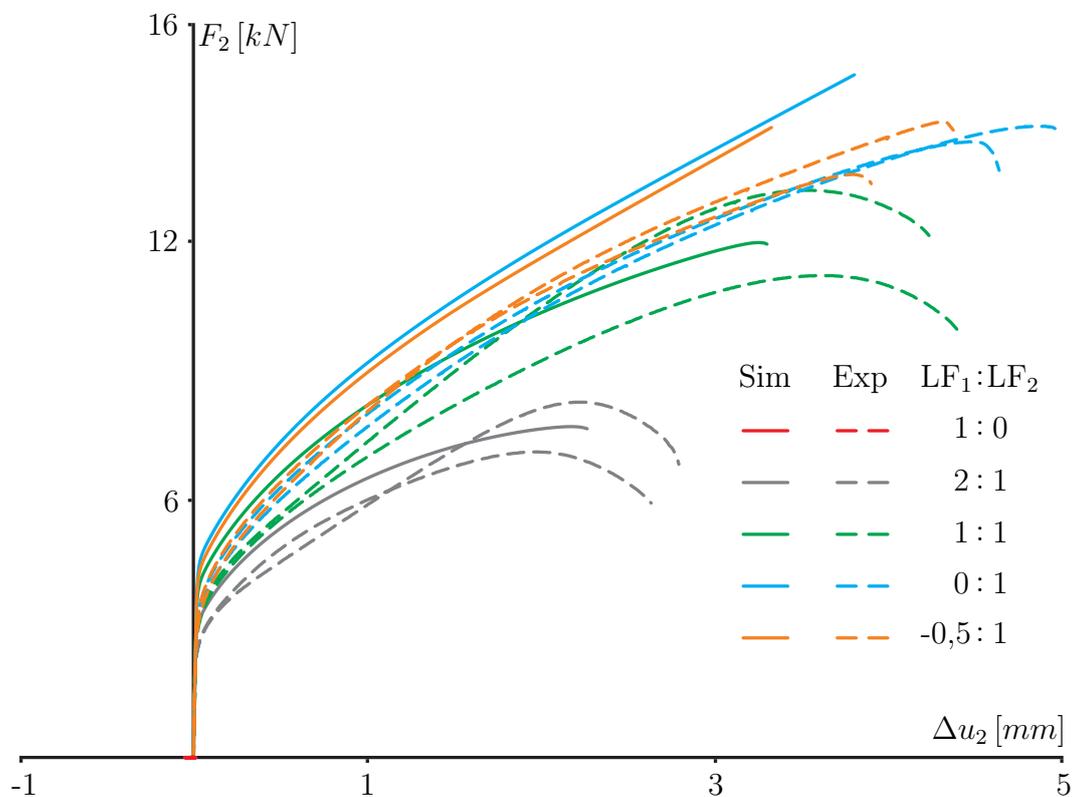
Des Weiteren erfolgt die Auswertung der Kraft-Verschiebungs-Kurven in 2-Richt-



**Abb. 6.22:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 1-Richtung der H-Probe aus X5CrNi18-10

ung anhand des in der Abbildung 6.23 dargestellten Diagramms. Die in rot dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , die bei einer Kraft  $F_2 \cong 0$  auf der Verschiebungsachse liegen, erreichen eine Verschiebung von  $\Delta u_2 \cong -0,06mm$ . Das zeigt auch, dass die Belastung in 1-Richtung deutlich weniger Einfluss auf die andere Richtung hat als umgekehrt, wie bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  in 1-Richtung zu erkennen war. Die Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 2 : 1$  zeigen eine maximale Kraft von  $F_{2,max} \cong 8kN$  und eine maximale Verschiebung von  $\Delta u_2 \cong 3mm$ . Auch in 2-Richtung ist für die Lastkombination eine Abweichung zwischen den experimentellen Kurven, vor allem in der zweiten Hälfte des Versuchs, sichtbar. Die numerisch ermittelte Kraft-Verschiebungs-Kurve liegt wie

bereits in 1-Richtung zunächst im elastisch-plastischen Bereich über den experimentellen Kurven und liegt am Ende dazwischen. Auch bei den in grün dargestellten Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  zeigt sich die experimentelle Streuung dieses Probekörpers aus der Stahllegierung. Die Kraft-Verschiebungs-Kurve der korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung liegt ebenfalls im elastisch-plastischen Bereich über den experimentellen Kurven und verläuft zum Ende hin zwischen die beiden Kurven. Die maximal erreichte Kraft von  $F_{2,max} \cong 13kN$  entspricht aufgrund des Kraftverhältnisses zwischen beiden Achsen annähernd der Kraft in 1-Richtung. Für diese Lastkombination werden zumindest experimentell Verschiebungen von  $\Delta u_2 \cong 4,5mm$  erreicht. Die in blau und orange dargestellten Kraft-Verschiebungs-



**Abb. 6.23:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm in 2-Richtung der H-Probe aus X5CrNi18-10

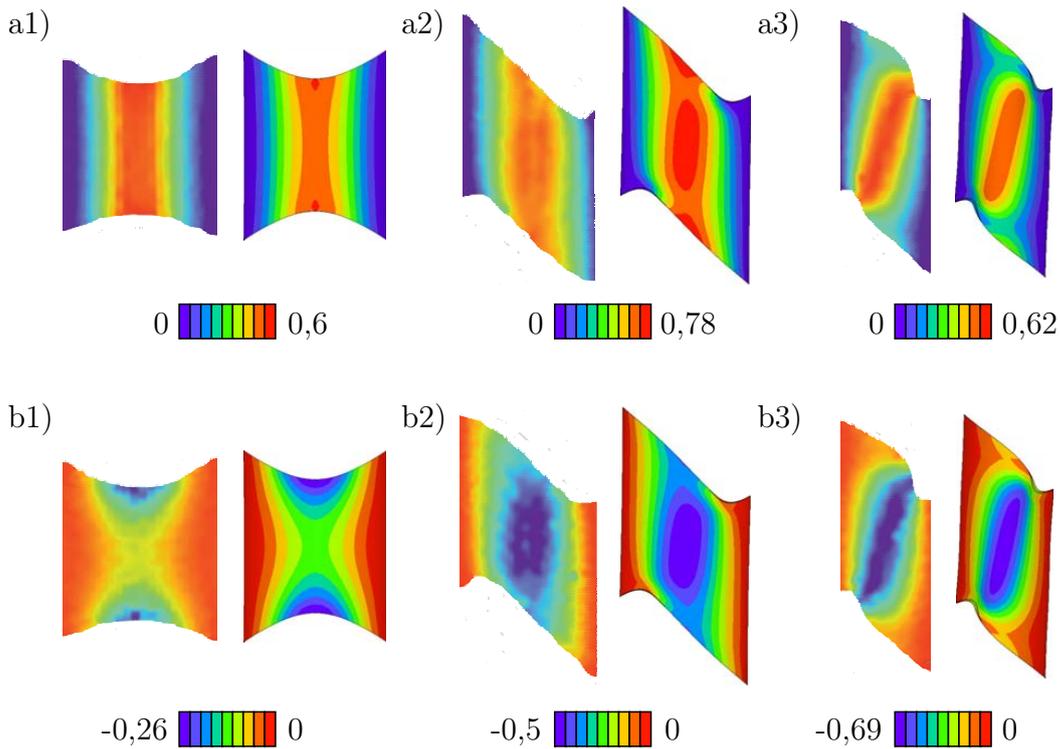
Kurven der Lastkombinationen  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  und  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  zeigen annähernd die gleichen Kurvenverläufe und zeigen gute Übereinstimmungen in den Experimenten. Diese liegen bei beiden Lastkombinationen beinahe übereinander und erreichen eine maximale Kraft von  $F_{2,max} \cong 14,5kN$ . Dennoch ist die maximale Verschiebung dieser beiden Lastkombinationen leicht unterschiedlich, da die Verschiebung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 0 : 1$  mit  $\Delta u_2 \cong 5mm$  etwa einen halben Millimeter größer ist als die der Lastkombination

$LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$ . Die numerisch ermittelten Kurven dieser Lastkombinationen liegen jeweils etwas über den experimentellen Kurven und erreichen dabei deutlich weniger Verschiebungen. Bei der Auswertung der Kraft-Verschiebungskurven in 2-Richtung zeigt sich, dass bei allen experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungskurven eine sichtbare Entfestigung des Materials stattfindet. Diese Entfestigungsbereiche sind allerdings bei den Lastkombinationen mit einer Zugbeanspruchung deutlicher ausgeprägter. Auch in 2-Richtung zeigt sich, dass die im Experiment stattfindende Entfestigung in der numerischen Berechnung nur ansatzweise abgebildet werden kann. Resultierend aus der Auswertung der Kraft-Verschiebungskurven in 1- und 2-Richtung ist festzuhalten, dass vor allem Lastkombinationen mit einer Zugbeanspruchung bereits in den durchgeführten Experimenten zu unterschiedlichen Ergebnissen führte. Diese Abweichung, die eventuell auf eine stärkere Auswirkung von Mikrodefekten unter Lastkombinationen mit Zugbeanspruchung zurückzuführen ist, sollte im Anschluss an diese Arbeit genauer untersucht werden. Aufgrund der festgestellten Streuung der experimentellen Kurven können auch die Abweichungen der numerischen Simulation zumindest etwas relativiert werden. Somit können global nur übereinstimmende Tendenzen zwischen den Experimenten und der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung festgestellt werden.

### 6.5.2 Lokale Auswertung ausgewählter Lastkombinationen

Die lokale Auswertung beinhaltet die zugdominanteste Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , die druckdominanteste Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 0$  und eine dazwischen liegende Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ . Zunächst ist die Auswertung der Hauptverzerrungen der Kerbenoberfläche bei einer Verschiebung  $\Delta u_{max}$  der experimentellen und numerischen Untersuchung in der Abbildung 6.24 dargestellt. Die Hauptverzerrung  $A_{max}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  ist der Abbildung 6.24 a1) zu entnehmen. Es ist sowohl im Experiment als auch in der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung ein vertikales Verzerrungsband zu erkennen. Auch wenn das Verzerrungsband im Experiment etwas breiter ausgeprägt ist, kann insgesamt eine gute Übereinstimmung hinsichtlich der Verteilung und der Verzerrungswerte festgestellt werden. Der Maximalwert dieser Auswertung liegt bei  $A_{max} \cong 0,6$  für diese Lastkombination. Auch das Verformungsverhalten, was dieser Abbildung ebenfalls entnommen werden kann, zeigt die für zugdominante Lastfälle typische Einschnürung in vertikaler Richtung. Auch da bildet das numerische Ergebnis das Experiment gut ab. Die Hauptverzerrung  $A_{min}$  der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , die in der Abbildung 6.24 b1) dargestellt ist, zeigt eine Lokalisierung an den Stellen der größten Einschnürung. Dabei fallen in der numerischen Simulation die extremeren Verzerrungswerte auf. Dies ist damit zu erklären, dass mit der digitalen Bildkorrelation die Ränder des Probekörpers bis zu einem bestimmten Bereich nicht ausgewertet werden können. Somit fehlt bei den experimentellen Auswertungen der Hauptverzerrungen jeweils ein schma-

ler Bereich am oberen und unteren Rand. Demnach ist dennoch von einer guten Übereinstimmung zu sprechen, wobei die Extremwerte bei  $A_{min} \cong -0,26$  liegen. Die Hauptverzerrungen der Zug-Scher-Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  sind in den Abbildungen 6.24 a2) und b2) dargestellt. Zunächst zeigt die Hauptverzerrung  $A_{max}$  wie bei der Lastkombination zuvor ein vertikales Verzerrungsband. Hierbei besitzt dieses Band diesmal drei deutlichere Lokalisierungen am Rand



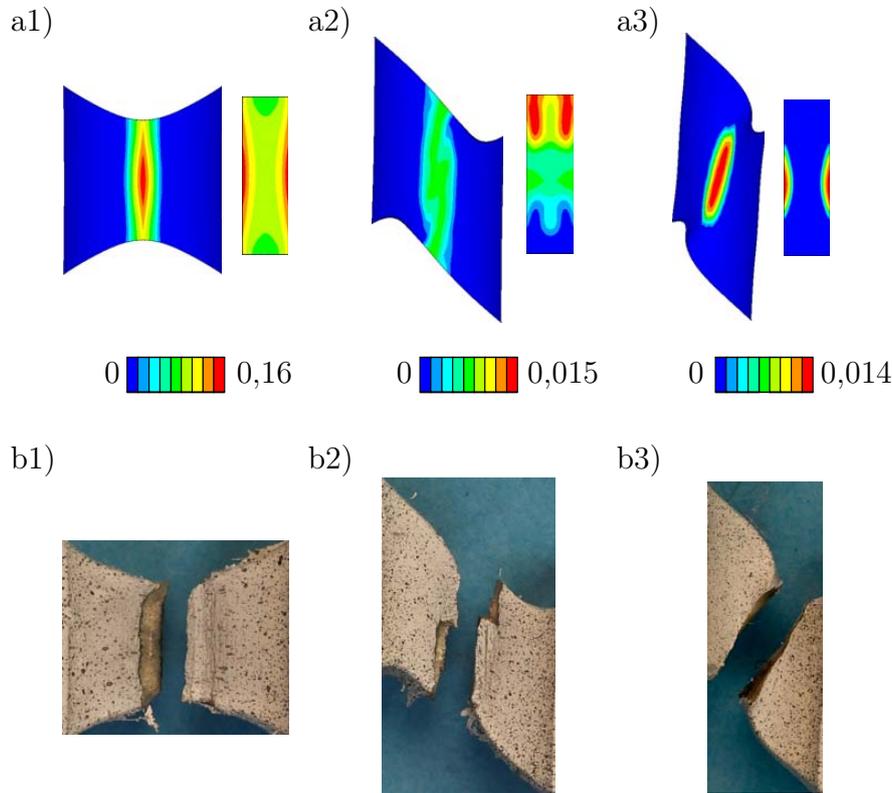
**Abb. 6.24:** Vergleich der Hauptverzerrungen auf der Kerbenoberfläche bei  $\frac{2}{3}\Delta u_{2,max}$ : a) Hauptverzerrung  $A_{max}$  (v.l. Exp + Sim); b) Hauptverzerrung  $A_{min}$  (v.l. Exp + Sim); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$

und im Zentrum, was der numerischen Auswertung zu entnehmen ist. Diese Lokalisierungen sind in der experimentellen Auswertung nicht wirklich zu erkennen. Auch den Extremwert  $A_{max} \cong 0,78$  der numerischen Simulation wird im Experiment nicht erreicht. Ein anderes Bild zeigt die Hauptverzerrung  $A_{min}$  dieser Lastkombination, deren Extremwerte sowohl experimentell als auch numerisch bei  $A_{min} \cong -0,5$  liegen. Die Hauptverzerrung zeigt dabei auch eine starke Lokalisierung im Zentrum der Kerbenoberfläche auf. Im Gegensatz zur ersten Lastkombination zeigt das Verformungsverhalten eine deutliche Scherung, die durch den Lastfaktor  $LF_2 = 1$  resultiert. Aber auch hinsichtlich des Verformungsverhaltens zeigt die Untersuchung dieser Lastkombination eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender Berechnung. Der Aus-

wertung der Hauptverzerrungen der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  ist zunächst zu entnehmen, dass hierbei durch die Druckbelastung die Kerbe deutlich in horizontaler Richtung zusammengepresst wurde. Hinzu kommt das typische Verhalten aufgrund der Schubbelastung durch den Lastfaktor  $LF_2$ , wobei die Kerbränder versetzt sind. Bei dieser Lastkombination ist eine ähnliche Verteilung bei der Hauptverzerrung  $A_{max}$  und  $A_{min}$  zu erkennen. Jeweils ist eine ovalförmige Lokalisierung zu erkennen, die leicht im Uhrzeigersinn gedreht ist. Auch die Extremwerte liegen betragsmäßig nicht weit auseinander. Bei der 1. Hauptverzerrung liegt der Extremwert bei  $A_{max} \cong 0,62$  und bei der 2. Hauptverzerrung bei  $A_{min} \cong -0,69$ . Insgesamt kann für die drei untersuchten Lastkombinationen eine gute Übereinstimmung hinsichtlich der Hauptverzerrungen und des Verformungsverhaltens festgestellt werden.

Um das Schädigungsverhalten zu analysieren, folgt in der Abbildung 6.25 die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$  der numerischen Simulationen und die Gegenüberstellung mit den Rissbildern der versagten Probekörper. Die Schädigungsvergleichsverzerrung der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  lokalisiert wie bereits bei den Hauptverzerrungen zu einem vertikalen Band. Hierbei treten die Maximalwerte von  $\mu_{max} \cong 0,16$  sehr lokal entlang der kleinsten Querschnittsfläche auf, wenn die Kerbenoberfläche betrachtet wird. Die Querschnittsfläche zeigt, dass auch da nur in den Randbereichen hohe Werte auftreten. Die restliche Querschnittsfläche weist überall Schädigungsvergleichsverzerrungen größer Null auf, doch wesentlich moderater als am rechten und linken Rand. Aufgrund dieser Schädigungsverteilung ist ein vertikaler Riss zu erwarten, was das Rissbild in der Abbildung 6.25 b1) auch widerspiegelt. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  ist zunächst festzustellen, dass wesentlich geringere Werte auftreten. Der Maximalwert liegt bei  $\mu_{max} \cong 0,015$  und liegt im oberen Bereich der Querschnittsfläche. Das im unteren Bereich der Querschnittsfläche keine Schädigung auftritt zeigt, dass das auf der Kerbenoberfläche zu erkennende Schädigungsvergleichsverzerrungsband einen anderen Winkel aufweist als die Querschnittsfläche. Verglichen mit dem Rissverhalten im Experiment zeigt der Riss des Probekörpers eine leichte Neigung im Uhrzeigersinn, die der Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung entspricht. Die Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  enthält eine markante Lokalisierung mit dem Maximum  $\mu_{max} \cong 0,16$  auf der Kerbenoberfläche, die ellipsenförmig und leicht im Uhrzeigersinn gedreht ist, wie die Abbildung 6.25 a3) zeigt. Die Auswertung im Bereich der Querschnittsfläche weist außerdem darauf hin, dass die Schädigung sehr lokal am Rand der Querschnittsfläche liegt und in der restlichen Fläche keine Schädigung auftritt. Der Riss des versagten Probekörpers dieser Lastkombination, siehe Abbildung 6.25 b3), ist stark im Uhrzeigersinn geneigt. Dieser Neigungswinkel entspricht annähernd der Verteilung der Schädigungsvergleichsverzerrung. Insgesamt sind bei den drei dargestellten Lastkombinationen sehr unterschiedliche Verteilungen der Schädigungsvergleichsverzerrungen festzustellen. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  und  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  tritt die maximale Schädigung auf der Kerbenoberfläche auf. Dagegen liegen

die Maximalwerte bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  in der Querschnittsfläche. Des Weiteren ist bei der Querschnittsfläche der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  etwa ein Drittel von Schädigung unberührt. Bei der Druck-

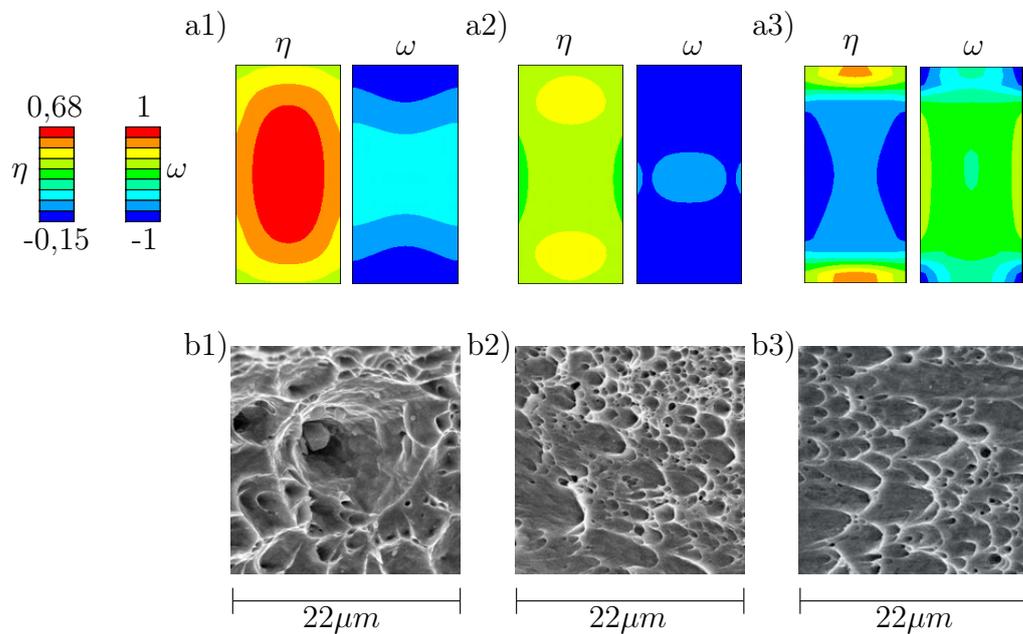


**Abb. 6.25:** Vergleich des Schädigungsverhaltens: a) Schädigungsvergleichsverzerrung  $\mu$ : links Kerbenoberfläche und rechts Querschnittsfläche (Sim); b) Rissbild (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$

Scher-Kombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  ist dieses Verhalten noch stärker ausgeprägt, da nur sehr kleine Bereiche der Querschnittsfläche geschädigt sind. Die Rissbilder zeigen, dass ausgehend von der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  mit der Veränderung der Lastfaktoren die Neigung des Risses steigt. Für alle drei Lastkombinationen kann eine gute Verbindung zwischen der Schädigungsvergleichsverzerrung und dem Rissverhalten hergestellt werden.

In der folgenden Abbildung 6.26 werden die erreichten Spannungszustände der elastisch-plastisch-schädigenden Berechnung den auftretenden Schädigungsmechanismen der Bruchfläche gegenübergestellt. Dabei sind die Aufnahmen des Rasterelektronenmikroskops im Zentrum der Bruchfläche erfolgt. Wird zunächst die Verteilung der Spannungstriaxialität der drei Lastkombinationen betrachtet, ist eine recht homogene Verteilung über die Querschnittsfläche zu erkennen. Dabei tritt die größte Spannungstriaxialität von  $\eta_{max} \cong 0,68$  bei der Lastkombi-

nation  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ , siehe Abbildung 6.26 a1) auf. Dieser ausgeprägte Bereich großer Spannungstriaxialitäten deutet auf eine hohe Zugbeanspruchung hin. Bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  werden Spannungstriaxialitäten im Bereich von  $\eta \cong 0,2 - 0,4$  erreicht, wohingegen bei der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  ein großer zentraler Bereich mit negativen Spannungstriaxialitäten und am oberen sowie unteren Rand der Querschnittsfläche lokale positive Werte auftreten. Die dominierende Spannungstriaxialität ist bei dieser Lastkombination allerdings negativ. Die Auswertung des Lodeparameters zeigt hingegen für die Lastkombinationen mit positiver Spannungstriaxialität negative Werte und für die Lastkombination mit leicht negativer Spannungstriaxialität einen Lodeparameter um Null. Da die Aufnahmen der Bruchfläche im Zen-



**Abb. 6.26:** Auswertung der Spannungszustände und Vergleich mit Bruchflächen: a) v.l. Spannungstriaxialität  $\eta$  und Lodeparameter  $\omega$  (Sim); b) Bruchfläche im REM (Exp); 1)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$ ; 2)  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$ ; 3)  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$

trum der Fläche durchgeführt wurden, müssen auch die entsprechenden Werte der Spannungstriaxialität im Zentrum der Querschnittsfläche betrachtet werden, um eine Verbindung herzustellen. Für die Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 0$  folgt somit eine sehr große Spannungstriaxialität, die nun mit den auftretenden Schädigungsmechanismen verglichen wird. In der Abbildung 6.26 b1) sind im Vergleich zu den anderen beiden Bruchflächen sehr große und markante Poren zu erkennen. Hier kann somit von einer Porenaufweitung ausgegangen werden, was auch der großen Spannungstriaxialität entspricht. Die Bruchfläche des versagten Probekörpers der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = 1 : 1$  weist hingegen Poren und

Mikroscherrisse auf. Mit einer Spannungstriaxialität von  $\eta \cong 0,3$  im Zentrum der Querschnittsfläche sollte laut Theorie die gemischte Schädigungsform auftreten, was hiermit bestätigt werden kann. Bei der einzig untersuchten Druck-Scher-Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  wurden im Zentrum der Querschnittsfläche negative Spannungstriaxialitäten erreicht. Dieser Spannungszustand spiegelt sich auch bei den auftretenden Schädigungsmechanismen in der Abbildung 6.26 b3) wider, da vorrangig Schermechanismen und nur vereinzelte kleine Poren zu erkennen sind. Somit entsprechen die auftretenden Schädigungsmechanismen der drei Lastkombinationen den numerisch ermittelten Spannungszuständen.

### 6.5.3 Bewertung der H-Probengeometrie aus einer Stahllegierung

Bei dieser Versuchsreihe der H-Probe aus X5CrNi18-10, die fünf verschiedene Lastfälle umfasste, muss zunächst festgestellt werden, dass die reine Zugbelastung sowie die beiden Zug-Scher-Lastkombinationen experimentell zu einer signifikanten Streuung in der Kraft-Verschiebungs-Kurven führen. Zusätzlich dazu weichen auch die korrespondierenden numerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven von den experimentellen Kurven ab. Da dieses Verhalten mehrere Lastfälle und somit mehrere Probekörper betraf, sollte dies im Anschluss an diese Arbeit genauer untersucht werden. Außerdem zeigten die experimentellen Kraft-Verschiebungs-Kurven der Lastkombinationen eine sichtbare Entfestigung auf, die allerdings numerisch kaum abzubilden war. Somit konnten in Hinblick auf die Kraft-Verschiebungs-Kurven nur übereinstimmende Tendenzen zwischen Experimenten und korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen festgestellt werden. Interessanter Weise führte die lokale Betrachtung der Hauptverzerrungen auf der Kerbenoberfläche der versagten Kerben zu einer sehr guten Übereinstimmung hinsichtlich der Verzerrungswerte und -verteilung sowie des Verformungsverhaltens zwischen Experiment und korrespondierender Simulation. Insgesamt ergaben dabei die Lastkombinationen, die unter anderem zu einer Scherbeanspruchung führen, die größeren Hauptverzerrungen. Die numerisch ermittelten Schädigungsvergleichsverzerrungen sind bei zugdominanten Lastfällen etwa zehn mal größer als die bei scherdominanten Lastkombinationen. In allen drei im Detail untersuchten Lastfällen entsprechen die Verteilungen der Schädigungsvergleichsverzerrung annähernd dem im Experiment aufgetretenen Rissen im Kerbbereich. Die unter dem Rasterelektronenmikroskop beobachteten Schädigungsmechanismen korrespondieren bei allen Lastkombinationen zu den zu erwartenden Spannungszuständen. Insgesamt konnte der H-Probekörper aus der Stahllegierung mittels der fünf Lastkombinationen eine Bandbreite der Spannungstriaxialität von  $-0,15 \leq \eta \leq 0,68$  abdecken. Aufgrund des auftretenden Beulens bei der zumindest experimentell durchgeführten Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -1 : 1$  konnte nur eine Druck-Scher-Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -0,5 : 1$  untersucht werden, weshalb dieser Probekörper aus der Stahllegierung vorrangig für Zug-, Scher- und Zug-Scher-Belastungen eingesetzt werden sollte. Die in den

Simulationen verwendeten elastischen Schädigungsmodule, die aufgrund der verbesserten numerischen Stabilität der Berechnung oder der besseren Übereinstimmung im Kraft-Verschiebungs-Diagramm angepasst wurden, zeigen die Tendenz, dass bei Lastkombinationen mit großer Spannungstriaxialität betragsmäßig eher kleinere elastische Schädigungsmodule und dass mit Abnahme der Spannungstriaxialität die elastischen Schädigungsmodule eher größer sind.

## 6.6 Entwicklung eines Risskriteriums für duktile Metalle

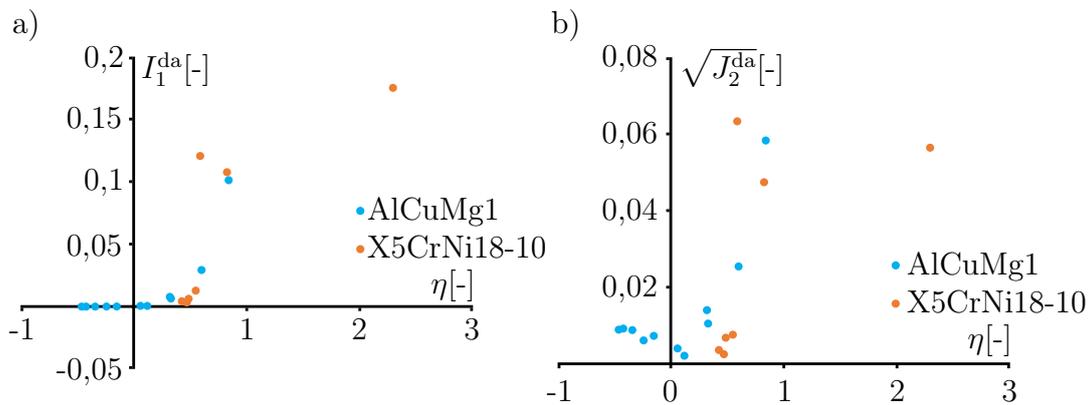
Mit dem in dieser Arbeit verwendeten Kontinuumsschädigungsmodell von Brünig [20] werden Deformationen infolge Schädigung berücksichtigt. Eine fortschreitende Schädigungsentwicklung führt in der Realität letztendlich zum Versagen des Materials, weshalb es sinnvoll ist, diesen Punkt im Schädigungsprozess zu analysieren und daraus ein Risskriterium für das verwendete Modell zu entwickeln. In der Literatur sind bereits Untersuchungen zum Risskriterium zu finden, die die Abhängigkeit vom Spannungszustand aufzeigen [6, 35]. Des Weiteren werden Risskriterien in Abhängigkeit von skalaren Schädigungsvariablen in Form einer Volumenvariable [97, 98, 99] oder einer Flächenvariablen [73] vorgestellt. Um sowohl isotrope als auch anisotrope Schädigungseffekte zu berücksichtigen, wird allerdings der Ansatz von Brünig et al. [24, 26] verfolgt, bei dem ein auf den Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors basierendes Risskriterium vorgeschlagen wird. Das hier verwendete Risskriterium

$$f^{\text{fr}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, \varepsilon^{\text{fr}}) = a^{\text{fr}} I_1^{\text{da}} + b^{\text{fr}} \sqrt{J_2^{\text{da}}} - \varepsilon^{\text{fr}} = 0 \quad (6.2)$$

berücksichtigt die ersten beiden Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors. Dies wird zunächst als ausreichend angesehen, um ein Risskriterium zu entwickeln, das sowohl isotrope als auch anisotrope Schädigungsmechanismen berücksichtigt. Das in der Gleichung (6.2) formulierte Risskriterium enthält die vom Spannungszustand abhängigen Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$ , die die Einflüsse der ersten und zweiten Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors wichten und somit steuern. Der Parameter  $\varepsilon^{\text{fr}}$  entspricht dem Grenzwert der Schädigungsverzerrungen, der somit den Beginn der Makrorissbildung und das Versagen des Materials beschreibt. Im Folgenden wird der Ansatz verfolgt, dass die Wichtungparameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$ , analog zur Fließ- (2.57) und Schädigungsbedingung (2.71), vom Spannungszustand abhängig sind und der Parameter  $\varepsilon^{\text{fr}}$  eine Materialkonstante darstellt.

Die für das Risskriterium benötigten Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors werden aus den elastisch-plastisch-schädigenden Berechnungen ermittelt. Dazu werden die Invarianten im Zentrum der Kerbenquerschnittsfläche im letzten Lastschritt ausgewertet. Um zunächst einen Überblick über die Invarianten der Schädigungsverzerrungen zu erhalten, werden diese für alle biaxialen Probekörper und Lastfälle in der Abbildung 6.27 dargestellt. Die Auswertung der ersten

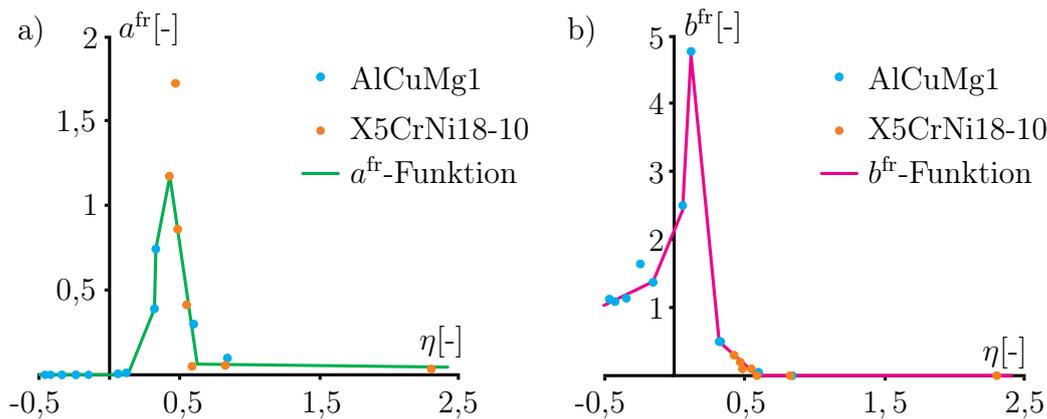
Invarianten in der Abbildung 6.27 a), wobei die Ergebnisse der Aluminiumlegierung in blau und die der Stahllegierung in orange dargestellt sind, zeigt, dass für negative Spannungstriaxialitäten die Invarianten um Null liegen und mit deren Zunahme auch die Werte der ersten Invarianten ansteigen. Dies entspricht der Annahme, dass mit steigender Spannungstriaxialität das isotrope Porenwachstum zunimmt, das zur ersten Invariante der Schädigungsverzerrungen korrespondiert. Der maximale Wert von  $I_1^{\text{da}} \cong 0,18$  wird bei einer Spannungstriaxialität von  $\eta \cong 2,3$  erreicht. Bei der Auswertung der zweiten Invarianten der Schädigungs-



**Abb. 6.27:** Darstellung der Invarianten der Schädigungsverzerrungstensoren beider Materialien über die Spannungstriaxialität: a) Invariante  $I_1^{\text{da}}$ ; b) Invariante  $\sqrt{J_2^{\text{da}}}$

verzerrungen, die in der Abbildung 6.27 b) dargestellt ist, zeigen sich für negative Spannungstriaxialitäten Werte um  $\sqrt{J_2^{\text{da}}} \cong 0,01$ . Diese sind zwar nicht so groß, geben allerdings den Einfluss der korrespondierenden Schermechanismen in diesem Bereich wieder. Mit zunehmender Spannungstriaxialität nehmen die Werte der zweiten Invarianten ebenfalls zu, wobei diese bis zu einer Spannungstriaxialität von  $\eta \cong 0,5$  etwa gleich der ersten Invarianten sind. Bei Spannungstriaxialitäten  $\eta > 0,5$  liegen die Werte der zweiten Invarianten deutlich unter denen der ersten Invarianten. Dies zeigt, dass mit zunehmender Spannungstriaxialität die erste Invariante der Schädigungsverzerrungen dominanter wird. Es folgt die Bestimmung der Parameter  $a^{\text{fr}}$ ,  $b^{\text{fr}}$  und  $\varepsilon^{\text{fr}}$  für das Risskriterium (2.87), deren Vorgehensweise im Folgenden Schritt für Schritt erläutert wird. Zunächst wird  $\varepsilon_{Al}^{\text{fr}}$  anhand eines Referenzversuchs ermittelt. Bei diesem muss die Invariante  $I_1^{\text{da}}$  Null sein, damit der erste Term der Gleichung (2.87) entfällt, weshalb Lastfälle mit negativen Spannungstriaxialitäten betrachtet werden. Zusätzlich sollte der Lodeparameter Null sein, um zunächst eine mögliche Abhängigkeit auszuschließen. Diese Bedingungen erfüllen beispielsweise die Daten der Lastkombination  $LF_1 : LF_2 = -6 : 1$  des Z-Probekörpers, weshalb dieser als Referenzversuch festgelegt wird. Mit der Annahme, dass für diesen Versuch der Parameter  $b^{\text{fr}} = 1$  ist, folgt der Grenzwert  $\varepsilon_{Al}^{\text{fr}} = 0,01$  für die Aluminiumlegierung. Anschließend erfolgt die Bestimmung der beiden Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$  für die restlichen Lastfälle unter

Annahmen für bestimmte Bereiche der Spannungstriaxialität aufgrund der auftretenden Schädigungsmechanismen. So wird zunächst der Bereich der negativen bis kleinen positiven Spannungstriaxialitäten betrachtet, wo wie bereits gezeigt, die Schermechanismen dominieren. Aus diesem Grund soll in diesem Bereich nur der Einfluss der zweiten Invarianten auf den Rissvorgang berücksichtigt werden, weshalb  $a^{\text{fr}} = 0$  festgelegt kann. Allerdings sind die Invarianten  $I_1^{\text{da}}$  in diesem Bereich auch annähernd Null. Dadurch können die Werte von  $b^{\text{fr}}$  für diesen Bereich der Spannungstriaxialität ermittelt werden, die zum Grenzwert  $\varepsilon_{Al}^{\text{fr}} = 0,01$  führen. Im Gegensatz dazu ist Materialversagen bei Spannungstriaxialitäten  $\eta > 0,6$  aufgrund von Schermechanismen unwahrscheinlich, weshalb in diesem Bereich  $b^{\text{fr}} = 0$  festgelegt wird und somit  $a^{\text{fr}}$  bestimmt werden kann. Für die moderaten Spannungstriaxialitäten werden die Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$  gleichzeitig bestimmt, wobei der Einfluss der Invariante  $\sqrt{J_2^{\text{da}}}$  mit Zunahme der Spannungstriaxialität abnimmt und von  $I_1^{\text{da}}$  zunimmt. Die entsprechenden Werte der spannungsabhän-



**Abb. 6.28:** Darstellung der ermittelten Werte für die spannungsabhängigen Materialparameter sowie der approximierten Funktionen: a)  $a^{\text{fr}}$ ; b)  $b^{\text{fr}}$

gigen Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$ , die auf diesem Wege für die Aluminiumlegierung ermittelt wurden, sind in der Abbildung 6.28 mit blauen Punkten dargestellt. Wie bereits bei der Fließ- und Schädigungsbedingung könnten die spannungsabhängigen Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$  nicht nur für die Aluminiumlegierung sondern eventuell für die gesamte Klasse der duktilen Metalle gelten. Um dies zu untersuchen wurden unter verschiedenen möglichen Grenzwerten  $\varepsilon_{St}^{\text{fr}}$  für die Stahllegierung ebenfalls die Werte der Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$  ermittelt, um Ergebnisse zu erzielen, die zu den Parametern der Aluminiumlegierung passen. Dies wird mit einem Grenzwert  $\varepsilon_{St}^{\text{fr}} = 0,006$  erreicht, der zu den in Abbildung 6.28 mit orangenen Punkten dargestellten Werte der Parameter  $a^{\text{fr}}$  und  $b^{\text{fr}}$  führt. Die Positionen der ausgewerteten Punkte der Aluminium- und Stahllegierung in den Diagrammen werden anschließend durch einfache lineare Funktionen approximiert und führen

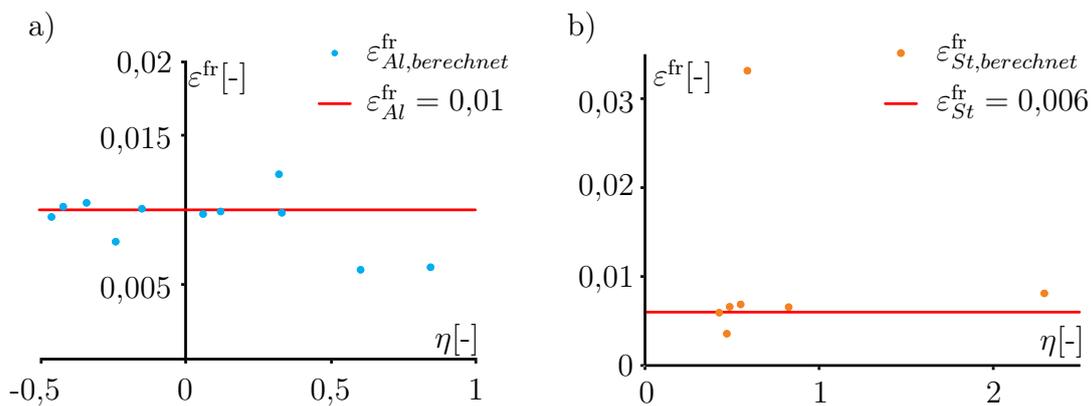
zu

$$a^{\text{fr}}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \eta < 0,13 \\ 2,05\eta - 0,2665 & \text{für } 0,13 \leq \eta < 0,32 \\ 4,29\eta - 0,6737 & \text{für } 0,32 \leq \eta < 0,43 \\ -5,68205\eta + 3,61428 & \text{für } 0,43 \leq \eta < 0,63 \\ -0,01\eta + 0,06925 & \text{für } 0,63 \leq \eta \end{cases} \quad (6.3)$$

und

$$b^{\text{fr}}(\eta) = \begin{cases} \eta + 1,53 & \text{für } \eta < -0,14 \\ 5\eta + 2,13 & \text{für } -0,14 \leq \eta < 0,07 \\ 38\eta + 0,15 & \text{für } 0,07 \leq \eta < 0,13 \\ -21,05\eta + 7,236 & \text{für } 0,13 \leq \eta < 0,33 \\ -1,852\eta + 1,0926 & \text{für } 0,33 \leq \eta < 0,59 \\ 0 & \text{für } 0,59 \leq \eta \end{cases}, \quad (6.4)$$

die von der Spannungstriaxialität abhängig sind. Der Einfluss des Lodeparameters auf den Rissvorgang, der vorrangig bei negativen Spannungstriaxialitäten auftritt [35], konnte in diesem Zusammenhang nicht untersucht werden. Im Bereich der negativen Spannungstriaxialität ist nur bei einem Versuch ein deutlich von Null abweichender Lodeparameter aufgetreten. Dieser Versuch entspricht dem blauen Punkt in der Abbildung 6.28 b), der nicht von der approximierten Funktion berührt wird. Dieser zeigt zwar, dass es einen Einfluss des Lodeparameters geben könnte, der aber mit nur einem Punkt nicht aussagekräftig ist. Das bedeutet aller-



**Abb. 6.29:** Vergleich der berechneten Grenzverzerrung mit den festgelegten Grenzwerten: a) Aluminiumlegierung; b) Stahllegierung

dings im Umkehrschluss, dass die gewählten Funktionen  $a^{\text{fr}}$  (6.3) und  $b^{\text{fr}}$  (6.4) für einen Lodeparameter  $\omega = 0$  gelten. Ein Versuch der Stahllegierung ( $\eta = 0,47$  und  $a^{\text{fr}} = 1,72$ ) konnte mit den gewählten Funktionen nicht gut approximiert werden. Der Abstand zu Auswertungen mit ähnlicher Spannungstriaxialität könnte ebenfalls ein Indiz für die Abhängigkeit vom Lodeparameter sein. Um die ermittelten

Funktionen zu überprüfen, werden diese mit den numerisch ermittelten Invarianten der Schädigungsverzerrung multipliziert und für jeden Versuch der Grenzwert bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 6.29 für die Aluminiumlegierung a) und für die Stahllegierung b) dargestellt. Für die Aluminiumlegierung, wo der Grenzwert  $\varepsilon_{Al}^{fr} = 0,01$  ermittelt wurde, liegen die nachgerechneten Werte annähernd gut am gewünschten Grenzwert. Der im negativen Bereich der Spannungstriaxialität etwas stärker abweichende Versuch ist auch der von der Funktion  $b^{fr}$  abweichende Versuche mit dem Lodeparameter ungleich Null. Diese Abweichung überträgt sich somit auch auf den errechneten Grenzwert. Die Versuche im Bereich der positiven Spannungstriaxialität weichen trotz recht guter Annäherung der Funktion  $a^{fr}$  vom gewünschten Grenzwert ab, was auf die hohen Werte der Invarianten  $I_1^{da}$  zurückzuführen ist, weshalb sich hier kleine Abweichungen groß auswirken. Für die berechneten Grenzwerte der Stahllegierung in der Abbildung 6.29 b) ist eine gute Übereinstimmung zum ermittelten Grenzwert festzustellen. Nur der bereits nicht gut approximierter Versuch in der Abbildung 6.28 a) führt zu großen Abweichungen.

Insgesamt liefert das hiermit vorgeschlagene Risskriterium gute Ergebnisse für die untersuchten Lastkombinationen der Aluminium- und Stahllegierung. Dabei ist festzuhalten, dass die Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors wesentlich von den verwendeten Schädigungsmaterialparametern abhängen. Vor allem die Abhängigkeit von den elastischen Schädigungsmodulen  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  sollte untersucht werden, da im Rahmen dieser Arbeit für die X0- und H-Probe vereinfacht gleiche Werte je Lastfall gewählt wurden. Des Weiteren sollte der Spannungszustand zu Beginn der Schädigung mit dem kurz vor dem Versagen verglichen werden, da dieser sich nicht signifikant ändern sollte. Außerdem sollte dieses Risskriterium durch weitere Untersuchungen validiert werden, die auch noch nicht abgedeckte Spannungstriaxialitäten erreichen. Der Einfluss des Lodeparameters wurde angedeutet und sollte ebenfalls in weiterführenden Studien untersucht werden.

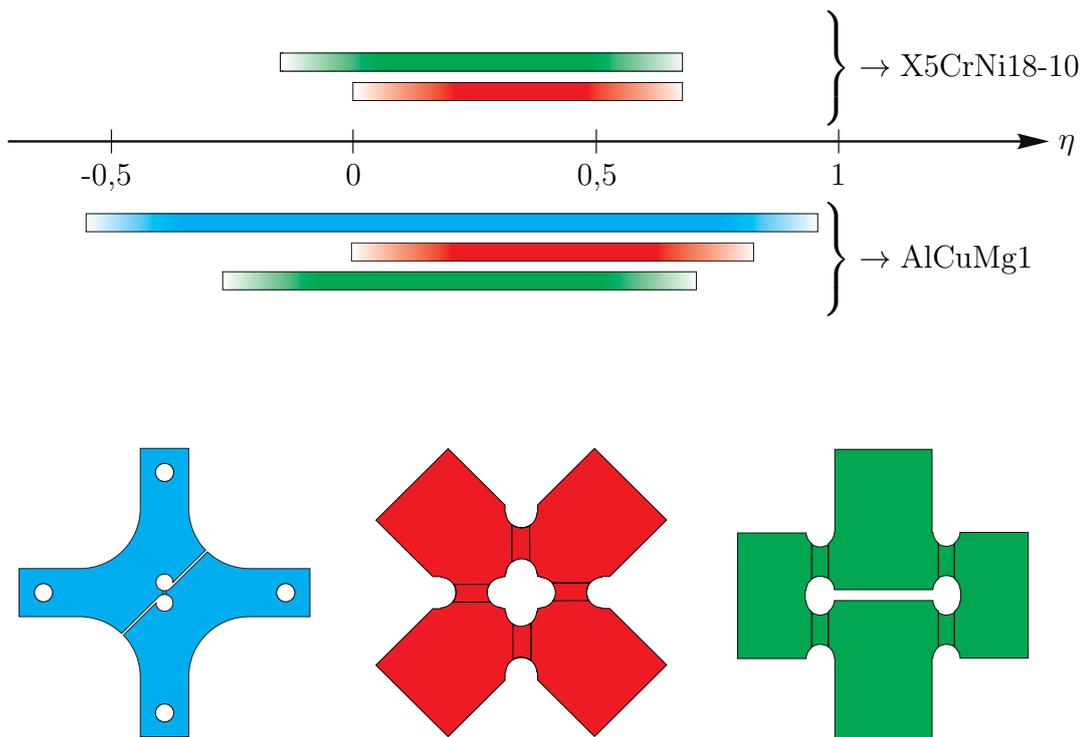
## 7 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

In dieser Arbeit wird das Schädigungs- und Versagensverhalten duktiler Metalle experimentell sowie mit korrespondierenden elastisch-plastisch-schädigenden Simulationen, basierend auf dem Kontinuumsschädigungsmodells von Brünig [20, 31], numerisch unter verschiedenen biaxialen Lastkombinationen analysiert. Dabei werden drei verschiedene biaxiale Probekörper untersucht, wobei der Z-Probekörper aus der Aluminiumlegierung AlCuMg1 eine gesonderte Rolle einnimmt und als ergänzende Studie zur Versuchsreihe von Brenner [12] betrachtet werden kann, die neben der Untersuchung der Schädigungs- und Versagensprozesse vor allem zur Analyse des Grenzwertes der negativen Spannungstriaxialität dient. Die anderen beiden sind der H- und der X0-Probekörper, die neuartig sind und erstmals in einer größeren Versuchsreihe angewandt werden und jeweils aus der Aluminiumlegierung AlCuMg1 und aus der Stahllegierung XrCrNi18-10 angefertigt wurden.

In den Experimenten werden die Probekörper mittels der digitalen Bildkorrelation auf der Oberfläche ausgewertet, womit Kraft-Verschiebungs-Kurven und Hauptverzerrungen im Kerbbereich ermittelt werden. Diese werden mit den Ergebnissen der korrespondierenden Simulationen verglichen, um eine globale Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation zu überprüfen. Für alle drei Probekörper aus der Aluminiumlegierung wird festgestellt, dass die mehrfach durchgeführten Experimente je Lastkombination zu sehr ähnlichen Kraft-Verschiebungs-Verläufen führen und diese bei fast allen untersuchten Lastkombinationen gut mit den numerisch ermittelten Kurven übereinstimmen. Einzig bei scherdominanten Lastfällen liegen die numerischen etwas über den experimentellen Kurven. Bei den Probekörpern aus der Stahllegierung zeigt sich dagegen, dass die experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven eine größere Streuung aufweisen, was eventuell auf herstellungsbedingte Mikrodefekte oder imperfekte Geometrien in den gekerbten Bereichen zurückzuführen ist. Die korrespondierenden numerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven liegen für alle Versuche im Streubereich der experimentellen Ergebnisse und bilden diese somit annähernd gut ab. Somit wurde eine gute globale Übereinstimmung zwischen Experiment und korrespondierender Simulation für alle Probekörper und Lastkombinationen festgestellt.

Eine Gegenüberstellung der experimentell und numerisch ermittelten maximalen und minimalen Hauptverzerrung zeigt für alle untersuchten Probekörper und Materialien übereinstimmende Ergebnisse, was auch die lokale Übereinstimmung nachweist. Durch diese Feststellung ist auch eine lokale Auswertung der Schädigungs- und Versagensprozesse mittels experimenteller und numerischer Ergebnisse möglich.

Die dafür notwendige maximale Bandbreite an auftretenden Spannungszuständen wird durch die Auswertung der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters in der Kerbenquerschnittsfläche ermittelt und ist in der Abbildung 7.1 für alle Probekörper und Materialien zusammengefasst. Bei dem X0-Probekörper werden sowohl für die Aluminiumlegierung als auch für die Stahllegierung ähnliche Bereiche der Spannungstriaxialität erreicht. Dieser umfasst Spannungstriaxialitäten um Null bis zu sehr hohen Spannungstriaxialitäten. Demnach ist der X0-Probekörper



**Abb. 7.1:** Erreichte Bandbreiten der Spannungstriaxialität je untersuchten biaxialen Probekörper

beider Legierungen für Zug-Scher-Kombinationen mit unterschiedlichen Lastverhältnissen geeignet. Auch beim H-Probekörper treten für beide Materialien ähnliche Spannungsbereiche auf. Diese reichen von mittleren negativen bis zu großen positiven Werten der Spannungstriaxialität. Somit ist der H-Probekörper für beide Legierungen neben zug- und scherdominanten Lastfällen auch für scherdominante Druck-Scher-Lastkombinationen geeignet. Für den Z-Probekörper aus der Aluminiumlegierung werden bei den hier durchgeführten Versuchen stark negative bis moderat positive Spannungstriaxialitäten erreicht. Nachdem Brenner [12] bereits die Eignung dieses Probekörpers für zug- und scherdominante Lastfälle feststellte, wobei sehr große Spannungstriaxialitäten um Eins erreicht wurden, wird durch die hier durchgeführte ergänzende Studie auch die Eignung für druckdominante Belastungen aufgezeigt. Die generell wünschenswerte homogene Span-

nungsverteilung in der Kerbenquerschnittsfläche ist bei den Probekörpern aus der Aluminiumlegierung eher gegeben als bei denen aus der Stahllegierung. Dies ist darauf zurückzuführen, dass einerseits sehr große irreversible Deformationen auftreten und die Kerblängen von  $6\text{mm}$  auf  $5\text{mm}$  reduziert wurden, was insgesamt dazu führt, dass sich der Kerbbereich vor allem bei scherdominanten Lastfällen stärker verdreht und somit sich der Spannungszustand ändert. Der Lodeparameter erreicht über alle untersuchten Lastfälle eine Bandbreite von Minus Eins bis zu leicht positiven Werten. Große positive Lodeparameter konnten mit den durchgeführten Versuchen nicht erreicht werden.

Die im Experiment zum Versagen des Materials führenden Schädigungsmechanismen werden durch die Auswertung der Bruchfläche mittels Rasterelektronenmikroskops analysiert. Für alle im Detail untersuchten Lastkombinationen der drei Probekörper kann die zu erwartende Abhängigkeit der Schädigungsmechanismen vom Spannungszustand bestätigt werden. Demnach ist das Schädigungsverhalten für negative Spannungstriaxialitäten fast ausschließlich von Schermechanismen geprägt, wohingegen mit zunehmender positiver Spannungstriaxialität die Porenneubildung und -aufweitung zunimmt und letztendlich bei großen positiven Spannungstriaxialitäten dominiert.

Aufgrund dessen, dass mit dem Z-Probekörper stark negative Spannungstriaxialitäten erreicht werden konnten, die unter den in der Literatur zu findenden Grenzwerten der negativen Spannungstriaxialitäten liegen, werden diese grundsätzlich auf Basis der Versuchsreihe des Z-Probekörpers diskutiert. Daraus resultierend wird erstmalig eine von der Spannungstriaxialität und dem Lodeparameter abhängige Funktion für den Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität vorgeschlagen, die auch im Einklang zu den Grenzwerten aus der Literatur stehen. Mit Versuchen, wo andere Lodeparameter beim Versagen auftreten, sollte diese Studie ergänzt werden.

Durch die experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven wird außerdem das unterschiedliche Entfestigungsverhalten beider Materialien sichtbar. Im Gegensatz zur Aluminiumlegierung tritt bei der Stahllegierung ein signifikanter Kraftabfall kurz vor dem Versagen auf. Für das Entfestigungsverhalten in der numerischen Simulation sind hauptsächlich die elastischen Schädigungsmodule  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  verantwortlich, die einen großen Einfluss auf die Kraft-Verschiebungs-Kurven haben. Um die experimentell stattfindende Entfestigung nachzubilden, werden die elastischen Schädigungsmodule in der numerischen Simulation angepasst, wobei eine Vereinfachung, dass alle vier elastischen Schädigungsmodule gleich sind, verwendet wird. Hierbei zeigt sich material- und probenübergreifend, dass je größer die Spannungstriaxialität ist, desto betragsmäßig kleiner sind die verwendeten Module und umgekehrt. Dies deutet darauf hin, dass die elastischen Schädigungsmodule spannungsabhängig sind und weiter untersucht werden sollten.

Alle drei biaxialen Probekörper sind grundsätzlich für die Analyse des Schädigungs- und Versagensverhaltens geeignet. Aufgrund der unterschiedlichen Geometrien bringen sie jeweils gewisse Vor- und Nachteile mit, die im Rahmen dieser Ar-

beit aufgezeigt und diskutiert werden. Zu den wesentlichen Erkenntnissen zählen, dass einerseits die Kerblänge nicht zu klein sein darf, da sich ansonsten der Kerbbereich bei großen Deformationen verdrehen kann. Gleichzeitig sollten die Kerbenquerschnittsflächen verkleinert werden, um das Beulen bei druckdominanten Lastfällen zu verhindern. Hierbei gilt, je kleiner die Querschnittsfläche ist, desto geringer ist der Probekörper anfällig für Beulen. Das ist auch der Grund dafür, warum biaxiale Probekörper mit einer zentralen Kerbe (z.B. Z-Probekörper) anstatt vier Kerben grundsätzlich besser für druckdominante Lastfälle geeignet sind. Allerdings bringen solche Probekörper den Nachteil mit, dass eine starke Kopplung zwischen zwei senkrecht zueinanderstehenden Probekörperarmen nahezu unvermeidbar ist, was zu experimentellen Schwierigkeiten führen kann. Diese Kopplung besteht bei Probekörpern mit vier unabhängigen Kerbbereichen zwar nicht, aber dadurch steigt die Beulgefahr bei Druckbelastungen, da zwei Kerbbereiche parallel angebracht sind und zusammen eine größere Fläche ergeben, die der Druckbelastung entgegen steht. Der Unterschied zwischen dem H-Probekörper und dem X0-Probekörper liegt im Prinzip einzig an der Kerbenanordnung. Während die Kerben bei der H-Probe parallel zur Scherachse und senkrecht zur Zugbeziehungsweise Druckachse liegen, sind die vier Kerben der X0-Probe im  $45^\circ$ -Winkel zu den Belastungsrichtungen angeordnet. Beim H-Probekörper führt eine Belastung in Kerbrichtung immer zu einer Scherbelastung und eine Zugbeziehungsweise Druckbelastung durch die senkrecht zur Kerbe stehende Kraftachse behält ihre Wirkung. Bei dem X0-Probekörper müssen die aufgebrachten Belastungen auf die im  $45^\circ$ -Winkel stehenden Kerben umgerechnet werden, um die Belastung zu deuten. Aufgrund dieser Ergebnisse sollten zukünftige Probekörper für biaxiale Lastfälle vier Kerbbereiche besitzen, wobei die Kerblänge vergrößert und die Kerbenquerschnittsfläche verkleinert werden sollten. Mit diesen Anpassungen könnten alle aufgezeigten Nachteile beseitigt werden. Wie stark die Druckbelastung nach dieser Anpassung gesteigert werden kann, sollte experimentell untersucht werden. Bei den beiden verwendeten unterschiedlichen Randbedingungen ist die Einspannung der gelenkig gelagerten Lastaufbringung absolut vorzuziehen. Die gelenkige Lagerung lässt eine Verdrehung des Probekörpers zu, die zu einer Änderung der Belastungsrichtung im Kerbbereich führen kann.

Durch die Ergebnisse aus den zu den Experimenten korrespondierenden Simulationen konnte ein Risskriterium entwickelt und vorgeschlagen werden, das auf den Invarianten des Schädigungsverzerrungstensors beruht. Die vom Spannungszustand abhängigen Materialparameter wurden durch Annahmen der Schädigungsentwicklung bestimmt und lieferten sowohl für die Aluminium- als auch für die Stahllegierung gute Ergebnisse. Somit könnten diese nicht nur für die beiden untersuchten Materialien sondern für die gesamte Klasse der duktilen Metalle gelten, was zukünftig untersucht werden sollte. Das Risskriterium wurde anhand von vereinfachten Funktionen und unter bestimmten schädigenden Materialparametern entwickelt, wobei letztere auch große Auswirkungen auf die Schädigungsverzerrungen haben könnten, was ebenfalls in Zukunft untersucht werden sollte.

## 8 Ausblick

Die mit den neuartigen biaxialen Probekörpern durchgeführten Experimente und korrespondierende Simulationen lieferten gute und übereinstimmende Ergebnisse und sind grundsätzlich für die Untersuchung von Schädigungs- und Versagensprozessen geeignet. Mit den beschriebenen geometrischen Anpassungen sollten auch weitere Materialien untersucht werden.

Da die Ergebnisse des H-Probekörpers und des X0-Probekörpers sich nicht großartig voneinander unterscheiden, ist die H-Probe aufgrund der leichter zu interpretierenden Belastung im Kerbbereich zu bevorzugen.

Ein weiterer möglicher Ansatz für die Durchführung druckdominanter Belastungen dieser Probekörper könnte sein, sich eine Vorrichtung zu bauen, die das Beulen verhindert. Diese könnte beispielsweise die Probekörperarme so umschließen, dass eine Bewegung aus der Probenebene heraus verhindert wird.

Außerdem sollten Mikrosimulationen mit Entlastung durchgeführt werden, um den Einfluss der elastischen Schädigungsmodule auf die Verteilung und Größe der Schädigungsverzerrungen sowie auf die Kraft-Verschiebungs-Kurven besser verstehen und steuern zu können.

Das vorgeschlagene Risskriterium sollte anhand weiterer Studien validiert werden. Die kurz vor dem Versagen erreichten Spannungstriaxialitäten, die für die Entwicklung des Risskriteriums verwendet werden konnten, decken nicht den gesamten Bereich der Spannungstriaxialitäten ab, weshalb dahingehend vor allem große Spannungstriaxialitäten untersucht werden sollten. Des Weiteren konnte die Abhängigkeit des Risskriteriums vom Lodeparameters nur angedeutet werden. Dazu sollten Versuche mit negativen Spannungstriaxialitäten und unterschiedlichen Lodeparametern untersucht werden.

Ergänzende Studien zum Grenzwert der negativen Spannungstriaxialität könnten die vorgeschlagene spannungsabhängige Funktion dieses Grenzwertes auch für weitere Spannungszustände validieren.

## Literaturverzeichnis

- [1] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik, 3. Auflage*. Springer Vieweg, Berlin Heidelberg, 2015.
- [2] ANSYS, Inc. (Hrsg.). *ANSYS USER Material Subroutine USERMAT*, 1999.
- [3] ANSYS, Inc. (Hrsg.). *ANSYS Mechanical APDL Element Reference*, 2011.
- [4] ANSYS, Inc. (Hrsg.). *ANSYS Mechanical APDL Theory Reference - Release 15.0*, 2013.
- [5] Y. Bai und T. Wierzbicki. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of Plasticity*, 24: 1071–1096, 2008.
- [6] Y. Bao und T. Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality spac. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46: 81–98, 2004.
- [7] Y. Bao und T. Wierzbicki. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 72: 1049–1069, 2005.
- [8] I. Barsoum und J. Faleskog. Rupture mechanisms in combined tension and shear - Experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 44: 1768–11786, 2007.
- [9] R. Becker, A. Needleman, O. Richmond und V. Tvergaard. Void growth and failure in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36: 317–351, 1988.
- [10] J. Betten. Net-stress analysis in creep mechanics. *Ingenieur-Archiv*, 52: 405–419, 1982.
- [11] J. Betten. Damage tensors in continuum mechanics. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 2: 13–32, 1983.

- 
- [12] D. Brenner. Ein vom Spannungszustand abhängiges makroskopisches Schädigungs- und Versagensmodell basierend auf Experimenten und numerischen Simulationen. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2014.
- [13] P. W. Bridgman. *Studies in large flow and fracture*. Harvard University Press, Cambridge (MA), 1964.
- [14] O. T. Bruhns und P. Schiesse. A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids. *European Journal of Mechanics and Solids*, 15: 367-396, 1996.
- [15] M. Brünig. Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensors. *Computational Mechanics*, 24: 187–196, 1999.
- [16] M. Brünig. Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids. *International Journal of Plasticity*, 15: 1237–1264, 1999.
- [17] M. Brünig. A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations. *International Journal of Engineering Science*, 39: 1033–1056, 2001.
- [18] M. Brünig. Numerical analysis and elastic-plastic deformation behavior of anisotropically damaged solids. *International Journal of Plasticity*, 18: 1237–1270, 2002.
- [19] M. Brünig. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. *International Journal of Plasticity*, 19: 1679–1713, 2003.
- [20] M. Brünig. Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192: 2949–2976, 2003.
- [21] M. Brünig. An anisotropic continuum damage model: Theory and numerical analyses. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1: 185–218, 2004.
- [22] M. Brünig, O. Chyra, D. Albrecht, L. Driemeier und M. Alves. A ductile damage criterion at various stress triaxialities. *International Journal of*

- Plasticity*, 24: 1731–1755, 2008.
- [23] M. Brünig, D. Albrecht und S. Gerke. Numerical analyses of stress-triaxiality-dependent inelastic deformation behavior of aluminum alloys. *International Journal of Damage Mechanics*, 20: 299–317, 2011.
- [24] M. Brünig, S. Gerke und V. Hagenbrock. Micro-mechanical numerical studies on the stress state dependence of ductile damage. *International Journal of Plasticity*, 50: 49–65, 2013.
- [25] M. Brünig, S. Gerke und V. Hagenbrock. Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage. In: *H. Altenbach und S. Kruch (Hrsg.): Advanced Materials Modelling for Structures, Advanced Structured Materials*, 19: 87–96, Berlin Heidelberg Springer, 2013.
- [26] M. Brünig, S. Gerke und V. Hagenbrock. Stress-state-dependence of damage strain rate tensors caused by growth and coalescence of micro-defects. *International Journal of Plasticity*, 63: 49–63, 2014.
- [27] M. Brünig, S. Gerke und M. Schmidt. Biaxial experiments and phenomenological modeling of stress-state-dependent ductile damage and failure. *International Journal of Fracture*, 200: 63–76, 2016.
- [28] M. Brünig, S. Gerke und M. Schmidt. Experiments on damage and failure mechanisms in ductile metals at different loading conditions. In: *K. Naumenko, M. Aßmus (Eds.), Advanced Methods of Continuum Mechanics for Materials and Structures*, 279–293, Springer Science+Business Media Singapore 2016.
- [29] M. Brünig, S. Gerke und M. Schmidt. Biaxial experiments and numerical simulations on damage and fracture mechanisms in ductile metals at different loading conditions. *Procedia Structural Integrity*, 2: 3109–3116, 2016.
- [30] M. Brünig, S. Gerke und M. Schmidt. Biaxial experiments and numerical analyses on damage prediction in metal forming processes. *MATEC Web of Conferences*, 80, NUMIFORM 2016.
- [31] M. Brünig, V. Hagenbrock und S. Gerke. Macroscopic damage laws based on analysis of microscopic unit cells. *Journal of Applied Mathematics and*

- Mechanics*, 98: 181–194, 2018.
- [32] J.-L. Chaboche. Continuous damage mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design*, 64: 233–247, 1981.
- [33] K. Chen, M. Scales und S. Kyriakides. Material response, localization and failure of an aluminum alloy under combined shear and tension: Part II analysis. *International Journal of Plasticity*, 120: 361–379, 2019.
- [34] C. L. Chow und J. Wang. A finite element analysis of continuum damage mechanics for ductile fracture. *International Journal of Fracture*, 38: 83–102, 1988.
- [35] T. Coppola, L. Cortese und P. Folgarait. The effect of stress invariants on ductile fracture limit in steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 76: 1288–1302, 2009.
- [36] K. Danas und P. Ponte Castañeda. Influence of the Lode parameter and stress triaxiality on the failure of elastic-plastic porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49: 1325–1342, 2012.
- [37] Dantec Dynamics. (Hrsg.). *ISTRA 4D - Software Manual Q-400 System*, 2017.
- [38] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1982.
- [39] E. A. de Souza Neto und D. Perić. A computational framework for a class of fully coupled models for elastoplastic damage at finite strains with reference to the linearization aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130: 179–193, 1996.
- [40] S. Demmerle und J. P. Boehler. Optimal design of biaxial tensile cruciform specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41: 143–181, 1993.
- [41] M. Dirian. Experimentelle und numerische Studien zum Entwurf neuer zweiachsig belasteter Versuchskörper aus Aluminiumblechen. Bachelorarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2016.

- 
- [42] R. H. Dodds. Numerical techniques for plasticity computations in finite element analysis. *Computer and Structures*, 26: 767–779, 1987.
- [43] I. Doghri. Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 38: 3403–3431, 1995.
- [44] L. Driemeier, M. Brünig, G. Micheli und Marcílio Alves. Experiments on stress-triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys. *Mechanics of Materials*, 42: 207–217, 2010.
- [45] M. Dunand und D. Mohr. On the predictive capabilities of the shear modified Gurson and the modified Mohr-Coulomb fracture models over a wide range of stress triaxialities and Lode angles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59: 1374–1394, 2011.
- [46] M. Fourmeau, T. Børvik, A. Benallal und O.S. Hopperstad. Anisotropic failure modes of high-strength aluminium alloy under various stress states. *International Journal of Plasticity*, 48: 34–53, 2013.
- [47] X. Gao, T. Zhang, M. Hayden und C. Roe. Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy. *International Journal of Plasticity*, 25: 2366–2382, 2009.
- [48] X. Gao, G. Zhang und C. Roe. A study on the effect of stress state on ductile fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 19: 75–94, 2010.
- [49] S. Gerke, M. Schmidt und M. Brünig. Numerical simulations of biaxial experiments on damage and fracture in sheet metal forming. *Journal of Physics: Conference Series*, 734, 2016.
- [50] S. Gerke, P. Adulyasak und M. Brünig. New biaxially loaded specimens for the analysis of damage and fracture in sheet metals. *International Journal of Solids and Structures*, 110-111: 209–218, 2017.
- [51] G. Gruben, O. S. Hopperstad und T. Børvik. Evaluation of uncoupled ductile fracture criteria for the dual-phase steel Docol 600DL. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62: 133–146, 2012.
- [52] A. L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation

- and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99: 2–15, 1977.
- [53] V. Hagenbrock. Ein Kontinuumsschädigungsmodell basierend auf mikro-mechanischen numerischen Berechnungen. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2016.
- [54] S. S. Haltom, S. Kyriakides und K. Ravi-Chander. Ductile failure under combined shear and tension. *International Journal of Solids and Structures*, 50: 1507–1522, 2013.
- [55] C. Hartmann, J. Wang, D. Opristescu und W. Volk. Implementation and evaluation of optical flow methods for two-dimensional deformation measurement in comparison to digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 107: 127–141, 2018.
- [56] K. Hayakawa, S. Murakami und Y. Liu. An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 17: 13–32, 1998.
- [57] T. J. R. Hughes und K. S. Pister. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Computer and Structures*, 8: 391–397, 1978.
- [58] L. M. Kachanov. Rupture time under creep conditions. *Izvestia akademii nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskich nauk*, 8: 26–31, 1958.
- [59] A. S. Kao, H. A. Kuhn, O. Richmond und W. A. Spitzig. Tensile fracture fractographic analysis of 1045 spheroidized steel under hydrostatic pressure. *Journal of Materials Research*, 5: 83–91, 1990.
- [60] A. S. Khan und H. Liu. A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *International Journal of Plasticity*, 35: 1–12, 2012.
- [61] A. Königs. Numerische Simulationen biaxial beanspruchter Kreuzproben zur Anpassung von Probengeometrien für eine Stahllegierung. Bachelorarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2017.
- [62] D. Krajcinovic und G. Fonseka. The continuous damage theory of brittle materials, Part 1: General theory. *Journal of Applied Mechanics*, 48: 809–815, 1981.
- [63] R. D. Krieg und D. B. Krieg. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *Journal of Pressure Vessel Technology*,

- 99: 510–515, 1977.
- [64] D. Kuwalinski, K. Nagel, S. Henkel, P. Hübner, H. Fischer, M. Kuna und H. Biermann. Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load ratios. *Engineering Fracture Mechanics*, 78: 1684–1695, 2011.
- [65] T. Kuwabara. Advances in experiments on metal sheets and tubes in support of constitutive modeling and forming simulations. *International Journal of Plasticity*, 23: 385–419, 2007.
- [66] F. Leckie und E. Onat. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In J. Hult and J. Lemaitre, editors *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, 140–155, Springer Berlin heidelberg, 1981.
- [67] D. Lecompte, A. Smits, H. Sol, J. Vantomme und D. Van Hemelrijck. Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 44: 1643–1656, 2007.
- [68] T. Lehmann. Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica*, 79: 1–24, 1989.
- [69] T. Lehmann. Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage. *International Journal of Plasticity*, 7: 79–98, 1991.
- [70] J. Lemaitre. Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading. *Proceedings of the First International Conference on the Mechanical Behavior of Materials*, 540–549, Kyoto 1972.
- [71] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107: 83–89, 1985.
- [72] J. Lemaitre. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51: 31–49, 1985.
- [73] J. Lemaitre. A course on damage mechanics. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1996.

- [74] J. Lemaitre, R. Desmorat und M. Sauzay. Anisotropic damage law of evaluation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19: 187–208, 2000.
- [75] H. Li, M. W. Fu., J. Lu und H. Yang. Ductile fracture: Experiments and computations. *International Journal of Plasticity*, 27: 147–180, 2011.
- [76] T. J. Lu und C. L. Chow. On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 14: 187–218, 1990.
- [77] A. Makinde, L. Thibodeau und K. W. Neale. Development of an apparatus for biaxial testing using cruciform specimens. *Experimental Mechanics*, 32: 138–144, 1992.
- [78] F. A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35: 363–371, 1968.
- [79] D. Mohr und S. J. Marcadet. Micromechanically-motivated phenomenological Hosford-Coulomb model for predicting ductile fracture initiation at low stress triaxialities. *International Journal of Solids and Structures*, 67-68: 40–55, 2015.
- [80] A. Müller. Experimentelle Analysen mit Hilfe digitaler Bildkorrelation (DIC) und numerische Studien zum Deformationsverhalten unterschiedlich gekerbter Zugproben unter einaxialer Belastung. Masterarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2016.
- [81] W. Müller. New experiments for determining yield loci of sheet metal. *Journal of Materials Processing Technology*, 60: 643–648, 1996.
- [82] S. Murakami. Mechanical modeling of material damage. *Journal of Applied Mechanics*, 55: 280–286, 1988.
- [83] K. Nahshon und J. W. Hutchinson. Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27: 1–17, 2008.
- [84] A. Needleman und V. Tvergaard. An analysis of ductile rupture in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, 32: 461–490, 1984.
- [85] S. Nemat-Nasser und Y.-F. Li. A new explicit algorithm for finite-deformation elastoplasticity and elastoviscoplasticity: Performance

- evaluation. *Computer and Structures*, 44: 937–963, 1992.
- [86] J. R. Rice und D.-M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17: 201–217, 1969.
- [87] C. C. Roth und D. Mohr. Ductile fracture experiments with locally proportional loading histories. *International Journal of Plasticity*, 79: 328–354, 2016.
- [88] M. Sander, T. Müller und J. Lebahn. Influence of mean stress and variable amplitude loading on the fatigue behavior of high-strength steel in VHCF regime. *International Journal of Fatigue*, 62: 10–20, 2014.
- [89] M. Schmidt. Numerische Simulation des Verhaltens ein- und biaxial beanspruchter Metallproben unter Verwendung vereinfachter Schädigungskriterien. Masterarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2014.
- [90] N. Schütz. Experimentelle und numerische Studien zum Verformungs- und Schädigungsverhalten anhand biaxialer Lastfälle eines legierten Stahlprobekörpers. Masterarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2019.
- [91] E. Shiratori und K. Ikegami. Experimental study of the subsequent yield surface by using cross-shaped specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16: 373–394, 1968.
- [92] J. C. Simo und J. W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation. *International Journal of Solids and Structure*, 23: 821–840, 1987.
- [93] W. A. Spitzig und O. Richmond. The effect of pressure on the flow stress of metals. *Acta Metallurgica*, 32: 457–463, 1984.
- [94] W. A. Spitzig, R. J. Sober und O. Richmond. Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite. *Acta Metallurgica*, 23: 885–893, 1975.
- [95] W. A. Spitzig, R. J. Sober und O. Richmond. The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and hy-80 steels and its implications for plasticity theory. *Metallurgical and Materials Transactions*

- A, 7: 1703–1710, 1976.
- [96] E. T. Till und B. Hackl. Calibration of Plasticity - and failure models for AHSS sheets. *IDDRG 2013 Conference*, 2013.
- [97] V. Tvergaard Material failure by void coalescence in localized shear bands. *International Journal of Solids and Structures*, 18: 659–672, 1982.
- [98] V. Tvergaard und A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32: 157–169, 1984.
- [99] V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27: 83–147, 1990.
- [100] G. Z. Voyiadjis und T. Park. The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 37: 803–830, 1999.
- [101] M. L. Wilkins. Calculation of elastic-plastic flow. *Methods in Computational Physics*, 3: 211–262, 1964.
- [102] Zeiss: Carl Zeiss Microscopy GmbH (Hrsg.). *Mikroskop- und Messsysteme für Qualitätssicherung und -kontrolle*
- [103] B. Zillmann, M. F.-X. Wagner, S. Schmaltz, E. Schmidl, T. Lampke, K. Willnder und T. Halle. In-plane biaxial compression and tension testing of thin sheet materials. *International Journal of Solids and Structures*, 66: 111–120, 2015.