

# Die Stabilität von Projektilen

Prof. Dr. Andreas Rudolph  
Universität der Bundeswehr  
München  
Institut für Mathematik und Informatik  
FB BW  
Werner-Heisenberg-Weg 39  
85577 Neubiberg  
Email: [Andreas.Rudolph@unibw.de](mailto:Andreas.Rudolph@unibw.de)

6. September 2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Überblick und Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung	1
1.2	Mathematische Grundlagen	3
1.2.1	Die Differentialgleichungen des starren Körpers	3
1.2.1.1	Einführung	3
1.2.1.2	Die Ableitung eines Vektors nach der Zeit	4
1.2.1.3	Die Bewegungsgleichungen der Rotation	5
1.2.1.4	Die Bewegungsgleichungen der Translation	8
1.2.1.5	Die vollständigen Bewegungsgleichungen für Euler-Winkel	9
1.2.1.6	Die vollständigen Bewegungsgleichungen für Quaternionen	12
1.2.2	Der Lagrange-Formalismus	12
1.2.2.1	Einführung	12
1.2.2.2	Einige Ergebnisse aus der Physik - das einzelne Teilchen	13
1.2.2.3	Systeme von Teilchen	15
1.2.2.4	Nebenbedingungen	18
1.2.2.5	Das Prinzip von D'Alembert und die Lagrange-Gleichungen	20
1.2.2.6	Die (verallgemeinerten) Lagrange-Gleichungen	24
1.2.2.7	Das Hamilton-Prinzip	30
1.2.2.8	Vorteile des Lagrange-Formalismus	32
1.2.2.9	Erhaltungssätze und Symmetrieeigenschaften	34
1.2.3	Die Theorie des Kreisels	36
1.2.3.1	Einführung	36
1.2.3.2	Mathematische Grundlagen	36
1.2.3.3	Euler- und Kardan-Winkel	40
1.2.3.4	Energie und Drall	43
1.2.3.5	Die Bewegungsgleichungen des Kreisels	47
1.2.3.6	Der freie symmetrische Kreisel	49
1.2.3.7	Der allgemeine Fall des freien Kreisels	52
1.2.3.8	Der Kreisel im Gravitationsfeld	54
1.2.3.9	Der schnelle Kreisel	64
1.2.3.10	Die Lösung mittels der Lagrange-Gleichungen	69
1.2.3.11	Der Kreisel unter der Euler-Folge (3,2,3)	73
<b>2</b>	<b>Stabilität von Geschossen</b>	<b>77</b>
2.1	Einführung	77
2.2	Stabilitätsbedingungen, gyroskopische Stabilität	79
2.3	Der Folgsamkeitsfaktor und die gyroskopische Stabilität	101

2.4	Näherungen für den Stabilitätsfaktor für Büchsen- geschosse . . . . .	102
2.5	Stabilitätsbedingungen, dynamische Stabilität . . . . .	108
2.6	Ausblick . . . . .	130

# Kapitel 1

## Überblick und Grundlagen

### 1.1 Einführung

Traditionell liegt der Beschreibung der Flugbahn eines Projektils die Newton'sche Mechanik zugrunde.

Diese beruht einerseits auf der Gleichung

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \mathbf{v})$$

wobei  $\mathbf{F}$  die Summe aller einwirkenden (insbesondere aerodynamischen) Kräfte, mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  der Vektor der Ortskoordinaten und  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$  der Geschwindigkeitsvektor ist.

Unterstellt man eine konstante Masse  $m$ , dann ergibt sich mit dem Impuls  $m\mathbf{v} = \mathbf{p}$  die Gleichung für die Translation

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}$$

Andererseits kommt noch die Gleichung

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}$$

wobei  $\mathbf{M}$  die Summe aller äußeren (aerodynamischen) Drehmomente und  $\mathbf{H}$  der Drehimpuls ist - siehe hierzu zum Beispiel Sommerfeld (1967), S. 183 ff.)<sup>1</sup>.

Hier<sup>2</sup> findet man auch den Nachweis, dass die allgemeine Bewegung (zum Beispiel) eines Geschosses in eine Translation und in eine Rotation zerlegt werden kann.

---

<sup>1</sup>Im Fall, dass Rotationseffekte vernachlässigt werden können, entfällt die zweite Gleichung.

<sup>2</sup>Diesen Nachweis findet man auch in anderen Lehrbüchern der theoretischen Physik.

Betrachtet man nur Translationsbewegungen, so reicht die Einführung eines bodenfesten Koordinatensystems, bezüglich dessen die Ortskoordinaten wie auch die Geschwindigkeitskoordinaten betrachtet werden.

Wir können gegebenenfalls die Koordinaten mit einem Index B kennzeichnen.

Sollen zusätzlich auch Rotationsbewegungen mit betrachtet werden, muss ein körperfestes Koordinatensystem eingeführt werden.

Die Koordinaten bezüglich dieses Systems können wir mit einem Index K kennzeichnen.

Man kann damit die Bewegung der Geschosspitze darstellen als Überlagerung einer Translationsbewegung des Schwerpunktes und einer Rotation um den Schwerpunkt.

Weitere Koordinatensysteme sind denkbar und wurden vorgeschlagen, siehe zum Beispiel Siouris (2004).

Die Rotation kann dabei generell beschrieben werden durch

- sogenannte Euler-Winkel
- oder Quaternionen<sup>3</sup>

Wir werden diese Möglichkeiten separat ansprechen.

Generell gilt die folgende Transformationsformel:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_K = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_B$$

Dabei wurde der Vektor  $\mathbf{A}$  auf der linken Seite im körperfesten System betrachtet und auf der rechten Seite im bodenfesten System.

Diese Transformationsformel kann man zum Beispiel nachlesen im Buch von Kim (2013), S. 104, Formel (10.4) oder in jedem Lehrbuch der theoretischen Physik.

$\boldsymbol{\omega}$  ist hierbei der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Geschosses, d. h.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Die obige Transformationsformel ist damit die Brücke zwischen dem Differentialgleichungssystem für den Schwerpunkt einerseits

$$m \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{V}_K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_K \right\} = \mathbf{K}_B$$

wenn  $\mathbf{K}_B$  die äußeren Kräfte sind, die auf das Geschoss einwirken, und  $\mathbf{V}_K$  der Geschwindigkeitsvektor ist, und dem Drehimpuls  $\mathbf{H}_K$  andererseits

<sup>3</sup>Es gibt noch weitere Darstellungsmöglichkeiten.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_K = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

wenn  $\mathbf{I}$  der sogenannte Massenträgheitstensor des Geschosses ist.

Die Berechnung des Massenträgheitstensors kann man in fast jedem Lehrbuch der theoretischen Physik finden, zum Beispiel im Buch von Kuypers (2010), S. 187 ff., oder Brandt und Dahmen (2005), S. 154 ff.

Das Kreuzprodukt  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$  schreibt man gerne mit Hilfe einer schiefsymmetrischen Matrix, es ergibt sich

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = - \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Da der Vektor der Winkelgeschwindigkeiten von den Winkeln abhängt, erhalten wir zusätzlich noch drei Differentialgleichungen für die Winkel.

Die Struktur dieser Differentialgleichungen hängt dann davon ab, mit welcher Abfolge von Euler-Winkeln man arbeitet - es gibt insgesamt zwölf mögliche Folgen von Euler-Winkeln (davon später).

Wir haben damit

- drei Differentialgleichungen für die Ortskoordinaten  $x_B, y_B, z_B$
- drei Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskoordinaten  $\dot{x}_B, \dot{y}_B, \dot{z}_B$
- drei Differentialgleichungen für die Winkelgeschwindigkeiten  $p, q, r$
- drei Differentialgleichungen für die Winkel  $\Theta, \Phi, \Psi$  bzw. die Quaternionen  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , wenn man mit Quaternionen arbeiten möchte

Fasst man diese Differentialgleichungen zu einem System zusammen, stellt sich die Frage nach der Lösbarkeit und der Eindeutigkeit des Systems. Derartige Fragen wollen wir hier nicht behandeln - siehe hierzu zum Beispiel das Buch von Kamke (1969) oder Walter (2000).

## 1.2 Mathematische Grundlagen

### 1.2.1 Die Differentialgleichungen des starren Körpers

#### 1.2.1.1 Einführung

Die nachfolgenden Ausführungen wurden dem Buch von Kim (2013), S. 119 ff., entnommen.

Die Dynamik des starren Körpers zerfällt grundsätzlich in die rotatorischen und die translatorischen Bewegungsgleichungen.

Die rotatorischen Gleichungen zerfallen wiederum

- in kinematische Gleichungen und
- in kinetische Gleichungen.

Entsprechend zerfallen auch die translatorischen Gleichungen

- in kinematische Gleichungen und
- in kinetische Gleichungen.

Wir beginnen mit der Ableitung eines Vektors nach der Zeit.

### 1.2.1.2 Die Ableitung eines Vektors nach der Zeit

Wir betrachten einen Vektor  $\mathbf{r}$ , der aus folgenden Komponenten besteht:

$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_I = \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix}$$

Dabei deutet der Index  $B$  auf das körperfeste Koordinatensystem  $B$  und der Index  $I$  auf das inertielle Koordinatensystem  $I$  hin.

Wenn wir uns für die Ableitung nach der Zeit interessieren, so hängt diese mit dem zugrundeliegenden Koordinatensystem zusammen.

Wir deuten diese Abhängigkeit wie folgt an:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_I$$

um anzudeuten, dass hier die Ableitung im Koordinatensystem  $I$  genommen wurde.

Die zeitliche Ableitung der Komponenten können wir wie folgt darstellen:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_I = \begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{z}_I \end{pmatrix}$$

Entsprechend können wir im Fall des zweiten Vektors verfahren:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_B = \begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{pmatrix}$$

Problematisch wird nun die zeitliche Ableitung im Fall, dass die Komponenten in verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet werden sollen - dann ist ein Ergebnis der theoretischen Physik,

dass

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_B + \boldsymbol{\omega}^{B/I} \times \mathbf{r}$$

Hierbei ist nun  $\boldsymbol{\omega}^{B/I}$  die Winkelgeschwindigkeit von  $B$  bzgl.  $I$ .

Dabei unterstellen wir, dass die Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}^{B/I}$  in  $B$  bekannt sind.

Der erste Term ist nun die zeitliche Ableitung des Vektors  $\mathbf{r}$  im System  $B$ . Sind die Komponenten von  $\mathbf{r}$  in  $B$  bekannt, dann kann die Ableitung bzgl.  $t$  leicht berechnet werden.

Der zweite Term ist das Kreuzprodukt aus der Winkelgeschwindigkeit und einem Vektor  $\mathbf{r}$ , beide mit Komponenten in  $B$ .

Dieses Kreuzprodukt können wir wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{B/I} \times \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_z y_B + \omega_y z_B \\ \omega_z x_B - \omega_x z_B \\ -\omega_y x_B + \omega_x y_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei sind  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  und  $(x_B, y_B, z_B)$  die Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}^{B/I}$  bzw. von  $\mathbf{r}$  in  $B$ .

Also erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_B + \boldsymbol{\omega}^{B/I} \times \mathbf{r} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_z y_B + \omega_y z_B \\ \omega_z x_B - \omega_x z_B \\ -\omega_y x_B + \omega_x y_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Gleichung spielt eine der wichtigsten Rollen in der Kinematik des starren Körpers.

### 1.2.1.3 Die Bewegungsgleichungen der Rotation

Sei nun  $\mathbf{M}$  das äußere Drehmoment, welches auf den Schwerpunkt des Körpers einwirkt, und  $\mathbf{H}$  der Drehimpuls, der am Schwerpunkt des Körpers ansetzt.

Der Satz vom Drehimpuls besagt nun, dass

$$\mathbf{M} = \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_I$$

wenn  $I$  ein Inertialsystem ist.

Komponentenweise geschrieben bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{pmatrix}$$

sofern die Komponenten von  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{H}$  im System  $I$  bekannt sind.

Nun sind die Komponenten von  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{H}$  schwierig im System  $I$  zu erhalten. Wir wenden deshalb unsere obige Vektorgleichung an - dies ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_I \\ &= \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_B + \boldsymbol{\omega}^{B/I} \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

wobei auch hier  $\boldsymbol{\omega}^{B/I}$  die Winkelgeschwindigkeit von  $B$  bzgl.  $I$  ist.

Mit

$$\mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}^{B/I} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

erhalten wir dann

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung stellt man nun um:

$$\begin{pmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als die Bewegungsgleichungen der Rotation.

Fallen nun die Achsen des Koordinatensystems mit den sogenannten Hauptachsen des Trägheitstensors<sup>4</sup> zusammen, dann ist der Drehimpuls gegeben durch

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{pmatrix}$$

Hierbei sind  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  die Trägheitsmomente um die Hauptachsen.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} J_x \dot{\omega}_x \\ J_y \dot{\omega}_y \\ J_z \dot{\omega}_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_y \omega_y \omega_z - J_z \omega_y \omega_z \\ -J_x \omega_z \omega_x + J_z \omega_x \omega_z \\ J_x \omega_x \omega_y - J_y \omega_y \omega_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Explizit hingeschrieben ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= (J_y - J_z) \omega_y \omega_z + M_x \\ J_y \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x) \omega_z \omega_x + M_y \\ J_z \dot{\omega}_z &= (J_x - J_y) \omega_x \omega_y + M_z \end{aligned}$$

Ein Spezialfall ergibt sich, falls eine Rotationssymmetrie vorliegt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $J_x = J_y$ ), dann haben wir

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= (J_x - J_z) \omega_y \omega_z + M_x \\ J_x \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x) \omega_z \omega_x + M_y \\ J_z \dot{\omega}_z &= M_z \end{aligned}$$

Wirken nun **keine** äußeren Momente ein (d. h.  $M_x = M_y = M_z = 0$ ), dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= (J_x - J_z) \omega_y \omega_z \\ J_x \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x) \omega_z \omega_x \\ J_z \dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann explizit gelöst werden - man erhält dann  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  und  $\omega_z$  als explizite Funktionen der Zeit.

Ein weiterer Spezialfall ergibt sich für  $J_x = J_y = J_z = J$  - wir haben dann:

<sup>4</sup>Die Definition und die Berechnung des Trägheitstensors kann in jedem Buch der theoretischen Physik gefunden werden, siehe z. B. Brandt und Dahmen (2005).

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_x &= M_x \\ J\dot{\omega}_y &= M_y \\ J\dot{\omega}_z &= M_z \end{aligned}$$

In der etwas allgemeineren Situation, dass

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

erhalten wir die etwas umfangreichere Gleichung

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Dies ist die sogenannte allgemeine Bewegungsgleichung der Rotation, siehe hierzu Kim (2013), S. 129.

#### 1.2.1.4 Die Bewegungsgleichungen der Translation

Diesen Gleichungen liegt das zweite Newton'sche Gesetz zugrunde:

$$\mathbf{F} = \left( \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \right)_I$$

wobei  $\mathbf{F}$  die äußere Kraft darstellt, die auf den Schwerpunkt des starren Körpers wirkt,  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes ist und  $m$  die Masse des Körpers.

$I$  ist dabei ein Inertialsystem - bzgl. dessen wird die zeitliche Ableitung gebildet.

Oft ist diese Gleichung schwierig zu berechnen - die Komponenten sind bzgl. des Inertialsystems unbekannt. Wieder können wir von der bereits angewandten Vektorgleichung Gebrauch machen - wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left( \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \right)_I \\ &= \left( \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \right)_B + \boldsymbol{\omega}^{B/I} \times (m\mathbf{v}) \end{aligned}$$

wobei  $\boldsymbol{\omega}^{B/I}$  die Winkelgeschwindigkeit in  $B$  bzgl.  $I$  ist.

Wir schreiben nun diese Vektorgleichung komponentenweise auf - dies gibt:

$$\mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}^{B/I} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\dot{v}_x \\ m\dot{v}_y \\ m\dot{v}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{pmatrix}$$

oder umgestellt

$$\begin{pmatrix} m\dot{v}_x \\ m\dot{v}_y \\ m\dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Nach Division durch  $m$  erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m \end{pmatrix}$$

Nun fehlt nur noch eine Gleichung - diese Gleichung ist die Geschwindigkeit mit seiner Position:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{z}_I \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{I/B} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Hierbei ist  $\mathbf{C}^{I/B}$  die Drehmatrix und  $x_I$ ,  $y_I$  und  $z_I$  sind die Koordinaten im Inertialsystem.

Dabei ist zu beachten, dass nun  $\mathbf{C}^{I/B}$  verwendet wurde und nicht  $\mathbf{C}^{B/I}$  - **wir transformieren ja nun zurück aus dem körperfesten System in das Inertialsystem.**

Diese Matrix kann aber leicht erhalten werden - wir arbeiten mit Rotationsmatrizen und diese haben die Eigenschaft, dass ihre Inverse sich durch Transposition ergibt.

### 1.2.1.5 Die vollständigen Bewegungsgleichungen für Euler-Winkel

Wir haben damit insgesamt folgende vier Gruppen von jeweils drei Differentialgleichungen im Fall von Euler-Winkeln:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{z}_I \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{I/B} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

und - je nach gewählten Elementarmatrizen für die Drehungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Demzufolge müssen die letzten Gleichungen entsprechend modifiziert werden - je nachdem, mit welchen Euler-Folgen man arbeiten will.

Will man mit der Euler-Folge (1,2,3) arbeiten, dann kommt man zu dem letzten Differentialgleichungssystem.

Für die Drehmatrix  $\mathbf{C}^{B/I}$  muss man dann

$$\mathbf{C}^{B/I} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ -\cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ansetzen.  $\mathbf{C}^{I/B}$  ist dann die Inverse - sie wird durch Transposition erhalten.

Will man dagegen mit der Euler-Folge (3,1,3) arbeiten, dann muss das letzte Differentialgleichungssystem wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} -\sin(\psi) & -\cos(\psi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Entsprechend muss man für die Drehmatrix

$$\mathbf{C}^{B/I} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\cos(\phi) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & -\cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ansetzen.

Sollte es notwendig sein, mit der Euler-Folge (3,2,3) arbeiten zu müssen, so ist das notwendige Differentialgleichungssystem gleich:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\phi)\sin(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) & 0 \\ -\cos(\psi)\cos(\theta) & -\sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Drehmatrix ist dann gleich

$$\mathbf{C}^{B/I} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\psi)\sin(\phi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) \\ -\cos(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\psi) & -\sin(\psi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Diese vier Differentialgleichungssysteme kann man zu einem einzigen Differentialgleichungssystem erster Ordnung zusammensetzen.

Man sieht an dieser Stelle eine prinzipielle Schwierigkeit - selbst wenn man  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  und  $\omega_z$  als Funktionen der Zeit bestimmt hat, ist das System von Differentialgleichungen für die Euler-Winkel nicht einfach zu lösen.

Die Euler-Winkel sind aber diejenigen Größen, die die Präzession und die Nutation eines Projektils beschreiben.

#### Generell gilt für die Euler-Winkel:

Seien  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  die betrachteten Achsen.

Es gibt folgende Möglichkeiten, um Achsen zu drehen (siehe zum Beispiel das Buch von Kim (2013)):

Drehung Nr.	Erste Drehung	Zweite Drehung	Dritte Drehung	Abfolge der Drehungen
1	$X$	$Y$	$Z$	$X \rightarrow Y \rightarrow Z$
2	$X$	$Y$	$X$	$X \rightarrow Y \rightarrow X$
3	$X$	$Z$	$X$	$X \rightarrow Z \rightarrow X$
4	$X$	$Z$	$Y$	$X \rightarrow Z \rightarrow Y$
5	$Y$	$X$	$Y$	$Y \rightarrow X \rightarrow Y$
6	$Y$	$X$	$Z$	$Y \rightarrow X \rightarrow Z$
7	$Y$	$Z$	$X$	$Y \rightarrow Z \rightarrow X$
8	$Y$	$Z$	$Y$	$Y \rightarrow Y \rightarrow Y$
9	$Z$	$X$	$Y$	$Z \rightarrow X \rightarrow Y$
10	$Z$	$X$	$Z$	$Z \rightarrow X \rightarrow Z$
11	$Z$	$Y$	$Z$	$Z \rightarrow Y \rightarrow Z$
12	$Z$	$Y$	$X$	$X \rightarrow Y \rightarrow X$

Hiermit kann man festlegen, in welcher Reihenfolge gedreht wird - damit wird auch die Reihenfolge der Elementarmatrizen festgelegt.

### 1.2.1.6 Die vollständigen Bewegungsgleichungen für Quaternionen

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch die Bewegungsgleichungen für Quaternionen.

Hier haben wir folgende vier Gruppen von Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{z}_I \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{I/B} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{C}^{B/I} = \mathbf{C}(q_0, q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{dq}{dt} = q(t)\tilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\mathbf{C}^{I/B}$  erhält man dann durch Transposition.

Auch diese Gruppen kann man zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung zusammenfügen.

## 1.2.2 Der Lagrange-Formalismus

### 1.2.2.1 Einführung

Die Probleme im Zusammenhang mit den vier Gruppen von Differentialgleichungen des starren Körpers hatten wir bereits angedeutet - wir wollen hier zumindest eine Lösung für ein Teilproblem vorstellen.

Die Newton'sche Mechanik basiert auf Newton's zweitem Gesetz

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p})$$

wenn  $\mathbf{a}$  die Beschleunigung und  $\mathbf{p}$  der Impuls ist.

Dies führt bei bekannten Kräften  $\mathbf{F}$  auf ein Differentialgleichungssystem, welches allerdings ziemlich ruppig sein kann, was eine Lösung angeht.

Insbesondere gilt dies, wenn Nebenbedingungen auftreten.

Dies ist die Situation, wo der Lagrange-Formalismus mit seinen generalisierten Koordinaten eine elegante Lösung verspricht.

In den folgenden Abschnitten wollen wir diesen Formalismus kurz skizzieren - wir orientieren uns hierbei an dem Klassiker, dem Buch von Goldstein u. a. (2017).

An weiteren Büchern wären zum Beispiel zu nennen

- Fließbach (2015)
- Cline (2018)
- Hamill (2014)
- Brizard (2014)
- Sommerfeld (1967), der Klassiker

### 1.2.2.2 Einige Ergebnisse aus der Physik - das einzelne Teilchen

In diesem Abschnitt stellen wir einige prinzipielle Ergebnisse aus der Physik zusammen.

Die Mechanik eines einzelnen Teilchens ist in Newton's zweitem Gesetz der Bewegung enthalten - dieses lautet

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

wobei  $\mathbf{F}$  die Kraft ist, die auf das Teilchen einwirkt, und  $\mathbf{p}$  der lineare Impuls des Teilchens.

Dabei ist der lineare Impuls wie folgt definiert.

Beschreibt  $s$  die Kurve des Teilchens, welche durch den Vektor  $\mathbf{x}(t)$  gegeben ist, dann definieren wir den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  durch die Gleichung

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Der lineare Impuls ist dann definiert durch die Gleichung

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

wobei nun  $m$  die Masse des Teilchens ist.

Wir können damit das zweite Newton'sche Gesetz auch schreiben als

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

oder - sollte die Masse des Teilchens konstant sein - als

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

wobei nun  $\mathbf{a}$  als die Beschleunigung bezeichnet wird.

Diese ist definiert als

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

Wir betrachten nun die Arbeit, die durch die äußere Kraft  $\mathbf{F}$  verrichtet wird, wenn diese auf ein Teilchen einwirkt, welches sich von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 bewegt.

Diese Arbeit ist definiert als das Kurvenintegral

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Bei konstanter Masse  $m$  reduziert sich dieses Integral zu:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt}(v^2) dt = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

Die skalare Größe  $\frac{m}{2}v^2$  wird als kinetische Energie bezeichnet - sie erhält typischerweise den Buchstaben  $T$ .

Ist nun das Kraftfeld von der Art, dass für geschlossene Kurven die Arbeit  $W$  gleich Null ist, d. h.

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

dann bezeichnet man das Kraftfeld auch als **konservativ** - Beispiele hierfür wären das Gravitationsfeld oder das elektrische Feld.

Aufgrund der Integralsätze aus der Analysis (siehe zum Beispiel Königsberger (2002)) muss es dann eine skalare Funktion  $V$  geben, so dass

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

Die Funktion  $V$  wird Potential oder auch potentielle Energie genannt.

Für ein derartiges konservatives System kann die verrichtete Arbeit, die durch die Kräfte geleistet wird, wie folgt geschrieben werden:

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

Wir können dann die obigen Gleichungen kombinieren und erhalten

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Dies ist dann der Energieerhaltungssatz für konservative Systeme:

### Satz 1

*Sind die Kräfte, die auf ein Teilchen einwirken, konservativ, dann bleibt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie erhalten.*

#### 1.2.2.3 Systeme von Teilchen

Um die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts auf mehrere Teilchen zu verallgemeinern, ist es notwendig, zu unterscheiden zwischen

- äußeren Kräften, die ihren Ursprung außerhalb des Systems haben, und
- inneren Kräften, die zwischen den Teilchen innerhalb des Systems wirken.

Die Bewegungsgleichung des  $i$ -ten Teilchens können dann nach Newton's zweitem Gesetz geschrieben werden

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(a)} = \dot{\mathbf{p}}_{ij}$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  die äußere Kraft und  $\mathbf{F}_{ji}$  die innere Kraft auf das  $i$ -te Teilchen aufgrund des  $j$ -ten Teilchens.

Wir nehmen auch hier an, dass das dritte Newton'sche Gesetz gilt:

$$\text{Actio est Reactio}$$

Die Kraft, welche das  $j$ -te Teilchen auf das  $i$ -te Teilchen ausübt, ist genauso groß wie die Kraft, die das  $i$ -te Teilchen auf das  $j$ -te Teilchen ausübt, nur entgegengesetzt.

Summiert man nun über alle Teilchen, dann erhält man

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{x}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}$$

Die erste Summe ist die gesamte äußere Kraft  $\mathbf{F}^{(a)}$ , wogegen die zweite Summe aufgrund des dritten Newton'schen Gesetzes verschwindet.

Wir können nun die linke Seite weiter vereinfachen, indem wir definieren:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{M}$$

Dieser Vektor ist auch unter dem Namen Schwerpunkt bekannt.

Mit dieser Definition erhalten wir

$$M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} = \mathbf{F}^{(a)}$$

Damit bewegt sich der Schwerpunkt so, als ob die gesamte äußere Kraft auf die gesamte Masse des Systems einwirkte, die im Schwerpunkt des Systems vereinigt wäre.

Wir können natürlich auch den gesamten linearen Impuls des Systems definieren durch

$$\mathbf{P} = \sum m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$$

Damit erhalten wir folgenden Erhaltungssatz:

### Satz 2

*Ist die Summe der äußeren Kräfte gleich Null, dann bleibt der gesamte lineare Impuls erhalten.*

Wir wollen nun noch die Energie-Gleichung betrachten.

Wie im Fall des einzelnen Teilchen berechnen wir die Arbeit, die durch sämtliche Kräfte verrichtet wird, wenn die Teilchen von 1 nach 2 bewegt werden:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i$$

Wiederum können die Bewegungsgleichungen verwendet werden, um die Integrale zu reduzieren:

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

Mit

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

kann dann die Arbeit als Differenz der finalen und der anfänglichen kinetischen Energie geschrieben werden:

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

Wir betrachten nun die rechte Seite - wenn wir voraussetzen, dass die äußeren Kräfte von einem Potential herrühren, dann kann der erste Term wie folgt umgeschrieben werden:

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2$$

Rühren die inneren Kräfte ebenfalls von einem Potential her, dann können  $\mathbf{F}_{ij}$  und  $\mathbf{F}_{ji}$  von einer Potentialfunktion  $V_{ij}$  abgeleitet werden.

Soll nun das dritte Newton'sche Gesetz erfüllt werden, dann kann dies nur noch eine Funktion sein, die von dem Abstand zwischen den jeweiligen Teilchen  $i$  und  $j$  abhängt:

$$V_{ij} = V_{ij}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$$

Die zugehörigen Kräfte sind dann automatisch gleich und entgegengesetzt gerichtet:

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}$$

und liegen entlang der Linie, die die beiden Teilchen verbindet:

$$\nabla V_{ij}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) f$$

wobei  $f$  eine skalare Funktion ist.

Sind nun die Kräfte allesamt konservativ, dann können wir die obige Gleichung

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i$$

wie folgt schreiben:

$$W_{12} = \sum_i - \int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j)$$

Wir bezeichnen den Differenzvektor  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  mit  $\mathbf{x}_{ij}$ .

Weiterhin sei  $\nabla_{ij}$  der Gradient bzgl.  $\mathbf{x}_{ij}$ , dann erhalten wir

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}$$

und weiter

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{x}_i - d\mathbf{x}_j = d\mathbf{x}_{ij}$$

also erhält das  $ij$ -te Paar die Form

$$-\int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{x}_{ij}$$

Die gesamte Arbeit infolge der inneren Kräfte reduziert sich dann auf

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{x}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2$$

Sind somit die inneren wie auch die äußeren Kräfte konservativ, so ist es möglich, ein Gesamtpotential  $V$  zu definieren

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} V_{ij}$$

Damit bleibt dann unter dem Einfluss von konservativen Kräften die Gesamtenergie  $T + V$  erhalten - wie im Fall eines einzelnen Teilchens.

#### 1.2.2.4 Nebenbedingungen

Es sieht nun so aus, als ob die Probleme der Mechanik prinzipiell vollständig gelöst sind, indem man die Gleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(a)}$$

aufstellt und dieses Differentialgleichungssystem löst.

Leider stösst man sehr schnell auf Nebenbedingungen - zum Beispiel kann gefordert sein, dass die Abstände der einzelnen Teilchen zeitlich konstant sein sollen, wie dies zum Beispiel beim sogenannten starren Körper der Fall ist.

Derartige Nebenbedingungen können in verschiedenster Art und Weise ausgedrückt werden.

Häufig geschieht dies in Form von Gleichungen.

Falls nun diese Nebenbedingungen als Gleichungen der Koordinaten der Teilchen (und der Zeit) ausgedrückt werden können in der Form

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, t) = 0$$

dann redet man von **holonomen** Bedingungen.

Im Fall eines starren Körpers können diese Nebenbedingungen wie folgt ausgedrückt werden

$$(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$

Sind die Nebenbedingungen nicht auf derartige Gleichungen zurückführbar, dann redet man auch von **nichtholonomen** Systemen.

Weiterhin klassifiziert man Nebenbedingungen danach, ob die Zeit explizit darin enthalten ist (man redet dann von rheonomen Bedingungen) oder ob die Zeit nicht enthalten ist (dann redet man von skleronomen Bedingungen).

Treten nun derartige Nebenbedingungen auf, dann sind konsequenterweise die Variablen in dem Differentialgleichungssystem nicht mehr unabhängig.

Man kann aber diese Schwierigkeit überwinden, indem man sogenannte **generalisierte Koordinaten** einführt.

Existieren in einem System von  $N$  Teilchen mit  $3N$  unabhängigen Koordinaten holonome Nebenbedingungen, die durch  $k$  Gleichungen ausgedrückt werden können, dann kann man diese Gleichungen verwenden, um  $k$  von den  $3N$  Koordinaten zu eliminieren.

Wir behalten dann  $3N - k$  unabhängige Koordinaten zurück.

Wir könnten somit  $3N - k$  neue unabhängige Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$  einführen und die alten Koordinaten durch diese ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_N &= \mathbf{x}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned}$$

wobei die Nebenbedingungen dann implizit enthalten sind.

Ein Beispiel wäre ein Problem, bei dem sich das Teilchen auf einer Kreislinie bewegen soll - die Koordinaten  $x$  und  $y$  müssen dann die Bedingung  $x^2 + y^2 = r^2$  erfüllen.

Dies kann man natürlich in kartesischen Koordinaten beschreiben - als Nebenbedingung müsste man dann die Kreisgleichung beim Lösen der Differentialgleichungen berücksichtigen.

Die Frage stellt sich hier allerdings, ob es nicht geschickter wäre, von vornherein das Problem in Polarkoordinaten zu beschreiben.

In den nachfolgenden Abschnitten wollen wir nun einen Formalismus entwickeln, der derartige Nebenbedingungen von vornherein gleich mitberücksichtigt.

Dieser Formalismus ist der sogenannte Lagrange-Formalismus.

### 1.2.2.5 Das Prinzip von D'Alembert und die Lagrange-Gleichungen

Wir beginnen mit infinitesimalen Verschiebungen eines Systems - diese beziehen sich auf eine Änderung im Konfigurationsraum des Systems als Ergebnis einer beliebigen infinitesimalen Veränderung der Koordinaten  $\delta \mathbf{x}_i$ , welche konsistent ist mit den Kräften und Nebenbedingungen, die dem System zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  auferlegt sind.

Nehmen wir nun an, dass das System in einem Gleichgewichtszustand ist.

Dies bedeutet, dass die Gesamtkraft auf jedes Teilchen verschwindet:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

Dann verschwindet natürlich auch das Skalarprodukt

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Wir können nun die Summe bilden - diese verschwindet dann auch:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Über die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  haben wir bisher nichts angenommen.

Wir splitten diese auf in die angesetzte Kraft  $\mathbf{F}_i^{(an)}$  und die Kraft, die von der Nebenbedingung herrührt - wir bezeichnen diese mit  $\mathbf{f}_i$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(an)} + \mathbf{f}_i$$

Damit erhalten wir

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(an)} \cdot \delta \mathbf{x}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Wir beschränken uns nun auf Systeme, bei denen die Arbeit, die von den Kräften aus den Nebenbedingungen stammt, gleich Null ist - dies gilt zum Beispiel beim starren Körper.

Dann muss gelten:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(an)} \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Diese Gleichung wird oft das Prinzip von der virtuellen Arbeit genannt.

Die Bewegungsgleichungen besagen nun, dass

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

oder äquivalent

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$$

Wir können damit schreiben

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Einsetzen der aufgesplitteten Kräfte ergibt

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(an)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Wir schränken uns wieder ein auf Systeme, bei denen die virtuelle Arbeit der Kräfte der Nebenbedingungen verschwindet - dies ergibt

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(an)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Dieses wird oft das Prinzip von D' Alembert genannt.

Von jetzt an schreiben wir  $\mathbf{F}_i$  anstelle von  $\mathbf{F}_i^{(an)}$ .

Wir transformieren nun diese Gleichungen auf generalisierte Koordinaten.

Dazu beachten wir, dass

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

wobei wir  $n$  unabhängige Koordinaten voraussetzen.

Wir berechnen nun die  $\mathbf{v}_i$  - wir erhalten nach der Kettenregel:

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

Entsprechend ergibt sich für die virtuelle Verschiebung

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Wir bemerken dabei, dass sich virtuelle Verschiebungen nur auf die Koordinaten beziehen - nicht auf die Zeit.

Wir können nun die virtuelle Arbeit der  $\mathbf{F}_i$  in den generalisierten Koordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j\end{aligned}$$

Die  $Q_j$  bezeichnet man auch als **generalisierte Kräfte** - sie sind definiert als

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$$

Wir betrachten nun die anderen Terme in der Ausgangsgleichung

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(an)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Diese können wir auch schreiben als

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i$$

Wieder drücken wir die  $\mathbf{x}_i$  durch die generalisierten Koordinaten aus:

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

das ergibt

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Wir betrachten nun

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \right\}$$

Im letzten Term der Gleichung vertauschen wir die Differentiationen bzgl.  $t$  und  $q_j$  - damit erhalten wir

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_j \partial t}$$

Aus der Gleichung

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

ersehen wir weiter, dass

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$$

Wir substituieren dies in die Gleichung

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \right\}$$

und erhalten

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\}$$

Damit wird aus der Ausgangsgleichung

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(an)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

die letztendlich gewünschte Relation

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

Wir identifizieren nun  $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$  mit der kinetischen Energie  $T$  des Systems.

Dann wird das Prinzip von D'Alembert zu:

$$\sum_j \left[ \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Da wir holonome Systeme betrachten wollen, sind die  $q_j$  unabhängig.

Damit sind auch die Verschiebungen untereinander unabhängig - die einzige Möglichkeit, die obige Gleichung zu erfüllen, besteht darin, dass

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n$$

gilt.

Damit gibt es  $n$  derartiger Differentialgleichungen.

Dieses System sind die sogenannten **Lagrange-Gleichungen**.

Diese Gleichungen wollen wir etwas verallgemeinern.

### 1.2.2.6 Die (verallgemeinerten) Lagrange-Gleichungen

Wir hatten die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

im vorhergehenden Abschnitt hergeleitet.

Wir wollen diese Gleichungen zuerst etwas spezialisieren.

Ein wichtiger Spezialfall ist der, bei dem die Kräfte konservativ sind, d. h. es gibt eine skalare Funktion  $V$ , welche das Potential des Systems darstellt:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$$

Damit erhalten wir für die generalisierten Kräfte

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$$

Dies ist aber derselbe Ausdruck für die partielle Ableitung einer Funktion

$$-V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$$

bzgl.  $q_j$  (dabei muss  $V$  nicht unbedingt eine Funktion von  $t$  sein).

Im Fall eines konservativen System haben wir somit

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Die obigen Lagrange-Gleichungen lauten damit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Definieren wir nun eine sogenannte **Lagrange-Funktion**

$$L = T - V$$

dann lauten die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Diese Gleichungen werden oft kurz als Lagrange-Gleichungen bezeichnet.

Im Buch von Goldstein u. a. (2017) sind auf S. 24 ff. weitere Möglichkeiten für die Anwendung der Lagrange-Gleichungen aufgeführt.

Man kann nun die Lagrange-Gleichungen verallgemeinern - dies geschieht zum Beispiel, indem man geschwindigkeitsabhängige Potentiale zulässt.

Dies ist dann der Fall, wenn die Kräfte nicht konservativ sind.

Der Ausgangspunkt ist hierbei das System von Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Existiert nun eine Funktion  $U = U(q_j, \dot{q}_j)$ , so dass gilt

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

dann gelten immer noch die Lagrange-Gleichungen, nun allerdings mit

$$L = T - U$$

Die Funktion  $U$  nennt man dann **verallgemeinertes Potential** oder auch **geschwindigkeitsabhängiges Potential**.

Definiert man zum Beispiel

$$U = -\frac{1}{n+1} a \|v\|^{n+1}$$

dann ergibt sich für die zugehörige Kraft  $\mathbf{F}$  durch Gradientenbildung

$$\mathbf{F} = -a \|v\|^n \mathbf{v}$$

Hierbei ist  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeitsvektor und  $v = \|\mathbf{v}\|$ .

$a$  ist hierbei eine Konstante.

Eine mögliche Anwendung ergibt sich hierbei im Umfeld der Maxwell-Gleichungen - siehe hierzu Goldstein u. a. (2017), S. 22 ff.

### Beispiel 1

Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen, bei dem wir kartesische Koordinaten verwenden.

Die generalisierten Kräfte sind dann offensichtlich  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$ .

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

so dass

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z$$

Wir erhalten somit die Bewegungsgleichungen nach Newton wieder zurück.

Setzen wir nun  $F_x = 0$ ,  $F_y = -mg$  und  $F_z = 0$ , dann erhalten wir gerade das Differentialgleichungssystem für das Vakuum-Modell.

In den weiteren Beispielen lassen wir nun den Luftwiderstand zu.

### Beispiel 2

Wir betrachten das Modell für Flachbahn-Trajektorien mit konstantem Luftwiderstandsgesetz

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -c_D^* \cdot v \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= -c_D^* \cdot v \cdot v_y - g \end{aligned}$$

wobei wir  $c_D^* = k_1$  setzen -  $v$  sei gleich  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Dann geht das System über in

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -k_1 \cdot v \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= -k_1 \cdot v \cdot v_y - g \end{aligned}$$

Dann ist

$$L = L(x, y, v_x, v_y) = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) - mgy$$

Mit

$$\mathbf{F} = -a \|\mathbf{v}\|^n \mathbf{v} = -k_1 \cdot m \cdot v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

erhalten wir für  $U$ :

$$U = -\frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot m \cdot v^2$$

Wir berechnen  $Q_x$  und  $Q_y$  - es ist

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial v_x} = -\frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot m \cdot v \cdot 2 \cdot v_x = -k_1 \cdot m \cdot v \cdot v_x$$

$$Q_y = \frac{\partial U}{\partial v_y} = -\frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot m \cdot v \cdot 2 \cdot v_y = -k_1 \cdot m \cdot v \cdot v_y$$

Setzen wir nun in die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

entsprechend ein, dann erhalten wir mit  $\dot{x} = v_x$  und  $\dot{y} = v_y$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv_x, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = mv_y, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

das ursprüngliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -m \cdot k_1 \cdot v \cdot v_x \\ m\dot{v}_y &= -m \cdot k_1 \cdot v \cdot v_y - mg \end{aligned}$$

wieder zurück.

**Beispiel 3**

Wir betrachten das Modell für Flachbahn-Trajektorien

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -c_D^* \cdot v \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= -c_D^* \cdot v \cdot v_y - g\end{aligned}$$

wobei wir nun  $c_D^* = \frac{k_2}{v}$  setzen -  $v$  sei gleich  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Das Differentialgleichungssystem geht dann über in

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -k_2 \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= -k_2 \cdot v_y - g\end{aligned}$$

Dann ist

$$L = L(x, y, v_x, v_y) = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) - mgy$$

Mit

$$\mathbf{F} = -a \|\mathbf{v}\|^n \mathbf{v} = -k_2 \cdot m \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

d. h.  $n = 0$ , erhalten wir für  $U$ :

$$U = -k_2 \cdot m \cdot v$$

Wir berechnen  $Q_x$  und  $Q_y$  - es ist

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial v_x} = -k_2 \cdot m \cdot v_x$$

$$Q_y = \frac{\partial U}{\partial v_y} = -k_2 \cdot m \cdot v_y$$

Setzen wir nun in die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

entsprechend ein, dann erhalten wir mit  $\dot{x} = v_x$  und  $\dot{y} = v_y$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv_x, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m v_y, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

das ursprüngliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m \dot{v}_x &= -m \cdot k_2 \cdot v_x \\ m \dot{v}_y &= -m \cdot k_2 \cdot v_y - mg \end{aligned}$$

wieder zurück.

#### Beispiel 4

Wir betrachten das Modell für Flachbahn-Trajektorien

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -c_D^* \cdot v \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= -c_D^* \cdot v \cdot v_y - g \end{aligned}$$

wobei wir nun  $c_D^* = \frac{k_3}{\sqrt{v}}$  setzen -  $v$  sei gleich  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Das Differentialgleichungssystem geht dann über in

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -k_3 \cdot \sqrt{v} \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= -k_3 \cdot \sqrt{v} \cdot v_y - g \end{aligned}$$

Dann ist

$$L = L(x, y, v_x, v_y) = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) - mgy$$

Mit

$$\mathbf{F} = -a \|\mathbf{v}\|^n \mathbf{v} = -k_3 \cdot \sqrt{v} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

d. h.  $n = \frac{1}{2}$ , erhalten wir für  $P$ :

$$U = -k_3 \cdot m \cdot \frac{2}{3} \cdot v^{3/2}$$

Wir berechnen  $Q_x$  und  $Q_y$  - es ist

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial v_x} = -k_3 \cdot m \sqrt{v} \cdot v_x$$

$$Q_y = \frac{\partial U}{\partial v_y} = -k_3 \cdot m \sqrt{v} \cdot v_y$$

Setzen wir nun in die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

entsprechend ein, dann erhalten wir mit  $\dot{x} = v_x$  und  $\dot{y} = v_y$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv_x, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = mv_y, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

das ursprüngliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -m \cdot k_3 \cdot \sqrt{v} \cdot v_x \\ m\dot{v}_y &= -m \cdot k_3 \cdot \sqrt{v} \cdot v_y - mg \end{aligned}$$

wieder zurück.

### 1.2.2.7 Das Hamilton-Prinzip

Man kann die Lagrange-Gleichungen auch als Lösungen eines Variationsproblems darstellen - dies ergibt nochmals eine Verallgemeinerung.

Hierzu betrachten wir allgemein den Fall einer Funktion  $f$ , welche von unabhängigen Variablen  $y_i$  und deren Ableitungen  $\dot{y}_i$  abhängt.

Dann wird die Variation des Integrals  $J$

$$\delta J = \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x) dx$$

dadurch erreicht, indem man  $J$  als Funktion eines Parameters  $\alpha$  betrachtet, der die möglichen Kurven  $y_i(x, \alpha)$  durchnummeriert.

Wir könnten somit  $\alpha$  einführen durch

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x) \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hierbei sind  $y_1(x, 0), y_2(x, 0), \dots$  die gesuchten Lösungen des Extremalproblems

$$\delta J = 0$$

und  $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots$  beliebige Funktionen von  $x$ , bis auf den Umstand, dass sie an den Endpunkten verschwinden.

Die Variation von  $J$  geht dann wie folgt vonstatten:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx$$

Bei einer Produktintegration erhalten wir für den zweiten Term

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx$$

Der erste Term verschwindet - alle Kurven laufen durch feste Endpunkte.

Substituieren wir diesen Ausdruck, dann erhalten wir für  $\delta J$ :

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx$$

wobei

$$\delta y_i = \left( \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$$

Nun sind die  $y$ -Variablen unabhängig, somit auch die Variationen  $\delta y_i$ .

Damit ist  $\delta J = 0$  äquivalent damit, dass die Koeffizienten allesamt verschwinden, d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

Dieser Satz an Differentialgleichungen ist auch als **Euler-Lagrangesche-Differentialgleichungen** bekannt.

An die Stelle der Funktion  $f$  kann nun die Lagrange-Funktion  $L$  und an die Stelle der  $y_i$  die generalisierten Koordinaten  $q_i$  treten - wir erhalten dann die bereits bekannten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

siehe zum Beispiel Fließbach (2015), S. 115.

Diese Differentialgleichungen kann man verallgemeinern - man erhält dann die bereits bekannten verallgemeinerten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

mit generalisierten Kräften  $Q_i$ , siehe Goldstein (1951), S. 42.

Die Möglichkeit, die sich hier allerdings eröffnet, besteht darin, dass wesentlich allgemeinere Situationen betrachtet werden können - nicht nur konservative und holonome Systeme.

Ausgeführt sind derartige Betrachtungen im Buch von Goldstein (1951), S. 38 ff. oder auch Fließbach (2015), S. 100 ff.

Man kann

- ein Funktional, welches von  $N$  Funktionen  $y_1, \dots, y_N$  abhängt,
- ein Funktional, welches von mehreren Argumenten  $x_1, \dots, x_n$  abhängt,
- ein Funktional, welches von höheren Ableitungen abhängt,

betrachten.

### 1.2.2.8 Vorteile des Lagrange-Formalismus

Im Buch von Fließbach (2015) auf S. 70 ff. sind die Vorteile des Lagrange-Formalismus sehr deutlich aufgeführt:

- 1.) Da Nebenbedingungen in die Lagrange-Funktion gleich von Anfang an eingearbeitet werden, haben wir nur noch  $3n - k$  Variablen.
- 2.) Für komplexe Systeme ist die Aufstellung der Lagrange-Funktion viel einfacher als die Aufstellung der Bewegungsgleichungen selbst - dies liegt daran, dass die Lagrange-Funktion eine einzige skalare Größe ist.

- 3.) Im Allgemeinen ist die Lagrange-Funktion eine besonders einfache Funktion der in Frage kommenden Variablen.
- 4.) Ein weiterer Vorteil besteht sicherlich darin, auch nichtkonservative Kräfte und nichtholonome Systeme behandeln zu können - selbst wenn konservative Kräfte und holonome Systeme im Allgemeinen zur Anwendung kommen.
- 5.) Weiterhin kann man ebenfalls Systeme beschreiben und behandeln wie das elastische Feld, das elektromagnetische Feld oder Feldeigenschaften von Elementarteilchen.

Dadurch wird der Lagrange-Formalismus außerordentlich lukrativ.

### Beispiel 5

Die Einführung von Reibungskräften kann für eine realistische Beschreibung von mechanischen Systemen sinnvoll sein.

Häufig können solche Kräfte in kartesischen Koordinaten durch einen Ansatz

$$F_n = -\gamma_n \dot{x}_n$$

beschrieben werden - diesen Kräften kann **kein** Potential zugeordnet werden.

Wir müssen somit die generalisierten Kräfte aufstellen - d. h.

$$Q_k = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

Nun besteht ein Vorteil des Lagrange-Formalismus, dass das System durch eine einzige skalare Funktion  $L(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t)$  beschrieben werden kann - wir müssen auf der rechten Seite nur noch die generalisierten Kräfte hinzufügen.

Dazu definieren wir die **Rayleighsche Dissipationsfunktion**  $D$  durch

$$D(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2 \quad \text{und} \quad D(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} (\dot{x}_n(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t))^2$$

Damit können wir die generalisierten Kräfte  $Q$  durch  $D$  ausdrücken:

$$Q_k = - \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial D(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

Durch die generalisierten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

können nun auch Reibungskräfte mit berücksichtigt werden.

Dieses Beispiel führt zu den sogenannten **dissipativen Kräften**.

### 1.2.2.9 Erhaltungssätze und Symmetrieeigenschaften

Wenn wir ein System mit  $n$  Freiheitsgraden betrachten, werden wir normalerweise auf  $n$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung geführt.

Die Lösung jeder dieser Gleichungen wird prinzipiell zwei Integrationen erfordern mit insgesamt  $2n$  Integrationskonstanten.

Diese Integrationskonstanten sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

In den meisten Fällen sind aber die Probleme nicht vollständig integrabel.

Aber selbst wenn keine vollständige Lösung gewonnen werden kann, ist es durchaus möglich, eine erhebliche Informationsmenge über die Systembewegung zu gewinnen.

Dies sind dann typischerweise Relationen des Typs

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = \text{constant}$$

welche Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen.

Diese ersten Integrale sind deshalb von Interesse, da sie etwas über die Physik des System ausdrücken.

Falls nun die Lagrange-Funktion eines System eine Komponente  $q_j$  **nicht** enthält (sie kann aber durchaus die korrespondierende Geschwindigkeit  $\dot{q}_j$  enthalten), dann heißt diese Komponente **zyklisch** oder **ignorierbar**.

Die zugehörige Lagrange-Gleichung der Bewegung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

reduziert sich dann auf die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Definieren wir nun den sogenannten **generalisierten Impuls**

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

dann erhalten wir damit

$$\frac{d}{dt} p_j = 0$$

oder

$$p_j = \text{constant}$$

Damit stellt der generalisierte Impuls einer zyklischen Koordinate eine Erhaltungsgröße dar.

Für zyklische Koordinaten können wir festhalten (siehe Goldstein u. a. (2017), S. 55 ff.):

- Falls die Koordinate, die mit einer Verschiebung korrespondiert, zyklisch ist, dann bedeutet dies, dass eine Translation des Systems keinen Effekt hat.

Mit anderen Worten: Falls das System **invariant** unter Translationen ist, dann ist der korrespondierende lineare Impuls eine Erhaltungsgröße.

- In analoger Weise haben wir für eine Koordinate, die mit einer Rotation korrespondiert und zyklisch ist, dass der korrespondierende Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.

Damit sind die Erhaltungsgrößen eng verbunden mit den Symmetrieeigenschaften des Systems.

Ist das System kugelsymmetrisch, dann sind alle Komponenten des Drehimpulses Erhaltungsgrößen.

Ist dagegen das System rotationssymmetrisch bzgl. einer Achse (zum Beispiel der  $z$ -Achse), dann ist der zu dieser Achse korrespondierende Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

Einen weiteren Erhaltungssatz erhalten wir aus dem Lagrange-Formalismus für die Energieerhaltung.

Wir betrachten hierzu ein konservatives System mit  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , bei dem  $V$  unabhängig von den Geschwindigkeiten ist.

Weiterhin sollen die Nebenbedingungen von der Zeit unabhängig sein - damit ist auch die Lagrange-Funktion unabhängig von der Zeit.

### Satz 3

*Ist die Lagrange-Funktion unabhängig von der Zeit, dann gilt ein Erhaltungssatz der Energie.*

BEWEIS Siehe zum Beispiel Morin (2017), S. 234, Claim 6.3.

Diese Erhaltungssätze sind Ausdruck des sogenannten Noether-Theorems<sup>5</sup>:

### Satz 4

*Jede Invarianz der Lagrange-Funktion führt zu einer Erhaltungsgröße.*

BEWEIS Siehe zum Beispiel Fließbach (2015), S. 122 ff.

Damit ist das Noether-Theorem der weitaus allgemeinere Sachverhalt.

Aus diesem Theorem folgt insbesondere:

---

<sup>5</sup>Emmy Noether, Mathematikerin, 1882 - 1935

Die Unabhängigkeit der Lagrange-Funktion von der Zeit führt zur Energieerhaltung, aber auch zyklische Koordinaten führen zu einem Erhaltungssatz.

Dies hatten wir schon vorab ausgeführt.

### 1.2.3 Die Theorie des Kreisels

#### 1.2.3.1 Einführung

Geschosse sind typischerweise symmetrische starre Körper, d. h. Körper, die gewissen Rotations-symmetrien unterworfen sind.

Von daher macht es Sinn, sich mit der Theorie des Kreisels zu beschäftigen und die wichtigsten Grundlagen vorab zusammenzutragen.

Die wohl umfassendsten Einführungen in die Theorie des Kreisels sind wohl die Bücher von Magnus (1971), insbesondere das Buch von Baruh (1999).

Während das Buch von Magnus (1971) in die Breite geht, ist das Buch von Baruh (1999) eher auf den schweren symmetrischen Kreisel abgestellt - es eröffnet die Möglichkeit, auch Überschlagsmomente und andere aerodynamische Momente mit Hilfe des Lagrange-Formalismus zu betrachten.

Etwas älter, aber mit viel Herzblut geschrieben, ist das Buch von Scarborough (1958). Hier findet man eine erstaunliche Vielzahl von Fällen, allesamt basierend auf den Euler-Gleichungen.

Obwohl man sagen muss, dass er dem Leser hier und da die Euler-Lagrange-Gleichungen unterschiebt, ohne dies zu sagen.

Ein weiteres Buch, welches hier genannt werden könnte, ist das Buch von Wittenburg (2008). Die Ausführungen sind vom Mathematischen her knapper und moderner, dafür aber auch schwerer zu lesen.

Weiterhin findet man in den meisten Lehrbüchern der theoretischen Physik zumindest eine Einführung in die Theorie des Kreisels, wenn derartige Einführungen meistens auch recht kurz sind - siehe zum Beispiel das Buch von Fließbach (2015) oder auch das Buch von Goldstein u. a. (2017).

#### 1.2.3.2 Mathematische Grundlagen

Wir beginnen mit einer

##### **Definition 1**

Unter einem Kreisel wollen wir einen beliebig gestalteten starren Körper verstehen, der Drehbewegungen ausführt.

Die Abstände zwischen je zwei Punkten des Körpers sind somit immer konstant. Wir sehen somit von möglichen Verformungen ab.

Dies ist natürlich eine Idealisierung - jeder Körper verformt sich unter Beanspruchung. Ist aber die Deformierung klein im Vergleich zur Gesamtdimension des Körpers, dann kann diese Annahme wohl gut getroffen werden (siehe Baruh (1999), S. 323).

Aufgrund dieser Definition ist erst einmal weder die äußere Form noch die Geschwindigkeit der Drehung für einen Kreisel charakteristisch.

Die Trägheitseigenschaften eines starren Körpers werden durch seine insgesamt 6 Massenmomente zweiter Ordnung charakterisiert.

Um diese aufzustellen, denken wir uns einen beliebigen Punkt  $O$  des starren Körpers als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems ausgezeichnet.

Man kann dann für die sogenannten Massenmomente zweiter Ordnung die nachstehenden Ausdrücke hinschreiben:

$$\begin{aligned} A &= \int (x_2^2 + x_3^2) dm & D &= \int x_2 x_3 dm \\ B &= \int (x_3^2 + x_1^2) dm & E &= \int x_3 x_1 dm \\ C &= \int (x_1^2 + x_2^2) dm & F &= \int x_1 x_2 dm \end{aligned}$$

Hierbei ist über den gesamten Körper zu integrieren -  $m = m(x_1, x_2, x_3)$  gibt die Verteilung der Masse des Körpers an.

Die Größen  $A$ ,  $B$  und  $C$  bezeichnet man als Massenträgheitsmomente (oder auch als Drehmomente) - sie sind aufgrund der Definition immer positiv.

Die Größen  $D$ ,  $E$  und  $F$  werden als Deviationsmomente bezeichnet (oder auch als Zentrifugalmomente, Trägheitsprodukte oder auch Kippmassen) - sie können auch negative Werte annehmen.

Die Massenträgheitsmomente oder kurz Trägheitsmomente stellen ein Maß für die Trägheit des starren Körpers gegenüber Drehbewegungen dar - dagegen kann man die Deviationsmomente als Maß für die Unwuchten des Körpers ansehen.

Sie charakterisieren damit die unsymmetrische Verteilung der Massen bezüglich der Koordinatenebenen und verschwinden, wenn die Querschnitte des Körpers senkrecht zu den betrachteten Bezugsebenen symmetrisch sind.

Wir können aus den Definitionen für die Momente folgern:

$$A + B \geq C; \quad B + C \geq A; \quad C + A \geq B$$

Da  $(x_2 - x_3)^2 \geq 0$  bzw.  $x_2^2 + x_3^2 \geq 2x_2x_3$  usw. folgt aus der Definition weiter:

$$A \geq 2D; \quad B \geq 2E; \quad C \geq 2F$$

Die Trägheitsmomente  $A$ ,  $B$  und  $C$  und die negativ genommenen Deviationsmomente  $D$ ,  $E$  und  $F$  bilden die Elemente des sogenannten Trägheitstensors

$$\Theta = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

Dieser ist dem jeweiligen Bezugspunkt  $O$  zugeordnet.

Wir weisen noch auf folgenden Umstand hin:

Wenn man mit  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Abstände des Schwerpunktes  $S$  von den Koordinatenachsen 1, 2 und 3 bezeichnet, also

$$a^2 = r_2^2 + r_3^2, \quad b^2 = r_3^2 + r_1^2, \quad c^2 = r_1^2 + r_2^2$$

dann folgt (siehe Magnus (1971), S. 8):

$$\begin{aligned} A &= A^S + ma^2 & D &= D^S + mr_2r_3 \\ B &= B^S + mb^2 & E &= E^S + mr_3r_1 \\ C &= C^S + mc^2 & F &= F^S + mr_1r_3 \end{aligned}$$

wenn  $m$  die Gesamtmasse des Körpers darstellt.

Dies ist der Inhalt des **Satzes von Steiner**.

Man kann hieraus folgende Erkenntnisse gewinnen:

- 1.) Das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt, vermehrt um das Produkt aus der Gesamtmasse  $m$  des Körpers und dem Quadrat des Abstandes beider Achsen voneinander.
- 2.) Das Trägheitsmoment eines Körpers für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse ist ein Minimum verglichen mit den Trägheitsmomenten um parallele Achsen, die nicht durch den Schwerpunkt laufen.
- 3.) Die Deviationsmomente eines Körpers ändern sich nicht, wenn anstelle des Schwerpunktes  $S$  ein anderer Bezugspunkt gewählt wird, der auf den durch  $S$  laufenden Koordinatenachsen liegt. Liegt der neue Bezugspunkt in einer Koordinatenebene, dann ändert sich nur eines der Deviationsmomente.

Zurück zum Massenträgheitstensor  $\Theta$ .

Da die außerhalb der Hauptdiagonalen stehenden Deviationsmomente gespiegelt vorkommen, ist konsequenterweise der Trägheitstensor eine symmetrische Matrix - siehe zum Beispiel Baruh (1999), S. 328.

Diese Matrix ist auch positiv definit - siehe Baruh (1999), S. 328 ff.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine symmetrische Matrix ein Basissystem von reellen Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten besitzt.

Bezüglich dieses Systems aus Eigenvektoren wird der Trägheitstensor zur Diagonalmatrix.

Deshalb gilt:

**Satz 5**

*Die Deviationsmomente verschwinden, wenn als Bezugssystem das Hauptachsensystem gewählt wird.*

Und umgekehrt gilt:

**Satz 6**

*Wenn die Deviationsmomente verschwinden, dann ist das zugehörige Bezugssystem ein Hauptachsensystem.*

Dabei ist ein Hauptachsensystem ein System von Eigenvektoren.

Diese beiden Sätze können im Buch von Magnus (1971), S. 14, gefunden werden.

Mit dem symmetrischen Trägheitstensor kann man folgende quadratische Form bilden:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = Ay_1^2 + By_2^2 + Cy_3^2 - 2Dy_2y_3 - 2Ey_3y_1 - 2Fy_1y_2$$

und hiermit

$$Q(y_1, y_2, y_3) = m$$

wenn  $m$  die Masse des Körpers ist.

Der hierdurch gebildete Ellipsoid wird als Trägheitsellipsoid bezeichnet (siehe hierzu Magnus (1971), S. 13).

Man kann hierfür zeigen (siehe Magnus (1971), S. 13):

**Satz 7**

*Das Trägheitsellipsoid eines starren Körpers hat stets drei zueinander senkrechte Hauptachsen; sie werden die Hauptträgheitsachsen (kurz: Hauptachsen) des Körpers genannt. Die für die Hauptachsen geltenden Trägheitsmomente heißen Hauptträgheitsmomente.*

Dies ist nichts anderes als der bekannte Satz aus der linearen Algebra über das Eigenvektorsystem im Fall von symmetrischen Matrizen.

Dabei ist allerdings zu beachten:

Die kleinste Hauptachse des Trägheitsellipsoides entspricht dem größten Hauptträgheitsmoment und umgekehrt.

Es gibt folgende grobe Klassifikation von Kreiseltypen:

1. Ein Körper mit  $A = B = C$  wird **Kugelkreisel** genannt. Hier ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel - seine äußere Gestalt braucht aber keinesfalls kugelförmig zu sein. Beispielsweise sind homogene Würfel oder Tetraeder Kugelkreisel.

2. Sind zwei der  $A$ ,  $B$  und  $C$  gleich, so spricht man von einem **symmetrischen** Kreisel. Hier wäre das Trägheitsellipsoid rotationssymmetrisch. Damit sind alle homogenen Rotationskörper bezüglich der auf der Symmetrieachse liegenden Bezugspunkte symmetrische Kreisel. Die Symmetrieachse nennt man auch Figurenachse.
3. Sind alle  $A$ ,  $B$  und  $C$  verschieden, so spricht man von einem **unsymmetrischen** Kreisel. Das zugehörige Trägheitsellipsoid wäre in diesem Fall dreiachsig.

Den symmetrischen Kreisel unterteilt man weiterhin in

- 2a den **gestreckten** Kreisel - hier ist  $A = B > C$  (im Prinzip ein Stab in Richtung der 3-Achse)
- 2b den **abgeplatteten** Kreisel - hier ist  $A = B < C$  (im Prinzip eine Scheibe in der 1,2-Ebene)

Beim unsymmetrischen Kreisel kann man ebenfalls weitere Unterscheidungen machen.

Ist  $A > B > C$ , dann ist der Kreisel

- 3a) bezüglich der 1-Achse **kurzachsrig**
- 3b) bezüglich der 2-Achse **mittelachsrig**
- 3c) bezüglich der 3-Achse **langachsrig**

Wir sollten bzgl. der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix noch folgende Anmerkung machen.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass eine symmetrische Matrix zwei gleiche Eigenwerte  $\lambda_i = \lambda_j$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $u_i$  und  $u_j$  besitzt

Da die Eigenwerte wiederholt auftreten, resultiert hieraus eine gewisse Willkür in  $u_i$  und  $u_j$  - so ist jede Linearkombination von diesen Eigenvektoren  $\beta_1 u_i + \beta_2 u_j$  ebenfalls ein Eigenvektor zu  $\lambda_i$  für alle  $\beta_1$  und  $\beta_2$ .

Somit gibt es keinen eindeutigen Eigenvektor  $u_i$  oder  $u_j$ .

Man behilft sich dann damit, dass man die beiden Eigenvektoren so wählt, dass  $u_i \cdot u_j = 0$  ergibt - die beiden Eigenvektoren sollen somit senkrecht aufeinander stehen.

Nehmen wir nun an, der vorliegende Körper besitzt zwei gleiche Hauptträgheitsmomente - dies tritt bei achsensymmetrischen Körpern auf.

Ist zum Beispiel die  $x_3$ -Achse die Symmetrieachse, dann bezeichnet man die  $x_1 x_2$ -Ebene als **Hauptebene**.

Rotieren wir nun die Koordinatenachsen um die Symmetrieachse, dann ist ersichtlich, dass die rotierten Achsen ebenfalls eine Menge von Hauptachsen bilden.

Allerdings - wie wir sehen werden - besitzen symmetrische Körper interessante Stabilitätseigenschaften.

### 1.2.3.3 Euler- und Kardan-Winkel

Wir erinnern hier an die Standard-Euler-Folge.

Leider werden in der Literatur zwei Möglichkeiten vorgeschlagen, die Elementarmatrizen zu definieren.

Magnus (1971), S. 35 ff., definiert die Elementarmatrizen in folgender Weise:

$$\mathbf{L}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\psi)\sin(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\psi)\cos(\phi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) & -\cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Im Buch von Goldstein u. a. (2017), S. 153 ff., wie auch im Buch von Baruh (1999), S. 369, sind dagegen die Elementarmatrizen wie folgt definiert:

$$\mathbf{L}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\psi)\cos(\phi) - \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Diese Drehmatrix entspricht auch der Definition von Drehmatrix im Artikel von Provatidis (2012) oder dem Buch von Baruh (1999), S. 369 - die zugrundeliegende Euler-Folge ist (3, 1, 3).

Im Buch von Baruh (1999), S. 369 ff., wird auch darauf hingewiesen, dass mittlerweile auch Euler-Folgen wie (3, 2, 3) an Bedeutung gewinnen.

Bei einer Euler-Folge (3, 1, 3) sind die Drehwinkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  als Präzessions-, Nutations- und Spinwinkel bekannt.

Im Fall einer (3, 2, 3) Euler-Folge werden  $\psi$  als Präzessionswinkel,  $\theta$  als Nutationswinkel und  $\phi$  als Spinwinkel.

Im ersten Fall ergibt sich für die Drehgeschwindigkeiten im körperfesten Bezugssystem (siehe Goldstein u. a. (2017), S. 174):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta) \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ergibt sich für die Drehgeschwindigkeiten im raumfesten Bezugssystem (siehe Magnus (1971), S. 36):

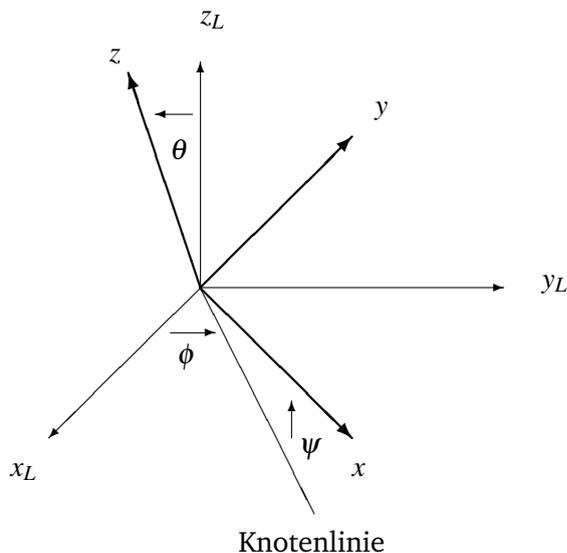
$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \omega_2 &= -\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) + \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)\end{aligned}$$

Die Kardan-Folge (siehe Magnus (1971), S. 34) scheint weniger in der theoretischen Physik gebräuchlich zu sein.

Die anschauliche Bedeutung der drei Winkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  ist in der theoretischen Physik wie folgt:

1. Drehung um die z-Achse um den Winkel  $\phi \in [0; 2\pi]$ , die neue x-Achse nennt man Knotenlinie.
2. Drehung um die Knotenlinie um den Winkel  $\theta \in [0; \pi]$ .
3. Drehung um die neue z-Achse um den Winkel  $\psi \in [0; \pi]$ , dabei wird die Knotenlinie in die neue x-Achse überführt.

Hierzu folgende Skizze:



Löst man im ersten Fall nach den Winkeln auf (siehe Baruh (1999), S. 370), dann erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\psi)/\sin(\theta) & \cos(\psi)/\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi)/\tan(\theta) & -\cos(\psi)/\tan(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir noch die Kardan-Folge (siehe Baruh (1999), S. 374 ff.).

Traditionell ist das zugehörige Koordinatensystem wie folgt definiert:

- Die  $x$ -Richtung verläuft in Richtung der Flugzeugnase.
- Die  $y$ -Richtung verläuft senkrecht hierzu in Richtung des rechten Flügels.

- Die  $z$ -Richtung verläuft nach unten senkrecht zur  $xy$ -Ebene.

Hier haben wir

- eine Rotation um die  $z$ -Achse um einen Winkel  $\psi$  - dies führt zu einem  $X'Y'Z'$ -Koordinatensystem. Man spricht von einem sogenannten Gierwinkel.
- eine Rotation um die neue  $Y'$ -Achse um einen Winkel  $\theta$  - hieraus resultiert ein  $X''Y''Z''$ -Koordinatensystem. Man spricht von einem sogenannten Nickwinkel.
- eine Rotation um die  $X''$ -Achse um einen Winkel  $\phi$  - dies führt zu einem  $xyz$ -Koordinatensystem. Man spricht von einem sogenannten Rollwinkel.

Betrachten wir die zugehörigen Elementarmatrizen - dies sind

$$\mathbf{L}_{\phi\theta\psi} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Hier ergibt sich für  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  und  $\omega_z$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

siehe Baruh (1999), S. 375 ff.

Kommen wir nun zu kinetischen Grundlagen.

#### 1.2.3.4 Energie und Drall

Im Buch von Magnus (1971), S. 39 ff., aber auch im Buch von Baruh (1999), S. 452 ff., wird dargelegt, dass sich die Energie aus drei Anteilen zusammensetzt:

- ein Anteil, der die Translationsenergie beinhaltet
- ein Anteil, der die Rotationsenergie umfasst und
- ein Anteil, der sowohl von der Translation wie auch von der Rotation des Körpers abhängt.

Dieses letzte Glied verschwindet jedoch in einigen wichtigen Fällen:

1. wenn als Bezugspunkt ein Fixpunkt gewählt wird
2. wenn als Bezugspunkt der Schwerpunkt gewählt wird.

3. wenn die Rotationsgeschwindigkeit gleich Null ist

Wird nun als Bezugspunkt der Schwerpunkt gewählt, dann erhält man für die kinetische Rotationsenergie (siehe Magnus (1971), S. 40, Formel (1.59) oder auch Baruh (1999), S. 453, Formel [8.9.11]):

$$2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2D\omega_2\omega_3 - 2E\omega_3\omega_1 - 2F\omega_1\omega_2$$

Damit ist die kinetische Rotationsenergie eine quadratische Funktion der Koordinaten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega_3$  der Winkelgeschwindigkeit.

Wählt man ein **körperfestes** Bezugssystem, dann sind die Trägheits- und Deviationsmomente **konstant**.

Das Ellipsoid (welches in Analogie zum Trägheitsellipsoid zu sehen ist) wird auch als Energieellipsoid bezeichnet.

Damit kann dieses Ellipsoid als der geometrische Ort für alle Endpunkte derjenigen vom Fixpunkt aus abgetragenen Vektoren  $\omega_i$  gedeutet werden, zu denen ein vorgegebener Wert für die kinetische Energie  $T$  gehört.

Besonders einfach wird die Form des Energieellipsoiden im Fall eines Hauptachsensystems - dann ist  $D' = E' = F' = 0$  und wir erhalten:

$$2T = A'\omega_1'^2 + B'\omega_2'^2 + C'\omega_3'^2$$

Für spätere Berechnungen benötigen wir die kinetische Energie als Funktionen der Euler-Winkel bzw. der Kardan-Winkel.

Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass das Bezugssystem mit dem Hauptachsensystem zusammenfällt.

Wir erhalten:

- im Fall der Euler-Winkel

$$2T = A(\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi))^2 + B(\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi))^2 + C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2$$

Dabei ist es offensichtlich egal, welche der Definitionen der Elementarmatrizen zugrundegelegt wird.

Sollte ein symmetrischer Kreisel ( $A = B$ ) vorliegen, vereinfachen sich die Formeln wie folgt:

$$2T = A(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2$$

- im Fall der Kardan-Winkel (man beachte das traditionelle Koordinatensystem)

$$2T = C(-\sin(\theta)\dot{\psi} + \dot{\phi})^2 + A(\sin(\phi)\cos(\theta)\dot{\psi} + \cos(\phi)\dot{\theta})^2 + B(\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\psi} - \sin(\phi)\dot{\theta})^2$$

Auch hier gibt es im Fall des symmetrischen Kreisels ( $A = B$ ) eine Vereinfachung:

$$2T = A(\dot{\psi}^2 \cos^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + C(-\dot{\psi} \sin(\theta) + \dot{\phi})^2$$

Diese Formeln können im Buch von Magnus (1971), S. 41, wie auch im Buch von Baruh (1999), S. 454, nachgelesen werden - man findet sie aber auch in den meisten Lehrbüchern der theoretischen Physik.

Die Energie ist hier nicht die einzige interessierende Größe - ebenso interessiert auch der Drehimpuls.

Auch der Drehimpuls setzt sich aus drei Anteilen zusammen (siehe Magnus (1971), S. 42 ff., oder auch Baruh (1999), S. 425 ff.):

- einem Anteil, der von der Translation des Körpers herrührt
- einem Anteil, der von der Rotation des Körpers stammt und
- einem Anteil, der von der Lage und dem Bewegungszustand des Bezugspunktes  $P$  abhängt.

Dieser letzte Anteil verschwindet in zwei wichtigen Fällen:

1. wenn der Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt wird
2. wenn als körperfester Bezugspunkt  $P$  ein Fixpunkt gefunden werden kann

Damit wählen wir als körperfesten Bezugspunkt den Schwerpunkt des Körpers.

Dann erhalten wir einen konstanten Massenträgheitstensor  $\Theta$  und können den Drehimpuls  $H$  schreiben

$$H = \Theta \omega$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} H'_1 &= A' \omega'_1 - F' \omega'_2 - E' \omega'_3 \\ H'_2 &= -F' \omega'_1 + B' \omega'_2 - D' \omega'_3 \\ H'_3 &= -E' \omega'_1 - D' \omega'_2 + C' \omega'_3 \end{aligned}$$

siehe hierzu auch Scarborough (1958), S. 24 ff., oder Baruh (1999), S. 426. Im Buch von Scarborough (1958) kann man auch einen vollständigen Beweis für die Gleichungen finden.

Fällt nun das Bezugssystem mit den Hauptachsen des Körpers zusammen, dann bleibt nur noch

$$H'_1 = A' \omega'_1; \quad H'_2 = B' \omega'_2; \quad H'_3 = C' \omega'_3$$

Normalerweise werden somit der Drehimpuls und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit nicht dieselbe Richtung besitzen.

Sie fallen nur in der Situation zusammen, wenn der Vektor der Winkelgeschwindigkeit in eine Hauptrichtung des Körpers fällt.

Diese Hauptachsen sind im allgemeinen nicht so ohne weiteres sichtbar.

Anders sieht dies bei regelmäßig geformten, homogenen Körpern aus. Hier fallen die Hauptachsen mit den vorhandenen Symmetrieachsen zusammen.

Die Hauptträgheitsachsen eines homogenen dreiaxigen Ellipsoiden bezüglich des Mittelpunktes sind mit den geometrischen Hauptachsen identisch.

Bei allen Rotationskörpern existiert eine **Symmetrieachse**, welche bei homogener Massenverteilung zugleich Hauptträgheitsachse ist.

Bei der Untersuchung von Kreiselbewegungen interessiert gerade das Verhalten dieser Figuren-achse - diese ist meist gut erkennbar und ihre Bewegungen sind leicht zu messen.

Jede Symmetrieachse oder Figurenachse ist bei Körpern mit homogener Massenverteilung zugleich auch Hauptachse - umgekehrt ist leider nicht jede Hauptachse auch Symmetrie- oder Figurenachse.

Nun haben neben Haupt-, Symmetrie- und Figurenachse auch zwei andere Achsen eine besondere Bedeutung:

- die Drehachse und
- die Drallachse

### Definition 2

Die Drehachse ist als geometrischer Ort aller Punkte eines bewegten Körpers definiert, die zu einem bestimmten Zeitpunkt die Geschwindigkeit Null besitzt.

Damit fällt die Drehachse stets in die Richtung des Vektors  $\omega$  der momentanen Drehgeschwindigkeit.

### Definition 3

Die Drallachse ist als Achse definiert, die die Richtung des Drehimpulsvektors  $H$  besitzt.

Damit sind Drehachse und Drallachse wegen der Beziehung  $H = \Theta\omega$  voneinander von der Massenverteilung des Körpers und damit vom Trägheitstensor  $\Theta$  abhängig.

Diese beiden Achsen fallen damit nur zusammen, wenn sie in eine Hauptachsenrichtung fallen - damit kann man diese Eigenschaft auch als Definition für die Hauptachsen verwenden:

### Definition 4

Die Hauptachsen eines starren Körpers sind dadurch gekennzeichnet, dass bei einer Drehung um diese Achsen Drehachse und Drallachse zusammenfallen.

### 1.2.3.5 Die Bewegungsgleichungen des Kreisels

Wir kommen zum wichtigsten Grundgesetz der Kreiseltheorie.

In einem raumfesten Bezugssystem lautet der Drehimpulssatz:

$$\frac{d}{dt}H = M$$

wenn  $M$  das äußere Moment ist.

Von Winkelbeschleunigungen sehen wir hier ab - derartige Betrachtungen findet man im Buch von Baruh (1999) auf S. 433 ff., die nachfolgenden Eulerschen Bewegungsgleichungen verkomplizieren sich dadurch erheblich.

Den Drehimpulssatz kann man **nicht** aus den Newton'schen Axiomen herleiten - er muss deshalb als unabhängiges Gesetz formuliert werden (siehe Magnus (1971), S. 46, oder jedes andere Lehrbuch der theoretischen Physik).

Aus dem Drehimpulssatz können nun zwei Ansätze für Bewegungsgleichungen abgeleitet werden:

- die Eulerschen Bewegungsgleichungen und
- die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

In beiden Fällen setzt man ein raumfestes Koordinatensystem und ein körperfestes Koordinatensystem voraus, wobei das letztere System in den Schwerpunkt des Körpers gelegt wird (dann ist der Massenträgheitstensor konstant, was Differentiationen bedeutend vereinfacht).

- **Die Eulerschen Bewegungsgleichungen:**

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen lauten dann (siehe Magnus (1971), S. 49, Formel (1.48), oder Goldstein u. a. (2017), S. 209)

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned}$$

Hierbei sind  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  die äußeren Momente.

Eine Herleitung für die Gleichungen findet man zum Beispiel im Buch von Scarborough (1958), S. 27 ff., oder im Buch von Goldstein u. a. (2017), S. 208 ff.

Löst man dieses Differentialgleichungssystem, so erhält man die Komponenten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega_3$  und hierüber prinzipiell durch Integration die Euler-Winkel bzw. die Kardan-Winkel.

Damit sind aber auch die Präzession und die Nutation des Kreisels bekannt - zumindest prinzipiell.

- **Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen:**

Sind die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $U$  als Funktion der beschreibenden Variablen  $x_\nu$  und ihrer Ableitung  $\dot{x}_\nu$  bekannt, dann erhält man in einfachsten Fall eines konservativen Systems die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_\nu} + \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

Sind  $n$  Variablen vorhanden, dann läuft der Index  $\nu$  von 1 bis  $n$ .

Dabei sind die Variablen sogenannte generalisierte Koordinaten des Systems, d. h. sie müssen unabhängig voneinander sein und ausreichen, den Zustand des Systems eindeutig zu charakterisieren.

Bei einem Kreisel mit Fixpunkt wären dies die Euler-Winkel oder auch die Kardan-Winkel.

Man kann nun zeigen, dass das System der Eulerschen Bewegungsgleichungen äquivalent zum System der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ist, siehe hierzu Magnus (1971), S. 50 ff.

Der Vorteil der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen besteht darin, dass sich oft Erhaltungssätze ergeben, die die Integration der Differentialgleichungen erleichtern.

Definiert man nun alternativ die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  durch  $\mathcal{L} = T - V$ , wobei  $V$  das Potential darstellt, dann lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

siehe Fließbach (2015), S. 70 .

Wir sollten hier noch anmerken, dass der sogenannte verallgemeinerte Impuls

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k}$$

eine Erhaltungsgröße ist, falls eine verallgemeinerte Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion vorkommt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow p_k = \text{const}$$

siehe Fließbach (2015), S. 72. Wir haben dann eine zyklische Koordinate vorliegen.

Dies erleichtert oft die Integrationen.

Da wir an dem zeitlichen Verhalten der Winkel interessiert sind und - wie wir früher ausgeführt hatten - äußere Momente mit Hilfe von verallgemeinerten Potentialen darstellen können, liegt es nahe, den Lagrange-Formalismus zur Untersuchung des Verhaltens von Kreiseln heranzuziehen.

### 1.2.3.6 Der freie symmetrische Kreisel

Wir beginnen mit folgender

#### Definition 5

Als kräftefrei wird ein Kreisel bezeichnet, falls das resultierende Moment aller äußeren Kräfte verschwindet.

Diese Situation tritt zum Beispiel ein, falls der Unterstützungspunkt, um den der Kreisel frei drehbar gelagert wird, in den Schwerpunkt des Körpers gelegt wird.

Natürlich kann man die Euler-Gleichungen aufstellen und zu lösen versuchen.

Da die resultierenden äußeren Momente verschwinden, haben wir die Gleichung

$$\frac{dH}{dt} = M = 0$$

damit ist der Drehimpuls ein konstanter Vektor.

Da ein symmetrischer Kreisel vorausgesetzt wird, vereinfachen sich die Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ C\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}$$

falls  $A = B$  angenommen wird.

Damit ist  $\omega_3$  eine Konstante, und für  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$  erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit Standardtechniken gelöst werden kann.

Als Lösung ergibt sich dann eine Kombination von Sinus und Kosinus.

Die Lösungen für die Winkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  führen dann leider auf elliptische Integrale, welche nicht mehr einfach zu behandeln sind.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Lagrange-Funktion aufzustellen und die zugehörigen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu lösen.

Verwenden wir eine (3,1,3) Euler-Folge, dann lautet die Lagrange-Funktion im Fall des freien symmetrischen Kreisels:

$$\mathcal{L}(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{A}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2$$

Die Lagrange-Funktion hängt von  $\phi$  und  $\psi$  **nicht** ab, wir haben damit Erhaltungssätze:

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))$$

und

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = A\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) \cos(\theta)$$

Außerdem muss ein Erhaltungssatz für die Energie gelten - die Lagrange-Funktion hängt nicht von der Zeit ab.

Die Beziehung für  $p_\psi$  verwenden wir, um den Winkel  $\psi$  aus  $p_\phi$  zu eliminieren:

$$p_\phi = A\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + p_\psi \cos(\theta)$$

Diese Gleichung lösen wir nach  $\dot{\phi}$  auf und erhalten:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{A \sin^2(\theta)}$$

Damit können wir die erhaltene Energie ausdrücken

$$E = \frac{A}{2} \left( \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{A \sin^2(\theta)} \right)^2 \sin^2(\theta) + \frac{A}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2C}$$

Die so erhaltene Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für  $\theta$ .

Um diese Differentialgleichung zu lösen, definieren wir folgende Abkürzungen:

$$\alpha := \frac{2}{A} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2C} \right), \quad a := \frac{p_\phi}{A}, \quad b := \frac{p_\psi}{A}$$

Ferner substituieren wir  $y = \cos(\theta)$ , damit folgt  $\dot{y} = -\sin(\theta) \cdot \dot{\theta}$  und somit weiter

$$\dot{y}^2 = \alpha(1 - y^2) - (b - ay)^2$$

Die implizite Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$t - t_0 = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{\alpha(1 - y^2) - (b - ay)^2}}$$

$$= \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{\alpha(1-y^2) - (b-ay)^2}} \quad \text{mit } y_0 = y(t_0)$$

Leider ist in dieser Form die Bewegung des Kreisels nur schwer zu durchschauen.

Einfacher wird die Betrachtung, wenn man das inertielle Bezugssystem so orientiert, dass eine seiner Achsen - etwa die z-Achse - in Richtung des konstanten Drehimpulses zeigt.

Nun ist die Komponente  $H'_3$  des Drehimpulses im Hauptachsensystem des Kreisels

$$H'_3 = C\omega_3 = C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) = p_\psi$$

Daraus folgt, dass  $H'_3$  eine Konstante der Bewegung sein muss.

Da der Euler-Winkel  $\theta$  angibt, um welchen Winkel die Symmetrieachse des Kreisels verkippt ist, muss

$$H'_3 = \|H\| \cos(\theta)$$

gelten.

Da nun sowohl  $\|H\|$  wie auch  $H'_3$  konstant sein müssen, muss auch  $\theta$  konstant sein und damit

$$\dot{\theta} = 0$$

gelten.

Damit folgt aus

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{A \sin^2(\theta)}$$

mit der Konstanz von  $\theta$ , dass

$$\phi = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{A \sin^2(\theta)} t + \phi_0$$

Somit dreht sich der Kegel um die z-Achse des Inertialsystems mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{A \sin^2(\theta)}$$

Aufgrund der Gleichungen

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))$$

und

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) \cos(\theta)$$

und der Konstanz von  $p_\psi$  folgt dann noch die konstante Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um seine eigene Achse:

$$\omega_\psi = \frac{p_\psi}{C} - \omega_\phi \cos(\theta)$$

Löst man nun in der Gleichung

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))$$

nach  $\dot{\psi}$  auf und setzt für  $\dot{\phi}$  ein, dann erhält man für  $\psi$  ebenfalls eine lineare Funktion:

$$\psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 t$$

Damit sind die Winkelgeschwindigkeiten und Euler-Winkel bestimmt.

Aufgrund der Definition der Stabilität ergibt sich damit, dass die Bewegung des freien symmetrischen Kreisels in jedem Fall stabil ist - liegen die Anfangswerte zur Zeit  $t = 0$  nahe beieinander, dann liegen auch die zugehörigen Lösungen entsprechend nahe beieinander.

Man kann sogar noch etwas mehr zeigen (siehe Magnus (1971), S. 75):

### Satz 8

*Die Drehungen eines kräftefreien starren Körpers um die Hauptachsen sind nur stabil, wenn die Drehung um die Achse des kleinsten oder des größten Hauptträgheitsmomentes erfolgt*

*Drehungen um die mittlere Hauptachse sind instabil.*

Man sieht an dieser Stelle allerdings die Vorteile des Lagrange-Formalismus.

### 1.2.3.7 Der allgemeine Fall des freien Kreisels

Wir untersuchen nun den Fall eines Kreisels ohne äußeres Drehmoment.

Wiederum legen wir eine (3, 1, 3) Euler-Folge zugrunde - die kinetische Energie lautet dann

$$T = (A(\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi))^2 + B(\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi))^2 + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2)$$

Hieran erkennt man, dass  $\phi$  nicht in der Lagrange-Funktion enthalten ist -  $\phi$  ist somit eine zyklische Koordinate.

$p_\phi$  ist somit ein Integral der Bewegung, wir haben

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \\ &= A(\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi)) \sin(\theta) \sin(\psi) + B(\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi)) \sin(\theta) \cos(\psi) + \\ &\quad C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \cos(\theta) \\ &= \text{constant} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum axial-symmetrischen Kreisel ist nun  $p_\phi$  nicht konstant.

Als Konsequenz hieraus sind nun Präzession, Nutation und Spin-Raten nicht mehr konstant.

Damit wird die Visualisierung der Bewegung von beliebigen starren Körpern schwieriger.

Weil die Bewegung frei von Drehmomenten ist, bleibt der Drehimpuls im Schwerpunkt erhalten.

Dies verschafft drei zusätzliche Integrale der Bewegung. Diese Integrale können verwendet werden, um Beziehungen zwischen der Präzession, Nutation und den Spin-Raten zu erhalten.

Es gilt:

$$\begin{aligned} A\omega_1 &= A(\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi)) = H_G \sin(\theta) \sin(\psi) \\ B\omega_2 &= B(\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi)) = H_G \sin(\theta) \cos(\psi) \\ C\omega_3 &= C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) = H_G \cos(\theta) \end{aligned}$$

wobei  $H_G$  die Länge des Drehimpulsvektors ist (siehe Baruh (1999), S. 556).

Hieraus können wir nach der Präzession, Nutation und den Spin-Raten auflösen - als Ergebnis erhalten wir (siehe Baruh (1999), S. 556)

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{A} \sin^2(\psi) + \frac{H_G}{B} \cos^2(\psi)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{H_G}{A} - \frac{H_G}{B} \right) \sin(\theta) \sin(2\psi)$$

$$\dot{\psi} = \frac{H_G}{C} \cos(\theta) - \left( \frac{H_G}{A} \sin^2(\psi) + \frac{H_G}{B} \cos^2(\psi) \right) \cos(\theta) = \frac{H_G}{C} \cos(\theta) - \dot{\phi} \cos(\theta)$$

Damit haben wir drei Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten. Sie sind Ausdrücke für die Euler-Winkel in Abhängigkeit von den Integralen der Bewegung - sind Anfangsbedingungen spezifiziert, können sie integriert werden.

Die Präzessions-Rate ist immer positiv - damit ändert sich die Richtung der Präzession nicht.

Den gleichen Schluss kann man leider nicht für die Nutation und die Spin-Rate ziehen. Diese können oszillieren, was von den Anfangsbedingungen abhängt.

Die Nutation hängt von dem Verhältnis der beiden Hauptträgheitsmomente  $A$  und  $B$  ab - bei gleichen Anfangsbedingungen wird die Nutation verschieden sein, je nachdem, ob  $A$  größer als  $B$  ist oder umgekehrt.

Interessant ist noch der Spezialfall  $A = B$  - wir erhalten dann wieder

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{A}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\psi} = \left( \frac{H_G}{C} - \frac{H_G}{A} \right) \cos(\theta)$$

Diese Ergebnisse hatten wir aber bereits erhalten.

### 1.2.3.8 Der Kreisel im Gravitationsfeld

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass es keine Translationsbewegungen gibt und dass die einzige äußere Kraft von der Gravitation herrührt.

Wir unterstellen weiterhin eine  $(3, 1, 3)$  Euler-Folge und dass der Kreisel ein achsensymmetrischer Körper ist mit Koordinatenursprung im Schwerpunkt.

Einen derartigen Kreisel bezeichnet man auch als **schweren symmetrischen Kreisel**.

Dann ist die kinetische Energie gegeben durch (siehe Goldstein u. a. (2017), S. 210)

$$T = \frac{1}{2} (A(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2)$$

und die potentielle Energie

$$V = mgl \cos(\theta)$$

wenn  $l$  der Abstand vom Schwerpunkt zum Angriffspunkt der Gravitation ist (siehe zum Beispiel Goldstein u. a. (2017), S. 210).

Damit wird die Lagrange-Funktion zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2) - mgl \cos(\theta)$$

Hierbei bedeuten

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \text{die Spin-Rate} \\ \dot{\phi} &= \text{die Präzessions-Rate} \\ \dot{\theta} &= \text{die Verkippungs-Rate} \end{aligned}$$

siehe Goldstein u. a. (2017), S. 209.

In der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = T - V$  sind wiederum  $\phi$  und  $\psi$  zyklische Koordinaten.

Damit erhalten wir dann folgende Integrale der Bewegung

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \cos(\theta) \\ p_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) = C\omega_3 \end{aligned}$$

Wir führen nun mit Hilfe der obigen beiden Gleichungen zwei neue Konstanten  $a$  und  $b$  ein durch

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \cos(\theta) = Ab \\ p_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) = C\omega_3 = Aa \end{aligned}$$

Nun gibt es ein weiteres Integral der Bewegung, die Gesamtenergie  $E$

$$E = T + V = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{C}{2} \omega_3^2 + mgl \cos(\theta)$$

da die Lagrange-Funktion nicht von der Zeit abhängt.

Aus der Gleichung für  $p_\psi$  erhalten wir

$$C\dot{\psi} = Aa - C\dot{\phi} \cos(\theta)$$

und hiermit weiter durch Einsetzen in die Gleichung für  $p_\phi$ :

$$A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + Aa \cos(\theta) = Ab$$

und damit

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

Wäre nun  $\theta$  bekannt, könnte man prinzipiell  $\phi$  durch eine Integration erhalten.

Substituiert man die Gleichung

$$A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + Aa \cos(\theta) = Ab$$

in die Gleichung

$$C\dot{\psi} = Aa - C\dot{\phi} \cos(\theta)$$

dann kann man bei bekanntem  $\theta$  durch eine weitere Integration auch  $\psi$  erhalten.

Man könnte somit die Gleichung

$$A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + Aa \cos(\theta) = Ab$$

verwenden, um in der Energie-Gleichung  $\dot{\phi}$  zu eliminieren.

Dadurch erhält man eine Differentialgleichung für  $\theta$  alleine.

Nun besagt die Gleichung

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) = C\omega_3 = Aa$$

dass  $\omega_3$  eine Konstante ist und gleich  $\frac{A}{C}a$ .

Damit ist aber auch  $E - \frac{C\omega_3^2}{2}$  eine Konstante der Bewegung - wir bezeichnen diese mit  $E'$ .

Mit Hilfe der Gleichung

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

können wir dann die Energiegleichung schreiben

$$E' = \frac{A\dot{\theta}^2}{2} + \frac{A}{2} \left( \frac{b - a \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)^2 + mgl \cos(\theta)$$

Diese Gleichung hat damit die Form eines äquivalenten eindimensionalen Problems in der Variablen  $\theta$  mit einem effektiven Potential  $V'(\theta)$  von der Gestalt

$$V'(\theta) = mgl \cos(\theta) + \frac{A}{2} \left( \frac{b - a \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)^2$$

Wir haben damit vier Konstanten, die mit der Bewegung korrespondieren - die Winkelmomente  $p_\phi$  und  $p_\psi$ , der Energieterm  $E - \frac{C\omega_3^2}{2}$  und die potentielle Energie  $mgl \cos(\theta)$  (siehe hierzu Goldstein u. a. (2017), S. 212).

Für die weitere Analyse definieren wir folgende Größen

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2}{A} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2C} \right) = \frac{2E - C\omega_3^2}{A} \\ \beta &= \frac{2mgl}{A} \\ a &= \frac{p_\psi}{A} \\ b &= \frac{p_\phi}{A}\end{aligned}$$

Das Energie-Integral kann dann geschrieben werden als kubische Funktion

$$\alpha = \dot{\theta}^2 + \frac{(b - a \cos(\theta))^2}{\sin^2(\theta)} + \beta \cos(\theta)$$

Wir substituieren nun  $u = \cos(\theta)$ .

Damit ergibt sich  $\dot{u} = -\sin(\theta)\dot{\theta}$  und somit

$$\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2$$

siehe Goldstein u. a. (2017), S. 212.

Wir können nun die Charakteristika der Bewegung studieren, indem wir die Funktion  $f(u)$  analysieren - dies geht natürlich auch, indem wir das entsprechende elliptische Integral betrachten

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}$$

und die entsprechenden Integrationen durchführen (elliptische Integrale und deren Lösung sind zum Beispiel im Buch von Fichtenholz (2009) diskutiert).

Hiermit könnten dann auch  $\phi$  und  $\psi$  bestimmt werden.

Will man derartige Integrale umschiffen, kann man wie folgt vorgehen:

Die Funktion  $f(u)$  ist ein Polynom dritten Grades - wenn wir die Terme auflösen, erhalten wird

$$f(u) = \beta u^3 - (\alpha + a^2)u^2 + (2ab - \beta)u + (\alpha - b^2)$$

Wir wollen hier nur den Fall  $\beta > 0$  betrachten. Im Buch von Goldstein u. a. (2017), S. 213, wird verargumentiert, dass  $\alpha$  und  $\beta$  beide größer als Null sein müssen, sollte der Kreisel auf einer horizontalen Oberfläche umlaufen. Hier werden auch weitere Fälle für  $\alpha$  und  $\beta$  diskutiert.

Nun sind die Nullstellen des obigen kubischen Polynoms insofern von Interesse, als sie die Winkel bestimmen, bei denen  $\dot{\theta}$  das Vorzeichen wechselt - es sind die "Wende-Winkel" in  $\theta$ .

Kennt man diese Winkel, erhält man damit auch qualitative Kenntnis über die Bewegung des Kreisels.

Als kubisches Polynom gibt es bzgl. der Nullstellen drei mögliche Kombinationen

- eine reelle Nullstelle und ein Paar von komplex-konjugierten Nullstellen
- drei reelle Nullstellen, von denen zwei gleich sind
- drei verschiedene reelle Nullstellen

Welche dieser Möglichkeiten eintritt, hängt von den Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  und  $b$  ab.

Aus physikalischer Sicht gibt es insofern eine Einschränkung, dass die Lösung  $u$  der Bedingung  $-1 < u \leq 1$  genügen muss - dies liegt an der Substitution  $u = \cos(\theta)$ .

Wird nun der Kiesel von einer horizontalen Oberfläche unterstützt, dann können wir uns aufgrund der Definition von  $u$  auf den Fall  $u > 0$  einschränken.

Weiterhin ist der dominierende Term von  $f(u)$  gerade  $\beta u^3$ .

Da  $\beta > 0$  ist, ist  $f(u)$  positiv für große positive  $u$  und negativ für große negative  $u$ .

Ferner fällt folgender Punkt auf:

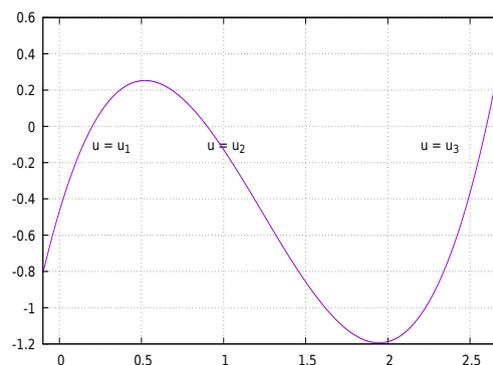
Sowohl  $f(1)$  als auch  $f(-1)$  sind beide kleiner als Null - dort ist der Wert der Funktion  $f(u)$  gleich  $-(b \mp a)^2$  (der Fall, dass  $u = \pm 1$  eine Nullstelle ist, bedeutet, dass der Kiesel vertikal steht).

Damit muss  $f(u)$  eine Nullstelle für  $u > 1$  besitzen (dies würde aber mit keinen reellen Winkeln korrespondieren).

Es ist zu bedenken, dass physikalisch sinnvolle Bewegungen nur dann auftreten können, falls  $u^2$  positiv ist in einem Teilintervall zwischen  $u = -1$  und  $u = +1$ , was bedeutet, dass  $\theta$  zwischen  $0$  und  $+\pi$  liegen muss.

Also muss  $f(u)$  für einen vorliegenden Kiesel zwei Nullstellen besitzen - nennen wir sie  $u_1$  und  $u_2$  - welche zwischen  $-1$  und  $+1$  gelegen sind, und dass sich der Kiesel immer so bewegt, dass  $\cos(\theta)$  zwischen diesen beiden Nullstellen verbleibt.

Somit könnte die Funktion  $f(u)$  prinzipiell wie folgt aussehen:



Wendekreise

Damit verschafft uns die Kenntnis über diese Nullstellen und das Verhalten von  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\psi}$  in Abhängigkeit von  $\theta$  viel über die qualitative Bewegung des Kreisels.

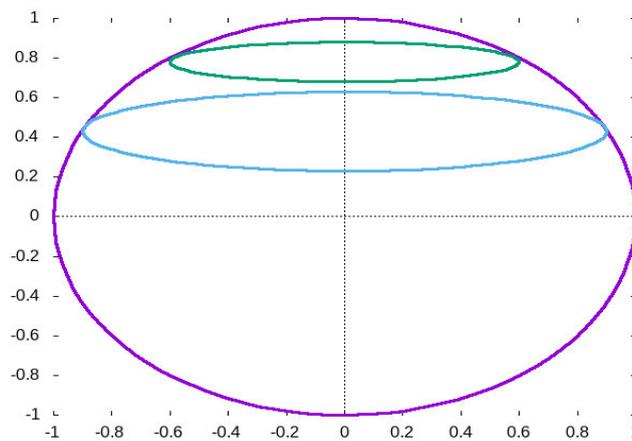
Üblicherweise verfolgt man den Schnittpunkt der Figurenachse des Kreisels mit der Oberfläche einer Einheitskugel um einen festen Punkt.

Die so entstehende Kurve bezeichnet man auch als **Lokus** der Figurenachse.

Die Polarkoordinaten eines Punktes auf dem Lokus sind dann identisch mit den Euler-Winkeln  $\theta$  und  $\phi$  des körperfesten Systems.

Damit liegt der Lokus aufgrund der vorausgegangenen Diskussion immer zwischen zwei Begrenzungskreisen mit dem Begrenzungswinkel  $\theta_1 = \arccos(u_1)$  und  $\theta_2 = \arccos(u_2)$ , wobei  $\dot{\theta}$  auf den Kreisen gleich Null ist.

Die prinzipielle Situation kann man mit folgender Graphik veranschaulichen:



Begrenzungskreise

Die Gestalt der Lokus-Kurve ist in hohem Ausmaß bestimmt durch die Nullstelle von

$$b - au$$

Diese Nullstelle bezeichnen wir mit

$$u' = \frac{b}{a} = \frac{p_\phi}{p_\psi}$$

Man unterscheidet nun folgende Fälle:

**Die wellenförmige Bewegung** Sind die Anfangsbedingungen derart, dass  $u'$  größer ist als  $u_2$ , dann wird  $\dot{\phi}$  immer das gleiche Vorzeichen besitzen für die erlaubten Inklinationswinkel zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$ .

Damit muss der Lokus der Figurenachse tangential zu den Begrenzungskreisen sein dergestalt, dass  $\dot{\phi}$  dieselbe Richtung besitzt sowohl in  $\theta_1$  wie auch in  $\theta_2$ .

Da  $\phi$  nun in die eine oder die andere Richtung ansteigt, präzessiert zwar der Kreisel, es gibt aber noch ein "Up-and-Down" der Figurenachse - man redet auch von einer Nutation.

Dies führt insgesamt zu einer sinusförmigen Bewegung.

**Die verschlungene Bewegung** Liegt nun  $u'$  zwischen  $u_1$  und  $u_2$ , dann wird die Richtung der Präzession an den zwei Begrenzungskreisen verschieden sein und der Locus der Figurenachse wird Schleifen ausführen.

Im Durchschnitt wird  $\dot{\phi}$  nicht verschwinden, es gibt jedoch immer eine echte Präzession in die eine oder die andere Richtung.

Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass  $u'$  mit einer der Nullstellen zusammenfällt - dies führt dazu, dass der Locus den Begrenzungskreis in einer Spitze berührt. Die resultierende Bewegung nennt man auch

**Die girlandenförmige Bewegung** Normalerweise nimmt man hier an, dass ein symmetrischer Kreisel seine Figurenachse mit einem anfänglichen Verkippungswinkel  $\theta_0$  umläuft.

Die Frage stellt sich damit, wie die Anfangsbedingungen hierzu sind.

Konkret müssen zur Zeit  $t = 0$  die Anfangsbedingungen  $\theta = \theta_0$  und  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$  sein.

Die Größe  $u_0 = \cos(\theta_0)$  muss dabei eine der Nullstellen von  $f(u)$  sein, sie sollte zum oberen Begrenzungskreis korrespondieren

$$u_0 = u_2 = u' = \frac{b}{a}$$

Wir bemerken hierzu, dass unter diesen Anfangsbedingungen die Energie  $E'$  gleich  $mgl \cos(\theta_0)$  ist und dass die Terme in  $E'$  - abgeleitet von der kinetischen Energie des Kreisels - niemals negativ sein können.

Entfernen sich nun  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\phi}$  von ihren Anfangswerten gleich Null, dann kann die Konstanz der Energie nur dadurch erhalten bleiben, dass  $mgl \cos(\theta)$  abnimmt - also muss  $\theta$  zunehmen.

Der Anfangswert  $\theta_0$  ist damit der gleiche wie  $\theta_2$ , der minimale Wert, den  $\theta$  annehmen kann.

Wenn der Kreisel in dieser Weise gestartet wird, dann wird der Kreisel immer zuerst fallen, und der Kreisel wird diesen Fall fortsetzen, bis der andere Begrenzungskreis erreicht ist - während des Falls wird der Kreisel weiter präzessieren.

Dann beginnt die Figurenachse wieder zu steigen, bis der Winkel  $\theta_2$  wieder erreicht ist und der Zyklus beginnt von vorne.

Hierdurch kommt die girlandenförmige Bewegung zwischen den Begrenzungskreisen zustande.

Derartige Untersuchungen findet man zum Beispiel im Buch von Goldstein u. a. (2017), S. 214 ff. oder auch im Buch von Honerkamp und Römer (2012), S. 95.

Die folgenden Untersuchungen sind nun Vorbereitungen auf den sogenannten **schnellen Kreisel**.

Hierbei geht man davon aus, dass die anfängliche Rotationsenergie um die z-Achse sehr groß ist

im Vergleich zur maximalen Änderung der potentiellen Energie

$$\frac{1}{2}C\omega_3^2 \gg 2mgl$$

Damit werden die Effekte der gravitatorischen Drehmomente - die Präzession und zugehörige Nutation - nur geringe Störungen auf die dominierende Rotation des Kreisels um seine Figuren-achse ausüben.

Unter derartigen Rahmenbedingungen redet man dann auch von einem schnellen Kiesel.

Wir interessieren uns nun für das Ausmaß an Verkippung oder Nutation  $u_1 - u_0$ , wenn  $u_1$  die andere physikalische Nullstelle von  $f(u)$  ist.

Wir beginnen mit der Anfangsbedingung  $E' = mgl \cos(\theta_0)$ , welche äquivalent ist mit der Gleichheit

$$\alpha = \beta u_0$$

wie durch Einsetzen in die Definitionen zu ersehen ist.

Ist nun  $u_1$  die weitere physikalische Nullstelle von  $f(u)$  und gilt die Bedingung

$$u_0 = u_2 = u' = \frac{b}{a}$$

dann erhalten wir für  $f(u)$ :

$$f(u) = (u_0 - u) [\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)]$$

Die Nullstellen von  $f(u)$ , die von  $u_0$  verschieden sind, sind durch den quadratischen Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern gegeben - damit erfüllt die gesuchte Nullstelle  $u_1$  die Gleichung

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta}(u_0 - u_1) = 0$$

Wir führen nun eine Hilfsvariable  $x$  ein durch  $x = u_0 - u$  und bezeichnen mit  $x_1$  die Größe  $x_1 = u_0 - u_1$ .

Damit können wir die obige quadratische Gleichung umschreiben zu

$$x_1^2 + px_1 - q = 0$$

wobei

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2\cos(\theta_0), \quad q = \sin^2(\theta_0)$$

Die Bedingung für einen schnellen Kreisel, nämlich

$$\frac{1}{2}C\omega_3^2 \gg 2mgl$$

impliziert, dass  $p$  sehr viel größer sein muss als  $q$ .

Um dies einzusehen, schreiben wir den Bruch  $\frac{a^2}{\beta}$  als

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{C}{A}\right) \frac{C\omega_3^2}{2mgl}$$

Ist nun  $C \gg A$ , dann ist der Bruch sehr viel größer als Eins, und deshalb  $p \gg q$ .

Damit ist die erste physikalisch sinnvolle Nullstelle in der Gleichung

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta}(u_0 - u_1) = 0$$

die Nullstelle

$$x_1 = \frac{q}{p}$$

Im Vergleich zu  $\frac{a^2}{\beta}$  können wir  $2\cos(\theta_0)$  vernachlässigen - damit können wir das Ergebnis schreiben als

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2(\theta_0)}{a^2} = \frac{A}{C} \cdot \frac{2mgl}{C\omega_3^2} \cdot \sin^2(\theta_0)$$

Damit wird das Ausmaß an Verkippung gemessen durch  $x_1 = u_0 - u_1$  - dies verschwindet in der Größenordnung von  $1/\omega_3^2$ .

Je schneller der Kreisel umläuft, umso geringer ist die Verkippung oder auch Nutation.

Die Nutationsfrequenz kann ebenfalls leicht für den schnellen Kreisel gefunden werden.

Weil das Ausmaß an Nutation klein ist, können wir den Term  $(1 - u^2)$  in der Gleichung

$$f(u) = (u_0 - u) [\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)]$$

durch seinen Anfangswert  $\sin^2(\theta_0)$  ersetzen.

Damit liest sich diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2(\theta_0)}{a^2} = \frac{A}{C} \cdot \frac{2mgl}{C\omega_3^2} \cdot \sin^2(\theta_0)$$

wie folgt

$$f(u) = \dot{x}^2 = a^2 x(x_1 - x)$$

Transformieren wir nun den Ursprung von  $x$  in den Mittelpunkt, dann ergibt eine Variablenänderung

$$y = x - \frac{x_1}{2}$$

die Differentialgleichung

$$\dot{y}^2 = a^2 \left( \frac{x_1^2}{4} - y^2 \right)$$

Wir differenzieren diese Gleichung - dies führt auf die Gleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{y} = -a^2 y$$

In Anbetracht der Anfangsbedingung  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$  erhalten wir als vollständige Lösung

$$x = \frac{x_1}{2} (1 - \cos(at))$$

wobei  $x_1$  wie oben gegeben ist.

Deshalb ist die Winkelfrequenz der Nutation der Figurenachse zwischen den Winkeln  $\theta_0$  und  $\theta_1$  gegeben durch

$$a = \frac{C}{A} \omega_3$$

Je schneller der Kreisel umläuft, umso mehr wächst diese an.

Von der Gleichung

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

können wir noch die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ableiten

$$\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2(\theta)} \approx \frac{ax}{\sin^2(\theta_0)}$$

oder mit den vorausgegangenen Ergebnissen

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos(at))$$

Somit variiert die Präzessionsrate harmonisch mit der Zeit mit der gleichen Frequenz wie die Nutation.

Die durchschnittliche Präzessionsfrequenz ist jedoch gleich

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{mgl}{C\omega_3}$$

Damit fällt die Präzessionsrate in dem Ausmaß, wie die anfängliche Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels anwächst.

Da wir hier noch eine Nutationsrate vorliegen haben, redet man in dieser Situation auch von einer **pseudoregulären Präzession**.

### 1.2.3.9 Der schnelle Kiesel

Es ist nun interessant, Bedingungen zu untersuchen, unter denen es zu einer echten regulären Präzession kommt

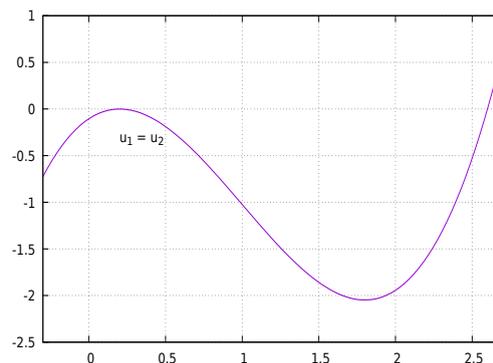
In einer derartigen Situation bleibt der Winkel  $\theta$  konstant auf seinem Anfangswert  $\theta_0$ .

Dies bedeutet, wir haben  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ .

Demzufolge muss die Funktion  $f(u)$  eine doppelte Nullstelle besitzen im Punkt  $u_0$ , d. h. wir haben

$$f(u) = \dot{u}^2 = 0, \quad \frac{df}{du} = 0, \quad u = u_0$$

Dies sieht dann prinzipiell wie folgt aus:



Schneller Kiesel

Von der Gleichung

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

erhalten wir mit  $\dot{u} = 0$

$$(\alpha - \beta u_0) = \frac{(b - au_0)^2}{1 - u_0^2}$$

Die zweite Bedingung bedeutet

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - au_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{(\alpha - \beta u_0)}{1 - u_0^2}$$

Wir substituieren nun die erste Gleichung in die zweite Gleichung, berücksichtigen dabei

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

und erhalten eine quadratische Gleichung in  $\dot{\phi}$

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos(\theta_0)$$

Mit den Definitionen von  $\beta$  und  $a$  können wir diese Gleichung auf zwei verschiedene Weisen interpretieren - dies hängt davon ab, ob  $a$  ausgedrückt wird in Abhängigkeit von  $\omega_3$ :

$$mgl = \dot{\phi}(C\omega_3 - A\dot{\phi} \cos(\theta_0))$$

oder in Abhängigkeit von  $\psi$  und  $\dot{\phi}$ :

$$mgl = \dot{\phi}(C\dot{\psi} - (A - C)\dot{\phi} \cos(\theta_0))$$

Im Fall des schweren Kreisels müssen wir nun  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\psi}$  (oder  $\omega_3$ ) zur Zeit  $t = 0$  spezifizieren.

Dabei sind aufgrund der Zyklizität die Anfangswerte von  $\phi$  und  $\psi$  irrelevant, und wir können normalerweise jeden gewünschten Wert für die anderen vier Werte ansetzen.

Fordern wir aber eine gleichmäßige Präzession ohne Verkippung (oder Nutation), dann ist die Wahl der restlichen vier Werte nicht länger ohne Einschränkung.

Hierbei sind nun die beiden obigen Gleichungen zu berücksichtigen.

Für die Wahl  $\dot{\theta} = 0$  sind die Werte von  $\theta$  und  $\omega_3$  fast willkürlich, allerdings ist dann der Wert von  $\dot{\phi}$  durch die erste der obigen Gleichungen festgelegt.

Damit nämlich  $\dot{\phi}$  reell ist, muss die Diskriminante der ersten Gleichung positiv sein, und dies bedeutet

$$C^2 \omega_3^2 > 4mglA \cos(\theta_0)$$

Ist nun  $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$  (dann ist der Schwerpunkt des Kreisels unterhalb des Fixpunktes), dann wird jeder Wert von  $\omega_3$  zu einer gleichmäßigen Präzession führen.

Ist dagegen  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , dann gibt es einen minimalen Wert  $\omega_3'$  mit

$$\omega_3 > \omega_3' = \frac{2}{C} \sqrt{mglA \cos(\theta_0)}$$

um eine gleichmäßige Präzession zu erreichen.

Analoge Bedingungen können im Fall der zweiten Gleichung

$$mgl = \dot{\phi}(C\dot{\psi} - (A - C)\dot{\phi} \cos(\theta_0))$$

erhalten werden bzgl. der möglichen Werte von  $\psi$ .

Aufgrund der quadratischen Natur der Gleichung

$$mgl = \dot{\phi}(C\omega_3 - A\dot{\phi} \cos(\theta_0))$$

gibt es nun zwei Lösungen für  $\dot{\phi}$ , eine sogenannte "schnelle" und eine "langsame" Präzession.

Ebenfalls muss man sehen, dass die obige Gleichung niemals für  $\dot{\phi} = 0$  erfüllt werden kann für endliches  $\dot{\psi}$  oder  $\omega_3$ .

Im Fall der langsamen Präzession können wir  $\dot{\phi} \cos(\theta_0)$  im Vergleich zu  $a$  vernachlässigen.

Damit erhalten wir eine näherungsweise Lösung für  $\dot{\phi}$  zu

$$\dot{\phi} \approx \frac{\beta}{2a} = \frac{mgl}{C\omega_3}$$

Diese Lösung stimmt mit der durchschnittlichen Rate der pseudoregulären Präzession überein.

Für große Werte von  $\omega_3$  erhalten wir die "schnelle" Präzession - dann ist  $\dot{\phi}$  so groß, dass  $mgl$  klein ist im Vergleich zu den anderen Termen in der Gleichung

$$mgl = \dot{\phi}(C\omega_3 - A\dot{\phi} \cos(\theta_0))$$

Somit ergibt sich

$$\dot{\phi} = \frac{C\omega_3}{A\cos(\theta_0)}$$

Damit ist die schnelle Präzession unabhängig von dem gravitatorischen Drehmoment und kann mit der Präzession des freien Körpers in Beziehung gebracht werden (siehe Goldstein u. a. (2017), S. 200).

Es gibt noch einen weiteren Spezialfall, den Fall, wo  $u = 1$  zu einer der Nullstellen von  $f(u)$  korrespondiert.

In dieser Situation ist der Kreisel so aufgesetzt, dass seine Figurenachse anfänglich vertikal steht.

Dann muss  $b = a$  gelten, da  $Ab$  und  $Aa$  die konstanten Komponenten des Drehimpulses um die vertikale Achse und um die Figurenachse sind und diese beiden Achsen zusammenfallen.

Da die anfängliche Winkelgeschwindigkeit sich nur auf die Figurenachse bezieht, liest sich die Energiegleichung - ausgewertet zur Zeit  $t = 0$  - wie folgt

$$E' = E - \frac{1}{2}A\omega_3^2 = mgl$$

Aufgrund der Definition von  $\alpha$  und  $\beta$  folgt damit, dass  $\alpha = \beta$  gelten muss.

Damit kann die Energiegleichung für jeden Winkel geschrieben werden, also

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)\beta(1 - u) - a^2(1 - u)^2$$

oder

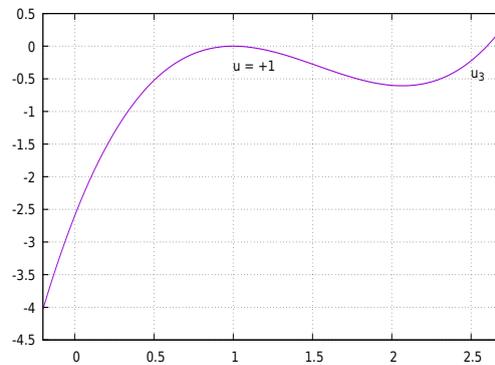
$$\dot{u}^2 = (1 - u)^2 [\beta(1 + u) - a^2]$$

Diese Form der Gleichung zeigt an, dass  $u = 1$  eine doppelte Nullstelle sein muss - eine dritte Nullstelle ist gegeben durch

$$u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1$$

Ist nun  $\frac{a^2}{\beta} > 2$  (dies korrespondiert zu der Bedingung für einen "schnellen" Kreisel), dann ist  $u_3$  größer als 1 und die einzig mögliche Bewegung ist die für  $u = 1$  - der Kreisel verharrt in der vertikalen Position.

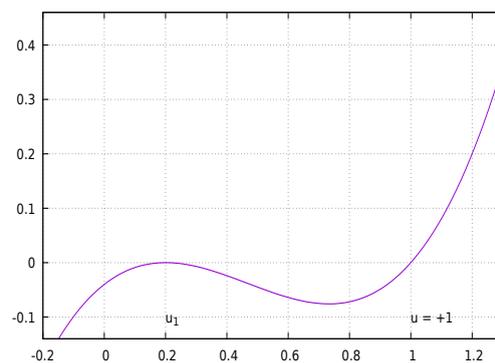
Prinzipiell sieht dies wie folgt aus:



Der vertikale Kreisel Fall 1

Ist dagegen  $\frac{a^2}{\beta} < 2$ , dann ist die dritte Nullstelle  $u_1$  kleiner als 1 und der Kreisel wird zwischen  $\theta = 0$  und  $\theta = \theta_3$  hin und her kippen.

Dies sieht prinzipiell wie folgt aus:



Der vertikale Kreisel Fall 2

Es muss daher eine kritische Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  geben, oberhalb derer nur noch eine vertikale Bewegung möglich ist - deren Wert ist gegeben durch

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{C}{A}\right) \frac{C(\omega')^2}{2mgl} = 2$$

oder

$$(\omega')^2 = 4 \frac{mglA}{C^2}$$

Dies ist aber identisch mit der minimalen Frequenz der gleichmäßigen Präzession für  $\theta_0 = 0$ .

Diesen Spezialfall des Kreisels nennt man auch den **schlafenden Kreisel**.

### 1.2.3.10 Die Lösung mittels der Lagrange-Gleichungen

Wir wollen hier das Problem des Kreisels im Gravitationsfelds nicht - wie vorher - qualitativ angehen, sondern mittels Lösung der Lagrange-Gleichungen.

Die Darstellung orientiert sich an der Darstellung aus dem Buch von Scarborough (1958) - der Verfasser erwähnt zwar die Lagrange-Gleichungen nicht, arbeitet aber interessanterweise mit ihnen.

Wir hatten bereits die Lagrange-Funktion aufgestellt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2) - mgl \cos(\theta)$$

Hierbei bedeuten

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \text{die Spin-Rate} \\ \dot{\phi} &= \text{die Präzessions-Rate} \\ \dot{\theta} &= \text{die Verkippungs-Rate} \end{aligned}$$

siehe Goldstein u. a. (2017), S. 209.

Ebenso hatten wir die Gleichungen für die zyklischen Koordinaten aufgestellt

$$\begin{aligned} p_{\phi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \cos(\theta) \\ p_{\psi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) = C\omega_3 \end{aligned}$$

Hinzu kommt noch das Energie-Integral

$$E = T + V = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{C}{2} \omega_3^2 + mgl \cos(\theta)$$

Wir berechnen nun

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = A\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})(-\dot{\phi} \sin(\theta) + mgl \sin(\theta))$$

und weiter

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = A\ddot{\theta} - (A\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})(-\dot{\phi} \sin(\theta) + mgl \sin(\theta)))$$

$$= A\ddot{\theta} + (C\omega_3 - A\dot{\phi} \cos(\theta))\dot{\phi} \sin(\theta) - mgl \sin(\theta)$$

Wird nun der Kreisel mit einer Spin-Rate  $\psi_0$  gestartet, dann sind die Anfangsbedingungen

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = 0$$

zur Zeit  $t = 0$ .

Wir substituieren diese Werte nun in die Gleichung für

$$p_\phi = A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \cos(\theta) = A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C\omega_3 \cos(\theta) = C_1$$

Dies ergibt

$$C_1 = C\omega_3 \cos(\theta_0)$$

Und eingesetzt in das Energie-Integral

$$E = T + V = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{C}{2} \omega_3^2 + mgl \cos(\theta) = C_2$$

ergibt

$$C_2 = \frac{C\omega_3}{2} + mgl \cos(\theta_0)$$

Damit erhalten wir zwei Gleichungen

$$A\dot{\phi} \sin^2(\theta) = C\omega_3 (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))$$

und

$$A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta)) = 2mgl(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))$$

Die erste Gleichung lösen wir nun nach  $\dot{\phi}$  auf und erhalten

$$\dot{\phi} = \frac{C\omega_3(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}{A \sin^2(\theta)}$$

Diesen Wert setzen wir nun in die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 = A\ddot{\theta} + (C\omega_3 - A\dot{\phi} \cos(\theta))\dot{\phi} \sin(\theta) = mgl \sin(\theta)$$

ein. Ersetzen wir noch  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$  durch Eins, dann erhalten wir die Gleichung

$$A\ddot{\theta} + \frac{C^2\omega_3(1 - \cos(\theta_0)\cos(\theta))(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}{A\sin^3(\theta)} = mgl\sin(\theta)$$

Ist nun die Spin-Achse des Kreisels fast vertikal, dann ist  $\theta_0$  fast Null - wir setzen  $\theta_0 = 0$ .

Damit erhalten wir

$$A\ddot{\theta} + \frac{C^2\omega_3^2(1 - \cos(\theta))^2}{A\sin^2(\theta)} = mgl\sin(\theta)$$

Wir können diese Gleichung weiter vereinfachen -  $\theta$  ist als klein vorausgesetzt.

Die Reihenentwicklung des Kosinus liefert

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

und damit

$$(1 - \cos(\theta))^2 = \frac{\theta^4}{4}$$

$\sin(\theta)$  ersetzen wir durch  $\theta$  - damit ergibt sich

$$A\ddot{\theta} + \frac{C^2\omega^2\theta^4}{3A\theta^3} = mgl\theta$$

oder

$$\ddot{\theta} + \frac{C^2\omega^2 - 4mglA}{4A^2}\theta = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt sich zu

$$\theta = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$$

mit

$$k = \frac{\sqrt{C^2\omega_3^2 - 4mglA}}{2A}$$

Soll jetzt  $k$  reell sein, dann muss gelten

$$C^2 \omega_3^2 - 4mglA > 0$$

oder

$$C^2 \omega_3^2 > 4mglA \quad \Leftrightarrow \quad \omega_3^2 > \frac{4Amgl}{C^2}$$

Dies ergibt eine Bedingung an  $\omega_3$ .

Die Spin-Rate ergibt sich zu

$$\dot{\theta} = -C_1 k \sin(kt) + C_2 k \cos(kt)$$

Bei sehr hohen Tourenzahlen steht der Kreisel praktisch vertikal - dies ist der Fall des schlafenden Kreisels.

Wir setzen daher  $\theta_0 = 0$  - damit erhalten wir aus

$$\dot{\phi} = \frac{C \omega_3 (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}{A \sin^2(\theta)}$$

die Beziehung

$$\dot{\phi} = \frac{C \omega_3 (1 - \cos(\theta))}{A \sin^2(\theta)} = \frac{C \omega_3 (1 - \cos(\theta))}{A (1 - \cos(\theta))(1 + \cos(\theta))} = \frac{C \omega_3}{A (1 + \cos(\theta))}$$

Die beiden Gleichungen

$$\dot{\theta} = -C_1 k \sin(kt) + C_2 k \cos(kt)$$

und

$$\dot{\phi} = \frac{C \omega_3}{A (1 + \cos(\theta))}$$

zeigen, dass im Fall eines schlafenden Kreisels das freie Ende des Kreisels eine einfache harmonische Bewegung ausführt und mit einer periodischen Bewegung um die Vertikale präzessiert.

Es ist somit eine stabile Bewegung um die Vertikale.

Falls wir  $\theta$  gegen Null laufen lassen, d. h.  $\theta \rightarrow 0$ , dann ersehen wir aus der Beziehung

$$\dot{\phi} = \frac{C \omega_3 (1 - \cos(\theta))}{A \sin^2(\theta)}$$

mit den Regeln von de l'Hospital, dass

$$\dot{\phi} \rightarrow \frac{C\omega_3}{2A}$$

Die Periode des schlafenden Kreisels ist gegeben durch

$$P = \frac{2\pi}{k} = \frac{4\pi A}{\sqrt{C^2\omega_3^2 - 4mglA}}$$

Soll diese Periode reell sein und damit die Bewegung stabil, muss gelten

$$\omega_3^2 > \frac{4Amgl}{C^2}$$

Wir sind damit wieder zu der Bedingung gekommen, die wir bereits abgeleitet hatten.

Es sind noch weitere Untersuchungen in dem Buch von Scarborough (1958) zu finden - im Prinzip stellt er die gleichen Untersuchungen an, wie sie im Buch von Goldstein u. a. (2017) durchgeführt werden, nur von einem anderen Ausgangspunkt aus.

Interessant ist an dieser Darstellung, dass hier explizit aerodynamische Momente über generalisierte Kräfte bzw. Potentiale eingeführt werden können - wie es zum Beispiel im Buch von Sommerfeld (1967) angedeutet wurde.

Damit eröffnet sich die Möglichkeit, anstelle des Gravitationsterms zum Beispiel ein Überschlagsmoment einzuführen.

Die Rechnungen verlaufen dann analog.

### 1.2.3.11 Der Kresel unter der Euler-Folge (3,2,3)

Wie bereits früher angedeutet, kommt in letzter Zeit auch die Euler-Folge (3,2,3) zum Einsatz, also Elementarmatrizen

$$\mathbf{R}_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

so dass sich die Rotationsmatrix  $\mathbf{A}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}_3(\psi) \cdot \mathbf{R}_2(\theta) \cdot \mathbf{R}_3(\phi)$  ergibt zu

$$\mathbf{A}(\phi, \theta, \psi) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\psi) + \cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\theta)\cos(\psi) \\ -\sin(\phi)\cos(\psi) - \cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) - \cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi) & \sin(\theta)\sin(\psi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Man erhält die Winkelgeschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \sin(\psi) - \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich im Fall des symmetrischen Kreisels für die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energi  $V$

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{C}{2}\omega_3^2 \\ &= \frac{A}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 \\ V &= mgl \cos(\theta) \end{aligned}$$

Die kinetische Energie und die potentielle Energie sehen somit gleich aus wie im Fall der Euler-Folge (3, 1, 3) - damit ist die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  dieselbe.

Wie im Fall der Euler-Folge (3, 1, 3) ist die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  unabhängig von  $\phi$  und  $\psi$  und die korrespondierenden Momente

$$\begin{aligned} p_\phi &= A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \\ &= A\dot{\phi} \sin^2(\theta) + C \cos(\theta) \omega_3 \\ p_\psi &= (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})C = C\omega_3 \end{aligned}$$

sind Konstanten der Bewegung.

Eine weitere Konstante der Bewegung ist die Energie

$$E = T + V = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2}C\omega_3^2 + mgl \cos(\theta)$$

Man kann damit an dieser Stelle dieselben Untersuchungen über das Verhalten der Winkel durchführen wie in den vorhergehenden Abschnitten.

Leider besteht auch hier keine Eindeutigkeit in der Literatur - die obigen Elementarmatrizen sind dem Buch von Baruh (1999) entnommen.

Im Buch von Johns (2011), S. 184, wurde ebenfalls die Euler-Folge (3, 2, 3) angegeben, allerdings mit den Elementarmatrizen

$$\mathbf{R}_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Rotationsmatrix ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\phi, \theta, \psi) &= \\ & \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi) & -\cos(\phi) \sin(\psi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi) & \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist  $-\pi < \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  und  $-\pi < \psi \leq \pi$ .

Für die Winkelgeschwindigkeiten erhält man dann

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \sin(\psi) + \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \omega_2 &= \dot{\theta}_2 \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta) \end{aligned}$$

siehe Johns (2011), S. 189, Formeln (8.229) - (8.231).

Damit ergibt sich im Fall des symmetrischen Kreisels für die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energi  $V$  (siehe Johns (2011), S. 223)

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{C}{2}\omega_3^2 \\ &= \frac{A}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 \\ V &= mgl \cos(\theta) \end{aligned}$$

Die kinetische Energie und die potentielle Energie sehen somit gleich aus wie im Fall der Euler-Folge (3, 1, 3) - damit ist die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  dieselbe.

Damit hat die Lagrange-Funktion dieselben zyklischen Koordinaten wie in den bisherigen Untersuchungen und damit auch die gleichen Konstanten der Bewegung.

Das Ergebnis zeigt auch die Bedeutung der Invarianz der Lagrange-Funktion.

## Kapitel 2

# Stabilität von Geschossen

### 2.1 Einführung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Fragen des stabilen Flugverhaltens von Projektilen befassen.

Typischerweise versetzt man - abgesehen von Schrotladungen und flügelstabilisierten Geschossen - Geschosse in Rotation, um ein stabiles und damit treffsicheres Flugverhalten zu erzeugen.

Aufgrund der Rotationssymmetrie und der hohen Umdrehungsgeschwindigkeit liegt es dann nahe, die Theorie des Kreisels für derartige Untersuchungen heranzuziehen.

Hier sind nochmals die Gleichungen für Translation und Rotation aufgeführt:

Wir haben damit insgesamt folgende vier Gruppen von jeweils drei Differentialgleichungen im Fall von Euler-Winkeln:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{z}_I \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{I/B} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

und - je nach gewählten Elementarmatrizen für die Drehungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Demzufolge müssen die letzten Gleichungen entsprechend modifiziert werden - je nachdem, mit welchen Euler-Folgen man arbeiten will.

Will man mit der Euler-Folge (1,2,3) arbeiten, dann kommt man zu dem letzten Differentialgleichungssystem.

Für die Drehmatrix  $\mathbf{C}^{B/I}$  muss man dann

$$\mathbf{C}^{B/I} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ -\cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ansetzen.  $\mathbf{C}^{I/B}$  ist dann die Inverse und wird durch Transposition erhalten.

Will man dagegen mit der Euler-Folge (3,1,3) arbeiten, dann muss das letzte Differentialgleichungssystem wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} -\sin(\psi) & -\cos(\psi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Entsprechend muss man für die Drehmatrix

$$\mathbf{C}^{B/I} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\cos(\phi) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & -\cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ansetzen.

Sollte es notwendig sein, mit der Euler-Folge (3,2,3) arbeiten zu müssen, so ist das notwendige Differentialgleichungssystem gleich:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\phi) \sin(\psi) & \sin(\theta) \cos(\psi) & 0 \\ -\cos(\psi) \cos(\theta) & -\sin(\psi) \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Drehmatrix ist dann gleich

$$\mathbf{C}^{B/I} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\psi) \sin(\phi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) & -\cos(\phi) \sin(\psi) \\ -\cos(\phi) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Führen wir nun ein Hauptachsensystem ein, dann wird die Matrix mit den Trägheitsmomenten eine Diagonalmatrix - das System

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

geht dann über in

$$\begin{pmatrix} J_{xx} \dot{\omega}_x \\ J_{yy} \dot{\omega}_y \\ J_{zz} \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} \omega_x \\ J_{yy} \omega_y \\ J_{zz} \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Dies sind aber die Eulerschen Bewegungsgleichungen - die noch um die Gleichungen für die Winkel ergänzt werden müssen.

In der Theorie des Kreisels sind diese Gleichungen nun für verschiedene Konstellationen gelöst worden bzw. es wurden Näherungslösungen angegeben.

In der hier vorliegenden Situation müssen die Rahmenbedingungen entsprechend angepasst werden.

Allerdings gibt es insofern ein Problem, da die äußeren Momente  $M_x$ ,  $M_y$  und  $M_z$  nun aerodynamische Momente darstellen.

Im einfachsten Fall handelt es sich um das Überschlagsmoment.

## 2.2 Stabilitätsbedingungen, gyroskopische Stabilität

Einerseits ist intuitiv einsichtig, dass ein Projektil gegebenenfalls eine entsprechende Umdrehungszahl pro Zeiteinheit aufweisen muss, soll es stabil fliegen.

Wir gelangen so in letzter Konsequenz zu dem sogenannten schnellen Kreisel.

Andererseits wirkt auf das Projektil die Luftwiderstandskraft - die Gewichtskraft muss somit geeignet durch die Luftwiderstandskraft ersetzt werden.

Damit haben wir

- einerseits den Schwerpunkt des Projektils
- andererseits das Druckzentrum des Projektils im Abstand  $s$  vom Schwerpunkt

Anschaulich versucht der sogenannte Stabilitätsfaktor ein Maß dafür zu definieren, wie sich das Beharrungsvermögen einer umlaufenden Masse zu dem aerodynamischen Moment verhält, sich zu überschlagen.

Ist dieser Stabilitätsfaktor größer als Eins, dann redet man von **gyroskopischer Stabilität** - ist das aerodynamische Moment größer als das Beharrungsvermögen, dann ist dieser Faktor kleiner als Eins und das Projektil wird instabil.

Als Folge dieser Instabilität schlägt das Projektil quer ein oder richtet sich sogar während des Fluges auf - beides ist nicht erwünscht.

In Bezug auf das Beharrungsvermögen des Projektils gibt es zwei Faktoren:

1. Die Gestalt des Projektils - je kürzer und dicker das Projektil ist, umso größer wird sein Beharrungsvermögen sein, gleiche Spin-Rate vorausgesetzt.
2. Die Spin-Rate - je schneller das Projektil rotiert, umso größer wird sein Beharrungsvermögen sein.

In Bezug auf das Überschlagsmoment des Projektils gibt es nun folgende Faktoren:

1. Die Gestalt des Projektils - die sogenannte Ogive. Je weiter vorne das Druckzentrum ist, umso ausgeprägter ist die Bereitschaft des Projektils, sich zu überschlagen.
2. Die Geschwindigkeit  $v$  - je schneller sich das Projektil bewegt, umso größer sind die aerodynamischen Kräfte und umso größer auch das Drehmoment, welches auf den Schwerpunkt ausgeübt wird.
3. Die Luftdichte  $\rho$  - je größer die umgebende Luftdichte ist, umso größer wird auch das aerodynamische Überschlagsmoment sein infolge des größeren Luftwiderstands.

Dabei setzen wir hier voraus, dass das Druckzentrum vor dem Schwerpunkt liegt.

Im Fall des schnellen Kreisels hatten wir eine Bedingung für die Mindestwinkelgeschwindigkeit hergeleitet:

$$\omega_3^2 > \frac{4Amgl \cos(\theta)}{C^2}$$

Da der Verkipfungswinkel  $\theta$  als klein angesehen werden kann, setzt man ihn auf Null.

Die Gewichtskraft  $mgl$  ersetzen wir durch das Überschlagsmoment

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \rho S d v^2 C_{M_\alpha}$$

(siehe hierzu Kutterer (1959), S. 58, dort destabilisierendes Moment genannt, da die Luftwiderstandskraft nicht im Schwerpunkt, sondern vorneweg angreift. Auf der folgenden Seite sind auch Entwicklungen der entsprechenden Beiwerte zu finden, nicht uninteressant).

Wir stellen dann die Formel um, indem wir durch den Ausdruck auf der rechten Seite der obigen Ungleichung dividieren.

Der Quotient ist dann (fast) der sogenannte **gyroskopische Stabilitätsfaktor**  $s$ :

$$s = \frac{\omega_3^2}{\frac{4Amgl \cos(\theta)}{C^2}} = \frac{\omega_3^2 C^2}{4Amgl \cos(\theta)}$$

Wir erhalten dann mit  $\omega_3 = \omega_0 = \frac{2\pi v}{td}$ , Einsetzen des Überschlagsmomentes  $M_\alpha$  und  $\theta = 0$

$$s = \frac{\omega_0^2}{4M_\alpha} \frac{C^2}{A} = \frac{4\pi^2 v^2}{t^2 d^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \rho \frac{1}{4} d^2 \pi \cdot d \cdot v^2 C_{M_\alpha}} \frac{C^2}{A} = \frac{8\pi}{\rho t^2 d^5 C_{M_\alpha}} \frac{C^2}{A}$$

$S$  ist hierbei die Referenzfläche des Projektils mit  $S = \frac{1}{4} d^2 \pi$ .

Dabei ist

- $\rho$  die Luftdichte
- $t$  der Drall in Kaliber pro Umlauf
- $d$  das Kaliber in Inch
- $C_{M_\alpha}$  das Überschlagsmoment
- $C$  das axiale Trägheitsmoment (Einheit: Gewicht mal Quadrat der Länge)
- $A$  das transversale Trägheitsmoment (Einheit: Gewicht mal Quadrat der Länge)

Hierbei müssen die Größen in kompatiblen Einheiten gemessen sein, so dass  $s$  dimensionslos ist.

Ist nun  $s > 1$ , wird dies auch als **gyroskopische Stabilität** bezeichnet - die gyroskopische Stabilität ergibt sich somit aus der Stabilitätsbedingung des schnellen schweren symmetrischen Kreisels.

Damit haben wir die klassische Formel für den Stabilitätsfaktor  $s$  erhalten

$$s = \frac{8\pi}{\rho t^2 d^5 C_{M_\alpha}} \frac{C^2}{A}$$

Die Bedeutung von  $s$  besteht darin, dass  $s$  ein Maß dafür darstellt, wie stark das Projektil präzisiert, somit um die Bahntangente herumtaumelt.

Ist  $s$  kleiner als Eins, ist die Gefahr eines Überschlags des Projektils sehr groß.

Ist  $s$  zumindest größer als Eins, wird es halbwegs stabil fliegen. Im Fall von Büchsen geschossen wird man im sportlichen Bereich  $s$  gerne oberhalb von 2 wählen - dann präzisiert das Projektil wenig, die Luftwiderstandskräfte haben geringe Angriffsfläche und präzises Schießen ist möglich.

Dieses Verhalten eines Geschosses ist - im sportlichen Bereich - sicherlich verständlich und nachvollziehbar.

Man kann versuchen - dies sieht man an der obigen Formel -  $s$  zu maximieren, indem man die Trägheitsmomente optimiert. Ein Hohlzylinder besitzt im Vergleich zu einem Vollzylinder die geeigneteren Trägheitsmomente - damit sind Hohlspitzgeschosse für das sportliche Schießen lukrativ.

Die obige Ableitung wurde von Kutterer (1959) vorgeschlagen - man findet diese Herleitung auch in ähnlicher Form in anderen Büchern über äußere Ballistik.

Die Frage stellt sich allerdings, inwieweit es erlaubt ist, die Gewichtskraft durch das Überschlagsmoment zu ersetzen - diese Frage scheint nicht zu existieren?

Im Buch von Sommerfeld (1967) - aber auch in anderen Büchern über theoretische Physik - findet man die Information, dass es durchaus zulässig ist, im Umfeld des Lagrange-Formalismus als verallgemeinerte Kräfte auch aerodynamische Momente anzusetzen, in diesem Fall das Überschlagsmoment.

Man ist somit beim Lagrange-Formalismus keinesfalls auf konservative Kraftfelder eingeschränkt - siehe hierzu zum Beispiel Goldstein u. a. (2017), S. 22 ff., oder Sommerfeld (1967), S. 163 ff., oder Hamill (2014), S. 75 ff.

Damit sind dann konservative Kraftfelder nicht mehr Voraussetzung - eine Potentialfunktion ist dann nicht mehr notwendig. Trotzdem gilt das Extremalprinzip aus der Variationsrechnung weiterhin.

Die Lagrange-Gleichungen werden dann wie folgt modifiziert:

Aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

wird

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_{\theta}$$

Dies sind dann die sogenannten verallgemeinerten Lagrange-Gleichungen.

Dabei ist  $Q_{\theta}$  die sogenannte verallgemeinerte Kraft - dies kann dann nach Sommerfeld (1967) ein aerodynamisches Moment sein.

In unserer Situation liegt es nahe, die Potentialfunktion gleich Null zu setzen und für das aerodynamische Moment das Überschlagsmoment zu wählen, siehe hierzu McCoy (2012), S. 36.

Setzen wir nun für das generalisierte Potential  $U$  an

$$U = -\frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)$$

dann ist

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M_\alpha} \sin(\theta)$$

die generalisierte Kraft.

Damit wird aus den verallgemeinerten Lagrange-Gleichungen:

$$A\ddot{\theta} - (A - C)\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + C\dot{\phi}\dot{\psi} \sin(\theta) = \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M_\alpha} \sin(\theta)$$

Für diese Gleichung können wir dann die Untersuchungen durchführen, welche wir für den schnellen Kreisel ausgeführt hatten.

Dazu hatten wir folgende Konstanten definiert:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{A} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2C} \right) = \frac{2E - C\omega_3^2}{A} \\ \beta &= \frac{2mgl}{A} \\ a &= \frac{p_\psi}{A} \\ b &= \frac{p_\phi}{A} \end{aligned}$$

Dies geht dann über in

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{A} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2C} \right) = \frac{2E - C\omega_3^2}{A} \\ \beta &= \frac{\rho S d v^2 C_{M_\alpha}}{A} \\ a &= \frac{p_\psi}{A} \\ b &= \frac{p_\phi}{A} \end{aligned}$$

Im Verlaufe dieser Untersuchungen erhielten wir eine Näherung für die Verkippung  $\theta$  zu

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_0) + \frac{x_1}{2} (1 - \cos(at))$$

mit

$$a = \frac{C}{A} \omega_3, \quad x_1 = \frac{\beta}{a^2} \sin^2(\theta_0)$$

Interessant ist hierbei - je schneller das Geschoss umläuft, umso geringer ist der Einfluss des Überschlagsmoments.

Der Einfluss der Verkippung (oder auch Nutation) verschwindet mit  $1/\omega_3^2$

Löst man  $x_1$  in der Gleichung

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_0) + \frac{x_1}{2}(1 - \cos(at))$$

auf, dann kann man die Gleichung auch schreiben

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_0) + \frac{\text{const}}{s}(1 - \cos(at))$$

Dies zeigt die Bedeutung des Stabilitätsfaktors.

In analoger Weise findet man die Präzessionsrate

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos(at))$$

Damit ist auch hier die Bedeutung des Stabilitätsfaktors offensichtlich.

Hier fehlen noch die geeigneten Anfangsbedingungen.

Wir wurden weiterhin auf folgende quadratische Gleichung geführt - entsprechend umgestellt

$$\dot{\phi}^2 - \frac{C\omega_3}{A \cos(\theta)}\dot{\phi} + \frac{mgl}{A \cos(\theta)} = 0$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergab zwei Nullstellen

$$\dot{\phi}_{1,2} = \frac{C\omega_3}{2A \cos(\theta)} \pm \frac{C\omega_3}{2A \cos(\theta)} \sqrt{1 - \frac{4Amgl \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2}}$$

Modifizieren wir diese Nullstellen, indem wir hier die analogen Ausdrücke des Überschlagsmomentes einfügen

$$\dot{\phi}_{1,2} = \frac{C\omega_3}{2A \cos(\theta)} \pm \frac{C\omega_3}{2A \cos(\theta)} \sqrt{1 - \frac{4A \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2}}$$

Nun sind nur reelle Nullstellen physikalisch sinnvoll - der Ausdruck unter der Wurzel muss somit positiv sein, d. h.

$$1 - \frac{4A \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2} > 0$$

oder

$$1 > \frac{4A \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2}$$

Hieraus ergibt sich aber durch Umstellen und Einsetzen der bereits definierte gyroskopische Stabilitätsfaktor  $s$ .

Bei Projektilen ist nun  $\omega_0 = \omega_3$  sehr groß, damit ist der Ausdruck

$$\frac{4A \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2}$$

sehr klein.

Wir entwickeln die Wurzel nach Taylor

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

dies ergibt eingesetzt

$$\sqrt{1 - \frac{4A \frac{1}{2} \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{2A \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2} = 1 - \frac{A \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2}$$

Damit ergibt sich für die erste Wurzel

$$\dot{\phi}_1 = \frac{C \omega_3}{2A \cos(\theta)} + \frac{C \omega_3}{2A \cos(\theta)} \left( 1 - \frac{A \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2} \right) = \frac{C \omega_3}{A \cos(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{\rho v^2 S d C_{M\alpha}}{C \omega_3}$$

(damit haben wir die erste mögliche Anfangsbedingung) und für die zweite Wurzel

$$\dot{\phi}_2 = \frac{C \omega_3}{2A \cos(\theta)} - \frac{C \omega_3}{2A \cos(\theta)} \left( 1 - \frac{A \rho v^2 S d C_{M\alpha} \cos(\theta)}{C^2 \omega_3^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\rho v^2 S d C_{M\alpha}}{C \omega_3}$$

(dies ergibt die zweite mögliche Anfangsbedingung).

Ist somit die Spin-Rate sehr groß, dann muss es eine langsame und eine schnelle Präzessionsrate geben.

Im Fall einer großen Spin-Rate weisen wir noch auf die Gleichung

$$A \cos(\theta) \dot{\phi}_1 = C \omega_3 = C(\cos(\theta) \dot{\phi}_1 + \dot{\psi})$$

hin - dies bedeutet, dass die Präzessionsrate und die Spin-Rate zueinander in einem bestimmten Verhältnis stehen:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{C\dot{\psi}}{(A - C) \cos(\theta)}$$

Bei sehr hohen Spin-Raten spielt dann das Überschlagsmoment keine Rolle mehr.

Insbesondere ist damit die Polardarstellung der Bewegung der Projektilspitze beschrieben.

### Anmerkung

Bei einem Drall von 1:11 (der Drall der Gewehre von Tikka im Kaliber .308) ist die Dralllänge etwa  $2,54 \cdot 11 = 27$  Zentimeter, was bedeutet, dass sich das Geschoss auf einem Meter knapp 3,6 mal dreht.

Ist die Mündungsgeschwindigkeit etwa 800 Meter pro Sekunde, dann läuft das Geschoss in einer Sekunde etwa  $3,6 \cdot 800 \approx 2880$  mal um.

Ist der Drall 1:10 (eher selten in dem Kaliber), dann ist die Dralllänge etwa  $2,54 \cdot 10 = 25,4$  Zentimeter. Bei einer Mündungsgeschwindigkeit von 800 Meter pro Sekunde läuft das Geschoss in einer Sekunde etwa  $4 \cdot 800 = 3200$  mal um.

Bei einem Drall von 1:8 (der Drall der Gewehre von Tikka T3X Tactical im Kaliber .223) wäre die Dralllänge etwa  $2,54 \cdot 8 = 20$  Zentimeter, das Geschoss dreht sich auf einem Meter etwa 5 mal.

Bei einer Mündungsgeschwindigkeit von etwa 800 Metern pro Sekunde (zum Beispiel die Match-Munition von Lapua oder die Match-Munition von RWS, die Target Elite Plus) würde sich das Geschoss etwa  $5 \cdot 800 = 4000$  mal pro Sekunde drehen.

Vielleicht ist noch folgende Anmerkung hilfreich.

Wir sind von der Beziehung

$$s = \frac{\omega_0^2 C^2}{4M_\alpha A}$$

für den Stabilitätsfaktor ausgegangen.

Dabei war  $\omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit an der Mündung.

An der Geschossoberfläche haben die Reibungskräfte eine Komponente entgegengesetzt zur Drehrichtung des Projektils (siehe Kutterer (1959), S. 60).

Dadurch entsteht ein Reibungsmoment, welches die Drehbewegung abbremst.

Für dieses Reibungsmoment  $I$  macht man den Ansatz

$$I = c_i \rho v \omega d^4$$

Nun ist (siehe Kutterer (1959), S. 60)

$$I = -C \frac{d\omega}{dt} = -Cv \frac{d\omega}{dx}$$

wobei  $C$  das axiale Hauptträgheitsmoment des Projektils ist.

Durch Integration erhalten wir hieraus

$$\omega = \omega_0 \exp(-\gamma x) \quad \text{mit} \quad \gamma = c_i \rho \frac{d^4}{C}$$

Somit nimmt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mit der Flugweite  $x$  ab.

Als Konsequenz nimmt damit aber auch der Stabilitätsfaktor  $s$  mit der Flugweite  $x$  ab - das Projektil gerät ab einer Flugweite  $x$  in eine Phase, wo die Flugstabilität mehr und mehr fraglich ist.

### Beispiel 6

Wir betrachten das Kaliber .308, Wettkampfmunition von Lapua, 175 grain, Produkt-Code 4317520.

Folgende Daten

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000
Geschwindigkeit [m/s]	793	733	675	619	468	384	323

Bei einem Drall von 1 : 11 haben wir eine Dralllänge von  $11 \cdot 2,54 = 27,94$  - damit dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/0,2794 = 3,57$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000
Umdrehungen pro Sekunde	2838	2624	2416	2216	1675	1374	1156

Logarithmiert ergibt dies

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000
Logarithmiert	7,95	7,87	7,78	7,70	7,42	7,22	7,05

Ziehen wir nun 7,95 ab, dann erhalten wir

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000
Differenz	0	-0,08	-0,17	-0,25	-0,53	-0,73	-0,9

Damit können wir folgendes Modell anpassen

$$\ln(\omega) - \ln(\omega_0) = -\gamma \cdot x$$

somit eine lineare Funktion  $f(x) = ax$ .

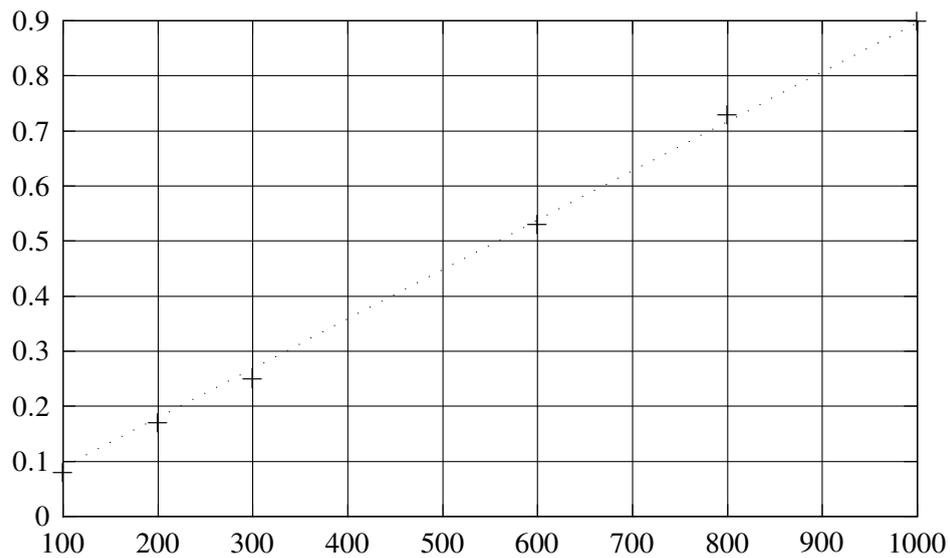
Wenn man die lineare Regression mit Hilfe von GNUPLOT durchführt, dann erhält man

$$f(x) = 0,000896729x$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 0,000777103.

Das Bestimmtheitsmaß kann man zu 0,998 berechnen.

Hier noch der zugehörige Plot



Logarithmierte Tourenzahl vs. Flugweite

Dies ergibt dann folgendes Modell für die Tourenzahl

$$\omega = \omega(x) = 2838 \cdot \exp(-0,000896729 \cdot x)$$

Hier ein weiteres

### Beispiel 7

Wir betrachten das Kaliber .338 Lapua Magnum, 16,2 Gramm Geschossgewicht, ebenfalls Wettkampfmunition von Lapua, Produkt-Code 4318017.

Folgende Daten

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000	1200	1500
Geschwindigkeit [m/s]	905	856	808	762	631	551	477	409	328

Bei einem Drall von 1 : 10 haben wir eine Dralllänge von  $10 \cdot 2,54 = 25,4$  - damit dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/0,254 = 3,93$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000	1200	1500
Umdrehungen pro Sekunde	3556	3364	3175	2994	2479	2165	1874	1607	1289

Logarithmiert ergibt dies

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000	1200	1500
Logarithmiert	8,17	8,12	8,06	8,0	7,81	7,68	7,53	7,38	7,16

Ziehen wir hiervon 8,17 ab, dann erhalten wir

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000	1200	1500
Differenz	0	-0,05	-0,11	-0,17	-0,36	-0,49	-0,64	-0,79	-1,01

Damit können wir folgendes Modell anpassen

$$\ln(\omega) - \ln(\omega_0) = -\gamma \cdot x$$

somit eine lineare Funktion  $f(x) = ax$ .

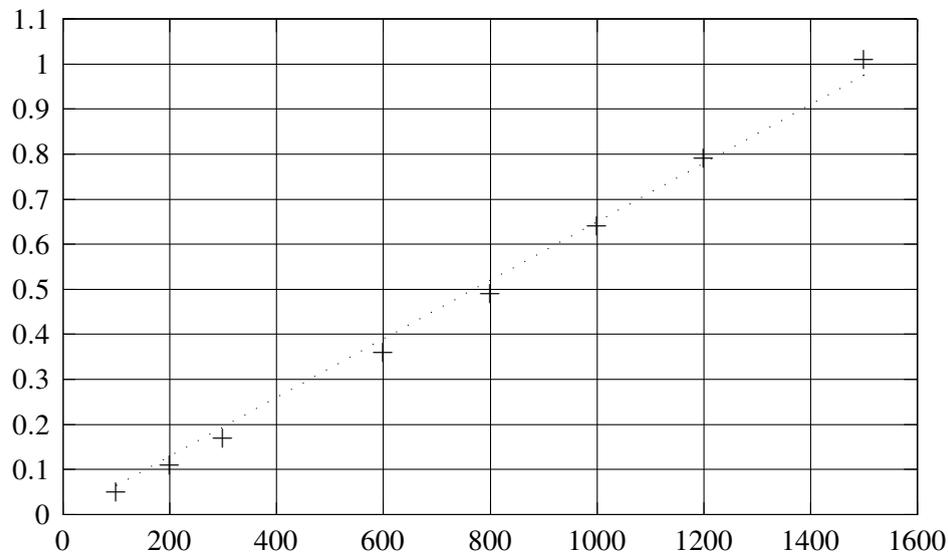
Wenn man die lineare Regression mit Hilfe von GNU PLOT durchführt, dann erhält man

$$f(x) = 0,000649914x$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 0,00447496.

Das Bestimmtheitsmaß kann man zu 0,994 berechnen.

Hier noch der zugehörige Plot



Logarithmierte Tourenzahl vs. Flugweite

Dies ergibt dann folgendes Modell für die Tourenzahl

$$\omega = \omega(x) = 3556 \cdot \exp(-0,000649914 \cdot x)$$

Hier ein weiteres

### Beispiel 8

Für die Daten aus dem Bereich der Artillerie siehe Cranz (1910), S. 258.

Entfernung [m]	0	100	200	800	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Geschwindigkeit [m/s]	442	424	407	392	319	268	233	208	190	188

Bei einer Dralllänge von (vermutlich) 151 cm dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/1,51 = 0,66$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	100	200	800	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Umdrehungen pro Sekunde	291	279	268	258	210	176	153	137	125	124

Logarithmiert ergibt dies

Entfernung [m]	0	100	200	800	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Logarithmiert	5,67	5,63	5,59	5,55	5,34	5,17	5,03	4,91	4,828	4,820

Ziehen wir hiervon 5,67 ab, dann erhalten wir

Entfernung [m]	0	100	200	800	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Differenz	0	-0,04	-0,08	-0,12	-0,33	-0,5	-0,64	-0,76	-0,842	-0,85

Damit können wir folgendes Modell anpassen

$$\ln(\omega) - \ln(\omega_0) = -\gamma \cdot x$$

somit eine lineare Funktion  $f(x) = ax$ .

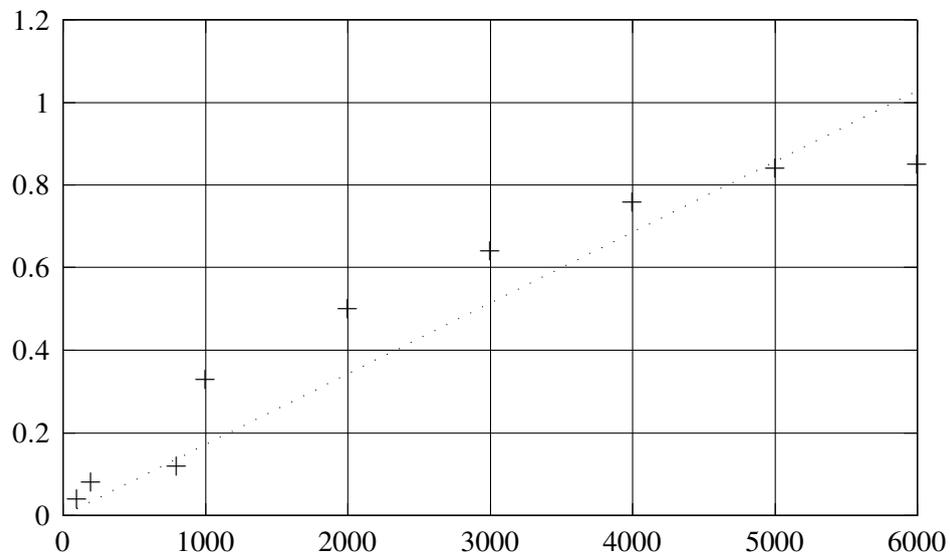
Wenn man die lineare Regression mit Hilfe von GNUPLOT durchführt, dann erhält man

$$f(x) = 0,000171404x$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 0,106184.

Das Bestimmtheitsmaß kann man zu 0,88 berechnen.

Hier noch der zugehörige Plot



Logarithmierte Tourenzahl vs. Flugweite

Dies ergibt dann folgendes Modell für die Tourenzahl

$$\omega = \omega(x) = 291 \cdot \exp(-0,000171404 \cdot x)$$

### Beispiel 9

Hier die Daten der 8,8 cm Flak aus dem zweiten Weltkrieg.

Entfernung [m]	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Geschwindigkeit [m/s]	820	720	626	542	464	393	340	309	289	273	262

Bei einer Dralllänge von 400 cm dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/4,0 = 0,25$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Umdre. pro Sekunde	205	180	156,5	135,5	116	98,25	85	77,25	72,25	68,25	65,5

Logarithmiert ergibt dies

Entfernung [m]	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Logarithmiert	5,32	5,19	5,05	4,90	4,75	4,58	4,44	4,34	4,28	4,22	4,18

Ziehen wir hiervon 5,32 ab, dann erhalten wir

Entfernung [m]	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Differenz	0	-0,13	-0,27	-0,42	-0,57	-0,74	-0,88	-0,98	-1,04	-1,1	-1,13

Damit können wir folgendes Modell anpassen

$$\ln(\omega) - \ln(\omega_0) = -\gamma \cdot x$$

somit eine lineare Funktion  $f(x) = ax$ .

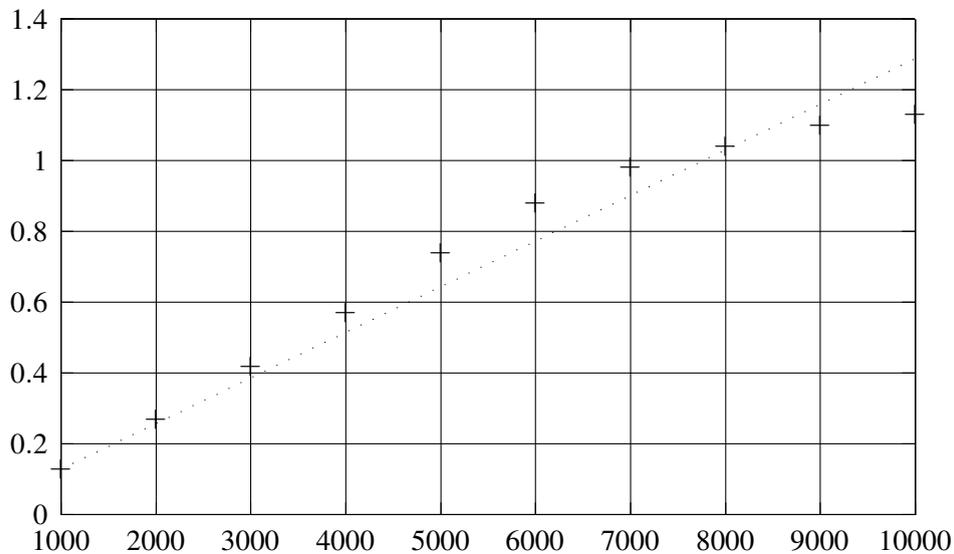
Wenn man die lineare Regression mit Hilfe von GNUPLOT durchführt, dann erhält man

$$f(x) = 0,000128753x$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 0,0597016.

Das Bestimmtheitsmaß kann man zu 0,948 errechnen.

Hier noch der zugehörige Plot



Logarithmierte Tourenzahl vs. Flugweite

Dies ergibt dann folgendes Modell für die Tourenzahl

$$\omega = \omega(x) = 205 \cdot \exp(-0,000128753 \cdot x)$$

Nach Burchett (2013), S. 13, kann man bei dem angenäherten Modell die Spin-Rate explizit angeben - im Prinzip ist dies eine Funktion der Form

$$p(x) = a \exp(bx) + c \exp(-dx)(\exp(bx) - 1)$$

Nähert man die Exponentialfunktion durch  $1 + bx$  bzw.  $1 - dx$  an und multipliziert die Terme aus, dann erhält man als Näherung ein Polynom zweiten Grades

$$g_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

mit Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$ , die aus den Daten geschätzt werden müssen.

Treibt man die Entwicklung von  $\exp(-dx)$  eine Potenz weiter, so erhält man als Näherung ein Polynom dritten Grades:

$$g_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Dies kann man natürlich weiter treiben, falls gewünscht.

### Beispiel 10

Wir betrachten nochmals das Kaliber .308, Wettkampfmunition von Lapua, 175 grain, Produkt-Code 4317520.

Folgende Daten

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000
Geschwindigkeit [m/s]	793	733	675	619	468	384	323

Bei einem Drall von 1 : 11 haben wir eine Dralllänge von  $11 \cdot 2,54 = 27,94$  - damit dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/0,2794 = 3,57$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000
Umdrehungen pro Sekunde	2838	2624	2416	2216	1675	1374	1156

Die Ausgleichsrechnung für ein Polynom zweiten Grades

$$g_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

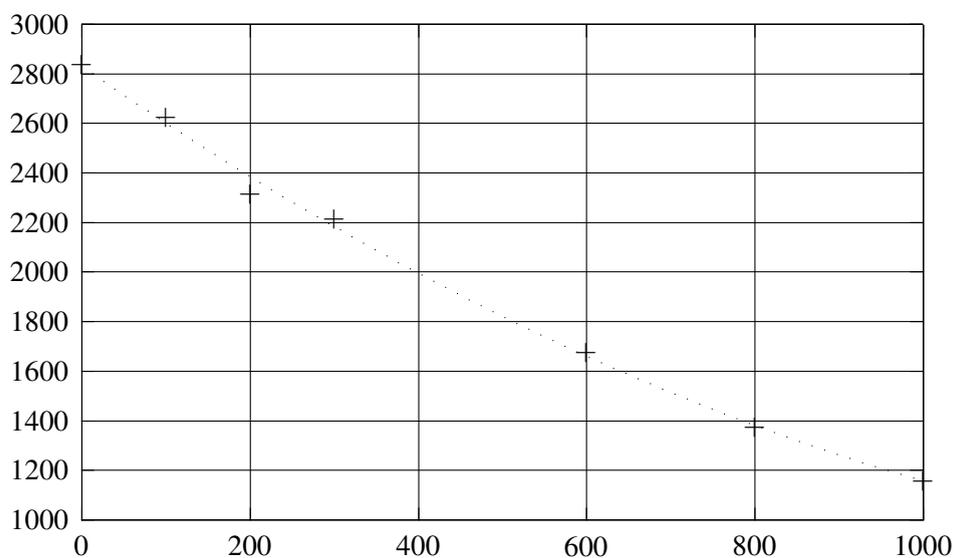
ergibt die Schätzungen

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 2830,1 \\ \hat{a}_1 &= -2,3618 \\ \hat{a}_2 &= 0,000688391\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 6708,04.

Hieraus errechnet sich ein Bestimmtheitsmaß von 0,997.

Hier ist der zugehörige Plot:



Tourenzahl vs. Flugweite

Der Ansatz mit einem Polynom dritten Grades

$$g_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

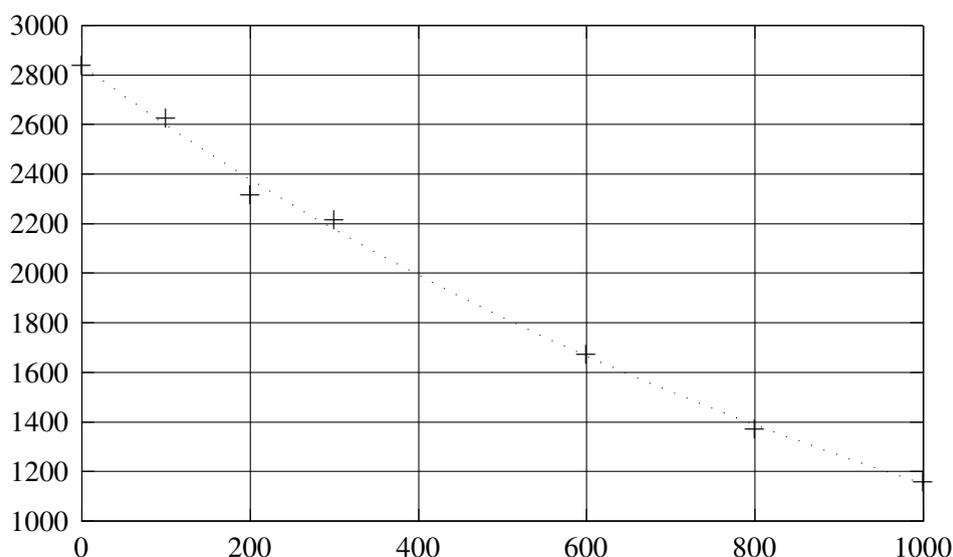
führt auf Schätzungen

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 2837,69 \\ \hat{a}_1 &= -2,48984 \\ \hat{a}_2 &= 0,00103284 \\ \hat{a}_3 &= -2,29915 \cdot 10^{-7}\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 6449,87.

Hieraus errechnet sich ein Bestimmtheitsmaß von 0,997.

Hier noch der zugehörige Plot:



Tourenzahl vs. Flugweite

Eine weitere Erhöhung des Polynomgrads scheint keine wesentliche Verbesserung zu bringen.

### Beispiel 11

Wir betrachten nochmals das Kaliber .338 Lapua Magnum, 16,2 Gramm Geschossgewicht, Produkt-Code 4318017.

Folgende Daten

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000	1200	1500
Geschwindigkeit [m/s]	905	856	808	762	631	551	477	409	328

Bei einem Drall von 1 : 10 haben wir eine Dralllänge von  $10 \cdot 2,54 = 25,4$  - damit dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/0,254 = 3,93$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	100	200	300	600	800	1000	1200	1500
Umdrehungen pro Sekunde	3556	3364	3175	2994	2479	2165	1874	1607	1289

Wir machen zuerst den Ansatz

$$g_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

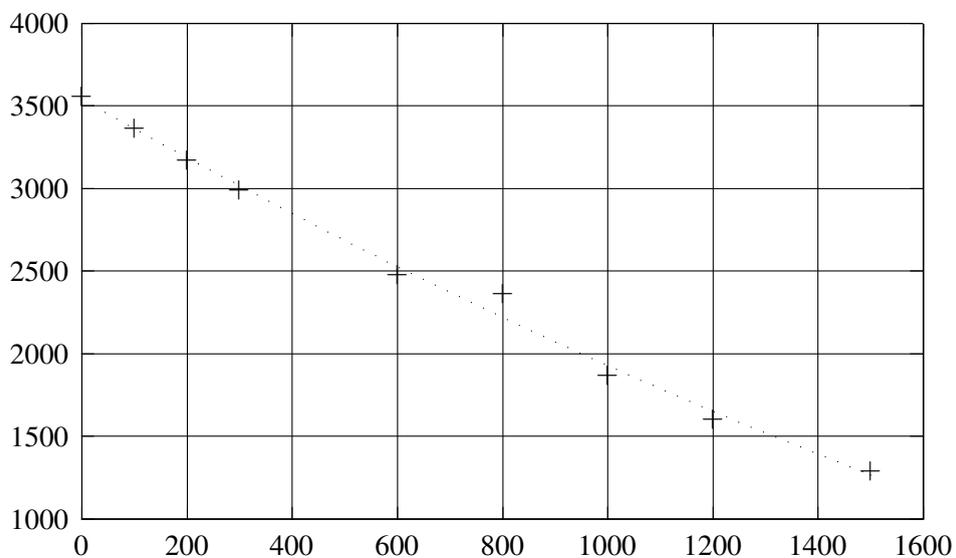
und erhalten als Schätzung

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 3540,4 \\ \hat{a}_1 &= -1,80413 \\ \hat{a}_2 &= 0,00019262\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 29721,2.

Hieraus errechnet sich ein Bestimmtheitsmaß von 0,994.

Hier der zugehörige Plot



Tourenzahl vs. Flugweite

Wir versuchen nun ein Polynom dritten Grades

$$g_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

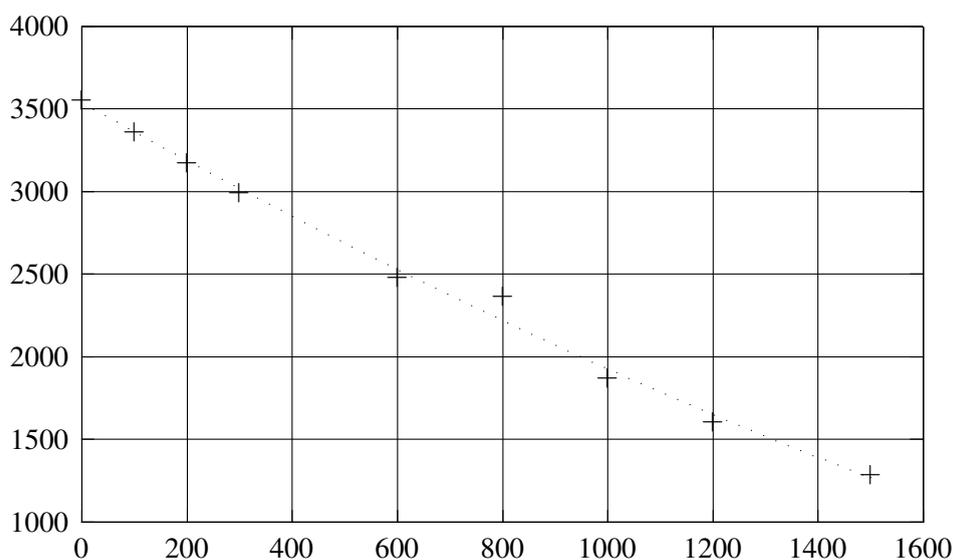
und erhalten als Schätzung

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 3538,19 \\ \hat{a}_1 &= -1,77884 \\ \hat{a}_2 &= 0,00014858 \\ \hat{a}_3 &= 1,92982 \cdot 10^{-8}\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 29699,7.

Dies ergibt ein Bestimmtheitsmaß von 0,994.

Hier noch der zugehörige Plot



Tourenzahl vs. Flugweite

Eine Verbesserung ist bei einer weiteren Erhöhung des Polynomgrades nicht zu erwarten.

### Beispiel 12

Hier nochmals die Daten aus dem Bereich der Artillerie, siehe Cranz (1910), S. 258.

Entfernung [m]	0	100	200	800	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Geschwindigkeit [m/s]	442	424	407	392	319	268	233	208	190	188

Bei einer Dralllänge von (vermutlich) 151 cm dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/1,51 = 0,66$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	100	200	800	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Umdrehungen pro Sekunde	291	279	268	258	210	176	153	137	125	124

Wieder versuchen wir hier ein Polynom zweiten Grades

$$g_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

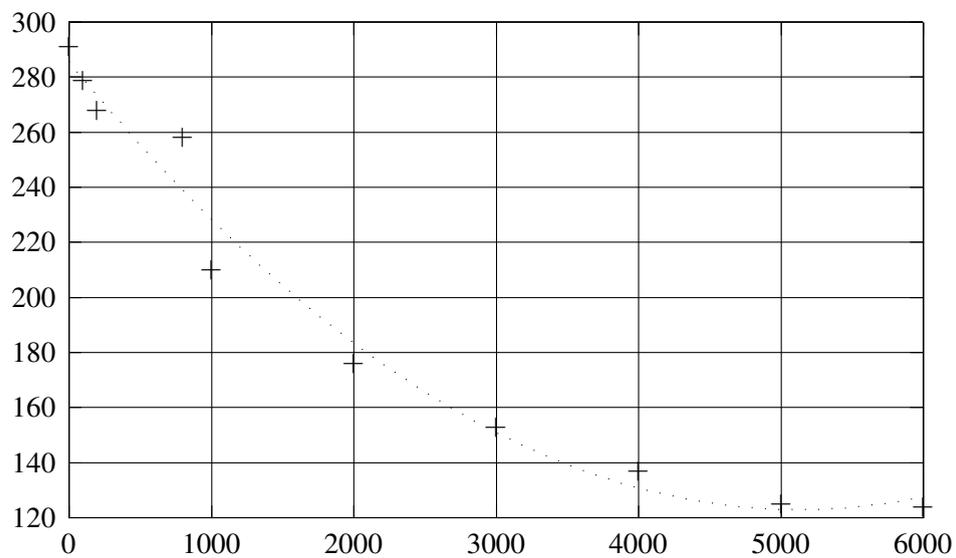
Als Schätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 285,563 \\ \hat{a}_1 &= -0,0634096 \\ \hat{a}_3 &= 6,18088 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 876,129.

Dies ergibt ein Bestimmtheitsmaß von 0,978.

Hier der zugehörige Plot



Tourenzahl vs. Flugweite

Wir erhöhen nun den Polynomgrad und betrachten

$$g_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

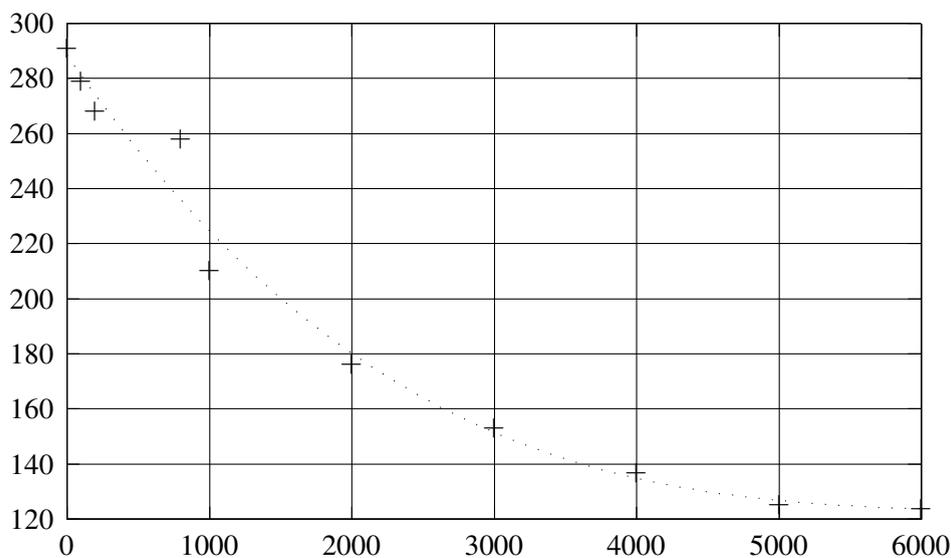
Dies ergibt die Schätzung

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 288,588 \\ \hat{a}_1 &= -0,0746957 \\ \hat{a}_2 &= 1,14659 \cdot 10^{-5} \\ \hat{a}_3 &= -5,99336 \cdot 10^{-10}\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 784,132.

Dies ergibt ein Bestimmtheitsmaß von 0,980.

Hier ist der zugehörige Plot



Tourenzahl vs. Flugweite

Es ist fraglich, ob eine Erhöhung des Polynomgrads noch eine weitere Verbesserung bringt.

### Beispiel 13

Hier nochmals die Daten der 8,8 cm Flak aus dem zweiten Weltkrieg.

Entfernung [m]	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Geschwindigkeit [m/s]	820	720	626	542	464	393	340	309	289	273	262

Bei einer Dralllänge von 400 cm dreht sich das Projektil auf einen Meter  $1/4,0 = 0,25$  mal.

Wir haben damit

Entfernung [m]	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Umdre. pro Sekunde	205	180	156,5	135,5	116	98,25	85	77,25	72,25	68,25	65,5

Wieder beginnen wir mit einem Polynom zweiten Grades

$$g_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

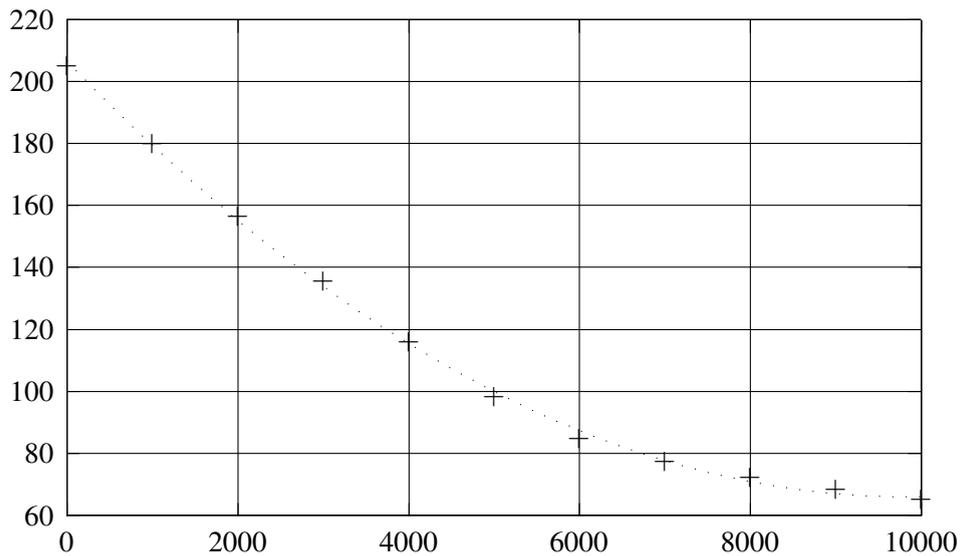
Dies ergibt die folgenden Schätzungen

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 206,542 \\ \hat{a}_1 &= -0,0285825 \\ \hat{a}_2 &= 1,4528 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 20,0678.

Hieraus ergibt sich ein Bestimmtheitsmaß von 0,999.

Hier der zugehörige Plot



Tourenzahl vs. Flugweite

Wir versuchen noch ein Polynom dritten Grades

$$g_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

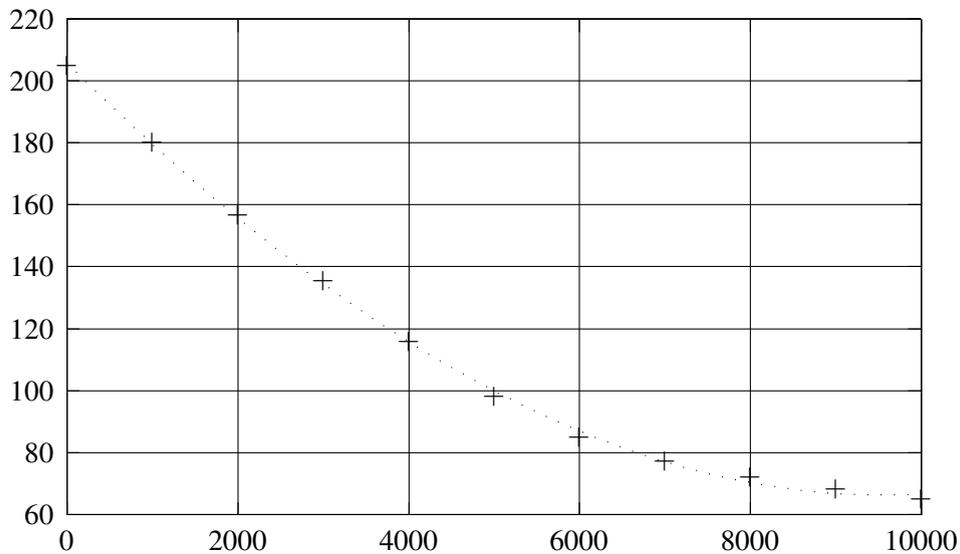
Dies ergibt Schätzungen

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= 205,806 \\ \hat{a}_1 &= -0,0274131 \\ \hat{a}_2 &= 1,14612 \cdot 10^{-6} \\ \hat{a}_3 &= 2,04448 \cdot 10^{-11}\end{aligned}$$

mit einer Summe der Fehlerquadrate von 17,4856.

Hieraus ergibt sich ein Bestimmtheitsmaß von 0,999.

Hier noch der zugehörige Plot



Tourenzahl vs. Flugweite

Eine Verbesserung scheint nicht möglich.

## 2.3 Der Folgsamkeitsfaktor und die gyroskopische Stabilität

Im Fall von Büchsen geschossen sind die Flugbahnen typischerweise eher gestreckt - sie verlaufen daher flach.

Erhebungswinkel von maximal 5 Grad sind normal.

Von daher reicht der Stabilitätsfaktor in diesem Fall normalerweise aus - siehe zum Beispiel Kutterer (1959), S. 75 ff.

Anders sieht dies im Fall von Artilleriegeschossen aus.

Man versucht, in größere Höhen zu gelangen - die Luftdichte ist hier wesentlich geringer, und damit sind größere Reichweiten machbar.

Hier ist vorstellbar, dass der Stabilitätsfaktor sehr groß ist und das Projektil somit seine Richtung auch über den Scheitelpunkt hinaus beibehält, somit **nicht** der Bahntangente folgt.

Im schlimmsten Fall kann das Projektil mit dem Boden aufschlagen, siehe hierzu auch die Ausführungen im Buch von Molitz und Strobel (1963).

Um den Stabilitätsfaktor nicht ausufern zu lassen, führt man deshalb den **Folgsamkeitsfaktor** ein.

Im Buch von Kutterer (1959) auf S. 75 ist er definiert als das Verhältnis zwischen

- der Winkelgeschwindigkeit, mit der die Präzessionsbewegung vor sich geht und
- der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Bahntangente neigt.

Da der entscheidende Punkt der Scheitelpunkt ist, definiert man diesen Folgsamkeitsfaktor  $\varepsilon$  im Scheitelpunkt (andere Verfasser bieten auch andere, etwas komplizierte Definitionen)

$$\varepsilon = \frac{M_\alpha v}{Cmg}$$

Dabei werden das Überschlagsmoment  $M_\alpha$  und die Geschwindigkeit  $v$  im Scheitelpunkt betrachtet.

$C$  ist dabei das axiale Hauptträgheitsmoment.

Von dem Folgsamkeitsfaktor  $\varepsilon$  fordert man nun, dass gilt

$$\varepsilon > 1$$

Vergleicht man nun mit der Definition des Stabilitätsfaktors

$$s = \frac{\omega_0^2 C^2}{4M_\alpha A}$$

dann erkennt man durch Umstellen, dass zwischen dem Folgsamkeitsfaktor  $\varepsilon$  und dem Stabilitätsfaktor  $s$  folgender Zusammenhang bestehen muss

$$\varepsilon = \frac{v\omega_0^2 C}{4mgA} \cdot \frac{1}{s}$$

Der Folgsamkeitsfaktor ist somit umgekehrt proportional zum Stabilitätsfaktor.

## 2.4 Näherungen für den Stabilitätsfaktor für Büchsenpatrone

Wir hatten bereits die klassische Formel für den Stabilitätsfaktor erhalten

$$s = \frac{8\pi}{\rho t^2 d^5 C_{M_\alpha}} \frac{C^2}{A}$$

Diese Formel schreiben wir nun geringfügig um, indem wir mit  $A$  das axiale und mit  $B$  das transversale Trägheitsmoment bezeichnen:

$$s = \frac{8\pi}{\rho t^2 d^5 C_{M_\alpha}} \frac{A^2}{B}$$

Dabei ist  $\rho$  die Luftdichte,  $t$  der Drall in Kaliber pro Umlauf,  $d$  das Kaliber in Inch,  $C_{M_\alpha}$  das Überschlagsmoment,  $A$  das axiale Trägheitsmoment (Einheit: Gewicht mal Quadrat der Länge) und  $B$  das transversale Trägheitsmoment (Einheit: Gewicht mal Quadrat der Länge).

Hierbei müssen die Größen in kompatiblen Einheiten gemessen sein, so dass  $s$  dimensionslos ist. Diese Gleichung für den Stabilitätsfaktor ist der Ausgangspunkt in der Originalarbeit von Miller (2005).

Die Trägheitsmomente - siehe die Arbeit von Miller (2005) - können nun durch folgende Gleichung angenähert werden:

$$\frac{Bmd^2}{A^2} = 4,83(1 + l^2)$$

oder umgestellt

$$\frac{A^2}{B} = \frac{md^2}{4,83(1 + l^2)}$$

Ebenso gibt es eine **sehr** grobe Formel für das Überschlagsmoment

$$C_{M_\alpha} = C_{N_\alpha}(cp - cg) = 2,85(0,6l - 0,4l) = 0,57l$$

Hierbei ist  $cp$  das Druckzentrum und  $cg$  der Schwerpunkt, gemessen von der Basis des Projektils.

$C_{N_\alpha}$  ist der Koeffizient für den Anteil in Richtung der Normalen der Luftwiderstandskraft.

Messen wir die Masse  $m$  in Grain, die Dichte der Luft in Grain pro Kubik-Inch, und das Kaliber  $d$  in Inch, dann erhalten wir für  $s$ :

$$s = \frac{30,0 \cdot m}{t^2 d^3 l (1 + l^2)}$$

und umgestellt nach dem Drall  $t$ :

$$t^2 = \frac{30,0 \cdot m}{s d^3 l (1 + l^2)}$$

Sollte die Masse des Projektils  $m$  in Gramm und  $d$  in Zentimeter gemessen werden, dann ist die 30,0 in den obigen Gleichungen zu ersetzen durch  $30,0 \cdot 252,9 = 7587$  - der Faktor 252,9 ist der Konversionsfaktor zwischen englischen und metrischen Einheiten.

Damit werden die Formeln zu

$$s = \frac{7587,0 \cdot m}{t^2 d^3 l (1 + l^2)}$$

und umgestellt nach dem Drall  $t$ :

$$t^2 = \frac{7587,0 \cdot m}{s d^3 l (1 + l^2)}$$

Es gibt nun noch Einflüsse von Seiten der Geschwindigkeit, des Luftdrucks und der Temperatur auf das Überschlagsmoment.

Die bisher aufgestellte Gleichung bezieht sich auf eine Mach-Zahl  $M = 2,5$  - dies entspricht einer Geschwindigkeit von etwa 2800 Fuß pro Sekunde, dies sind etwa 840 Meter pro Sekunde unter Standardbedingungen.

Nun wächst aber  $C_{M_\alpha}$  an, wenn die Geschwindigkeit fällt und sich der Schallgeschwindigkeit nähert.

Dieses Anwachsen von  $C_{M_\alpha}$  hängt mit der Gestalt des Projektils zusammen - in der Nähe der Schallgeschwindigkeit kann dies etwa um einen Faktor 1,25 bis 1,555 größer sein als bei einer Mach-Zahl von 2,5.

Damit werden die Stabilitätsfaktoren unterhalb von 2800 Fuß pro Sekunde kleiner und oberhalb größer sein.

Eine grobe Annäherung an diesen Geschwindigkeitseffekt bzgl. des Überschlagsmomentes besteht darin, das berechnete  $s$  mit der dritten Wurzel aus  $v/2800$  zu multiplizieren bzw. den Drall  $t$  mit der sechsten Wurzel aus  $v/2800$ , wenn  $v$  die Geschwindigkeit in feet pro Sekunde ist.

Unterhalb der Schallgeschwindigkeit verwenden wir die Schallgeschwindigkeit selbst.

Dies ergibt dann einen Korrekturfaktor

$$f_v = \sqrt[3]{\frac{v}{2800}}$$

für  $s$  und  $t^2$ .

Im Artikel von Miller (2005) wird noch nachgewiesen, dass der Einfluss von Luftdruck und Temperatur auf das Überschlagsmoment sich in Grenzen hält und somit vernachlässigt werden kann.

Kennt man den Stabilitätsfaktor  $s$  und die Flugzeit  $T$ , dann kann man - siehe Litz (2011), S. 87 - die seitliche Abweichung *drift* abschätzen mit Hilfe folgender Formel:

$$drift = 1,25(s + 1,2) \cdot T^{1,83}$$

*drift* wird dabei in inch ausgedrückt,  $s$  ist der obige Wert für den Stabilitätsfaktor.

Die Formel gilt für einen Rechtsdrall - im Fall eines Linksdralls muss ein Minuszeichen vorangestellt werden.

Damit haben wir eine Formel für die seitliche Abweichung durch die Rotation des Projektils erhalten.

Wir sollten vielleicht noch auf folgende Näherungen hinweisen (siehe Miller (2005), VI. Technical Notes):

- Im Fall von Projektilen im Kaliber zwischen 0.30 und 0.50 gelten folgende Approximationen

$$A/md^2 = k_a^2 = 0,115 \quad B/md^2 = k_t^2 \sim (1 + 0,944l^2)$$

$$cg \sim 0,4l \quad \text{von der Basis aus}$$

Im Fall eines zylindrischen Projektils:

$$k_t^2 \sim (1,25 + l^2)$$

-  $C_{M_\alpha} = C_{N_\alpha}(cp - cg)$  gemessen von der Basis.

Eine ganz brauchbare Näherung für  $C_{N_\alpha}$  ist  $C_{N_\alpha} = 2,85$ .

Für  $C_{M_\alpha}$  erhält man als Näherung

$$C_{M_\alpha} = 0,57l$$

Man sollte noch folgende Punkte anmerken:

- Im Buch von Litz (2011) sind für eine Unzahl von Kalibern und Geschossen die zugehörigen Geschosslängen angegeben. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, den Stabilitätsfaktor zu berechnen, und - sollte man die Flugzeit berechnet haben - auch die seitliche Abweichung abzuschätzen.
- Die Gelehrten streiten sich über diesen Punkt. Von der Theorie her sollte der Stabilitätsfaktor  $s$  mindestens größer als 1 sein.

In der Praxis scheint aber ein Wert von 2 angemessener zu sein. Im Buch von Litz (2011) sind auf S. 138 ff. einige Ausführungen zu diesem Problemkreis zu finden, wie auch in der Arbeit von Miller (2005).

Weitaus umfassender behandelt das Buch Litz (2014) derartige Fragestellungen, insbesondere Zusammenhänge zwischen dem Stabilitätsfaktor und der Präzision, aber auch Zusammenhänge zwischen Stabilitätsfaktor und Luftwiderstand - schließlich präzisiert ein Geschoss mit kleinem Stabilitätsfaktor sehr viel mehr als eines mit größerem Stabilitätsfaktor.

Aus eigener Anschauung: Das TRG 22 von Sako besitzt einen 1:11-er Drall und schießt mit 168 grain Match-Munition normalerweise außerordentlich präzise.

Auf 100 Meter Entfernung ist es durchaus möglich, fünf Schuss (gute Match-Munition vorausgesetzt) auf die Fläche eines Kronkorkens zu setzen.

Rechnet man für ein 168 grain Geschoss den Stabilitätsfaktor aus (zum Beispiel für Munition wie RWS Target Elite Plus), dann erhält man einen Wert von etwa 2.

Es gibt von Lapua aber Wettkampfmunition mit 175 grain - etwas längere Geschosse, hier liegt der Stabilitätsfaktor etwa bei 2,1.

Ebenso gibt es Wettkampfmunition von Federal mit 175 grain - der Hersteller gibt leider nicht die Geschosslänge an, es steht aber zu erwarten, dass sich die Geschosslängen nicht sonderlich unterscheiden.

Allerdings verbaut Federal in dieser Munition ein Sierra Matchking Geschoss - im Buch von Litz (2011) findet man hierzu einen Stabilitätsfaktor von 2,2.

Damit sollte die Munition außerordentlich präzise schießen.

Wie die Theorie vorhersagt - das TRG 22 schießt mit der Munition von Federal noch einmal etwas präziser.

Fast hat man den Eindruck "Loch in Loch".

Das gleiche Geschoss ist in der Munition von Remington in der Serie "Premier Match" verbaut - damit müsste auch diese Munition mit einem 175 grain Geschoss sehr präzise schießen.

Allerdings scheint es schwierig zu sein, an die Munition von Remington zu kommen.

Man kann nun auf die Idee kommen, dass dies mit der Lauflänge als zusätzlichem Parameter zu tun haben könnte.

Die Tikka T3 CTR hat ebenfalls eine Dralllänge von 1:11, genauso, wie das TRG 22, bei gleichem Kaliber.

Der Lauf besitzt allerdings nur noch eine Länge von knapp 51 Zentimetern.

Mit Wettkampfmunition von Federal mit 175 grain schießt die Waffe erstaunlich präzise - 6 Schuss auf die Fläche einer 1-Euro-Münze auf 100 Meter.

Der nächste Versuch wurde mit einer Tikka T3 Varmint unternommen. Gleicher Drall, aber 60 Zentimeter Lauflänge, hier wurde ebenfalls Wettkampfmunition von Federal mit 175 grain Geschossgewicht verwendet.

Auch in diesem Fall sah das Ergebnis entsprechend aus.

Damit ist die Lauflänge an sich wohl weniger der wesentliche Parameter, zumindest nicht bei Entfernungen von 100 Metern.

Als weitere Hersteller von Match-Munition mit 175 grain schweren Geschossen sind beispielsweise noch zu nennen

- Sellier und Bellot, ebenfalls ein Sierra Matchking Geschoss
- Barnes, scheint legendär zu sein - mal sehen, was die Legende hält. Erste Versuche sind vielversprechend.
- Die Reihe TRG Precision Line in .308 von Sako, nach ersten Versuchen vielversprechend.
- Prvi Partesan, ein serbischer Hersteller, die Schachtel mit 20 Patronen kostet weniger als die Hälfte als die Schachtel der Mitbewerber; das Preis-Leistungsverhältnis soll recht gut sein

Insbesondere scheint es etwas schwierig zu sein, an Munition der amerikanischen Hersteller zu gelangen, was Munition mit 175 grain schweren Geschossen angeht.

Ebenso ist Munition von Lapua etwas problematisch - man kann sie beispielsweise von der Firma AKAH erhalten, dann allerdings im Umkarton zu 600 Patronen.

Die schlechte Nachricht - für einen einzigen Versuch sind 600 Patronen schon ziemlich viel.

Die gute Nachricht - weiß man, dass die Waffe mit dieser Munition gut läuft, dann ändert sich zumindest die Trefferlage so schnell nicht.

In der Munition von Sako aus der TRG Precision Line ist wohl ebenfalls ein Sierra Matching Geschoss verbaut - man kann fast Loch in Loch damit schießen.

Die Munition von Lapua und die Munition von Sako scheinen gleichauf zu liegen - es sieht danach aus, dass im Fall von Sako auch kleinere Mengen bestellt werden können.

Ebenso bleibt die Trefferlage während des Trainings gleich.

Allerdings: Es sieht danach aus, dass die Munition etwas "wetterfühliger" ist. Es empfiehlt sich, zu Anfang des Trainings vielleicht fünf Probeschüsse abzugeben, um die Trefferlage zu kontrollieren.

Die europäischen Hersteller müssen sich somit nicht gegenüber den amerikanischen Herstellern verstecken.

Munition mit 168 grain ist eher erhältlich - vielleicht liegt es daran, dass Munition in .308 mit 175 grain recht kostspielig ist (die Schachtel mit 20 Patronen zwischen 40 bis 60 Euro)?

Ein weiteres Beispiel ist die Tikka T3X Tactical im Kaliber .223 mit 51 Zentimeter langem Lauf und einem 1:8-er Drall (Laufdicke 22 Millimeter).

Aufgrund des kurzen und schweren Laufs steht zu erwarten, dass Laufschrägungen keinerlei Rolle mehr spielen - ein Ergebnis der technischen Schwingungslehre.

Nun wurde die kleine Patrone für eine Lauflänge von 50 Zentimeter entwickelt.

Bei 55 grain schweren Geschossen liegt der Stabilitätsfaktor deutlich unter 2, bei 62 grain schweren Geschossen knapp unter 2 und bei 69 grain schweren Geschossen über 2.

Bei den leichten Geschossen ergibt sich ein Streukreis von etwa 6 Zentimetern auf 100 Meter, bei den mittelschweren Geschossen von etwa 4 Zentimetern und den schweren Geschossen ein Streukreis von der Größe einer 20-Cent Münze - bei jeweils fünf Schuss.

Dabei scheint - solange es sich um hochwertige Match-Munition handelt - der Hersteller eher nebensächlich zu sein. Allenfalls beim Waffenreinigen muss mit mehr oder weniger Schmauch gerechnet werden.

Dies deckt sich auch mit den Erfahrungswerten, die man im Internet zu diesem Thema finden kann.

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Checkliste, die im Buch von Hübner (1999), S. 319, zu finden ist:

- 1) Wird die für die Dralllänge optimale Patrone verwendet? Ist es eine präzise Matchpa-

trone?

- 2) Hat die Patrone ein Geschossgewicht, das unempfindlich gegenüber Windeinfluss ist?
- 3) Stimmt die Höhentrommel des Zielfernrohrs für das Geschossgewicht der Patrone?

Hier kann sicherlich der Stabilitätsfaktor wertvolle Informationen liefern.

Wir sollten vielleicht noch anmerken:

Im Buch von Litz (2011) kann man für eine Reihe von Kalibern und Herstellern von Geschossen wie auch Dralllängen die jeweiligen Stabilitätsfaktoren finden.

Dies ist sicherlich hilfreich bei der Auswahl einer geeigneten Patrone.

## 2.5 Stabilitätsbedingungen, dynamische Stabilität

In diesem Abschnitt orientieren wir uns an der Arbeit von Murphy (1963).

Selbstverständlich gibt es weitere Referenzen

- McCoy (2012), wird heutzutage als Standardwerk gepriesen. Es sei dahingestellt, ob zu recht.
- Carlucci und Jacobson (2008), wird ebenfalls als Standardwerk angeführt. Beide Werke haben wohl ihre Schwierigkeiten mit Euler-Winkeln und Quaternionen.
- Kutterer (1959), in mancherlei Hinsicht sehr knapp, um nicht zu sagen - zu knapp.
- Molitz und Strobel (1963), eher verwirrend, eine saubere Nomenklatur in Sachen Matrizen hat schon seinen Sinn.

um nur einige Referenzen zu nennen.

Die bisherigen Ergebnisse orientieren sich nicht so sehr an den aerodynamischen Momenten - dies wird manchmal in der Literatur bemängelt.

Legt man nun das Schwergewicht der Untersuchungen auf aerodynamische Momente, dann redet man auch von **dynamischer Stabilität**.

Im Umfeld der äußeren Ballistik haben wir einerseits mit dem Luftwiderstand zu kämpfen - typischerweise wird diese Kraft durch die folgende Gleichung beschrieben

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

wobei

- $\rho$  die Luftdichte
- $V$  die Geschwindigkeit
- $S$  die Referenzfläche des Projektils
- $C_D$  der Luftwiderstandsbeiwert

ist.

Die Geschwindigkeit des Projektils muss dabei der Differentialgleichung

$$m\dot{V} = -\frac{1}{2}\rho V^2 C_D$$

genügen.

Nun gibt es Effekte aufgrund des Nick- und des Gierwinkels des Projektils.

Sind die Winkelbewegungen nicht klein, dann gibt es eine Veränderung in dem Luftwiderstandsbeiwert  $C_D$ .

Diese Veränderung kann durch folgende Gleichung beschrieben werden

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_\delta} \cdot \delta^2$$

wobei nun

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha &= \text{Anstellwinkel} \\ \beta &= \text{Seitenwinkel} \end{aligned}$$

Für das Rollmoment gibt es folgende Gleichung

$$M_X = \frac{1}{2}\rho V^2 l S \left[ \delta_F C_{\delta_b} + \frac{pl}{V} C_{l_p} \right]$$

siehe Murphy (1963), S. 18, Formel (5.2).

Dabei ist  $l$  die Referenzlänge und wie oben  $S$  die Referenzfläche.

$p = \frac{d\phi}{dt}$  ist die Roll-Rate.

Als nächsten Schritt müssen wir noch zwei Koordinatensysteme einführen:

- ein körperfestes, mit dem Projektil verbundenes System  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ .

Hierbei weist  $X$  in die Richtung des Projektils, positiv vorwärts,  $Y$  senkrecht zur Symmetrieebene des Projektils, positiv nach rechts, wenn man vorwärts schaut.

$Z$  senkrecht sowohl zu  $X$  und  $Y$  und nach unten gerichtet.

- ein bodenfestes System,  $X_e$  senkrecht zum Gravitationsvektor,  $Y_e$  senkrecht zu  $X_e$  und zum Gravitationsvektor, positiv nach rechts, wenn man in die positive  $X_e$ -Richtung schaut.

$Z_e$  entlang des Gravitationsvektors, positiv nach unten.

Die relative Position der Achsen zueinander kann man durch Euler-Winkel  $\psi$ ,  $\theta$  und  $\phi$  bestimmen (genauer gesagt: Kardan-Winkel, die Euler-Folge ist (1,2,3), wobei das körperfeste System am

Flugzeugbau orientiert ist, man beachte die Orientierung der  $Z$ -Achse).

$\theta$  entspricht damit dem Nickwinkel,  $\psi$  dem Gierwinkel und  $\phi$  dem Rollwinkel.

Im körperfesten System habe der Geschwindigkeitsvektor  $V$  die Koordinaten  $u$ ,  $v$  und  $w$ , seine Orientierung sei durch den Anstellwinkel  $\alpha$  und den Seitenwinkel  $\beta$  festgelegt.

Die aerodynamischen Kräfte, welche auf das Projektil einwirken, werden normalerweise im körperfesten System durch Koordinaten  $F_X$ ,  $F_Y$  und  $F_Z$  ausgedrückt

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{1}{2}\rho SV^2 C_X \\ F_Y &= \frac{1}{2}\rho SV^2 C_Y \\ F_Z &= \frac{1}{2}\rho SV^2 C_Z \end{aligned}$$

Die aerodynamischen Momente haben die Komponenten  $M_X$ ,  $M_Y$  und  $M_Z$ :

$$\begin{aligned} M_X &= \frac{1}{2}\rho SV^2 l C_l \\ M_Y &= \frac{1}{2}\rho SV^2 l C_m \\ M_Z &= \frac{1}{2}\rho SV^2 l C_n \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit - wie wir auch schon früher dargelegt haben - hat die Komponenten  $p$ ,  $q$  und  $r$ .

Wir hatten bereits festgestellt, dass die Gleichungen für ein rotierendes Projektil lauten

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{F}^* + m\mathbf{g} \\ \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{M} \end{aligned}$$

wobei

- $\mathbf{V}$  der Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes
- $\mathbf{F}^*$  die aerodynamische Kraft
- $\mathbf{g}$  der Gravitationsvektor
- $\mathbf{H}$  der Drehimpuls
- $\mathbf{M}$  das aerodynamische Moment

sind.

Die Komponenten für den Drehimpuls sind dabei - wie wir früher festgestellt hatten - sind durch die Vektorgleichung

$$(U_1, U_2, U_3)' = (\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3) + \boldsymbol{\omega} \times (U_1, U_2, U_3)$$

zu berechnen, wobei  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  die Komponenten des Vektors  $\mathbf{U}$  sind und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit im bodenfesten System sind.

Im Fall eines körperfesten Systems nehmen die obigen Gleichungen die folgende Komponenten an:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (u, v, w) \\ \mathbf{F} &= (F_X, F_Y, F_Z) \\ \mathbf{g} &= (g \sin(\theta), g \cos(\theta) \sin(\phi), g \cos(\theta) \cos(\phi)) \\ \mathbf{H} &= (I_x p + I_{xy} q + I_{xz} r, I_y q + I_{xy} p + I_{yz} r, I_z r + I_{xz} p + I_{xz} q) \\ \mathbf{M} &= (M_X, M_Y, M_Z) \\ \omega &= (p, q, r)\end{aligned}$$

wobei

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix}$$

der symmetrische Massenträgheitstensor ist.

Wenn wir den Ursprung in den Schwerpunkt legen und ein Hauptachsensystem einführen, verschwinden die Nebendiagonalelemente.

Setzen wir darüber hinaus auch noch Rotationssymmetrie voraus (zum Beispiel  $I_y = I_z$ ), dann erhalten wir

$$\mathbf{H} = (I_x p, I_y q, I_z r)$$

Können die aerodynamischen Kräfte und Momente in Abhängigkeit von  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $q$  und  $r$  definiert und kann der Effekt der Gravitation vernachlässigt werden, dann erhalten wir durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}m\dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{F}^* + m\mathbf{g} \\ \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{M}\end{aligned}$$

ein vollständiges System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung in diesen sechs Variablen.

Kann die Gravitation nicht vernachlässigt werden, dann müssen die Gleichungen um folgende drei Gleichungen ergänzt werden

$$\begin{aligned}p &= \dot{\phi} - \psi \sin(\theta) \\ q &= \dot{\theta} \cos(\phi) + \psi \cos(\theta) \sin(\phi) \\ r &= -\dot{\theta} \sin(\phi) + \psi \cos(\theta) \cos(\phi)\end{aligned}$$

Damit haben wir neun Differentialgleichungen erster Ordnung in neun Variablen.

Schließlich müssen gegebenenfalls noch die Ortskoordinaten  $x_e$ ,  $y_e$  und  $z_e$  berechnet werden - dies ergibt weitere drei Differentialgleichungen.

Insgesamt hätten wir damit zwölf Differentialgleichungen zu lösen.

Glücklicherweise ist der Winkel  $\theta$  im Umfeld der Ballistik oft sehr klein - wir haben häufig  $\theta \ll 1$ .

Wir führen nun ein nicht-rotierendes Koordinatensystem ein - der Geschwindigkeitsvektor des Projektils geht dann über in  $(u, \tilde{v}, \tilde{w})$  und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit in  $(p, \tilde{q}, \tilde{r})$  mit

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= q \cos(\tilde{\phi}) - r \sin(\tilde{\phi}) \\ \tilde{r} &= q \sin(\tilde{\phi}) + r \cos(\tilde{\phi}) \\ \tilde{v} &= v \cos(\tilde{\phi}) - w \sin(\tilde{\phi}) \\ \tilde{w} &= v \sin(\tilde{\phi}) + w \cos(\tilde{\phi})\end{aligned}$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega} = (0, \tilde{q}, \tilde{r})$  ist und  $\tilde{\phi} = \int_0^t p d\tau$ .

Aufgrund des gewählten Ursprungs hat der Drehimpulsvektor die einfache Form

$$(I_x p, I_y q, I_z r)$$

Im nichtrotierenden System transformiert er sich entsprechend zu

$$\begin{aligned}H_{\tilde{y}} &= (I_y q) \cos(\tilde{\phi}) - (I_y r) \sin(\tilde{\phi}) = I_y \tilde{q} \\ H_{\tilde{z}} &= (I_y q) \sin(\tilde{\phi}) + (I_y r) \cos(\tilde{\phi}) = I_y \tilde{r}\end{aligned}$$

Damit erhält der Drehimpulsvektor im nichtrotierenden System die Form

$$H = (I_x p, I_y \tilde{q}, I_y \tilde{r})$$

und

$$\dot{H} = (I_x \dot{p}, I_y \dot{\tilde{q}} + I_x p \tilde{r}, I_y \dot{\tilde{r}} + I_x p \tilde{q})$$

Damit erhalten wir vier Gleichungen für  $v$ ,  $w$ ,  $q$  und  $r$  im nichtrotierenden System - diese lauten

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{v}} + u \tilde{r} &= \left( \frac{\rho S V^2}{2m} \right) C_{\tilde{Y}} + g_{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{w}} - u \tilde{q} &= \left( \frac{\rho S V^2}{2m} \right) C_{\tilde{Z}} + g_{\tilde{z}} \\ \dot{\tilde{q}} + \left( \frac{I_x}{I_y} \right) p \tilde{r} &= \left( \frac{\rho S V^2 l}{2I_y} \right) C_{\tilde{m}} \\ \dot{\tilde{r}} - \left( \frac{I_x}{I_y} \right) p \tilde{q} &= \left( \frac{\rho S V^2 l}{2I_y} \right) C_{\tilde{n}}\end{aligned}$$

Wir erhalten daraus zwei Differentialgleichungssysteme, die von den Lösungen anderer Differentialgleichungen abhängen:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u\tilde{r} \\ +u\tilde{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho SV^2}{2m} C_{\tilde{Y}} \\ \frac{\rho SV^2}{2m} C_{\tilde{Z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{\tilde{y}} \\ g_{\tilde{z}} \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{I_x}{I_y}\right)p \\ +\left(\frac{I_x}{I_y}\right)p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho SV^2 l}{2I_y} C_{\tilde{m}} \\ \frac{\rho SV^2 l}{2I_y} C_{\tilde{n}} \end{pmatrix}$$

oder mit  $\mu = \left(\frac{I_x}{I_y}\right)p$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho SV^2 l}{2I_y} C_{\tilde{m}} \\ \frac{\rho SV^2 l}{2I_y} C_{\tilde{n}} \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 = u^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2$$

wie leicht einzusehen ist.

Betrachten wir zuerst das letzte Differentialgleichungssystem.

Unterstellen wir  $p$  als konstant, dann liegt ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung vor.

Das charakteristische Polynom  $\chi(\lambda)$  der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

ist gleich

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \mu^2$$

damit sind die Eigenwerte gleich

$$\lambda_1 = i\mu \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\mu$$

Als Eigenvektoren ergeben sich damit zum Eigenwert  $\lambda_1 = i\mu$  der Eigenvektor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zum Eigenwert  $\lambda_2 = -i\mu$  der Eigenvektor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  ist dann gleich

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

deren Inverse

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \exp(i\mu t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\mu t) \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\mu t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\mu t) \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\mu t) & i\exp(i\mu t) \\ -\exp(-i\mu t) & i\exp(-i\mu t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i\exp(i\mu t) + i\exp(-i\mu t) & -\exp(i\mu t) + \exp(-i\mu t) \\ \exp(i\mu t) - \exp(-i\mu t) & i\exp(i\mu t) + i\exp(-i\mu t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix-Exponentialfunktion berechnet.

Dann ist

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix.

Eine Lösung des homogenen Systems ergibt sich dann zu

$$\mathbf{y}_h = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ .

Eine Partikularlösung des inhomogenen Systems ergibt dann nach Lösen des Systems

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & \sin(\mu t) \\ \sin(-\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\rho S V^2 l}{2I_y} C_{\tilde{m}} \\ \frac{\rho S V^2 l}{2i_y} C_{\tilde{n}} \end{pmatrix} dt$$

durch

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

und hieraus

$$\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Da die Eigenwerte beide halbeinfach, die Realteile gleich Null sind, ist die Lösung des betrachteten Differentialgleichungssystems nach dem Stabilitätssatz, S. 328, im Buch von Walter (2000) auch stabil.

Wir sollten vielleicht noch auf einen Punkt hinweisen.

Wir waren von der Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q \cos(\tilde{\phi}) - r \sin(\tilde{\phi}) \\ \tilde{r} &= q \sin(\tilde{\phi}) + r \cos(\tilde{\phi}) \end{aligned}$$

ausgegangen - diese kann man auch mit Hilfe einer Rotationsmatrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\phi}) & -\sin(\tilde{\phi}) \\ \sin(\tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}$$

Die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\phi}) & -\sin(\tilde{\phi}) \\ \sin(\tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

ergibt sich als Transponierte zu

$$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\phi}) & \sin(\tilde{\phi}) \\ -\sin(\tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\phi}) & \sin(\tilde{\phi}) \\ -\sin(\tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix}$$

Damit kann man aus dem Stabilitätsverhalten von  $\tilde{q}$  und  $\tilde{r}$  auf das Verhalten von  $q$  und  $r$  schließen, wenn man die zeitliche Abhängigkeit von  $\tilde{\phi}$  kennt.

Wir könnten nun die Lösungen  $\tilde{q}$  und  $\tilde{r}$  in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u\tilde{r} \\ +u\tilde{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho SV^2}{2m} C_{\tilde{Y}} \\ \frac{\rho SV^2}{2m} C_{\tilde{Z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{\tilde{y}} \\ g_{\tilde{z}} \end{pmatrix}$$

einsetzen - die Lösung wird allerdings sehr mühselig.

Wir betrachten nochmals die vier Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}} + u\tilde{r} &= \left( \frac{\rho SV^2}{2m} \right) C_{\tilde{Y}} + g_{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{w}} - u\tilde{q} &= \left( \frac{\rho SV^2}{2m} \right) C_{\tilde{Z}} + g_{\tilde{z}} \\ \dot{\tilde{q}} + \left( \frac{I_x}{I_y} \right) p\tilde{r} &= \left( \frac{\rho SV^2 l}{2I_y} \right) C_{\tilde{m}} \\ \dot{\tilde{r}} - \left( \frac{I_x}{I_y} \right) p\tilde{q} &= \left( \frac{\rho SV^2 l}{2I_y} \right) C_{\tilde{n}} \end{aligned}$$

Im Buch von Walter (2000), S. 171, ist eine Möglichkeit aufgezeigt, ein derartiges Differentialgleichungssystem mit vier reellen Differentialgleichungen in ein komplexes Differentialgleichungssystem mit zwei Differentialgleichungen zu überführen.

Hierzu definieren wir:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \frac{\tilde{v} + i\tilde{w}}{V} \\ \tilde{\mu} &= \frac{(\tilde{q} + i\tilde{r})l}{V} \\ \gamma &= \frac{u}{V} \\ P &= \frac{I_x}{I_y} \left( \frac{pl}{V} \right) \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun die zweite Gleichung in jedem Paar mit  $i = \sqrt{-1}$  und addieren diese zur ersten Gleichung.

Die unabhängige Variable wird in die Distanz  $s$  überführt und dimensionslose Variablen werden eingeführt.

Damit gehen die vier Differentialgleichungen über in die folgenden beiden komplexen Differentialgleichungen (siehe Murphy (1963), S. 48):

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}' - C_D^* \tilde{\xi} - i\gamma \tilde{\mu} &= C_Y^* + iC_Z + (g_{\bar{y}} + ig_{\bar{z}}) \frac{l}{V^2} \\ \tilde{\mu}' - C_D^* \tilde{\mu} - iP \tilde{\mu} &= (C_m^* + iC_n^*) k_t^{-2}\end{aligned}$$

In dieser Form nützen die Gleichungen noch nicht sehr viel - man stellt nun Entwicklungen für  $C_Y$  und  $C_Z$  auf:

$$C_Y = e_1(v/V) + e_2(w/V) + e_3(ql/V) + e_4(rl/V) + e_5(v/V)' + e_6(w/V)' + e_7(ql/V)' + e_8(rl/V)'$$

und entsprechend für  $C_Z$ .

In einem nächsten Schritt stellt man - siehe Murphy (1963) - diese beiden Größen (wie auch die Gegenstücke bei den Momenten) in Abhängigkeit von  $\xi$  und  $\mu$  dar, dies ergibt im Fall von rotationssymmetrischen Projektilen:

$$\begin{aligned}C_Y + iC_Z &= A_1 \xi + A_2 \mu + A_3 \xi' + A_4 \mu' \\ C_m + iC_n &= C_1 \xi + C_2 \mu + C_3 \xi' + C_4 \mu'\end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $A_i$  und  $C_i$  sind dabei komplexe Größen.

Die Eigenschaften dieser komplexen Koeffizienten können unter Berücksichtigung von Spiegelsymmetrien untersucht werden.

Wird die  $XY$ -Eben als Symmetrie-Ebene genommen und als Transformation  $\hat{Z} = -Z$  definiert, dann sollte ein Projektil mit Spiegelsymmetrie hierdurch unbeeinflusst bleiben.

Dies sollte auch im Fall von aerodynamischen Kräften und Momenten wie auch von Geschwindigkeiten der Fall sein.

Man kann dann - siehe Murphy (1963), S. 50 ff. - folgende Tabelle für derartige Transformationen aufstellen:

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V & \hat{p} &= -p \\ \hat{\xi} &= \bar{\xi} & \hat{\mu} &= -\bar{\mu} \\ \hat{\xi}' &= \bar{\xi}' & \hat{\mu}' &= -\bar{\mu}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_Y + i\hat{C}_Z &= C_Y + iC_Z &= \bar{A}_1 \hat{\xi} - \bar{A}_2 \hat{\mu} + \bar{A}_3 \hat{\xi}' - \bar{A}_4 \hat{\mu}' \\ \hat{C}_m + i\hat{C}_n &= C_m + iC_n &= -\bar{C}_1 \hat{\xi} + \bar{C}_2 \hat{\mu} - \bar{C}_3 \hat{\xi}' + \bar{C}_4 \hat{\mu}'\end{aligned}$$

Diese Spiegelsymmetrien bedeuten, dass man unmöglich unter diesen Transformationen eine Änderung in den aerodynamischen Kräften und Momenten feststellen kann.

Von daher folgert Murphy (1963), S. 51, in seiner Arbeit, dass - sollten die Koeffizienten Konstante sein - die Imaginärteile von  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $C_2$  und  $C_4$  gleich Null sein müssen ebenso wie die Realteile von  $A_2$ ,  $A_4$ ,  $C_1$  und  $C_3$ .

Da aber der Rollwinkel ungleich Null ist, sollte dieser die Kräfte und Momente beeinflussen - wir machen die Annahme, dass die Koeffizienten Funktionen von  $p$  sind.

Die Koeffizienten, die vormals verschwinden sollten, müssen damit aber das Vorzeichen mit  $p$  ändern - sie müssen damit ungerade Funktionen von  $p$  sein.

Die verbleibenden Real- und Imaginärteile ändern dagegen das Vorzeichen nicht - damit müssen sie gerade Funktionen von  $p$  sein.

Wir können damit ansetzen:

$$\begin{aligned} C_Y + iC_Z &= \left[ a_1 + i \left( \frac{pl}{V} \right) b_1 \right] \xi + \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) b_2 + ia_2 \right] \mu \\ &+ \left[ a_3 + i \left( \frac{pl}{V} \right) b_3 \right] \xi' + \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) b_4 + ia_4 \right] \mu' \\ C_m + iC_n &= \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) d_1 + ic_1 \right] \xi + \left[ c_2 + i \left( \frac{pl}{V} \right) d_2 \right] \mu \\ &+ \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) d_3 + ic_3 \right] \xi' + \left[ c_4 + i \left( \frac{pl}{V} \right) d_4 \right] \mu' \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind noch nicht in einer Form, so dass wir sie weiter verarbeiten können.

Sie müssen noch in das nichtrotierende Koordinatensystem transformiert werden - hierzu multiplizieren wir  $\xi$  und  $\mu$  geeignet mit  $\exp(i\vartheta)$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \exp(i\vartheta)\xi &= \tilde{\xi}' - i \left( \frac{pl}{V} \right) \tilde{\xi} \\ \exp(i\vartheta)\mu &= \tilde{\mu}' - i \left( \frac{pl}{V} \right) \tilde{\mu} \end{aligned}$$

Man kann nun die aerodynamischen Koeffizienten einfügen - siehe Murphy (1963), S. 52 und S. 53:

$$\begin{aligned}
C_Y + iC_Z &= - \left[ C_{N_\alpha} + i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{p\alpha}} \right] \xi - \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{pq}} + iC_{N_q} \right] \mu \\
&- \left[ C_{N_{\dot{\alpha}}} + i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{p\dot{\alpha}}} \right] \left[ \xi' + i \left( \frac{pl}{V} \right) \xi \right] \\
&- \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{p\dot{q}}} + iC_{N_{\dot{q}}} \right] \left[ \mu' + i \left( \frac{pl}{V} \right) \mu \right] \\
C_m + iC_n &= \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{p\alpha}} - iC_{M_\alpha} \right] \xi + \left[ C_{M_q} - i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{pq}} \right] \mu \\
&+ \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{p\dot{\alpha}}} - iC_{M_{\dot{\alpha}}} \right] \left[ \xi' + i \left( \frac{pl}{V} \right) \xi \right] \\
&+ \left[ C_{M_{\dot{q}}} - i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{pq}} \right] \left[ \mu' + i \left( \frac{pl}{V} \right) \mu \right]
\end{aligned}$$

Es verbleibt nur noch, die Transformation der Spiegelsymmetrie in bezug auf den Schwerpunkt zu berücksichtigen.

Diese Differenz in der Lokation des Schwerpunktes kann man durch die Formel

$$s_{cg} = \frac{\hat{x}_{cg} - x_{cg}}{l}$$

erfassen.

Unter der Annahme, dass die korrespondierenden Punkte die gleiche Bewegung besitzen, bleibt die Winkelgeschwindigkeit unverändert, aber die lineare Geschwindigkeit (dies ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes) ändert sich.

Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\hat{\xi} &= \xi - is_{cg}\mu & \hat{\mu} &= \mu \\
\hat{\xi}' &= \xi' - is_{cg}\hat{\mu}' & \hat{\mu}' &= \mu'
\end{aligned}$$

Ähnlich bleiben die Kräfte unbeeinflusst, nicht aber die Momente, welche bzgl. des Schwerpunktes definiert sind.

Unterstellen wir, dass die Änderungen in  $\xi$  klein genug sind, so dass die Geschwindigkeit  $V$  invariant ist, dann sind die Relationen für die Koeffizienten der Kräfte und Momente dieselben - damit sind die folgenden Gleichungen brauchbar im Fall für kleine Winkelgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_Y + i\hat{C}_Z &= C_Y + iC_Z \\
\hat{C}_m + i\hat{C}_n &= C_m + iC_n - is_{cg}(C_Y + iC_Z)
\end{aligned}$$

Wir müssen nun die zuletzt aufgestellten Gleichungen in die letzten beiden Gleichungen einfügen.

Dies ergibt folgende Tabelle von Koeffizienten, zuerst die Nicht-Magnus-Koeffizienten, dann die Magnus-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{N\alpha} &= C_{N\alpha} \\
\hat{C}_{N\dot{\alpha}} &= C_{N\dot{\alpha}} \\
\hat{C}_{N_q} &= C_{N_q} + s_{cg} C_{N\alpha} \\
\hat{C}_{N\dot{q}} &= C_{N\dot{q}} + s_{cg} C_{N\dot{\alpha}} \\
\hat{C}_{M\alpha} &= C_{M\alpha} - s_{cg} C_{N\alpha} \\
\hat{C}_{M\dot{\alpha}} &= C_{M\dot{\alpha}} - s_{cg} C_{N\dot{\alpha}} \\
\hat{C}_{M_q} &= C_{M_q} - s_{cg} (C_{N_q} - C_{M\alpha}) - s_{cg}^2 C_{N\alpha} \\
\hat{C}_{M\dot{q}} &= C_{M\dot{q}} - s_{cg} (C_{N\dot{q}} - C_{M\dot{\alpha}}) - s_{cg}^2 C_{N\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{N_{p\alpha}} &= C_{N_{p\alpha}} \\
\hat{C}_{N_{p\dot{\alpha}}} &= C_{N_{p\dot{\alpha}}} \\
\hat{C}_{N_{p_q}} &= C_{N_{p_q}} - s_{cg} C_{N_{p\alpha}} \\
\hat{C}_{N_{p\dot{q}}} &= C_{N_{p\dot{q}}} - s_{cg} C_{N_{p\dot{\alpha}}} \\
\hat{C}_{M_{p\alpha}} &= C_{M_{p\alpha}} - s_{cg} C_{N_{p\alpha}} \\
\hat{C}_{M_{p\dot{\alpha}}} &= C_{M_{p\dot{\alpha}}} - s_{cg} C_{N_{p\dot{\alpha}}} \\
\hat{C}_{M_{p_q}} &= C_{M_{p_q}} - s_{cg} (C_{N_{p_q}} + C_{M_{p\alpha}}) + s_{cg}^2 C_{N_{p\alpha}} \\
\hat{C}_{M_{p\dot{q}}} &= C_{M_{p\dot{q}}} - s_{cg} (C_{N_{p\dot{q}}} + C_{M_{p\dot{\alpha}}}) + s_{cg}^2 C_{N_{p\dot{\alpha}}}
\end{aligned}$$

Wir können damit folgende Gleichungen im nichtrotierenden Koordinatensystem aufstellen:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_Y + i\tilde{C}_Z &= - \left[ C_{N\alpha} + i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{p\alpha}} \right] \tilde{\xi} - iC_{N_q} \tilde{\mu} - C_{N\dot{\alpha}} \tilde{\xi}' \\
\tilde{C}_m + i\tilde{C}_n &= \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{p\alpha}} - iC_{M\alpha} \right] \tilde{\xi} + C_{M_q} \tilde{\mu} - iC_{M\dot{\alpha}} \tilde{\xi}'
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir nun in die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}' - C_D^* \tilde{\xi} - i\gamma \tilde{\mu} &= C_Y^* + iC_Z^* + (g_{\bar{y}} + ig_{\bar{z}}) \frac{l}{V^2} \\
\tilde{\mu}' - C_D^* \tilde{\mu} - iP \tilde{\mu} &= (C_m^* + iC_n^* k_t^{-2})
\end{aligned}$$

einsetzen und die  $C^*$ 's vernachlässigen im Vergleich mit 1 - wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}' - i\gamma \tilde{\mu} &= - \left[ C_{N\alpha}^* - C_D^* + i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{p\alpha}}^* \right] \tilde{\xi} + [g_{\bar{y}} + ig_{\bar{z}}] lV^{-2} \\
\tilde{\mu}' - iP \tilde{\mu} &= k_t^{-2} \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{p\alpha}}^* - iC_{M\alpha}^* \right] \tilde{\xi} + \left( k_t^{-2} C_{M_q}^* + C_D^* \right) \tilde{\mu} - ik_t^{-2} C_{M\dot{\alpha}}^* \tilde{\xi}'
\end{aligned}$$

Wir beachten nun den Zusammenhang zwischen Lift  $L$  und Luftwiderstand  $D$

$$\begin{aligned}
D &= -\cos(\alpha_r) F_X + \sin(\alpha_r) F_N \\
L &= \sin(\alpha_r) F_X + \cos(\alpha_r) F_N
\end{aligned}$$

wobei nun  $\cos(\alpha_r) = \gamma$  ist und

$$\sin(\alpha_r) = |\xi| = \beta$$

Wir können dann die Definitionen der korrespondierenden aerodynamischen Koeffizienten einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} C_D &= -\gamma C_X + \delta^2 C_{N_\alpha} \\ C_{L_\alpha} &= \gamma C_{N_\alpha} + C_X \end{aligned}$$

$C_X$  kann nun aus der Gleichung eliminiert werden - wir erhalten

$$\gamma C_{L_\alpha} = C_{N_\alpha} - C_D$$

Im Wesentlichen ist  $C_{N_\alpha} - C_D$  der bekannte Lift-Koeffizient.

Die Gleichung

$$C_D = -\gamma C_X + \delta^2 C_{N_\alpha}$$

drückt die bekannte Relation des induzierten Luftwiderstandes aus.

Für konstantes  $C_X$  und  $C_{N_\alpha}$  ergibt dies

$$C_{D_{\delta^2}} = C_{N_\alpha} + \frac{1}{2} C_X \approx C_{L_\alpha} + \frac{1}{2} C_{D_0}$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}' - i\gamma\tilde{\mu} &= - \left[ C_{N_\alpha}^* - C_D^* + i \left( \frac{pl}{V} \right) C_{N_{p\alpha}}^* \right] \tilde{\xi} + [g_{\tilde{y}} + ig_{\tilde{z}}] lV^{-2} \\ \tilde{\mu}' - iP\tilde{\mu} &= k_t^{-2} \left[ \left( \frac{pl}{V} \right) C_{M_{p\alpha}}^* - iC_{M_\alpha}^* \right] \tilde{\xi} + \left( k_t^{-2} C_{M_q}^* + C_D^* \right) \tilde{\mu} - ik_t^{-2} C_{M_\alpha}^* \tilde{\xi}' \end{aligned}$$

können nun kombiniert werden, so dass  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\mu}'$  eliminiert werden - dies ergibt

$$\tilde{\xi}'' + \left( H - \frac{\gamma'}{\gamma} - iP \right) \tilde{\xi}' - (M + iP_T) \tilde{\xi} = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
H &= \gamma C_{L\alpha}^* - C_D^* - k_t^{-2}(C_{Mq}^* + \gamma C_{M\alpha}) \\
M &= \gamma k_t^{-2} C_{M\alpha}^* - \gamma (C_{L\alpha}^*)' \\
T &= \gamma [C_{L\alpha}^* + k_t^{-2} C_{M_{p\alpha}}^*] - \left(\frac{I_y}{I_x}\right) (C_{N_{p\alpha}}^*)' \\
G &= \left[\frac{(g_{\bar{y}} + i g_{\bar{z}})l}{V^2}\right]' - [k_t^{-2} C_{Mq}^* + C_D^* + iP] \left[\frac{(g_{\bar{y}} + i g_{\bar{z}})l}{V^2}\right]
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist insoweit exakt - es gibt keine linearen Approximationen bis auf diejenigen, die implizit in den Definitionen der Kräfte und Momente enthalten sind.

Wir werden jedoch die obigen Gleichungen linearisieren durch die Näherungen

$$\gamma = 1, \quad \gamma' = C_{L\alpha}' = C_{N_{p\alpha}}' = 0$$

$$g_{\bar{y}} + i g_{\bar{z}} = ig \quad \text{flache Trajektorie}$$

$$G = [P - i(k_t^{-2} C_{Mq}^* - C_D^*)] \frac{gl}{V^2}$$

Im Fall von hohen Spin-Raten wird  $P$  nicht größer als 0,05.

Weiterhin kann man  $G$  annähern durch  $\frac{Pgl}{V^2}$  - siehe Murphy (1963), S. 58.

Damit wird die Differentialgleichung zu

$$\tilde{\xi}'' + (H - iP)\tilde{\xi}' - (M + iPT)\tilde{\xi} = G$$

mit

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{\rho S l}{2m}\right) [C_{L\alpha} - C_D - k_t^{-2}(C_{Mq} + C_{M\alpha})] \\
M &= \frac{\rho S l^3}{2I_y} C_{M\alpha} \\
T &= \left(\frac{\rho S l}{2m}\right) [C_{L\alpha} + k_a^{-2} C_{M_{p\alpha}}] \\
G &= \frac{Pgl}{V^2} \approx \frac{Pgl}{V_0^2}
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung schreiben wir als äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (M+iPT) & -(H-iPT) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

Dieses Differentialgleichungssystem hat die Form  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (M+iPT) & -(H-iPT) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

Kennen wir die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ , dann können wir sofort Stabilitätsaussagen über die Differentialgleichung machen.

Wir betrachten zuerst Spezialfälle.

Im Fall eines **nicht-rotierenden** Projektils ist - siehe Murphy (1963), S. 59 - die Größe  $P$  gleich Null.

Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist dann gleich

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M & -H \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-H-\lambda) - M = \lambda^2 + \lambda H - M$$

Die Nullstellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ergeben sich dann zu

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ -H - \sqrt{4M + H^2} \right]$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ -H + \sqrt{4M + H^2} \right]$$

Beide Nullstellen sind reell, die zweite Nullstelle ist größer als Null.

Nach dem Stabilitätssatz, S. 328, aus dem Buch von Walter (2000) ist damit die Lösung instabil.

Dies erklärt damit auch die Bedeutung des Überschlagsmomentes.

Können wir dagegen (egal, ob **rotierendes** oder auch **nicht-rotierendes** Projektil) bis auf die Größen  $P$  und  $M$  andere aerodynamische Effekte vernachlässigen, dann entscheiden über die Stabilität die beiden Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ iP \pm \sqrt{4M - P^2} \right]$$

Ist damit die Spin-Rate groß genug, dann ist der Ausdruck unter der Wurzel kleiner als Null:

$$4M - P^2 < 0$$

und deshalb ist der gesamte Ausdruck rein imaginär.

Die Realteile sind hierbei gleich Null, die Nullstellen und damit die Eigenwerte halbeinfach.

Wieder nach Stabilitätsatz, S. 328, aus dem Buch von Walter (2000) ergibt sich aufgrund der Halbeinfachheit der Wurzeln, dass die Lösung stabil ist, allerdings nicht asymptotisch stabil.

Stellt man die Ungleichung etwas um, so erhält man

$$\begin{aligned} S_g = \frac{P^2}{4M} &= \frac{\left[ \frac{I_x}{I_y} \left( \frac{pl}{V} \right) \right]^2}{\frac{4\rho SI^3}{2I_y} C_{M\alpha}} = \frac{I_x^2}{I_y} \frac{p^2}{2\rho SI V^2 C_{M\alpha}} = \frac{I_x^2}{I_y} \frac{p^2}{2\rho \frac{\pi d^2}{4} IV^2 C_{M\alpha}} = \frac{I_x^2}{I_y} \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}}{2\rho \frac{\pi d^2}{4} IV^2 C_{M\alpha}} \\ &= \frac{I_x^2}{I_y} \frac{8\pi}{\rho t^2 d^5 C_{M\alpha}} \end{aligned}$$

den sogenannten Stabilitätsfaktor.

Wir sind damit im Prinzip wieder auf die Bedingung des schnellen Kreisels gestoßen.

Die Nullstellen  $\lambda_{1/2}$  können wir damit auch wie folgt schreiben:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ iP \pm \sqrt{4M - P^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ iP \pm \sqrt{4M} \sqrt{1 - S_g} \right]$$

Ist somit  $S_g > 1$ , haben wir eine stabile Lösung der Differentialgleichung.

Wir sollten vielleicht noch anmerken, dass in dieser Situation die vereinfachte Differentialgleichung lautet

$$\tilde{\xi}'' - iP\tilde{\xi}' - M\tilde{\xi} = G$$

Die Lösung ergibt sich als Summe der Lösung der homogenen Differentialgleichung und der Partikularlösung zu

$$\xi_{gyro} = A \exp(\lambda_1 s) + B \exp(\lambda_2 s) - \frac{G}{M}$$

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (M + iP) & -(H - iP) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

Dazu berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  von der Matrix  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)(-(H - iP) - \lambda) - (M + iPT) \\ &= \lambda^2 + \lambda(H - iP) - (M + iPT) \end{aligned}$$

Die Nullstellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2}(H - iP) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(H - iP)^2 + (M + iPT)} \\ &= -\frac{1}{2}(H - iP) \pm \sqrt{\frac{1}{4}[(H^2 - i2HP - P^2) + 4M + i4PT]} \\ &= -\frac{1}{2}(H - iP) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(H^2 - P^2 + 4M) + 2iP(2T - H)} \\ &= \frac{1}{2}\left[-H + iP \pm \sqrt{(H^2 - P^2 + 4M) + 2iP(2T - H)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-H + iP \pm \sqrt{(H^2 - (P^2 - 4M)) + 2iP(2T - H)}\right] \end{aligned}$$

also

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left[-H + iP \pm \sqrt{(H^2 - (P^2 - 4M)) + 2iP(2T - H)}\right]$$

Wir untersuchen den Wurzelausdruck und machen folgenden Ansatz mit reellen Konstanten  $a$  und  $b$ :

$$a + ib = \sqrt{(H^2 - (P^2 - 4M)) + 2iP(2T - H)}$$

Hieraus folgt:

$$a^2 - b^2 + 2abi = (H^2 - (P^2 - 4M)) + 2iP(2T - H)$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt:

$$a^2 - b^2 = H^2 - (P^2 - 4M)$$

und

$$2ab = 2P(2T - H)$$

Aus der letzten Gleichung folgern wir

$$b = \frac{1}{a}(P(2T - H))$$

Dies setzen wir in die Gleichung

$$a^2 - b^2 = H^2 - (P^2 - 4M)$$

ein und erhalten:

$$a^2 - \frac{1}{a^2}P^2(2T - H)^2 = H^2 - (P^2 - 4M)$$

Multipliziert mit  $a^2$  ergibt sich

$$a^4 - P^2(2T - H)^2 = a^2(H^2 - (P^2 - 4M))$$

und geordnet nach Potenzen in  $a$ :

$$a^4 - a^2(H^2 - (P^2 - 4M)) = P^2(2T - H)^2$$

Wir substituieren nun  $z = a^2$  und erhalten

$$z^2 - z(H^2 - (P^2 - 4M)) = P^2(2T - H)^2$$

eine quadratische Gleichung in  $z$ .

Die Wurzeln ergeben sich mittels quadratischer Ergänzung zu

$$z_{1/2} = \frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M)) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2}$$

Da  $z = a^2$ , kann nur

$$z_1 = \frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M)) + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2}$$

in Betracht kommen -  $a$  und  $b$  müssen reell sein.

Für  $z_2$  ergäbe sich:

$$z_2 = \frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M)) - \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2} < 0$$

falls  $P^2(2T - H)^2 \neq 0$ .

Damit ergeben sich zwei mögliche Wurzeln für den Realteil:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M))} + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2}$$

und

$$a_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M))} + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2}$$

Nun ist die asymptotische Stabilität gewünscht - wählen wir  $a_1$  als Wurzel, dann ist der Realteil von  $\lambda_1$  gleich

$$-\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}a_1$$

und der Realteil von  $\lambda_2$  ist gleich

$$-\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}a_1$$

Im Fall von  $a_2$  ist es genau umgekehrt - damit ist der Ausdruck

$$-\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M))} + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2}$$

entscheidend. Es muss somit gelten

$$-\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M))} + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2} < 0$$

oder

$$\sqrt{\frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M))} + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2} < H$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$\frac{1}{2}(H^2 - (P^2 - 4M)) + \sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2} < H^2$$

also

$$\sqrt{\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2} < \frac{1}{2}(H^2 + (P^2 - 4M))$$

Nochmaliges Quadrieren ergibt

$$\frac{1}{4}(H^2 - (P^2 - 4M))^2 + P^2(2T - H)^2 < \frac{1}{4}(H^2 + (P^2 - 4M))^2$$

Wir multiplizieren mit 4 und rechnen die Quadrate auf beiden Seiten aus:

$$H^4 - 2H^2(P^2 - 4M) + (P^2 - 4M)^2 + 4P^2(2T - H)^2 < H^4 + 2H^2(P^2 - 4M) + (P^2 - 4M)^2$$

Es folgt:

$$4P^2(2T - H)^2 < 4H^2(P^2 - 4M)$$

oder

$$P^2H^2\left(\frac{2T}{H} - 1\right)^2 < H^2(P^2 - 4M)$$

Mit

$$S_d = \frac{2T}{H}$$

folgt hieraus

$$\left(\frac{P^2(S_d - 1)^2}{P^2 - 4M}\right) < 1$$

Damit sehen wir, dass - falls die asymptotische Stabilität gewünscht ist - wir

1.  $H > 0$  und
2. die gyroscopische Stabilität  $P^2 - 4M > 0$  oder  $S_g > 1$

benötigen.

Diese beiden Bedingungen können wir als **dynamische Stabilität** zusammenfassen.

Nach dem Stabilitätssatz, S. 328, aus dem Buch von Walter (2000) spielt dann der Imaginärteil keine Rolle.

Aufgrund der gestellten Bedingungen wäre der Realteil negativ und somit die asymptotische Stabilität nach dem Stabilitätssatz, S. 328, aus dem Buch von Walter (2000) erfüllt.

Die Bedingung

$$\left( \frac{P^2(S_d - 1)^2}{P^2 - 4M} \right) < 1$$

ist übrigens genau die Bedingung, welche im Buch von McCoy (2012) auf S. 233 angegeben wurde.

Man kann diese Bedingung noch etwas umstellen

$$\frac{4M}{P^2} < S_d(2 - S_d)$$

oder

$$\frac{1}{S_g} < S_d(2 - S_d)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich nach bekanntem Muster zu

$$\tilde{\xi}_h = A \exp(\lambda_1 s) + B \exp(\lambda_2 s)$$

mit komplexen Konstanten  $A$  und  $B$ .

Eine Partikularlösung ergibt sich durch den Ansatz

$$\tilde{\xi}_p = A_0$$

mit  $A_0$  konstant, damit sind die Ableitungen alle gleich Null.

Es folgt durch Einsetzen:

$$-(M + iPT)\tilde{\xi}_p = G \quad \text{oder} \quad A_0 = -\frac{Pgl}{V_0^2} \frac{1}{M + iPT}$$

wenn  $G$  ersetzt wird.

Damit ist die Partikularlösung gleich

$$\tilde{\xi}_p = -\frac{Pgl}{V_0^2} \frac{1}{M + iPT}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich dann als Summe der homogenen Lösung und der Partikularlösung zu

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_h + \tilde{\xi}_p = A \exp(\lambda_1 s) + B \exp(\lambda_2 s) - \frac{Pgl}{V_0^2} \frac{1}{M + iPT}$$

Somit ergibt sich folgendes Bild:

- Setzt man die gyroskopische Stabilität alleine voraus, d. h.

$$S_g = \frac{P^2}{4M} > 1$$

dann folgt hieraus nicht die dynamische Stabilität.

- Setzt man die dynamische Stabilität voraus, d. h.

1.)  $H > 0$

2.)

$$S_g = \frac{P^2}{4M} > 1$$

so dass

$$\left( \frac{P^2(S_d - 1)^2}{P^2 - 4M} \right) < 1$$

dann ist damit die gyroskopische Stabilität automatisch erfüllt.

## 2.6 Ausblick

Liest man den Klassiker unter den Bücher über äußere Ballistik, das Buch von Cranz (1910), dann wird hier zwar ein Projektil als Kreisel angesehen, aber als Werkzeug für Analysen die Euler-Gleichungen herangezogen.

Damit können aber allenfalls Aussagen über die Winkelgeschwindigkeiten erzielt werden, in einem zweiten Schritt müssten dann durch Lösen eines weiteren Differentialgleichungssystems die Gleichungen für die Euler-Winkel aufgestellt werden.

An dieser Vorgehensweise scheint sich auch viele Jahrzehnte nichts geändert zu haben, siehe zum Beispiel das Buch von Molitz und Strobel (1963).

Ebenso verwenden noch modernere Bücher wie das Buch von Siouris (2004) zur Analyse von Rotationseffekten die Euler-Gleichungen.

Damit hat die Vorgehensweise der theoretischen Physiker Vorteile - hier verwendet man typischerweise den Lagrange-Formalismus und erhält direkt Aussagen über die Euler-Winkel.

Ebenso ermöglicht der Lagrange-Formalismus die Einbettung von aerodynamischen Momenten - dies ist schon im Klassiker, dem Buch von Sommerfeld (1967), beschrieben.

Damit liegt es nahe, die gleichen Ergebnisse zu erhalten, wie sie in der Arbeit von Murphy (1963) beschrieben wurden.

Weiterhin führt der Lagrange-Formalismus mehr oder weniger direkt zum gyroskopischen Stabilitätsfaktor und damit im Fall von Büchsen geschossen zu entsprechenden Betrachtungen bzgl. des zu vorgegebener Dralllänge optimalen Geschossgewichtes.

Wie wir gesehen haben, ist dies der Formalismus, wie er von Don Miller entwickelt wurde.

Nun offeriert die Theorie des Kreisels weiterhin auch Anfangsbedingungen für die langsame und schnelle Präzession - hierüber wird in Büchern wie McCoy (2012) zwar gesprochen, es wird aber nicht weiter ausgeführt.

Ebenso erhält man aus der Theorie des Kreisels Aussagen über die Amplitude der Präzession wie auch über die Amplitude der Nutation - auch hierüber gibt es in den klassischen Büchern der äußeren Ballistik nicht allzu viel.

Interessant sind hier vor allen Dingen Aussagen, dass die Präzession mit wachsender Umlaufzahl immer kleiner wird - dies gilt ebenso für die Nutation.

Die Aussage kann man auch umkehren - da aufgrund des Luftwiderstands die Umlaufzahl des Projektils kleiner wird, werden die Präzession wie auch die Nutation größer, damit wird in letzter Konsequenz die Streuung mit wachsender Flugweite zwangsläufig größer.

Zuletzt: Es gibt noch eine Anmerkung im Buch von Goldstein u. a. (2017), dass ein Projektil sich flugstabil verhält, falls sich das Druckzentrum hinter dem Schwerpunkt in Richtung Boden befindet - siehe hierzu Goldstein u. a. (2017), S. 219 ff.

Damit ist an sich - trotz aller Komplexität einer derartigen Theorie - die Theorie des Kreisels wohl recht lukrativ für das Gebiet der Ballistik.

Davon abgesehen - die gyroskopische Stabilität scheint zentral zu sein.

Nicht nur, dass man die optimale Geschosslänge berechnen kann. Ohne die gyroskopische Stabilität kein stabiles Flugverhalten, keine dynamische Stabilität.

Und auch im Bereich der Fehlerabschätzung von exaktem und angenähertem Modell - wie will man derartige Abschätzungen vornehmen, wenn die Stabilität der Modelle nicht gewährleistet ist.?



# Literaturverzeichnis

- [Baruh 1999] BARUH, H.: *Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, 1999
- [Brandt und Dahmen 2005] BRANDT, S. ; DAHMEN, H. D.: *Mechanik*. Springer, 2005
- [Brizard 2014] BRIZARD, A. J.: *An Introduction to Lagrangian Mechanics*. World Scientific Publishing, 2014
- [Burchett 2013] BURCHETT, B. T.: Aerodynamic parameter identification for symmetric projectiles: An improved gradient based method. In: *Aerospace Science and Technology* 30 (2013), S. 119–127
- [Carlucci und Jacobson 2008] CARLUCCI, D. E. ; JACOBSON, S. S.: *Ballistics Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press, 2008
- [Cline 2018] CLINE, D.: *Variational Principles in Classical Mechanics*. University of Rochester River Campus Libraries, 2018
- [Cranz 1910] CRANZ, K. J.: *Lehrbuch der Ballistik Volume 1*. Teubner, 1910
- [Fichtenholz 2009] FICHTENHOLZ, G. M.: *Differential- und Integralrechnung 2*. Harri Deutsch Verlag, 2009
- [Fließbach 2015] FLIESSBACH, T.: *Mechanik*. Springer, 2015
- [Goldstein 1951] GOLDSTEIN, H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1951
- [Goldstein u. a. 2017] GOLDSTEIN, H. ; POOLE, C. ; SAFKO, J.: *Classical Mechanics*. Pearson, 2017
- [Hamill 2014] HAMILL, P.: *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians*. Cambridge University Press, 2014
- [Honerkamp und Römer 2012] HONERKAMP, J. ; RÖMER, H.: *Klassische Theoretische Physik*. Springer-Verlag, 2012
- [Hübner 1999] HÜBNER, S. F.: *Scharfschützen Schießtechnik Teil 1 und 2*. WSV-Verlag Kienesberger, 1999
- [Johns 2011] JOHNS, O. D.: *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 2011
- [Kamke 1969] KAMKE, E.: *Differentialgleichungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1969
- [Kim 2013] KIM, P.: *Rigid Body Dynamics for Beginners*. 2013. – ISBN 1493598201

- [Königsberger 2002] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. Springer, 2002
- [Kutterer 1959] KUTTERER, R. E.: *Ballistik*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1959
- [Kuypers 2010] KUYPERS, F.: *Klassische Mechanik*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co., 2010
- [Litz 2011] LITZ, B.: *Applied Ballistics for Long-Range Shooting*. Applied Ballistics, LLC, 2011
- [Litz 2014] LITZ, B.: *Modern Advancements In Long Range Shooting*. Applied Ballistics, LLC, 2014
- [Magnus 1971] MAGNUS, k.: *Kreisel Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, 1971
- [McCoy 2012] MCCOY, R. L.: *Modern Exterior Ballistics*. Schiffer Military History, 2012
- [Miller 2005] MILLER, D.: A New Rule for Estimating Rifling Twist. In: *Precision Shooting* (2005), S. 43–48
- [Molitz und Strobel 1963] MOLITZ, H. ; STROBEL, R.: *Äußere Ballistik*. Springer, 1963
- [Morin 2017] MORIN, D.: *Introduction to Classical Mechanics*. Cambridge University Press, 2017
- [Murphy 1963] MURPHY, C.: Free Flight Motion of Symmetric Missiles / Ballistics Research Laboratories. 1963 (1216). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland
- [Provatidis 2012] PROVATIDIS, C. G.: Revisiting the Spinning Top. In: *International Journal of Material and Mechanical Engineering* 1 (2012), S. 71–88
- [Scarborough 1958] SCARBOROUGH, J. B.: *The Gyroscope: Theory and Applications*. Interscience Publisher, 1958
- [Siouris 2004] SIOURIS, G. M.: *Missile Guidance and Control Systems*. Springer, 2004
- [Sommerfeld 1967] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band I*. Verlag Harri Deutsch, 1967
- [Walter 2000] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2000
- [Wittenburg 2008] WITTENBURG, Jens: *Dynamics of Multibody Systems*. Springer, 2008