

# **Regelung von LPV-Systemen mit partiell messbaren Parametern und dessen Anwendung in der Flugregelung**

Felix Goßmann M.Sc.

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der  
Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

genehmigten Dissertation.

Gutachter:

1. Prof. (i.R.) Dr.-Ing. habil. Ferdinand Svaricek
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Die Dissertation wurde am 05.06.2023 bei der Universität der Bundeswehr München  
eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 21.12.2023  
angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 02.02.2024 statt.



Wir achten die Toten mehr als die Lebenden.  
Man sollte aber beide ehren.  
– *Voltaire (1694 - 1778)*



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Steuer- und Regelungstechnik der Universität der Bundeswehr München in Neubiberg.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. (i.R.) Dr.-Ing. habil. Ferdinand Svaricek für die Unterstützung, Anregungen und fundierte Beratung zur Erstellung dieser Arbeit. Auch für die angenehme Zusammenarbeit während meiner Zeit am Institut möchte ich mich bedanken. Besonderer Dank gilt auch Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel, nicht nur für die Übernahme des Zweitgutachtens, sondern ebenso für die Bereitstellung der Ressourcen des Instituts für Flugsystemdynamik der TU München, welche einen wesentlichen Beitrag zur Anfertigung dieser Arbeit geleistet haben. Ich bedanke mich auch bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. Axel Schulte für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Mein Dank gilt ebenfalls Dr.-Ing. Klaus-Dieter Otto und Dr. rer. nat. Andreas Britzelmeier für die zahlreichen hilfreichen Anmerkungen, Korrekturen und fruchtbaren Diskussionen während der Fertigstellung dieser Arbeit. Auch bei Dr.-Ing. Agnes Steinert möchte ich für die Unterstützung bei Simulationen und Auswertungen bedanken. Vielen Dank ebenfalls an Hon.-Prof. Dr.-Ing. Johann Bals und das DLR für die Bereitstellung des Optimierungsprogramms MOPS. Auch allen anderen Mitarbeitern des Institut für Steuer- und Regelungstechnik gilt mein Dank für die immerwährende Hilfsbereitschaft und Unterstützung.

Nicht zuletzt gilt auch ein besonderer Dank an meine Familie und meine Freundin, die mich auf dem gesamten Weg zur Promotion begleitet und unterstützt haben und ohne die ich nicht an dem Punkt angekommen wäre, an dem ich heute stehe. Beginnend mit meiner Mutter Marianne und meiner Schwester Isabel für die bedingungslose Unterstützung und Ermutigung nicht nur im Studium, sondern insbesondere während meiner Promotion. Meiner Freundin Cäcilie danke ich ebenfalls ganz besonders für die Geduld, Rücksichtnahme, Unterstützung und die regelmäßige Motivation, die mir bei der Anfertigung und Fertigstellung dieser Arbeit sehr geholfen haben. Und nicht zuletzt gilt mein ganz besonderer Dank meinem Vater Berthold, welcher die Vollendung meiner Promotion leider nicht mehr miterleben konnte. Sein unerschütterlicher Glaube in mich und meine Fähigkeiten haben mich bereits durch das Studium getragen und hatten einen großen Anteil an meinem Entschluss, dieses Promotionsvorhaben zu beginnen.



# Zusammenfassung

Verfahren zum Entwurf von Reglern für lineare parametervariante (LPV) Systeme bieten ein großes Potential für die Anwendung im Bereich der Flugregelung. Der Entwurf von Regelungen in diesem Bereich erfolgt im Allgemeinen mit Hilfe von in lokalen Betriebspunkten linearisierten Systemen. Die Verwendung von LPV-Systemen bietet hierfür die Möglichkeit, das aus einer größeren Menge an lokal linearisierten Systemen bestehende Regelungsproblem als ein einziges, parameterabhängiges System zu betrachten. Damit ermöglichen sie einen direkten und systematischen Entwurf einer Regelung für den gesamten zu betrachtenden Betriebsbereich des nichtlinearen Systems.

Ein großer Nachteil dieser LPV-Methoden ist allerdings, dass dessen Anwendung die Messbarkeit aller Parameter erfordert, von denen die lokalen Betriebspunkte abhängen. Aufgrund der Abhängigkeit des entstehenden Reglers von eben genau diesen Parametern, ist diese für die Anwendung zwingend erforderlich. Im Kontext der Flugregelung zählen neben der aktuellen Flughöhe und Geschwindigkeit in erster Linie aerodynamische Größen wie der Anstellwinkel oder aber die aktuelle Masse und Schwerpunktlage des Systems zu diesen Parametern. Doch während die Flughöhe und Geschwindigkeit zuverlässig im Betrieb messtechnisch erfasst werden können, sind die anderen genannten Parameter nur sehr schwer bis gar nicht in ausreichender Genauigkeit bestimmbar. Sie können daher in einem konventionellen LPV-Entwurf nicht berücksichtigt werden. Aufgrund des nicht zu vernachlässigenden Einflusses dieser Parameter auf die dynamischen Eigenschaften wird in dieser Dissertation ein Regelungsverfahren entwickelt, welches die Betrachtung von nicht messbaren Parametern innerhalb eines LPV-Systems ermöglicht. Zu diesem Zweck wird das konventionelle Verfahren zum Entwurf von LPV-Reglern mit einem Entwurfsverfahren aus der robusten Regelung kombiniert. Die dabei entstehenden Methodiken ermöglichen den Entwurf eines Reglers, welcher sich zum einen an Veränderungen in den messbaren Parametern anpassen kann und zum anderen robust gegenüber Änderungen in den nicht messbaren Parametern ist.

Die entwickelten Verfahren werden anschließend zunächst mit Hilfe eines illustrativen Beispiels evaluiert. Dabei wird zum einen die Anwendung des Verfahrens auf ein nichtlineares Problem demonstriert. Zum anderen werden die Vor- und Nachteile gegenüber einem konventionellen LPV-Entwurf herausgearbeitet. Abschließend wird das entwickelte Entwurfsverfahren auf zwei realitätsnahe Probleme aus der Flugzeug-Basisregelung angewandt und somit dessen Potential in der praktischen Anwendung herausgestellt.



# Abstract

Methods for designing controllers for linear parameter-varying (LPV) systems are offering great potential for application in the field of flight control. The design of controllers in this area is generally carried out by using linear systems, which are obtained through linearization in local operating points. Then, a linear controller is designed for each operating point respectively. This results in a large number of linear controllers, all of which are only valid in the vicinity of the respective operating point. During application, the control system switches between these controllers or blends them into each other. This procedure is very well known under the term gain scheduling and is commonly used as a standard procedure in the control of nonlinear systems. In this context, the methods of LPV systems offer the possibility of a systematic design for the entire operating range of the considered nonlinear system.

However, a major drawback of these LPV methods is that their application requires the measurability of all parameters the local operating points are dependent on since the obtained controller is also dependent on them. In the context of flight control, these parameters include not only the current altitude and velocity but also aerodynamic variables such as the angle of attack as well as the current mass and center of gravity of the system. However, while the altitude and velocity can be reliably measured during operation, the other parameters mentioned are very difficult or even impossible to determine with sufficient accuracy, and therefore cannot be taken into account in an LPV control design. Due to the non-negligible influence of these parameters on the characteristics of the system dynamic, in this thesis a control method that allows the consideration of non-measurable parameters within an LPV system is developed. For this purpose, the conventional procedure for the design of LPV controllers is combined with a robust control design method. The resulting design methodologies enable a controller design that adapts to changes in the measurable parameters on the one hand and is robust to changes in the non-measurable parameters on the other hand.

The developed methods are then evaluated with the use of an illustrative example. On the one hand, the application of the method to a nonlinear problem is demonstrated with this example. On the other hand, the advantages and disadvantages compared to a conventional LPV design are worked out. Finally, the developed design method is applied to two realistic problems from aircraft baseline control, thus highlighting its potential in practical applications.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Regelung linearisierter Systeme . . . . .	1
1.2	Lineare Parametervariante Systeme . . . . .	3
1.3	LPV-Modelle in der Flugregelung . . . . .	4
1.4	Stand der Technik . . . . .	5
1.5	Motivation und Beiträge dieser Arbeit . . . . .	6
1.5.1	Zusammenstellung der wesentliche Beiträge . . . . .	6
1.5.2	Gliederung der Arbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1	Lineare Matrix Ungleichungen . . . . .	11
2.2	Lineare Parametervariante Systeme . . . . .	12
2.2.1	Stabilität von LPV-Systemen . . . . .	14
2.2.2	Generierung von LPV-Modellen . . . . .	16
2.3	Grundlagen der Flugmechanik . . . . .	17
2.3.1	Aufteilung der Dynamik . . . . .	18
2.3.2	Linearisierte Bewegungsgleichungen . . . . .	20
2.3.3	Beschreibung der äußeren Einflüsse . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Reglerentwurf für LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern</b>	<b>27</b>
3.1	Induzierte $L_2$ -Norm . . . . .	28
3.2	Partiell messbare Parameter . . . . .	29
3.3	Reglerentwurf . . . . .	32
3.3.1	Zustandsrückführung . . . . .	33
3.3.2	Ausgangsrückführung . . . . .	35
3.3.3	Vorsteuerung . . . . .	38
3.4	Synthese der Reglermatrizen . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Betrachtung eines illustrativen Beispiels</b>	<b>47</b>
4.1	Beschreibung des Regelungsproblems . . . . .	47
4.2	Entwurf einer LPV-Regelung mit unbeschränkten Änderungsraten . . . . .	51
4.2.1	Beschreibung des Reglerentwurfs . . . . .	51
4.2.2	Bestimmung der Gewichtungsgroßen . . . . .	53
4.2.3	Analyse der Ergebnisse . . . . .	54
4.3	Entwurf einer LPV-Regelung mit beschränkten Änderungsraten . . . . .	60
4.3.1	Beschreibung des Reglerentwurfs . . . . .	60
4.3.2	Analyse der Ergebnisse . . . . .	61
4.4	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	67

<b>5</b>	<b>Anwendung auf eine parameterabhängige Flugzeug-Basisregelung</b>	<b>71</b>
5.1	Betrachtung der Regelstrecke der Nickdynamik . . . . .	71
5.1.1	LPV-Modellierung . . . . .	73
5.1.2	Analyse der Regelstrecke . . . . .	75
5.2	Reglerentwurf für die Flugzeug-Nickdynamik . . . . .	77
5.2.1	Definition der Regelungsziele . . . . .	77
5.2.2	Reglerentwurf . . . . .	79
5.2.3	Optimierung der Gewichtungsgroßen . . . . .	82
5.2.4	Analyse der resultierenden Reglerverstärkungen . . . . .	86
5.2.5	Lineare Analyse des Regelkreises . . . . .	88
5.3	Anwendung auf die Flugzeug-Seitenbewegung . . . . .	93
5.3.1	Beschreibung und Analyse der Regelstrecke . . . . .	93
5.3.2	Definition der Regelungsziele und Entwurf des Reglers . . . . .	96
5.3.3	Lineare Analyse des Regelkreises . . . . .	102
5.4	Nichtlineare Analyse der entworfenen Regler . . . . .	105
5.4.1	Regelung der Nickdynamik . . . . .	106
5.4.2	Regelung der Seitenbewegung . . . . .	109
5.5	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	117
6.2	Ausblick . . . . .	120
	<b>Anhang</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Aufstellen und Umformen der LMIs</b>	<b>123</b>
A.1	Zustandsrückführung . . . . .	123
A.2	Ausgangsrückführung . . . . .	125
A.3	Vorsteuerung . . . . .	129
<b>B</b>	<b>Nichtlineare Bewegungsgleichungen</b>	<b>131</b>
B.1	Vollständige nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	131
B.2	Verwendung von Winkelbeschleunigungen als Stellgrößen . . . . .	134
B.3	Vereinfachte nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Zustandsraum-Matrizen der Flugzeug-Modelle</b>	<b>143</b>
C.1	Nickdynamik . . . . .	143
C.2	Seitenbewegung . . . . .	146
<b>D</b>	<b>Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung</b>	<b>151</b>
D.1	Reglerentwurf am Beispiel der Nickdynamik . . . . .	151
D.2	Vergleich der beiden Entwürfe . . . . .	154





# Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Kinematik der Flugzeugbewegung im Raum (Brockhaus u. a., 2011, S. 66) . . . . .	19
3.1	Regelkreis mit verallgemeinerter Regelstrecke . . . . .	32
4.1	Darstellung des Regelungsproblems . . . . .	51
4.2	Reglerverstärkung der $n_z$ -Rückführung mit unbeschränkten Änderungs- raten im Vergleich . . . . .	55
4.3	Reglerverstärkung der $q$ -Rückführung mit unbeschränkten Änderungs- raten im Vergleich . . . . .	56
4.4	Reglerverstärkung der Regelfehler-Integration mit unbeschränkten Ände- rungsraten im Vergleich . . . . .	57
4.5	Ergebnisse der nichtlinearen Simulation beider Regelkreise im Fall un- beschränkter Änderungsraten . . . . .	58
4.6	Verlauf der beiden LPV-Parameter in der nichtlinearen Simulation mit unbeschränkten Änderungsraten . . . . .	59
4.7	Reglerverstärkung der $n_z$ -Rückführung mit beschränkten Änderungs- raten im Vergleich . . . . .	62
4.8	Reglerverstärkung der $q$ -Rückführung mit beschränkten Änderungs- raten im Vergleich . . . . .	63
4.9	Reglerverstärkung der Regelfehler-Integration mit beschränkten Ände- rungsraten im Vergleich . . . . .	64
4.10	Ergebnisse der nichtlinearen Simulation beider Regelkreise mit einer Beschränkung auf $\dot{\alpha}_{max} = 200^\circ/\text{s}$ . . . . .	65
4.11	Verlauf der beiden LPV-Parameter in der nichtlinearen Simulation mit einer Beschränkung auf $\dot{\alpha}_{max} = 200^\circ/\text{s}$ . . . . .	66
4.12	Ergebnisse der nichtlinearen Simulation beider Regelkreise mit einer Beschränkung auf $\dot{\alpha}_{max} = 50^\circ/\text{s}$ . . . . .	67
5.1	Darstellung der betrachteten Menge an Parametern . . . . .	74
5.2	Eigenwerte der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	76
5.3	Sprungantworten der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	77
5.4	Darstellung des Regelungsproblems der Nickdynamik . . . . .	80
5.5	Schematische Darstellung des Optimierungsprozesses . . . . .	85
5.6	Darstellung der vier erhaltenen Reglerverstärkungen des Nickdynamik- Reglers über den gesamten Parameterbereich . . . . .	87
5.7	Bandbreite von $f_{z,c}^* \rightarrow f_z^*$ für konstante Werte von $\bar{q}$ und $\bar{p}$ . . . . .	89

5.8	Bandbreite von $f_{z,c}^* \rightarrow f_z^*$ für alle Lastfälle . . . . .	91
5.9	Amplituden- und Phasenreserve der Nickdynamik für alle Lastfälle . . .	92
5.10	Eigenwerte der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	95
5.11	Darstellung des Regelungsproblems der Seitenbewegung . . . . .	99
5.12	Bandbreite von $\Phi_c \rightarrow \Phi$ für konstante Werte von $\bar{p}$ und $\bar{q}$ . . . . .	103
5.13	Bandbreite von $\Phi_c \rightarrow \Phi$ für alle Lastfälle . . . . .	104
5.14	Amplituden- und Phasenreserve der Seitenbewegung für alle Lastfälle .	105
5.15	Nichtlineare Simulation des geschlossenen Regelkreises der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	107
5.16	Fluggeschwindigkeit $V_K$ in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	108
5.17	Höhenruderausschläge in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters	109
5.18	Nichtlineare Simulation des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewe- gung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . .	110
5.19	Fluggeschwindigkeit $V_K$ in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	111
5.20	Schiebewinkel in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	112
5.21	Ausschläge der primären Stellflächen in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters . . . . .	113
D.1	Vergleich zwischen vollständigem und reduziertem Modell der Nickdy- namik an vier Gitterpunkten . . . . .	153
D.2	Vergleich zwischen dem Regler mit Ausgangsrückführung und dem in Kapitel 5.2 entworfenen Regler mit Zustandsrückführung . . . . .	155

# Tabellenverzeichnis

4.1	Koeffizienten des Flugkörper-Nickdynamik Modells (Wu u. a., 2002) . . .	48
4.2	Vergleich der Anregelzeiten beider Regler mit unbeschränkten Änderungs- raten . . . . .	58
4.3	Vergleich der Anregelzeiten beider Regler mit beschränkten Änderungs- raten ( $\dot{\alpha}_{max} = 200^\circ/\text{s}$ ) . . . . .	65
4.4	Vergleich der Anregelzeiten beider Regler mit beschränkten Änderungs- raten ( $\dot{\alpha}_{max} = 50^\circ/\text{s}$ ) . . . . .	67
5.1	Optimierungskriterien des Regelkreises der Nickdynamik . . . . .	84
5.2	Intervalle des dynamischen Drucks $\bar{q}$ . . . . .	89
5.3	Optimierungskriterien des Regelkreises der Seitenbewegung . . . . .	101



# Nomenklatur

## Symbole

### Regelungstechnische Größen

Symbol	Einheit	Bedeutung
<b>A</b>	–	Systemmatrix im Zustandsraummodell
<b>B</b>	–	Eingangsmatrix im Zustandsraummodell
<b>C</b>	–	Ausgangsmatrix im Zustandsraummodell
<b>D</b>	–	Durchgriffmatrix im Zustandsraummodell
<b>F</b>	–	Allgemeine Matrix-Variable
<b>I</b>	–	Einheitsmatrix
<b>K</b>	–	Regler-Matrix
<b>M</b>	–	Matrix-Variable (Ausgangsrückführung)
<b>N</b>	–	Matrix-Variable (Ausgangsrückführung)
<b>P</b>	–	Lyapunov-Matrix
<b>T</b>	–	Transformationsmatrix
<b>W</b>	–	Signal-Gewichtung
<b>X</b>	–	Allgemeine Matrix-Funktion
<b>Y</b>	–	Matrix-Variable (Zustandsrückführung)
$\mathcal{A}$	–	Menge aller zul. Parameter-Trajektorien
$\mathcal{P}$	–	Menge aller zul. Parameter $\rho$
$\hat{\mathcal{P}}$	–	Menge aller messbaren Parameter $\hat{\rho}$
$\dot{\mathcal{P}}$	–	Menge aller max. Änderungsraten $\nu = \dot{\rho}$
$A_r$	dB	Amplitudenreserve
$a$	–	Allgemeine Variable (LMI/BMI)
$b$	rad/s	Bandbreite
$c$	–	Allgemeiner Vektor
$e$	–	Regelfehler
$i$	–	Laufvariable
$j$	–	Laufvariable
$m$	–	Dimensionsgröße
$n$	–	Dimensionsgröße
$t$	s	Zeit
$u$	–	Eingangsvektor
$w$	–	Stör- oder Führungsgrößen
$x$	–	Zustandsvektor

Symbol	Einheit	Bedeutung
$y$	—	Ausgangsvektor
$z$	—	Performanzvektor
$\varphi_r$	°	Phasenreserve
$\rho$	—	LPV-Parameter Vektor
$\hat{\rho}$	—	Partieller LPV-Parameter Vektor
$\nu$	—	Max. zul. Änderungsraten $\dot{\rho}$
$\bar{\gamma}$	—	obere Schranke für ind. $L_2$ -Norm

### Flugmechanische Größen

Symbol	Einheit	Bedeutung
$C_A$	—	Auftriebsbeiwert
$F$	N	Kraft
$L$	N m	Rollmoment
$M$	N m	Nickmoment
$N$	N m	Giermoment
$L_i$	—	Rollmomentenbeiwert
$M_i$	—	Nickmomentenbeiwert
$N_i$	—	Giermomentenbeiwert
$Q$	N m	Moment
$S$	m <sup>2</sup>	Auftriebsfläche
$V$	m/s	Geschwindigkeit
$Y_i$	—	Kraftbeiwert ( $y$ -Achse)
$Z_i$	—	Kraftbeiwert ( $z$ -Achse)
$f_i^*$	—	Normalisierter Lastfaktor
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitationskonstante
$l$	—	Lastfall
$m$	kg	Masse
$p$	rad/s	Rollrate
$\bar{p}$	Pa	Statischer Druck
$q$	rad/s	Nickrate
$\bar{q}$	Pa	Dynamischer Druck/Staudruck
$r$	rad/s	Gierrate
$\Phi$	rad	Hängewinkel
$\Theta$	rad	Nicklagewinkel
$\Psi$	rad	Azimuth/Steuerkurs
$\alpha$	rad	Anstellwinkel

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\beta$	rad	Schiebewinkel
$\gamma$	rad	Bahnwinkel
$\bar{\rho}$	kg/m <sup>3</sup>	Luftdichte
$\eta$	rad	Höhenruder-Ausschlag
$\xi$	rad	Querruder-Ausschlag
$\zeta$	rad	Seitenruder-Ausschlag
$\epsilon_i$	–	Elastische Verformungen (Zustand)
$\kappa_i$	–	Kerbfilter Zustand

## Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
BMI	Bilineare Matrix-Ungleichung ( <i>bilinear matrix inequality</i> )
LTI	Linear zeitinvariant ( <i>linear time-invariant</i> )
LPV	Linear parametervariant ( <i>linear parameter-varying</i> )
LFT	Lineare fractionale Transformation ( <i>linear fractional transformation</i> )
LMI	Lineare Matrix-Ungleichung ( <i>linear matrix inequality</i> )
MAC	mittlere Flügeltiefe ( <i>mean aerodynamic chord</i> )



# 1 Einleitung

Die Regelung von nichtlinearen Systemen ist ein fortwährender Begleiter der regelungstechnischen Forschung und dessen praktischer Anwendung. Insbesondere im Bereich der Flugregelung stellt dies aufgrund der nichtlinearen Natur der relevanten Differentialgleichungen eine immerwährende Herausforderung dar. Nichtlineare Verfahren zum Entwurf von Regelungen sind allerdings mit einigen Schwierigkeiten verbunden und können oftmals nur unter bestimmten Bedingungen angewandt werden. Daher wurde schon frühzeitig innerhalb der regelungstechnischen Praxis versucht, nichtlineare Probleme mit Hilfe von linearen Methoden zu lösen. Ein prominentes Beispiel hierfür ist die Anwendung einer Linearisierung in der Umgebung eines fest definierten Betriebspunkt. Hiermit wird das nichtlineare Problem lokal linear approximiert und ist somit lokal mit linearen Methoden lösbar. Werden dabei eine ausreichende Anzahl an Betriebspunkten betrachtet, kann das nichtlineare Problem global durch lineare Methoden gelöst werden. Die Realisierung erfolgt über den Entwurf von jeweils lokal gültigen linearen Reglern, die im Betrieb zwischen verschiedenen Betriebspunkten entsprechend ineinander überblendet werden. Der entstehende Regler ist somit von den Parametern abhängig, die auch die verwendeten Betriebspunkte definieren.

Die Theorie der linear parametervarianten (LPV) Systeme bietet für den Entwurf eines parameterabhängigen Reglers ein systematisches Vorgehen und ermöglicht den direkten Entwurf eines solchen Reglers. Sie stellt somit eine attraktive Möglichkeit zur Lösung des beschriebenen Regelungsproblems dar, erfordert jedoch die Messbarkeit aller Parameter, von denen die Betriebspunkte abhängig sind. In der Flugregelung stellt diese Anforderung für die Anwendung von LPV-Methoden eine bedeutende Einschränkung dar. Ursache hierfür ist die Tatsache, dass die relevanten Betriebspunkte neben messtechnisch bestimmbar Parameter auch durch solche beeinflusst werden, welche im Flugbetrieb in der Regel nicht bestimmbar sind. Beispielhaft sind hierbei die im Allgemeinen nicht konstante Masse und Schwerpunktlage zu nennen. In der vorliegenden Arbeit wird aus diesem Grund ein Verfahren entwickelt, mit dem neben den messbaren Parametern auch Einflüsse nicht messbarer Parameter auf das betrachtete LPV-System im Entwurf einer Regelung berücksichtigt werden können. Dieses bietet damit eine Möglichkeit, die Problematik der nicht bestimmbar parametrischen Einflüsse eines LPV-Systems regelungstechnisch zu lösen.

## 1.1 Regelung linearisierter Systeme

In der praktischen Anwendung der Regelungstechnik ist die Verwendung von linearisierten Differentialgleichungen sehr verbreitet und wird dementsprechend in zahlreichen Grundlagenwerken, wie beispielsweise in Skogestad und Postlethwaite (2001, S.8 ff.),

Lunze (2010, S.106 ff.) oder auch in Åström und Murray (2012, S.158 ff.) thematisiert. Der Hintergrund für die weite Verbreitung dieses Ansatzes ist die Verwendbarkeit der gut erforschten und erprobten Methoden für lineare, zeitinvariante (LTI) Systeme, wie beispielsweise Verfahren zum Entwurf von Zustandsrückführungen (Polplatzierung, Riccati-Regler (LQR) oder andere normbasierte Verfahren). Eine lineare Approximation einer nichtlinearen Differentialgleichung in der Umgebung eines vorher definierten Betriebspunktes lässt sich erzeugen, indem die nichtlinearen Differentialgleichungen in eben diesem Betriebspunkt mit Taylor-Reihen beschrieben, und diese nach dem linearen Glied abgebrochen werden. Durch dieses Vorgehen entstehen lineare Differentialgleichungen, welche die Abweichungen des Systems von dem definierten Betriebspunkt in dessen näheren Umgebung beschreiben und den Entwurf einer linearen Regelung ermöglichen.

Der in der Praxis auftretende Betriebsbereich eines technischen Systems kann jedoch in vielen Fällen nicht ausreichend genau durch einen einzelnen Betriebspunkt abgedeckt werden. In diesem Fall würde eine einzelne lokale lineare Approximation das System nicht genau genug beschreiben. Ein adäquates Ergebnis kann somit mit einem auf einem einzigen Betriebspunkt basierenden Regler nicht erreicht werden und es ist unvermeidlich, einen parameterabhängigen, sich an den aktuellen Betriebszustand anpassenden Regler zu entwerfen. Aus diesem Grund wird oftmals eine Vielzahl von Betriebspunkten betrachtet, um den gesamten auftretenden Betriebsbereich ausreichend genau abzudecken. Um die dabei entstehende mehrdimensionale Menge an LTI-Reglern zu implementieren, entstand ein Verfahren, welches die einzelnen lokalen Regler je nach aktuellen Betriebszustand ineinander überblendet. Dieses Verfahren ist heute unter Begriff des *Gain-Scheduling* bekannt und findet in der regelungstechnischen Praxis bis heute eine breite Anwendung (Leith und Leithead, 2000).

Wie beispielsweise von Khalil (2002, S. 485 ff.) beschrieben, wird bei diesem Verfahren das nichtlineare System in einer bestimmten Menge von Betriebspunkten linearisiert, und an jedem dieser Punkte ein linearer Regler entworfen. Anschließend wird mit Hilfe der Systemparameter, von denen die verwendeten Betriebspunkte abhängig sind, zwischen den einzelnen entworfenen Reglern interpoliert. Somit entsteht ein globaler Regler, welcher im gesamten betrachteten Betriebsbereich angewandt werden kann. Der so erhaltene Regler ermöglicht eine Implementierung auf dem realen nichtlinearen System, wobei dieser allerdings entsprechend abhängig vom aktuellen Betriebspunkt ist. Diese Herangehensweise ist insbesondere im Hinblick auf die Stabilität des geschlossenen Regelkreises jedoch mit Vorsicht anzuwenden. Wie in Shamma und Athans (1991a) mit Hilfe eines Beispiels dargestellt wurde, verlieren die in den einzelnen lokalen Trimpunkten getroffenen Aussagen während der Interpolation ihre Gültigkeit. In dem genannten Beispiel ist ein durch lokal entworfene LTI-Regler entstandener geschlossener Regelkreis lokal in jedem einzelnen linearisierten Punkt stabil, verliert aber während der Interpolation der Reglergrößen entlang einer zeitlich sich ändernden Trajektorie

seine Stabilität. Das bedeutet, dass von einer lokal vorliegenden Stabilität nicht automatisch auf eine Stabilität während des Interpolationsvorgangs zwischen zwei Reglern geschlussfolgert werden kann. Davon betroffen sind ebenso sämtliche anderen Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises. Die draus folgende Konsequenz, dass die reine Betrachtung der Betriebspunkte keine ausreichend genaue Beschreibung des realen Systemverhaltens liefert, hat insbesondere im Hinblick auf die Stabilität nicht zu vernachlässigende Nachteile in der praktischen Anwendung.

## 1.2 Lineare Parametervariante Systeme

Im Zuge der fortschreitenden Forschung im Bereich der parameterabhängigen Regelungen entstanden Anfang der neunziger Jahre die ersten Ansätze der linearen parametervarianten Regelung als eine Weiterentwicklung der bis dato allgegenwärtigen Methoden des *Gain-Scheduling*. Die Theorie zu diesen linear parametervarianten (LPV) Systemen bietet die Möglichkeit, die angesprochenen Nachteile des *Gain-Scheduling* zu kompensieren. Sie ermöglicht einen systematischeren Entwurf von parameterabhängigen Reglern und es ist dadurch möglich, bereits im Entwurfsprozess globale Aussagen über die Stabilität und weitere Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu erhalten.

Als Ausgangspunkt können die beiden Arbeiten von Shamma und Athans (1990 & 1991b) gesehen werden, welche sich zum ersten mal mit dem Thema des direkten Entwurfs von linearen parametervarianten Reglern beschäftigten. Als wichtige Meilensteine für die Entwicklung von Verfahren zum Entwurf von LPV-Reglern können die Beiträge von Becker u. a. (1993), Wu (1995) sowie Apkarian u. a. (1995) gesehen werden. Diese Arbeiten behandeln neben der Stabilität von LPV-Systemen insbesondere die explizite Synthese von LPV-Reglern. In Becker u. a. (1993) wird des Weiteren die numerische Behandlung dieser Probleme betrachtet und zwei der inzwischen bekanntesten Möglichkeiten vorgestellt. Dies ist zum einen der allgemein gültige und anwendbare Ansatz der gitterbasierten Betrachtung von LPV-Systemen, welcher insbesondere von Wu (1995) detailliert ausgearbeitet wurde. In Wu (1995) wurde außerdem der Begriff der parameterabhängigen Stabilität geprägt, der einen deutlich flexibleren und weniger konservativen Reglerentwurf ermöglicht. Als zweite in Becker u. a. (1993) vorgestellte Methode wurde das nur unter bestimmten Bedingungen anwendbare Konzept von polytopen LPV-Systemen behandelt, was im Gegensatz zur gitterbasierten Methode eine analytische Lösung des Regelungsproblems ermöglicht. Dieser Ansatz des LPV-Reglerentwurfs wurde im Detail von Apkarian u. a. (1995) beschrieben und ausgearbeitet. In der jüngeren Vergangenheit ist mit Hoffmann und Werner (2015) in diesem Bereich ein umfangreiche Übersicht über die wesentlichen Methoden innerhalb der LPV-Theorie erschienen, welche zusätzlich auch einen Überblick über die dritte, auf Multiplikatoren basierende, LFT-Methode (*linear fractional transformation*) gibt.

Ein Kernelement in der Verwendung von LPV-Methoden ist das Generieren geeigneter Modelle für den Reglerentwurf. Der direkte Übergang von einem nichtlinearen System in ein LPV-System ist im Allgemeinen nur in speziellen Fällen möglich, weshalb hierfür Verfahren erforderlich sind. Für den Übergang existieren zwei hauptsächliche Vorgehensweisen. Die Herkunft dieser Methoden basiert auf den Versuchen, das *Gain-Scheduling* auf ein systematischeres Level zu heben, wie es in der bereits angesprochenen Arbeit von Shamma und Athans (1990) erfolgte. Aus diesem Grund war es naheliegend, hierfür auch die gleiche Art von linearen Systemen zu verwenden, die auch für die zugrunde liegende Methode verwendet wurde. Somit bestanden die ersten LPV-Modelle ebenfalls aus lokal durch Taylor-Linearisierungen erzeugten mehrdimensionalen LTI-Systemen, wie es beispielsweise in Rugh und Shamma (2000) im Detail beschrieben ist. Das Vorgehen zur Generierung eines LPV-Modells erfolgt in diesem Fall dementsprechend ebenfalls durch das Linearisieren der nichtlinearen Differentialgleichungen an einer bestimmten Menge von Punkten innerhalb des Betriebsbereiches, wodurch die bereits angesprochene mehrdimensionale Menge an LTI-Systemen entsteht. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Punkten wird in einem zeitabhängigen Parametervektor  $\rho(t)$  zusammengefasst. Dieser Vektor besteht aus eben den Parametern, in dessen Abhängigkeit das nichtlineare System linearisiert wurde. Es entsteht so automatisch ein gitterbasiertes LPV-Modell und kann mit den von Wu (1995) erarbeiteten Methoden verwendet werden. Eine direkte Verwendung für einen polytopen Ansatz ist gleichermaßen möglich, da hierbei das LPV-System ebenfalls nur an einzelnen Punkten benötigt wird.

In der Folge entstand noch ein weiteres Verfahren, bei dem die nichtlinearen Differentialgleichungen so umgeschrieben werden, dass Nichtlinearitäten direkt durch Funktionen oder Parameter substituiert werden können. Dieses ebenfalls in Rugh und Shamma (2000) beschriebene Verfahren wird oft als quasi-LPV Beschreibung bezeichnet. Darüber hinaus existieren neben den beiden vorgestellten analytischen Verfahren auch einige experimentelle Herangehensweisen. Die Arbeit von Casella und Lovera (2008) bietet für diesen Zweck eine gute Zusammenfassung.

### 1.3 LPV-Modelle in der Flugregelung

Die Dynamik eines Flugzeugs oder Flugkörpers wird ausschließlich durch nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben, wie es in Brockhaus u. a. (2011, S. 205 ff.) oder McRuer u. a. (1973, S. 203 ff.) dargestellt ist. Aus diesem Grund spielt die regelungstechnische Behandlung von nichtlinearen Systemen im Bereich der Flugregelung eine elementare Rolle. Es hat sich hierbei sowohl in der flugdynamischen Analyse als auch im Bereich der Flugregelung etabliert, die in Kapitel 1.1 erläuterte Vorgehensweise mit lokal in Betriebspunkten linearisierten Systeme zu verwenden. Dies ist zum Beispiel in Brockhaus u. a. (2011, S. 253 ff.) ausführlich beschrieben. In der Flugdynamik

werden als Betriebspunkte im Allgemeinen sogenannte Trimpunkte verwendet. In einem solchen ist das System durch eine entsprechende Einstellung der Stellgrößen stationär getrimmt. Das bedeutet, dass die vorliegende Geschwindigkeit und die Lagewinkel konstant, sowie sämtliche Winkelgeschwindigkeiten gleich Null sind. Das System befindet sich demnach in einem stationären Flugzustand, welcher ohne zusätzliche äußere Eingriffe von außen beibehalten wird. Die Analyse der Flugdynamik erfolgt bis in heutige Zeit basierend auf diesen, lokal in Trimpunkten linearisierten Systemen. Auch viele der Eigenschaften, mit denen das Verhalten analysiert und bewertet wird, basieren auf dieser Systematik. Dementsprechend werden auch heutzutage Flugregler weiterhin mit Hilfe dieser Modelle ausgelegt, da so das geregelte System mit denselben Kriterien bewertet werden kann. Daher stellt die beschriebene Vorgehensweise auch heutzutage oftmals noch die favorisierte Methode dar.

Das dynamische Verhalten, und damit auch die für die Trimmung erforderlichen Stellgrößen variieren jedoch sehr stark während eines Fluges. Als größte Einflussfaktoren sind hier die die aktuelle Flughöhe und -geschwindigkeit zu nennen. Allerdings sind auch die Masse und insbesondere auch die Schwerpunktlage während eines Fluges nicht konstant, weshalb dessen Einfluss auf die Trimmung, und damit auch auf die linearisierten Modelle ebenfalls betrachtet werden muss. Die Ursache hierfür sind beispielsweise unterschiedliche im Betrieb auftretende Beladungen oder aber eine durch den fortlaufenden Treibstoffverbrauch während des Fluges sinkende Gesamtmasse und sich verändernde Massenverteilung. Die Verwendung eines parameterabhängigen und sich an den aktuellen Flugzustand anpassenden Reglers ist daher unvermeidlich. Aus diesem Grund wird bei einem Reglerentwurf eine Vielzahl von Trimpunkten betrachtet. Damit wird versucht, den gesamten Bereich der Flugbereichsgrenzen, welche durch die zulässigen Bereiche der beiden primären Einflussgrößen Flughöhe und -geschwindigkeit definiert werden, abzudecken. Dabei entsteht das bereits beschriebene mehrdimensionale LTI-System, welches regelungstechnisch oftmals mit dem in Kapitel 1.1 genannten Verfahren des *Gain-Scheduling* behandelt wird. Demzufolge stellt auch die Verwendung der Methoden für LPV-Systeme für den Entwurf von Flugreglern eine attraktive Möglichkeit dar.

## 1.4 Stand der Technik

Die beschriebenen LPV-Methoden wurden in der Vergangenheit bereits zahlreich im Bereich der Flugregelung eingesetzt und erprobt, wie beispielsweise die Veröffentlichungen Balas u. a. (1997), Papageorgiou u. a. (2000), Spillman (2000) und Ganguli u. a. (2002) zeigen. In Weiser u. a. (2020) wurde darüber hinaus kürzlich die praktische Anwendbarkeit eines LPV-Reglers in einem Flugzeug demonstriert. Jedoch haben alle bisherigen Arbeiten in diesem Bereich es gemein, dass die parametrische Abhängigkeit der betrachteten Regelstrecke nur aus messbare Parametern besteht. Dies hat den

Hintergrund, dass bei einem konventionellen LPV-Entwurf davon ausgegangen wird, dass die Trajektorien aller Parameter, von denen das modellierte System abhängig ist, zwar im Voraus nicht bekannt, jedoch alle in Echtzeit messbar sind (Becker u. a., 1993).

Im Kontext der Flugregelung bestehen die Parameter eines entsprechenden LPV-Modells aus den Größen, die Einfluss auf die Trimmung haben. Grund hierfür ist die Generierung der LPV-Modelle für den Reglerentwurf, welche auf den bereits beschriebenen lokalen Linearisierungen in Trimpunkten basieren. Es ergibt sich entsprechend bei den erhaltenen Modellen und der Trimmung die gleiche parametrische Abhängigkeit. Als primäre Einflussfaktoren sind hier die aktuelle Flughöhe und -geschwindigkeit zu nennen. Jedoch werden die für die Trimmung erforderlichen Steuereingaben auch wesentlich durch andere Parameter, wie beispielsweise die aktuelle Masse und Schwerpunktlage beeinflusst. Auch aerodynamische Größen wie der Anstellwinkel sind hier als Einflussgrößen zu nennen. Während die Flughöhe und -geschwindigkeit während des Fluges jederzeit in ausreichender Genauigkeit bestimmt werden können, ist dies bei der Masse und Schwerpunktlage im Allgemeinen nicht möglich. Sie können daher in klassischen LPV-Ansätzen nicht berücksichtigt werden.

## 1.5 Motivation und Beiträge dieser Arbeit

Aus den in Kapitel 1.4 genannten Gründen wurden in dieser Arbeit Ansätze erarbeitet, solche nicht messbaren Einflüsse bereits im Entwurf einer Regelung zu berücksichtigen. Hierzu wird eine spezielle Klasse von LPV-Systemen verwendet. Diese umfasst die Art von LPV-Systemen, deren Parameter nur teilweise, also partiell messbar sind. Der Begriff wurde zum ersten mal in Kombination mit einem LFT-Ansatz in Köse und Jabbari (1999) verwendet. Vergleichbare Ansätze wurden im Bereich der robusten Regelung bereits zur Berücksichtigung von Unsicherheiten bei Entwürfen von LPV-Reglern mit dem polytopen Verfahren verwendet, wie beispielsweise in Sloth u. a. (2010) oder Rotondo u. a. (2014). Als übergreifender Begriff für diese Unterklasse von LPV-Systemen wird in dieser Arbeit die Formulierung eines LPV-Systems mit partiell messbaren Parametern verwendet.

### 1.5.1 Zusammenstellung der wesentliche Beiträge

Im Folgenden werden die wesentlichen Beiträge dieser Arbeit herausgestellt, die relevanten Publikationen vorgestellt und daraus entnommen Beiträge in den Kontext dieser Arbeit gesetzt. Der Kern dieser Arbeit besteht aus den im Folgenden genannten Beiträgen.

- Erarbeitung einer systematischen Methodik für den Entwurf von LPV-Reglern für Systeme mit nur partiell messbaren Parametern. Zu diesem Zweck werden bestehende Methoden für den konventionellen LPV-Reglerentwurf entsprechend erweitert und umformuliert, sodass eine Anwendung für die genannten Systeme möglich ist. Ziel ist es, einen Regler zu entwerfen, der nur von dem messbaren Teil der Parameter abhängt, dessen Eigenschaften aber für das gesamte LPV-System mit allen parametrischen Abhängigkeiten gelten. Dies resultiert in einer Kombination aus konventionellen LPV-Entwurfsverfahren und einem Ansatz aus der robusten Regelung und wird im Detail in **Kapitel 3** behandelt.
- Validierung des in Kapitel 3 entwickelten Verfahrens mit Hilfe eines illustrativen Beispiels. Mit dem dabei erhaltenen Regler und durch einen Vergleich mit einem konventionellen LPV-Regler wird die Leistungsfähigkeit des entwickelten Verfahrens demonstriert und die damit einhergehenden Einschränkungen und Nachteile beurteilt. Dieser Beitrag befindet sich in **Kapitel 4**.
- Anwendung der in Kapitel 3 erarbeiteten Methoden auf ein grundlegendes Problem der Flugregelung. Unter der Verwendung eines exemplarischen und realitätsnahen Beispiels wird der Entwurf einer Basisregelung eines zivilen Verkehrsflugzeugs demonstriert. Dieser Beitrag wird in **Kapitel 5** vorgestellt.

Diesen Beiträgen liegen die im Folgenden genannten Publikationen zu Grunde.

- In Goßmann u. a. (2017) wurde die grundsätzliche Methodik des Reglerentwurfs für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern vorgestellt und dient insbesondere als Grundlage der in **Kapitel 3.2** gemachten Definitionen, sowie des in **Kapitel 3.3.1** vorgestellten Entwurfs einer Zustandsrückführung.
- Die Grundlage der in **Kapitel 5** behandelten Anwendung wurde in Goßmann u. a. (2018) betrachtet. In dieser Publikation wurde der Einfluss von Masse und Schwerpunktlage auf die Flugzeug-Dynamik thematisiert und mit der Methodik aus Goßmann u. a. (2017) ein Regler unabhängig von diesem Einfluss entworfen. Zusätzlich wurde der in **Kapitel 3.3.3** erläuterte Ansatz zum Entwurf einer Regelung mit zwei Freiheitsgraden eingeführt.
- Die Publikation Goßmann und Svaricek (2019) betrachtet den Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung für LPV-Systeme und dient als Grundlage für die in **Kapitel 3.3.2** durchgeführten Erweiterungen dieses Ansatzes für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern.
- Der in **Kapitel 5.2** behandelte Reglerentwurf für die Nickdynamik des exemplarisch betrachteten Modells eines Regionalflugzeuges wurde aus Goßmann u. a. (2020) entnommen. Neben einer detaillierten Ausarbeitung des Entwurfs wird das Vorgehen zusätzlich in Kapitel 5.3 auf die Seitenbewegung des gleichen Flugzeugs angewandt.

## 1.5.2 Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit wird der Entwurf von Reglern für ein LPV-System mit partiell messbaren Parametern vorgestellt und im Anschluss dessen Anwendung demonstriert. Sie besteht aus sechs Kapiteln. Auf die Einleitung in diesem Kapitel folgend werden in Kapitel 2 die notwendigen Grundlagen definiert. Dies beinhaltet in erster Linie mathematische Grundlagen, die notwendigen Definitionen von LPV-Systemen, sowie die für das Verständnis der verwendeten Regelstrecken erforderlichen flugmechanischen Grundlagen.

Darauf folgen in Kapitel 3 die Regler-Entwurfsverfahren für LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern. In diesem Kapitel wird die den Verfahren zu Grunde liegende Klasse der LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern definiert. Außerdem werden auf der Basis von Entwurfsverfahren für konventionelle LPV-Systeme Ansätze für die betrachtete Systemklasse abgeleitet. In dem folgenden Kapitel 4 werden die entwickelten Entwurfsverfahren auf ein illustratives Beispiel der Flugregelung angewandt. Bei diesem Beispiel wird zu diesem Zweck angenommen, dass einer der Parameter des LPV-Systems nicht messbar ist. Mit Hilfe der Ansätze aus Kapitel 3 wird ein LPV-Regler mit Zustandsrückführung entworfen, welcher nicht von dem als nicht messbar angenommenen Parameter abhängt. Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit und der Einordnung der mit dieser Einschränkung einhergehenden Nachteile wird zusätzlich zum Vergleich ein konventioneller LPV-Regler entworfen, bei dem die Messbarkeit aller Parameter des LPV-Systems angenommen wird. Dieser wird dem mit den in dieser Arbeit entwickelten Verfahren erhaltenen Regler gegenübergestellt.

In dem darauf folgenden Kapitel 5 werden die in Kapitel 3 erläuterten Verfahren für den Entwurf einer Basisregelung eines exemplarisch betrachteten zivilen Verkehrsflugzeugs angewandt und damit das Anwendungspotential demonstriert. Dabei wird das einleitend bereits in Kapitel 1.4 beschriebene Problem betrachtet, dass die aktuelle Masse und Schwerpunktlage des Flugzeugs einen merkbaren Einfluss auf das Verhalten des Flugzeugs haben, jedoch während des Fluges nicht bestimmt werden können. Gilt es die Variationen in Masse und Schwerpunktlage im Reglerentwurf zu berücksichtigen, ergibt sich das bereits beschriebene LPV-Problem mit einem nur partiell messbaren Parametervektor. Für dieses kann mit den Methoden aus Kapitel 3 ein entsprechender LPV-Regler entworfen werden. Für die Demonstration der in dieser Arbeit entwickelten Entwurfsverfahren wurde ein linearisiertes Modell eines Regionalflugzeuges von dem Institut für Flugsystemdynamik der TU München zur Verfügung gestellt. Die Analyse und Bewertung der entworfenen Regelung erfolgt neben einer linearen Analyse insbesondere innerhalb einer sehr detaillierten nichtlinearen Simulationsumgebung des exemplarisch betrachteten Flugzeugs. Diese wurde wie bereits das linearisierte Modell für diesen Zweck ebenfalls vom Institut für Flugsystemdynamik der TU München zur Verfügung gestellt. Mit Hilfe der Simulation wird das Verhalten des Reglers unter

realitätsnahen Modellbedingungen bewertet. Abschließend werden in Kapitel 6 die erzielten Ergebnisse zusammengefasst und beurteilt. Darauf aufbauend werden die erzielten Vorteile durch die vorgestellten Ansätze herausgearbeitet und mögliche weitere Betrachtungen diskutiert.



## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die vorliegende Arbeit erforderlichen Grundlagen vorgestellt. Dies umfasst insbesondere die Definition von linearen und bilinearen Matrix-Ungleichungen, sowie die grundlegenden Definitionen der Klasse von linear parametervarianten (LPV) Systemen. Darüber hinaus wird ein Überblick über die Stabilität dieser Art von Systemen und dessen Generierung gegeben. Im letzten Teil des Kapitels werden die grundlegenden Definitionen und Zusammenhänge der Flugmechanik erläutert, auf deren Basis die in dieser Arbeit betrachteten Regelungsprobleme formuliert werden können.

### 2.1 Lineare Matrix Ungleichungen

Unter linearen Matrix-Ungleichungen (*linear matrix inequality* – LMI) werden, wie in Boyd u. a. (1994, S. 7) beschrieben, lineare Ungleichungen der Form

$$\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (2.1)$$

verstanden. Die Ungleichung in (2.1) besteht aus einer Variable  $a = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in \mathbb{R}^m$  sowie den bekannten Matrizen  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wobei für  $i = 1, \dots, m$  gilt und  $n$  die Dimension der quadratischen Matrizen definiert. Mit der Ungleichung (2.1) wird in diesem Fall die positive Definitheit, also

$$c^T \mathbf{F}(a) c > 0 \quad (2.2)$$

für alle von Null verschiedenen Vektoren  $c \in \mathbb{R}^n$ , von der Funktion  $\mathbf{F}(a)$  gefordert. Diese Form wird auch als eine strikte LMI bezeichnet. Es existieren auch nicht-strikte LMIs in der Form  $\mathbf{F}(a) \geq 0$ , welche mit der hier gezeigten strikten Form verwandt sind. Diese werden in dem in dieser Arbeit behandeltem Kontext nicht benötigt, weshalb sich im Folgenden nur auf die strikte Form einer LMI bezogen wird.

Eine LMI stellt eine konvexe Bedingung für die Variable  $a$  dar, wodurch die Bestimmung einer Lösung für  $a$  mit Hilfe einer konvexen Optimierung durchgeführt werden kann. Des Weiteren existieren zahlreiche effiziente numerische Methoden um die Lösbarkeit einer LMI im Vorfeld einer solchen Optimierung zu zeigen. Die Variable  $a$  kann anstatt der Form eines Vektors oder Skalars auch einer Matrix mit der Dimension  $n \times n$  entsprechen. Solche LMIs finden in der Regelungstechnik eine breite Anwendung, weil sich zahlreiche dort auftretende Bedingungen in Form einer LMI beschreiben lassen. Neben dem Stabilitätsnachweis nach Lyapunov, welcher in Abschnitt 2.2.1 behandelt wird, lassen sich auch Normen von linearen Systemen mit Hilfe von LMIs

abschätzen, wie es in Kapitel 3 für die induzierten  $L_2$ -Norm beschrieben wird. Die dafür erforderlichen LMIs lassen sich auch für LPV-Systeme formulieren, weshalb lineare Matrix-Ungleichungen bei der Betrachtung von LPV-Systemen eine elementare Rolle spielen (Boyd u. a., 1994, S.7-9).

Grundsätzlich kann die Matrix-Ungleichung in (2.1) auch die Form

$$\mathbf{F}(a_x, a_y) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} a_{x,i} a_{y,i} \mathbf{F}_{i,j} > 0 \quad (2.3)$$

annehmen, wie es ebenfalls bei zahlreichen Problemen in der Regelungstechnik der Fall ist. Diese besteht aus den beiden Variablen  $a_x = [a_{x,1}, a_{x,2}, \dots, a_{x,m_x}] \in \mathbb{R}^{m_x}$  und  $a_y = [a_{y,1}, a_{y,2}, \dots, a_{y,m_y}] \in \mathbb{R}^{m_y}$  sowie den bekannten Matrizen  $\mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{F}_{i,j}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , mit  $i = 1, \dots, m_x$  und  $j = 1, \dots, m_y$ . Durch das Produkt der beiden Variablen ist die in (2.3) dargestellte Ungleichung nichtlinear, wobei diese Form auch als bilineare Matrix Ungleichung (*bilinear matrix inequality* - BMI) bezeichnet wird (Safonov u. a., 1994). Im Gegensatz zu einer LMI ist das Bestimmen einer Lösung für  $x$  und  $y$  in diesem Fall deutlich komplexer. Wie in Safonov u. a. (1994) beschrieben, resultiert aus einer BMI ein nicht-konvexes Optimierungsproblem. Die Lösung eines nicht-konvexen Problems ist oftmals schwierig, weil hierfür verfügbare Löser das Problem nur lokal lösen können. Nicht nur hängt damit ein erfolgreiches Lösen des Optimierungsproblems sehr stark von dem gewählten Startwert ab, eine möglicherweise erhaltene Lösung stellt damit auch nur ein lokales Optimum dar, wohingegen das Lösen eines konvexen Optimierungsproblems auf ein globales Optimum führt (Sadabadi und Peaucelle, 2016).

## 2.2 Lineare Parametervariante Systeme

Viele technische Systeme und Prozesse lassen sich durch eine lineare Systembeschreibung nur teilweise beschreiben, weshalb oftmals eine nichtlineare Modellierung erforderlich ist. Solche nichtlinearen Modelle lassen sich im Allgemeinen nach Khalil (2002, S. 2) durch eine Vektordifferentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.4)$$

und eine zugehörige Ausgangsgleichung

$$y = g(t, x, u) \quad (2.5)$$

beschreiben, wobei  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  den Zustandsvektor,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  den Eingangsvektor und  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  den Ausgangsvektor beschreibt. Mit  $f$  wird die  $n_x$  - dimensionale Vektorfunktion des Systems und mit  $g$  die  $n_y$  - dimensionale Ausgangsvektorfunktion bezeichnet. Hängt das nichtlineare System aus (2.4) und (2.5) zusätzlich von einem bestimmten exogenen Signal ab, lässt sich das System unter bestimmten Bedingungen als ein

lineares parametervariantes System, oder auch LPV-System beschreiben. Sie wurden grundlegend von Shamma und Athans (1991b) und Becker und Packard (1994) als eine Klasse von linearen Mehrgrößensystemen definiert, dessen Matrizen von dem exogenen und zeitabhängigen Parametervektor  $\rho(t)$  abhängen.

**Definition 2.1** (Parametervektor). *Gegeben sei ein Parametervektor  $\rho(t)$ , welcher durch eine stetige und kontinuierliche Funktion  $\rho(t) : \mathbb{R}^{n_\rho} \rightarrow \mathcal{P}$  beschrieben wird. Diese wird als unbekannt angenommen, sei aber durch die kompakte Menge*

$$\mathcal{A} = \{\rho(t) \mid \rho(t) \in \mathcal{P}, \dot{\rho}(t) \in \dot{\mathcal{P}}, \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (2.6)$$

*beschränkt, welche alle zulässigen Trajektorien für den Parametervektor  $\rho(t)$  beschreibt.*

Ergänzend zu Definition 2.1 sei erwähnt, dass die Funktion des Parametervektors durch die kompakte Menge  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$ , für die

$$\mathcal{P} = \{\rho(t) \mid \rho_{min} \leq \rho(t) \leq \rho_{max}\} \quad (2.7)$$

gilt, beschränkt wird. Mit dieser werden alle zulässige Werte von  $\rho(t)$  definiert, wobei  $\rho_{min}$  und  $\rho_{max}$  entsprechend die minimal beziehungsweise maximal zulässigen konstanten Werte aller Parameter in  $\rho$  beschreiben und mit  $n_\rho$  die Anzahl der in  $\rho(t)$  enthaltenen Parameter bezeichnet wird. Zusätzlich werden im Allgemeinen die Änderungsraten  $\dot{\rho}(t)$  der Parameter in  $\rho(t)$  durch  $\dot{\rho}(t) : \mathbb{R}^{n_\rho} \rightarrow \dot{\mathcal{P}}$  mit

$$\dot{\mathcal{P}} = \{\dot{\rho}(t) \mid |\dot{\rho}_i(t)| \leq \nu_i, \forall i = 1, \dots, n_\rho\} \quad (2.8)$$

begrenzt. Hierbei stellt  $\nu_i \in \mathbb{R}$  die jeweilige Beschränkung der Rate des  $i$ -ten Parameters dar. Dies bedeutet, dass die Menge aller erforderlichen Ratenbeschränkungen durch ein Polytop beschrieben wird.

Sind darüber hinaus die beiden Vektorfunktionen  $f$  und  $g$  aus (2.4) und (2.5) linear in  $[x, u]^T$ , entspricht das nichtlineare Differentialgleichungssystem einem linearen parametervarianten (LPV) System.

**Definition 2.2** (LPV-Systeme). *Gegeben sei die kompakte Menge  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$  sowie die stetigen und kontinuierlichen Matrix-Funktionen  $\mathbf{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $\mathbf{B} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $\mathbf{C} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  und  $\mathbf{D} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ . Mit diesen wird ein lineares parametervariantes (LPV) System beschrieben, dessen Dynamik sich durch*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho(t)) & \mathbf{B}(\rho(t)) \\ \mathbf{C}(\rho(t)) & \mathbf{D}(\rho(t)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad \rho(t) \in \mathcal{A} \quad (2.9)$$

*beschreiben lässt. (Becker und Packard, 1994)*

Wie bereits in Definition 2.1 beschrieben, wird der Parametervektor  $\rho(t)$  im Vorfeld als unbekannt, aber durch  $\mathcal{A}$  beschränkt angenommen. Die Trajektorien welche ein LPV-System annimmt sind demnach im Vorfeld nicht bekannt und müssen aus diesem Grund in der Praxis messtechnisch erfasst werden. Im Folgenden wird die Zeitabhängigkeit des Parametervektors  $\rho$  und der Matrizen eines LPV-Systems grundsätzlich angenommen und wird deshalb aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mehr gesondert angegeben.

### 2.2.1 Stabilität von LPV-Systemen

Der Stabilitätsnachweis bei einem LPV-System gestaltet sich als herausfordernder als es bei zeitinvarianten Systemen der Fall ist. Während es bei zeitinvarianten Systemen ausreichend ist zu zeigen, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  in der linken komplexen Halbebene liegen, reicht es bei LPV-Systemen nicht aus zu zeigen, dass dies für alle möglichen Werte von  $\rho$  lokal erfüllt ist. Wie von Amato (2006, S. 13) anhand eines Beispiels gezeigt wurde, kann ein zeit- oder auch parametervariantes System trotzdem instabil sein, auch wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}(\rho)$  zu jeden Zeitpunkt in der linken komplexen Halbebene liegen.

Eine Analyse der Stabilität eines LPV-Systems kann mit Hilfe der Stabilitätstheorie nach Lyapunov durchgeführt werden, wie es beispielsweise in Becker und Packard (1994) oder Wu (1995) beschrieben ist. Betrachtet wird ein autonomes LPV-System

$$\dot{x} = \mathbf{A}(\rho)x. \quad (2.10)$$

Nun wird eine Funktion  $\mathbf{V} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{V}(x) = x^T \mathbf{P} x$  definiert, wobei  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  als die Lyapunov-Matrix bezeichnet wird, für die  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  gilt (Becker und Packard, 1994). Für die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{V}(x)$  entlang von Trajektorien vom Typ der Form (2.10) und für alle  $\rho \in \mathcal{P}$  gilt

$$\dot{\mathbf{V}}(x) = x^T(t) \left[ \mathbf{A}^T(\rho) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}(\rho) \right] x(t). \quad (2.11)$$

Aus (2.11) lässt sich dann eine Bedingung für die quadratische Stabilität der Matrix  $\mathbf{A}(\rho)$  des autonomen Systems (2.10) ableiten.

**Definition 2.3** (Quadratische Stabilität). *Gegeben sei die kompakte Menge  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$ , sowie die stetige und kontinuierliche Matrix-Funktion  $\mathbf{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Die Matrix-Funktion  $\mathbf{A}(\rho)$  ist nur genau dann quadratisch stabil, wenn eine positiv definite Matrix  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  existiert, für die für alle  $\rho \in \mathcal{P}$*

$$\mathbf{A}^T(\rho) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}(\rho) < 0 \quad (2.12)$$

*gilt. (Wu, 1995, S. 4)*

Die Gleichung (2.12) wird allgemein als Lyapunov-LMI (Lineare Matrix Ungleichung - *linear matrix inequality*, siehe Kapitel 2.1) und die Matrix  $\mathbf{P}$  wird im Allgemeinen als Lyapunov-Matrix bezeichnet (Boyd u. a., 1994, S. 8). Basierend auf Definition 2.3 lässt sich dann die quadratische Stabilität eines LPV-Systems definieren.

**Definition 2.4** (Quadratische Stabilität eines LPV-Systems). *Ein LPV-System nach Definition 2.2 ist genau dann quadratisch stabil, wenn dessen Matrix  $\mathbf{A}(\rho)$  quadratisch stabil für alle  $\rho \in \mathcal{P}$  ist. (Wu, 1995, S. 5)*

Die mit Definition 2.4 beschriebene quadratische Stabilität eines LPV-Systems gilt, wie von Wu (1995, S. 4) beschrieben, für beliebige Trajektorien von  $\rho \in \mathcal{P}$  und beliebig hohe Änderungsraten  $\dot{\rho}$ .

In vielen Anwendungsfällen fällt der Stabilitätsnachweis mit einer konstanten Lyapunov-Matrix jedoch zu konservativ aus, weil sich die Parameter in  $\rho$  oftmals nur sehr langsam ändern. Es kann auch dazu führen, dass mit Hilfe von (2.12) kein Stabilitätsbeweis möglich ist, obwohl das System für sich langsam ändernde Parameter quadratisch stabil ist. Aufgrund dieser Problematik wurde von Wu (1995, S. 58) vorgeschlagen, einen Ansatz mit einer parameterabhängigen Lyapunov-Matrix  $\mathbf{P}(\rho)$  für den Nachweis der Stabilität zu verwenden. Dieser lässt sich ebenfalls für das autonome System (2.10) definieren.

**Definition 2.5** (Parameterabhängige quadratische Stabilität). *Gegeben sei die kompakte Menge  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$  und die stetige und kontinuierliche Matrix-Funktion  $\mathbf{A}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Die Matrix-Funktion  $\mathbf{A}(\rho)$  ist genau nur dann quadratisch stabil, wenn eine positiv definite Matrix-Funktion  $\mathbf{P}(\rho) = \mathbf{P}(\rho)^T$  existiert, für die*

$$\mathbf{A}^T(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\rho) + \dot{\mathbf{P}}(\rho, \dot{\rho}) < 0 \quad (2.13)$$

für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  gilt. (Wu, 1995, S. 59)

Im Vergleich zu Definition 2.3 enthält die Stabilitätsbedingung (2.13) einen zusätzlichen Term, welcher von den Änderungsraten der Parameter  $\dot{\rho}$  abhängt. Dieser lässt sich für die kompakte Menge  $\mathcal{A}$  aus Definition 2.1 wie in Wu (1995, S. 59) beschrieben mit

$$\dot{\mathbf{P}}(\rho, \dot{\rho}) \leq \sum_{i=1}^{n_\rho} \left( \nu_i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_i} \right) \quad (2.14)$$

abschätzen, wodurch die Stabilität zusätzlich noch von den in (2.8) definierten Begrenzungen für die Änderungsraten  $\nu_i$  abhängig ist. Nach Wu (1995, S. 61) lässt sich Definition 2.4 ebenso für die Definition der parameterabhängigen Stabilität anwenden. Es kann somit auch die parameterabhängige quadratische Stabilität für ein LPV-System gezeigt werden. Mit diesem Ansatz ist allerdings auch nur die quadratische Stabilität

des Systems innerhalb dieser Änderungsraten nachweisbar. Jedoch ermöglicht es für Systeme innerhalb eines Intervalls von Änderungsraten  $\nu_i$  die quadratische Stabilität nachzuweisen, für die mit Definition 2.3 kein Stabilitätsbeweis möglich ist. Außerdem ist es mit Definition 2.5 möglich, die Stabilität nur für den in der Praxis relevanten Bereich von  $\dot{\rho}$  nachzuweisen, was zu deutlich weniger konservativen Resultaten führt.

## 2.2.2 Generierung von LPV-Modellen

Im Allgemeinen sind die beiden Vektorfunktionen in (2.4) und (2.5) nichtlinear in  $[x, u]^T$ , sodass ein Übergang in ein LPV-System nicht direkt möglich ist. Um ein allgemeines, nichtlineares System in ein LPV-System zu überführen, existieren, wie beispielsweise von Rugh und Shamma (2000) oder Balas (2002) beschrieben, zwei grundsätzliche Herangehensweisen. Eine der bekanntesten Methoden ist die Erzeugung von LPV-Systemen mit Hilfe einer Taylor-Linearisierung eines nichtlinearen Systems. Im Rahmen dieser Arbeit werden LPV-Systeme betrachtet, welche mit dieser Methode generiert wurden. Diese wird daher im Folgenden genauer vorgestellt. Bei einer Linearisierung wird eine nichtlineare Differentialgleichung in einer Ruhelage

$$0 = f(x_0(\rho), u_0(\rho)) \quad (2.15)$$

betrachtet. Wird nun (2.15) in die Ausgangsgleichung (2.5) eingesetzt, ergibt sich

$$y_0(\rho) = g(x_0(\rho), u_0(\rho)) \quad (2.16)$$

als Ausgang für die parameterabhängige Ruhelage  $(x_0(\rho), u_0(\rho))$ . Nun definiert man basierend auf (2.4) und (2.5) Differentialgleichungen in der Abweichung von diesen Ruhelagen. Hierzu werden mit

$$x_\Delta = x - x_0(\rho), \quad u_\Delta = u - u_0(\rho), \quad y_\Delta = y - y_0(\rho) \quad (2.17)$$

Abweichungsgrößen von der Ruhelage definiert. Das linearisierte Zustandsraummodell des nichtlinearen Differentialgleichungssystems (2.4),(2.5) lässt sich dann mit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_\Delta \\ y_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}(\rho) \\ \mathbf{C}(\rho) & \mathbf{D}(\rho) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_\Delta \\ u_\Delta \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

beschreiben, wobei die Matrizen des Zustandsraummodells mit Hilfe einer Taylor-Approximation erster Ordnung

$$\mathbf{A}(\rho) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(\rho), u_0(\rho)), \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(\rho), u_0(\rho)), \quad (2.19b)$$

$$\mathbf{C}(\rho) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0(\rho), u_0(\rho)), \quad (2.19c)$$

$$\mathbf{D}(\rho) = \frac{\partial g}{\partial u}(x_0(\rho), u_0(\rho)), \quad (2.19d)$$

bestimmt werden können (Rugh und Shamma, 2000). Das so erhaltene LPV-System beschreibt das lokale Verhalten in der Umgebung der parameterabhängigen Ruhelage  $(x_0(\rho), u_0(\rho))$ , genauer genommen die Abweichungen  $\Delta$  von dieser Ruhelage.

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von LPV-Systemen besteht in der Umwandlung des nichtlinearen Systems in ein sogenanntes quasi-lineares System, wie es ebenfalls in Rugh und Shamma (2000) oder Balas (2002) beschrieben wird. Dies bedeutet, dass die nichtlinearen Teile des Systems durch Funktionen substituiert und als neudefinierte zeitabhängige Parameter behandelt werden können. Man spricht in diesem Fall von einem quasi-LPV System, weil der Parametervektor  $\rho$  direkt von Zustandsgrößen  $x$  oder eben von Funktionen  $f(x)$  in diesen abhängt. Diese Form der Generierung von LPV-Modellen wird in dieser Arbeit nicht verwendet und wird an dieser Stelle dementsprechend nicht weiter betrachtet.

## 2.3 Grundlagen der Flugmechanik

In diesem Kapitel werden die flugmechanischen Grundlagen vorgestellt, die für die in dieser Arbeit verwendeten Regelstrecken erforderlich sind. Es werden die von Brockhaus u. a. (2011, S. 54) eingeführten Definitionen verwendet. Im Grundsatz wird ein mechanisches System betrachtet, welches entsprechend durch Kräfte und Momente bewegt und diese Bewegung durch translatorische und rotatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen beschrieben wird. Daraus resultierenden entsprechend Lagewinkel und Position. Als Grundlage dienen rechtshändige kartesische Koordinatensysteme mit der  $x$ -Achse bezogen auf die Bewegungsrichtung nach vorne, die  $y$ -Achse nach rechts und die  $z$ -Achse in Richtung der Gravitation nach unten orientiert. Der Ursprung aller verwendeter Koordinatensysteme wird im Schwerpunkt des betrachteten Systems definiert.

Die Position wird in dem Positionsvektor

$$\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)^T \quad (2.20)$$

angegeben. Dazu kommen die in die jeweiligen Richtungen orientierten Kraft-  $\vec{F}$  und Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{V}$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T, \quad (2.21)$$

$$\vec{V} = (u, v, w)^T. \quad (2.22)$$

Die Rotationen um die drei Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  werden in der Reihenfolge als Rollen, Nicken und Gieren bezeichnet. Die zugehörigen Momente  $\vec{Q}$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\omega}$  werden mit

$$\vec{Q} = (L, M, N)^T, \quad (2.23)$$

$$\vec{\omega} = (p, q, r)^T, \quad (2.24)$$

beschrieben, wobei  $L$  als Rollmoment,  $q$  als Nickgeschwindigkeit, usw. bezeichnet wird. Die gesamte Drehlage wird mit der Eulerwinkelfolge  $\Phi$ ,  $\Theta$  und  $\Psi$  angegeben und mit dem Vektor

$$\vec{\phi} = (\Phi, \Theta, \Psi)^T \quad (2.25)$$

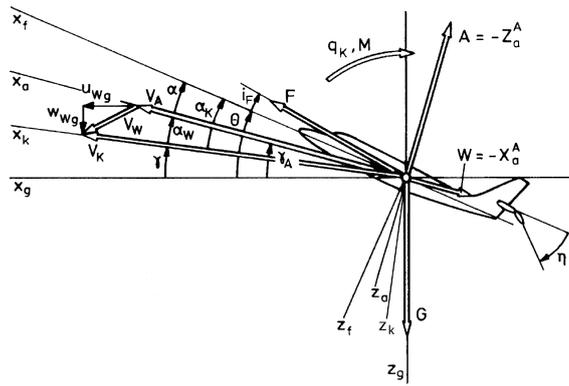
zusammengefasst. Dabei wird mit  $\Phi$  der Hängewinkel (oder auch Rollwinkel), mit  $\Theta$  der Nicklagewinkel (auch Längsneigung) und mit  $\Psi$  der Steuerkurs oder Azimut (auch Gierwinkel) bezeichnet.

Aufgrund der komplexen nichtlinearen Natur der Bewegungsgleichungen, mit denen die Bewegung im Raum beschrieben wird, werden sowohl flugmechanische Analysen als auch Entwürfe von Regelungen hierfür auf Basis von linearisierten Differentialgleichungen durchgeführt. Für eine detaillierte Beschreibung dieser Differentialgleichungen sei an dieser Stelle auf den Anhang B sowie Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 5) verwiesen. Innerhalb dieser Betrachtung wird darüber hinaus eine Aufteilung in die beiden wesentlichen Dynamiken vorgenommen, welche im Allgemeinen in guter Näherung in der linearisierten Form entkoppelt voneinander betrachtet werden können.

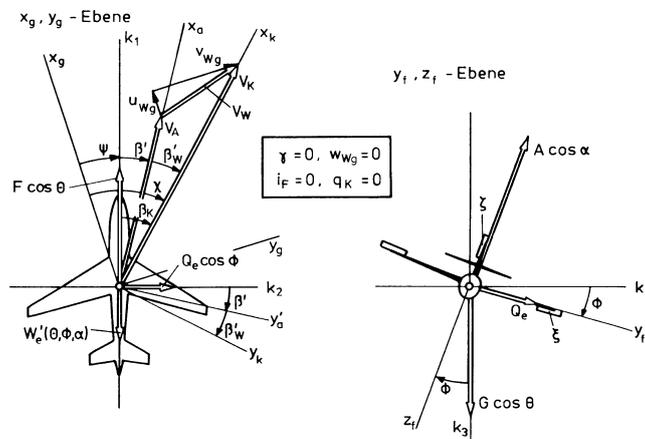
### 2.3.1 Aufteilung der Dynamik

Wie in Brockhaus u. a. (2011, S. 261) beschrieben, lassen sich die symmetrischen und unsymmetrischen Zustandsgrößen oftmals getrennt voneinander betrachten. Dabei werden die symmetrischen Zustandsgrößen unter dem Begriff der Längsbewegung und die unsymmetrischen Zustandsgrößen unter dem Begriff der Seitenbewegung zusammengefasst. Die beiden Dynamiken sind im Detail in Abbildung 2.1 dargestellt, welche aus Brockhaus u. a. (2011, S. 66) entnommen wurde. Dabei wird unter der Längsbewegung die Bewegung in der  $xz$ -Ebene, also die Bewegung vertikal und entlang der Längsachse, verstanden. Ebenso zur Längsdynamik gehört die Rotation um die Querachse ( $y$ -Achse), welche auch als Nickbewegung bezeichnet wird. Die Seitenbewegung beschreibt die Dynamik in der  $xy$ - sowie  $yz$ -Ebene. Dazu gehören die Rotationen um die  $x$ - und  $z$ -Achse, die sogenannte Roll- ( $x$ -Achse) und Gierbewegung ( $z$ -Achse), sowie die durch die Seitenkraft  $Y$  quer zur Längsachse (in  $y$ -Richtung) induzierte translatorische Bewegung.

Zur Beschreibung der Dynamik werden in Abbildung 2.1 verschiedene Koordinatensysteme verwendet. Die grundlegenden Differentialgleichungen der Bewegung werden im sogenannten körperfesten Koordinatensystem (bei Flugzeugen auch oftmals als flugzeugfest bezeichnet) beschrieben, welches mit der  $x$ -Achse entlang der Längsachse in Flugrichtung nach vorne orientiert ist. Entsprechend rechtwinklig nach rechts ausgerichtet ist die  $y$ -Achse dieses Koordinatensystems und orthogonal zu der  $xy$ -Ebene nach unten ist dessen  $z$ -Achse orientiert. Alle in diesem Koordinatensystem angegeben



(a) Längsbewegung



(b) Seitenbewegung

Abbildung 2.1: Darstellung der Kinematik der Flugzeugbewegung im Raum (Brockhaus u. a., 2011, S. 66)

Größen werden mit dem Index  $f$  versehen. Die Bewegung wird mit Vektoren der Bahngeschwindigkeit und Bahndrehgeschwindigkeit

$$\vec{V}_{Kf} = (u_K, v_K, w_K)_f^T, \tag{2.26}$$

$$\vec{\omega}_{Kf} = (p_K, q_K, r_K)_f^T, \tag{2.27}$$

im bereits genannten körperfesten Koordinatensystem beschrieben. Die wirkenden aerodynamischen Kräfte, also die Auftriebs- und Widerstandskräfte, werden in dem aerodynamischen Koordinatensystem beschrieben (Index  $a$ ). Dessen Lage relativ zum körperfesten Koordinatensystem wird durch den Anstellwinkel  $\alpha$  und den Schiebewinkel  $\beta$  beschrieben. Dabei beschreibt  $\alpha$  den Winkel zwischen  $x_f$ -Achse und der Achse  $x_a$  des aerodynamischen Koordinatensystems bei einer Rotation um die  $y$ -Achse. Der Schiebewinkel  $\beta$  bezeichnet dementsprechend den Winkel zwischen den beiden Achsen bei einer Drehung um die  $z$ -Achse. Die Gewichtskraft wird im sogenannten geodätischen (erdlotfesten) Koordinatensystem beschrieben (Index  $g$ ). In diesem wirkt

die Gewichtskraft entlang der Gravitation immer erdlotfest in  $z$ -Richtung nach unten, und kann mit Hilfe der beiden Lagewinkel  $\Phi$  (Hängewinkel) und  $\Theta$  (Nicklagewinkel) auf die körperfesten Achsen aufgeteilt werden.

Zusätzlich zu den bereits angesprochenen Koordinatensystemen befindet sich in Abbildung 2.1 noch ein weiteres, das sogenannte bahnfeste (oder flugbahnfeste) Koordinatensystem mit dem Index  $k$ . Dieses ist mit der  $x$ -Richtung entlang des Bahngeschwindigkeitsvektor  $\vec{V}_k$  orientiert und wird somit zur Beschreibung der Bewegungsrichtung verwendet. Gegenüber dem geodätischen (erdlotfest –  $g$ ) Koordinatensystem wird dessen Lage mit dem Bahnazimut  $\chi$  und dem Bahnneigungswinkel  $\gamma$  beschrieben. Dabei beschreibt  $\chi$  den Winkel zwischen der geodätischen  $x_g$  und bahnfesten  $x_k$  Achse bei einer Rotation um die  $z$ -Achse, während  $\gamma$  diesen Winkel bei einer Rotation um die  $y$ -Achse beschreibt. Die Lage des Bahngeschwindigkeitsvektors (2.26) im körperfesten Koordinatensystem wird durch die drei Winkel  $\alpha_K$  (Bahnstellwinkel),  $\beta_K$  (Bahnschiebewinkel) und  $\mu_K$  (Bahnhängewinkel) beschrieben. Unter der Annahme von kleinen Winkeln lässt sich mit

$$\alpha_K = \Theta - \gamma, \quad (2.28)$$

$$\beta_K = \chi - \Psi, \quad (2.29)$$

$$\mu_K = \Phi \quad (2.30)$$

eine Berechnungsvorschrift diese drei Winkel angeben (Brockhaus u. a., 2011, Kapitel 2).

Es sei zusätzlich an dieser Stelle noch erwähnt, dass sich das aerodynamische und bahnfeste Koordinatensystem nur unter dem Einfluss von äußeren Störungen durch beispielsweise Wind unterscheiden. Wird nur das Eigenverhalten betrachtet, ist diese Unterscheidung nicht notwendig. Somit kann auf die Unterscheidung zwischen den aerodynamischen Winkel und Winkelgeschwindigkeiten wie beispielsweise  $\alpha$ ,  $q_A$ , usw. sowie dessen Pendanten  $\alpha_K$ ,  $q_K$ , usw. im bahnfesten Koordinatensystem verzichtet werden. Daher werden im folgenden die bahnfesten Indizes nicht mehr angegeben (Brockhaus u. a., 2011, S. 320).

### 2.3.2 Linearisierte Bewegungsgleichungen

Aufgrund der Komplexität der nichtlinearen Bewegungsgleichungen hat es sich im Rahmen der Flugmechanik etabliert, sowohl flugmechanische Analysen als auch Entwürfe von Regelungen basierend auf linearisierten Modellen durchzuführen. Um eine lineare Approximation eines nichtlinearen Systems zu erhalten, kann wie in Kapitel 2.2.2 beschrieben, eine Linearisierung in Betriebspunkten durchgeführt werden. Für diese Betriebspunkte wird in flugmechanischen Betrachtungen in der Regel der Zustand eines symmetrischen Geradeausflugs betrachtet. Damit wird ein Flugzustand bezeichnet, in

dem die Geschwindigkeit  $V_K$  und der Bahnwinkel  $\gamma$  konstant, und alle anderen Winkel und Drehgeschwindigkeiten außer dem Anstellwinkel  $\alpha$  gleich null sind (Brockhaus u. a., 2011, S. 269). In einem solchen Zustand wird das System als stationär getrimmt bezeichnet, wenn es diesen symmetrischen Geradeausflug selbstständig beibehält, ohne dass Eingriffe von außen erforderlich sind. Daher spricht man auch von einer Linearisierung in Trimpunkten.

Die konkreten für die Trimmung erforderlichen Stellgrößen hängen sehr stark von verschiedenen Einflüssen ab, die im Detail im folgenden Kapitel 2.3.3 beschrieben werden. Werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in einem solchen Trimpunkt linearisiert, ergeben sich lineare Differentialgleichungen welche die Abweichung von dem gewählten Trimpunkt beschreiben. Im Folgenden werden die dabei erhaltenen linearen Zustandsraummodelle der beiden bereits genannten Bewegungsformen, der Längs- und Seitenbewegung vorgestellt. An dieser Stelle sei erwähnt, dass zur besseren Übersicht die in Kapitel 2.2.2 verwendeten  $\Delta$  als Index zur Kennzeichnung von Abweichungsgrößen (Abweichung vom Betriebspunkt 0) weggelassen wurden. Die Zustandsgrößen in den im Folgenden dargestellten Systemen beschreiben daher die jeweilige Abweichung vom zugehörigen Zustand im gewählten Trimpunkt. Das zugrunde liegende nichtlineare System aus Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 5), welches im Detail in Anhang B erläutert wird, wurde in körperfesten Koordinaten beschrieben. Darüber hinaus wird mit diesem Modell nur das Eigenverhalten betrachtet und keine äußeren Störungen berücksichtigt, sodass das bahnfeste Koordinatensystem identisch mit dem aerodynamischen ist. Wie bereits in Kapitel 2.3.1 erwähnt, wird aufgrund der Gleichheit der beide Koordinatensysteme auf die Indizierung mit dem Index  $k$  verzichtet.

Es wird zunächst die Längsbewegung betrachtet, welche in Abbildung 2.1a dargestellt ist. Wie im vorherigen Kapitel bereits erläutert, wird darunter die Bewegung in der  $xz$ -Ebene, also entlang der Längsachse, sowie dessen Rotation um die die Querachse verstanden. Die linearisierte Dynamik der Längsbewegung wird mit dem Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{V}_K \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha & M_u & 0 \\ 1 & Z_\alpha & Z_u & 0 \\ 0 & X_\alpha - g & X_u & -g \\ 0 & -Z_\alpha & -Z_u & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \alpha \\ V_K \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_f & M_\eta \\ Z_f & Z_\eta \\ X_f & X_\eta \\ -Z_f & -Z_\eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_T \\ \eta \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

beschrieben (Brockhaus u. a., 2011, S.320, ohne Berücksichtigung der Klappen  $\kappa$ ). Die zugehörigen Zustandsgrößen bestehen aus den bereits definierten Winkeln  $\alpha$  und  $\gamma$ , sowie der Fluggeschwindigkeit  $V_K$  und der Nickgeschwindigkeit  $q$ . Als Stellgrößen stehen der Höhenruderausschlag  $\eta$  sowie der Triebwerksschub  $F_T$  zur Verfügung. In den Matrizen in Gleichung (2.31) bezeichnen die Matrixeinträge  $Z_i$  die partiellen Ableitungen der Normalkraft ( $Z$ ) bezogen auf beispielsweise die Nickrate  $q$ , den Anstellwinkel  $\alpha$  oder den Ausschlag des Höhenruders  $\eta$  in dem betrachteten stationär getrimmten

Flugzustand. Dementsprechend sind die Einträge  $M_i$  die partiellen Ableitungen des Nickmoments ( $M$ ) bezogen auf die jeweils indizierte Größe. Diese werden als Derivative der Längsbewegung bezeichnet und durch die bereits erläuterte Linearisierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Trimpunkten ermittelt. Mit  $g$  wird die Erdbeschleunigung bezeichnet. Für die detaillierte Berechnung der Derivative sei an dieser Stelle auf Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 7) verwiesen.

Die Längsbewegung wird in der flugmechanischen Betrachtung zusätzlich noch ein weiteres mal aufgeteilt. Die beiden Teile werden als Nick- und Bahndynamik bezeichnet, wobei die Zustandsgrößen  $(q, \alpha)^T$  der Nickdynamik und die Zustandsgrößen  $(V, \gamma)^T$  der Bahndynamik zugeordnet werden. Während die Nickdynamik meist durch eine gedämpfte, kurzperiodische Schwingung charakterisiert wird, ist die Periodendauer der Bahndynamik bedeutend größer. Aus diesem Grund ist es in guter Näherung möglich, die Kopplungen zwischen Nick- und Bahndynamik zu vernachlässigen. Es ist daher in der Flugdynamik und auch dem Entwurf von Flugreglern üblich, die beiden Dynamiken unabhängig voneinander zu betrachten. Des weiteren wird angenommen, dass der Einfluss des Schubs  $F_T$  auf die Nickdynamik bedeutend kleiner als der des Höhenruders ist und somit vernachlässigt werden kann. Es ergibt sich mit

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_\eta \\ Z_\eta \end{bmatrix} \eta \quad (2.32)$$

das linearisierte Zustandsraummodell der Nickdynamik (Brockhaus u. a., 2011, S.320 - 321).

Analog zur Längsbewegung werden auch in der in Abbildung 2.1b dargestellten Seitenbewegung die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in dem Flugzustand des symmetrischen Geradeausflugs linearisiert. Die Verwendung des stationären Geradeausflugs als Betriebspunkt bedeutet, dass die Ruhegrößen aller asymmetrischen Größen in Abbildung 2.1b, also der Hängewinkel  $\Phi$  und die beiden Winkel um die  $z$ -Achse (Bahnwinkel  $\psi$  und Schiebewinkel  $\beta$ ), sowie alle Drehgeschwindigkeiten gleich Null sind. Die Fluggeschwindigkeit  $V_K$  ist aufgrund des gewählten Flugzustands wie schon in der Längsbewegung konstant (Brockhaus u. a., 2011, S. 277). In diesem Zustand wird das System als stationär getrimmt betrachtet und dann in diesem Trimpunkt linearisiert. Somit ergibt das linearisierte Zustandsraummodell der Seitenbewegung zu

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta & N_p & 0 \\ -1 & Y_\beta & 0 & g/v_0 \\ L_r & L_\beta & L_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} N_\xi & N_\zeta \\ Y_\xi & Y_\zeta \\ L_\xi & L_\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

wie es auch in Brockhaus u. a. (2011, S.327) beschrieben ist. Die Zustandsgrößen von (2.33) bestehen aus den bereits erläuterten Winkeln  $\Phi$  und  $\beta$ , sowie den dazugehörigen Drehgeschwindigkeiten  $p$  (Rollgeschwindigkeit) und  $r$  (Giergeschwindigkeit). Mit  $g$  wird

weiterhin die Erdbeschleunigung bezeichnet und  $V_0$  beschreibt die Fluggeschwindigkeit in dem das System getrimmt wurde. Die primären Stellgrößen der Seitenbewegung sind die Ausschläge des Querruders  $\xi$  sowie des Seitenruders  $\zeta$ .

Die Matrixeinträge in (2.33) beschreiben analog zur Längsdynamik in (2.31) die partiellen Ableitungen der zugehörigen Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der indizierten Größe. Mit  $N_i$  werden dementsprechend die partiellen Ableitungen des Rollmoments ( $N$ ) im betrachteten Trimpunkt in Abhängigkeit der Zustände  $r$ ,  $\beta$  und  $p$  sowie der Eingangsgrößen  $\xi$  und  $\zeta$  bezeichnet. Analog bezeichnen die Einträge  $Y_i$  und  $L_i$  die partiellen Ableitungen der Seitenkraft  $Y$  und des Giermoments  $L$  bezogen auf die jeweils indizierte Größe. Diese Werte bezeichnen die Derivative der Seitenbewegung und resultieren wie deren Pendant der Längsbewegung aus der Linearisierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen im betrachteten Trimpunkt. Für eine detaillierte Darstellung der Berechnung sei ebenfalls auf Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 7) verwiesen.

### 2.3.3 Beschreibung der äußeren Einflüsse

Wie im vorherigen Kapitel erläutert, hängen die für die Trimmung erforderlichen Stellgrößen maßgeblich von äußeren Einflüssen ab. Die Bewegung wird durch von außen angreifenden Kräfte bestimmt. Neben dem Triebwerksschub  $F_T$  sind dies die aerodynamischen Kräfte, welche in Form von Auftrieb und Widerstand auftreten. Der Auftrieb dient dazu, das fliegende System in der Luft zu halten und kann darüber hinaus mit Hilfe von aerodynamischen Stellflächen zur Steuerung verwendet werden. Die Auftriebskraft  $F_A$ , die ein sich in einem Luftstrom bewegendes Objekt erzeugt, wird durch

$$F_A = \frac{1}{2} \bar{\rho} V_A^2 S C_A = \bar{q} S C_A \quad (2.34)$$

beschrieben. Dabei wird mit  $\bar{\rho}$  die Luftdichte, mit  $V_A$  die relative Geschwindigkeit des Objektes zum Luftstrom und mit  $S$  die Fläche des Objektes bezeichnet. Der Einfluss der Geschwindigkeit und der Dichte wird zusätzlich oft mit dem dynamischen Druck (oder Staudruck)  $\bar{q}$  zusammengefasst. Mit  $C_A$  wird der dimensionslose Auftriebsbeiwert bezeichnet, welcher von der Geometrie des umströmten Objektes und dessen Anstellwinkel abhängt. Die Geometrie, und damit die Fläche  $S$  des betrachteten Objektes sind konstant, womit der Auftrieb durch die drei Größen Luftdichte  $\bar{\rho}$ , Geschwindigkeit  $V_A$  und Anstellwinkel des Objektes verändert werden kann (Brockhaus u. a., 2011, S. 100). Bei einer konventionellen Flugzeugkonfiguration beispielsweise wird der Auftrieb zum größten Teil durch dessen Tragflügel erzeugt. Als weitere relevante Auftriebsflächen sind die bereits genannten aerodynamischen Steuerflächen zu nennen, welche jeweils lokal eine Auftriebsänderung durch eine Änderung des Anstellwinkels (Ausschlag der Fläche) erzeugen. Der durch die Auftriebsflächen erzeugte Auftrieb wirkt entsprechend

ebenfalls lokal, wodurch dieser zusätzlich ein Moment um den Schwerpunkt des Systems verursacht. Dieses zur Steuerung verwendete Moment wird direkt durch die in Kapitel 2.3.2 angegebenen Winkel  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  kommandiert.

Wie in Kapitel 2.3.2 erläutert wurde, werden die linearisierten Differentialgleichungen der Flugdynamik mit Hilfe einer Linearisierung in einem stationär getrimmten Zustand, einem Trimpunkt ermittelt. Damit das System stationär getrimmt ist, muss demnach die Summe aller wirkender Kräfte und Momente um den Schwerpunkt gleich Null sein. Der Ausgangspunkt für die zu bestimmende Trimmung ist die gewünschte Flughöhe und -geschwindigkeit. Wie es in Brockhaus u. a. (2011, S. 123) beschrieben ist, ergibt sich aus der Flughöhe direkt die Dichte  $\bar{\rho}$  der umgebenden Atmosphäre. Dabei gilt es zu beachten, dass mit einer steigenden Höhe die umgebende Luftdichte sinkt. Diese bestimmt zusammen mit der gewählten Fluggeschwindigkeit  $V_K$  den aktuell wirkenden Auftrieb, wie es in (2.34) angegeben wurde. Die für die Berechnung des Auftriebs (2.34) erforderliche relative Geschwindigkeit zum Luftstrom ergibt sich dabei aus der Differenz der Bahngeschwindigkeit  $V_K$  und der Windgeschwindigkeit  $V_W$ . Unter Vernachlässigung des Windeinflusses ist sie damit identisch mit der Bahngeschwindigkeit. Um den für den stationären Zustand erforderlichen Auftrieb zu erzeugen, muss ein entsprechendes  $C_A$  vorliegen, wodurch sich der für die Trimmung erforderliche Anstellwinkel  $\alpha$  ergibt. Gleichzeitig gilt es, dass durch den Auftrieb erzeugte Nickmoment so zu kompensieren, dass die Momentensumme um den Schwerpunkt sich ebenfalls zu Null ergibt. Hierzu wird der Höhenruderausschlag  $\eta$  verwendet, welcher ebenfalls ein Moment um den Schwerpunkt bewirkt. Dieses Moment wirkt entgegen dem durch den Auftrieb erzeugten Moment und gewährleistet somit die stationäre Fluglage. Für Details sowie die physikalischen Zusammenhänge im Hinblick auf die Trimmung sei auf Hull (2007, S. 213 - 214) verwiesen. Mit Hilfe der dadurch erhaltenen Trimmung können dann die nichtlinearen Differentialgleichungen linearisiert werden und es ergeben sich die in Kapitel 2.3.2 beschriebenen Zustandsraummodelle. Aufgrund der beschriebenen Abhängigkeit der Trimmung von der aktuellen Flughöhe und -geschwindigkeit ergibt sich die bereits genannte Abhängigkeit der Matrizen der betrachteten Modelle von diesen beiden Parametern.

Ein weiterer zu erwähnender Zusammenhang ist der Einfluss der aktuellen Flughöhe und -geschwindigkeit auf die Wirksamkeit der Steuerflächen. Wie bereits erwähnt, erzeugen diese ein Moment um den Schwerpunkt des Systems, indem sie lokal den wirkenden Auftrieb verändern. Der Auftrieb ist nach (2.34) neben dem Auftriebsbeiwert  $C_A$  auch von dem aktuellen Staudruck  $\bar{q}$  abhängig, weshalb sich der erzeugte Auftrieb bei einem konstanten  $C_A$  entsprechend je nach aktueller Höhe und Geschwindigkeit verändert. Somit wird für die Erzeugung eines Stellmomentes je nach aktuellem Flugzustand ein anderer Auftriebsbeiwert benötigt. Dieser wird bei den Steuerflächen durch eine Änderung des Ausschlags erreicht, da dieser den Anstellwinkel der Fläche und damit auch den Auftriebsbeiwert verändert. Das hat zur Folge, dass für die Erzeugung des

gleichen Momentes bei großen Flughöhen (niedrige Luftdichte  $\bar{\rho}$ ) und bei niedrigen Geschwindigkeiten deutlich höhere Ausschläge der Steuerflächen erforderlich sind als es bei niedrigeren Höhen und höheren Geschwindigkeiten der Fall ist.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich ebenfalls die bereits in der Einleitung erläuterte Abhängigkeit der Trimmung von der Masse und Massenverteilung. Die Gesamtmasse muss für einen stationären Flugzustand durch den Auftrieb kompensiert werden, wodurch sich aus einer Änderung der Masse unmittelbar ergibt, dass für einen stationären Flugzustand auch ein anderer Auftrieb erforderlich ist. Daraus resultieren entsprechend andere für die Trimmung erforderliche Größen für den Anstellwinkel  $\alpha$  und den Höhenruderausschlag  $\eta$ . Es folgen entsprechend auch andere Einträge in den Matrizen der linearisierten Bewegungsgleichungen in Kapitel 2.3.2. Eine ähnliche Überlegung lässt sich durch eine Veränderung der Massenverteilung aufstellen, wodurch eine Verschiebung des Schwerpunkts folgt. Durch diese Verschiebung wird das Momentengleichgewicht verändert und es ist für die Aufrechterhaltung eines stationären Flugzustandes ein anderes Nickmoment, und damit auch ein anderer Höhenruderausschlag  $\eta$  erforderlich. Auf den für die Trimmung erforderlichen Anstellwinkel  $\alpha$  hat die Schwerpunktlage hingegen keinen Einfluss, da sich mit dessen Änderung der für einen stationären Flugzustand erforderliche Auftrieb nicht ändert (Hull, 2007, S. 214). Es ergibt sich insgesamt für die Matrizen in den linearisierten Differentialgleichungen in Kapitel 2.3.2 zusätzlich zur Flughöhe und -geschwindigkeit auch ein entsprechender Einfluss von Masse und Schwerpunktlage.

Darüber hinaus nimmt die Schwerpunktlage auch noch einen wichtigen Teil in der Stabilitäts- und Steuerbarkeitsbetrachtung der Längsbewegung ein. Für die Lage des Schwerpunkts existiert aus diesem Grund ein festgelegter Bereich, innerhalb dessen sich die Schwerpunktlage befinden muss. Dabei wird nach Brockhaus u. a. (2011, S.114-115) die vordere Grenze der Schwerpunktlage als Trimmbarkeitsgrenze und die hintere Grenze als Stabilitätsgrenze bezeichnet. Unter der Trimmbarkeitsgrenze wird die Schwerpunktlage verstanden, ab der der für die Trimmung erforderliche Höhenruderausschlag  $\eta$  größer wird als der maximal mögliche Ausschlag  $\eta_{max}$  (Hull, 2007, S.214). Die Stabilitätsgrenze bezeichnet die Schwerpunktlage, ab der das System in der Längsbewegung keine statische Stabilität mehr aufweist. Unter der statischen Stabilität versteht man, dass die infolge einer äußeren Störung erzeugten Kräfte und Momente dazu führen, dass die Störung reduziert wird und das System selbstständig in die Ausgangslage zurück kehrt. Bezogen auf die Längsbewegung bedeutet das, dass eine Veränderung des Anstellwinkels  $\alpha$  infolge einer äußeren Störung zu einem entgegen der Auslenkung wirkenden Moment führt. Somit wird die Störung im Anstellwinkel durch das dadurch erzeugte Nickmoment selbstständig kompensiert. Das bedeutet, dass das Vorzeichen des Faktors, welcher die Wirkung des Anstellwinkels auf das Nickmoment beschreibt, negativ sein muss. Dieser Faktor wird in der Regel als  $C_{m_\alpha}$  bezeichnet und beschreibt die Wirkung von  $\alpha$  auf das Nickmoment  $M$ . Für die Bestimmung der

statischen Stabilitätsgrenze ist der sogenannte Neutralpunkt relevant. Dieser Punkt ist so definiert, dass bei der Betrachtung des Nickmoments bezogen auf diesen Punkt dieses unabhängig von  $\alpha$  ist. Im Neutralpunkt gilt also  $C_{m_\alpha} = 0$ . Liegt der Schwerpunkt genau in diesem Neutralpunkt, bewirkt eine Änderung von  $\alpha$  keine Änderung in  $M$  und eine Störung wird nicht mehr selbstständig abgebaut. Im Hinblick auf die statische Stabilität stellt dieser Punkt also die Stabilitätsgrenze dar, weil sich an diesem Punkt das Vorzeichen von  $C_{m_\alpha}$  umkehrt. Liegt der Schwerpunkt hinter dem Neutralpunkt, ist das Vorzeichen von  $C_{m_\alpha}$  positiv und das System dementsprechend statisch instabil. Eine solche Instabilität ist in der Regel unerwünscht, weshalb sich die hintere zulässige Schwerpunktlage aus der Lage des Neutralpunkts ergibt (Hull, 2007, S. 217). Wandert der Schwerpunkt ausgehend vom Neutralpunkt nach vorne in Richtung der Trimmbarkeitsgrenze, nimmt der Betrag von  $C_{m_\alpha}$  zu. Somit wird das Moment, welches einer Anstellwinkeländerung entgegen wirkt größer, je weiter vorne sich die Schwerpunktlage befindet. Demnach reduziert sich die Steuerbarkeit des System mit zunehmender Wanderung des Schwerpunkts nach vorne, weil das der Bewegung entgegen wirkende Moment entspricht immer weiter zunimmt und auch gewünschten Bewegungen somit immer stärker entgegen wirkt. Die Lage des Schwerpunkt wird bei Flugzeugen oftmals in Relation zur Flügeltiefe angeben. Als Bezugsgröße wird dabei die mittlere Flügeltiefe (*mean aerodynamic chord* – MAC) verwendet und die Lage des Schwerpunkts in Prozent der MAC angegeben.

### 3 Reglerentwurf für LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern

Im Folgenden werden die Grundlagen des Reglerentwurfes für LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern vorgestellt, welche eine Unterklasse der in Kapitel 2 vorgestellten LPV-Systeme darstellen. Als Ausgangspunkt dient mit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}(\rho) \\ \mathbf{C}(\rho) & \mathbf{D}(\rho) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ein allgemeines LPV-System, für dessen Einträge die in Kapitel 2 formulierten Definitionen gelten. Bei der Betrachtung von LPV-Systemen wird im Allgemeinen angenommen, dass alle in Vektor  $\rho$  zusammengefassten Parameter messbar und in Echtzeit verfügbar sind. In der in dieser Arbeit betrachteten Unterklasse von LPV-Systemen ist dies jedoch nicht gegeben und nur ein Teil des Vektors  $\rho$  ist messbar. Für diesen Fall wird im Folgenden die Beschreibung eines LPV-Systems mit nur partiell oder auch teilweise messbaren Parametern verwendet.

Für diesen speziellen Fall von LPV-Systemen werden in diesem Kapitel Methodiken für einen Reglerentwurf vorgestellt. Hierbei wird sich nur auf solche konzentriert, die Spezifikationen an das System basierend auf dem Eingangs-/Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises definieren. Diese Methoden wurden für LPV-Systeme erstmals von Becker u. a. (1993), Apkarian u. a. (1995) oder Wu u. a. (1996) eingeführt. Die in den angegebenen Referenzen beschriebenen Ansätze basieren auf einer Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm. Wie beispielsweise in Boyd u. a. (1994, S. 91) gezeigt wurde, entspricht die induzierte  $L_2$ -Norm eines linearen, zeitinvarianten (*linear time-invariant* - LTI) Systems dessen  $H_\infty$ -Norm. Darauf aufbauend lässt sich die  $H_\infty$ -Theorie (Gahinet und Apkarian, 1994) für den Reglerentwurf von LTI-Systemen für die Anwendung auf LPV-Systeme erweitern. Im Folgenden werden Ansätze zum Reglerentwurf basierend auf dieser Norm-Minimierung für die Anwendung für die genannte Unterklasse von LPV-Systemen mit nur partiell messbaren Parametern erweitert. Neben der erstmaligen Definition dieser Unterklasse wurde bereits in Köse und Jabbari (1999) ein Ansatz für einen Reglerentwurf bei einer spezielle Form von LPV-Systemen beschrieben. Die in diesem Kapitel vorgestellten Erweiterungen für Entwürfe von Zustandsrückführungen stammen aus den Veröffentlichungen Goßmann u. a. (2017) und Goßmann u. a. (2018) und ermöglichen eine allgemeinere Anwendung auf LPV-Systeme. Der Ansatz für den Entwurf einer Ausgangsrückführung basiert auf der in Goßmann und Svaricek (2019) vorgestellten Erweiterung einer LTI-Methode, welcher für die Anwendung auf LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern entsprechend erweitert wurde.

### 3.1 Induzierte $L_2$ -Norm

Die induzierte  $L_2$ -Norm eines Systems  $\mathbf{G}$ , wie beispielsweise dem in Gleichung (3.1) dargestellten LPV-System, beschreibt die größtmögliche Verstärkung des Systems von dessen Eingang  $w(t)$  auf den Ausgang  $z(t)$ . Die induzierte  $L_2$ -Norm eines LPV-Systems stellt dementsprechend die größtmögliche Verstärkung für alle zulässigen Trajektorien des in Gleichung (2.6) definierten Parametervektors  $\rho \in \mathcal{A}$  dar. Beinhaltet der Eingang  $w(t)$  ausschließlich auf das System wirkende Störgrößen, stellt die induzierte  $L_2$ -Norm außerdem ein Maß für die Störunterdrückung dar. Mathematisch betrachtet ist die induzierte  $L_2$ -Norm nach Becker und Packard (1994) oder Wu (1995, S.62) durch

$$\|\mathbf{G}_{wz}\|_{ind2} = \sup_{\rho \in \mathcal{A}, w \in L_2 \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (3.2)$$

definiert. Die Bedingung  $w \in L_2 \setminus \{0\}$  stellt dabei sicher, dass die Norm in jedem Fall wohldefiniert ist. Wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben, entspricht die induzierte  $L_2$ -Norm eines LTI-Systems dessen  $H_\infty$ -Norm. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs ist es möglich, die auf der  $H_\infty$ -Norm basierenden Entwurfsverfahren für LTI-Systeme auch auf allgemeine, und damit auch LPV-Systeme anzuwenden. Eine gute Übersicht über diese LTI-Verfahren bietet Skogestad und Postlethwaite (2001).

Die induzierte  $L_2$ -Norm eines in Definition 2.2 beschriebenen LPV-Systems lässt sich analog zur  $H_\infty$ -Norm für LTI-Systeme mit Hilfe von LMIs nach oben abschätzen. Für LTI-Systeme kann dafür das *Bounded Real Lemma* verwendet werden, welches beispielsweise in Gahinet und Apkarian (1994, S. 426) definiert wurde. Basierend darauf wurde unter anderem von Wu u. a. (1996) eine Generalisierung für LPV-Systeme erarbeitet. Das daraus resultierende generalisierte *Bounded Real Lemma* für LPV-Systeme ist in Theorem 3.1 beschrieben.

**Theorem 3.1** (Generalisiertes *Bounded Real Lemma* für LPV-Systeme). *Gegeben sei eine parameterabhängige Lyapunov-Matrix  $\mathbf{Q}(\rho)$  nach Definition 2.5 und eine positive Zahl  $\bar{\gamma}$ , für die*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}(\rho, \dot{\rho}) + \mathbf{A}^T(\rho)\mathbf{Q}(\rho) + \mathbf{Q}(\rho)\mathbf{A}(\rho) & \mathbf{Q}(\rho)\mathbf{B}(\rho) & \mathbf{C}^T(\rho) \\ \mathbf{B}^T(\rho)\mathbf{Q}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\rho) \\ \mathbf{C}(\rho) & \mathbf{D}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.3)$$

für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  gilt. In diesem Fall ist das LPV-System quadratisch stabil für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  und dessen induzierte  $L_2$ -Norm ist durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt. (Herleitung siehe Wu u. a. (1996) oder Gahinet u. a. (1996))

Die in Theorem 3.1 beschriebene obere Schranke  $\bar{\gamma}$  der induzierten  $L_2$ -Norm lässt sich bestimmen, indem eine Lyapunov-Matrixfunktion  $\mathbf{Q}(\rho) > 0, \forall \rho \in \mathcal{A}$  gefunden wird,

für die  $\bar{\gamma}$  minimal wird und (3.3) erfüllt ist. Es gilt daher ein Optimierungsproblem zu lösen. Die in (3.3) beschriebene Bedingung wird durch eine LMI charakterisiert, womit das Problem zur Bestimmung der oberen Schranke der induzierten  $L_2$ -Norm eine konvexe Bedingung für die Variablen darstellt. Solche Optimierungsprobleme sind numerisch sehr effizient lösbar. Ist dies erfolgreich, ist das System zum einem aufgrund der positiven Definitheit von  $\mathbf{Q}(\rho)$ ,  $\forall \rho \in \mathcal{A}$  nach (2.13) quadratisch stabil und zum anderen gilt für die induzierte  $L_2$ -Norm

$$\|\mathbf{G}_{wz}\|_{ind2} < \bar{\gamma}. \quad (3.4)$$

Die Existenz einer oberen Schranke  $\bar{\gamma}$  für die induzierte  $L_2$ -Norm ist also mit der quadratischen Stabilität des Systems verknüpft, sodass sich im Hinblick auf Entwurfsverfahren basierend auf (3.3) feststellen lässt, dass mit einer erfolgreichen Bestimmung von  $\bar{\gamma}$  auch die quadratische Stabilität des Systems sichergestellt werden kann.

Abschließend ist noch zu bemerken, dass für  $\mathbf{P}(\rho) = \mathbf{Q}^{-1}(\rho)$  mit

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\rho, \dot{\rho}) + \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\rho) + \mathbf{P}(\rho)\mathbf{A}^T(\rho) & \mathbf{B}(\rho) & \mathbf{P}(\rho)\mathbf{C}^T(\rho) \\ \mathbf{B}^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\rho) \\ \mathbf{C}(\rho)\mathbf{P}(\rho) & \mathbf{D}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

eine äquivalente Formulierung der in (3.3) beschriebenen LMI existiert.

## 3.2 Partiiell messbare Parameter

Bei der Betrachtung von LPV-Systemen wird im Allgemeinen angenommen, wie in Kapitel 2.2 und einleitend in diesem Kapitel erläutert, dass der Parametervektor  $\rho$  zwar im Vorfeld nicht bekannt ist, jedoch alle Komponenten des Vektors in Echtzeit messbar sind. Im Hinblick auf die praktische Anwendung von LPV-Reglern kann dies eine merkbare Einschränkung darstellen. Existieren in dem betrachteten LPV-System parametrische Abhängigkeiten, die im Betrieb messtechnisch nicht erfasst oder mit Hilfe von Beobachtern geschätzt werden können, ist eine Betrachtung dieser Abhängigkeit als Teil des Parametervektors  $\rho$  bei der konventionellen Betrachtung von LPV-Systemen nicht möglich. Aus diesem Grund wurde in Goßmann u. a. (2017) in solchen Fällen die Verwendung von LPV-Systemen mit nur partiell messbaren Parametern vorgeschlagen.

Eine Definition dieser Art von LPV-Systemen wurde erstmalig in Köse und Jabbari (1999) durchgeführt. In dem genannten Beitrag wurde diese Problematik für die Behandlung von LPV-Systemen mit einem LFT-Ansatz betrachtet. Die Verwendung eines LFT-Ansatzes birgt allerdings den Nachteil, dass dieser gewisse Einschränkungen an die Art der parametrischen Abhängigkeit fordert. Die Systemmatrizen des LPV-Systems und die Lyapunov-Matrizen müssen beispielsweise affine Funktionen von dem

Parametervektor  $\rho$  sein und der Parameterraum muss darüber hinaus konvex sein. Für das in Goßmann u. a. (2017) vorgeschlagene Verfahren hingegen wurde der gitterbasierte LPV-Ansatz betrachtet, welcher das LPV-Problem diskret durch eine mehrdimensionale Menge an LTI-Systemen beschreibt. Dieser Ansatz bietet den Vorteil, dass daraus keine Einschränkungen an die Beschaffenheit der parametrischen Abhängigkeit gestellt werden. Auf die konkreten Unterschiede zwischen den verschiedenen LPV-Ansätzen wird in Kapitel 3.4 noch einmal im Detail eingegangen.

Mit einer solchen Art von LPV-System, welches in der Einleitung dieses Kapitel als eine Unterklasse von allgemeinen LPV-Systemen beschrieben wurde, kann das einleitend genannte Problem im Entwurf von Regelungen berücksichtigt werden. Ausgangspunkt ist die auf Goßmann u. a. (2017) basierende, an Definition 2.1 angelehnte Definition eines partiellen Parametervektors  $\hat{\rho}$ .

**Definition 3.1** (Partieller Parametervektor). *Gegeben sei ein Parametervektor  $\hat{\rho}(t)$ , welcher den messbaren Teil eines Parametervektors  $\rho(t)$  nach Definition 2.1 enthält. Für diesen gelten die gleichen bereits in Definition 2.1 gemachten Definitionen, womit er ebenfalls durch eine kompakte Menge*

$$\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{\rho}(t) \mid \hat{\rho}(t) \in \hat{\mathcal{P}}, \dot{\hat{\rho}}(t) \in \dot{\hat{\mathcal{P}}}, \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (3.6)$$

beschränkt ist. Für diese Menge gilt  $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ , wobei mit  $\mathcal{A}$  die in Definition 2.1 beschriebene Menge betrachtet wird.

Somit enthält dieser Vektor nur den Teil der in  $\rho$  enthaltenen Parameter, die messtechnisch in der Anwendung erfasst werden können. In der praktischen Anwendung können demnach nur die Einträge des Vektors  $\hat{\rho}$  gemessen werden, weshalb das Ziel des Reglerentwurfs dementsprechend auch nur eine parametrische Abhängigkeit des Reglers von diesem Teil des Parametervektors ist. Gleichzeitig werden in dem zu regelnden System, im Folgenden als Regelstrecke bezeichnet, weiterhin alle vorhandenen parametrischen Abhängigkeiten in Form von  $\rho$  berücksichtigt. Es ergeben sich somit zwei verschiedene Mengen an Parametern. Eine dieser beiden Mengen ist die bereits in (2.7) definierte Menge aller zulässigen Parameter von  $\rho$ . Hinzu kommt in diesem speziellen Fall noch die Menge  $\hat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ , welche analog zu  $\mathcal{P}$  ebenfalls als kompakte Menge der Form

$$\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{\rho} \mid \hat{\rho}_{min} \leq \hat{\rho} \leq \hat{\rho}_{max}\} \quad (3.7)$$

definiert ist.

Es wird somit ein Regelungsproblem betrachtet, bei dem für ein LPV-System mit der parametrischen Abhängigkeit  $\rho$  ein Regler gesucht wird, der nur von den messtechnisch erfassbaren Größen in  $\hat{\rho}$  abhängig ist. Das kann als eine Kombination aus zwei bekannten Regelungsansätzen betrachtet werden. Zum einen liegt bei isolierter Betrachtung des

messbaren Teils  $\hat{\rho}$  ein konventionelles LPV-Problem vor, für das alle in Kapitel 2.2 formulierten Definitionen erfüllt sind. Dieses Problem wird mit einem Ansatz aus der robusten Regelung kombiniert, welcher unter anderem in Feron u. a. (1996) oder Amato (2006, S. 130ff) beschrieben wird.

**Definition 3.2** (Robuste  $L_2$ -Regelung mit Zustandsrückführung). *Für ein gegebenes  $\bar{\gamma} > 0$  ist das LPV-System (3.1) genau dann mit einer Zustandsrückführung unter der Einhaltung einer oberen Schranke  $\bar{\gamma}$  für die induzierte  $L_2$ -Norm stabilisierbar, wenn eine Matrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  existiert, mit der die induzierte  $L_2$ -Norm des geschlossenen Regelkreises aus (3.1) und  $u = \mathbf{K} \cdot x$  durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt ist. (Amato, 2006, S. 130)*

In dem in Definition 3.2 genannten Fall wird der Parametervektor  $\rho$  des LPV-Systems (3.1) als parametrische Unsicherheit betrachtet. Für dieses Problem wird ein LTI-Regler bestimmt, welcher das System für alle möglichen Kombinationen der Unsicherheiten stabilisiert und dessen induzierte  $L_2$ -Norm durch  $\bar{\gamma}$  nach oben begrenzt. Mit Hilfe von Theorem 3.1 kann ein Ansatz zur Ermittlung eines solchen Reglers formuliert werden. In Amato (2006, S. 130) wurde hierfür das folgende Theorem aufgestellt.

**Theorem 3.2.** *Das LPV-System (3.1) ist unter Einhaltung einer oberen Schranke  $\bar{\gamma}$  für die induzierte  $L_2$ -Norm mit einer linearen Zustandsrückführung stabilisierbar, wenn eine positiv definite Matrix  $\mathbf{P}$  (Lyapunov-Matrix) und eine allgemeine Matrix  $\mathbf{Y}$  existiert, für die*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T(\rho) & \mathbf{B}_1^T(\rho) & \mathbf{P}\mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{Y}^T\mathbf{D}_{12}(\rho)^T \\ & \mathbf{B}_1^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T(\rho) \\ & \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y} & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.8)$$

erfüllt ist. In diesem Fall ergibt sich mit  $u = \mathbf{K} \cdot x$  eine stabilisierende Zustandsrückführung, mit der die induzierte  $L_2$ -Norm des geschlossenen Regelkreises durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt ist. Für  $\mathbf{K}$  gilt dabei  $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}$ . (Amato, 2006, S. 130)

Im Falle des Reglerentwurfs für ein LPV-System mit nur partiell messbaren Parametern erfolgt bei einer isolierten Betrachtung des nicht messbaren Teils von  $\rho$  ebenfalls das in Definition 3.2 und Theorem 3.2 beschriebene Vorgehen. Der bei dieser Betrachtung erhaltene Regler kann sich entsprechend auch nicht an die Veränderung in den als nicht messbar angenommenen Parametern anpassen, wie es bei dem messbaren Teil  $\hat{\rho}$  der Fall ist. Eine vergleichbare Leistungsfähigkeit, die bei einem vollständig messbaren Parametervektor  $\rho$  erzielbar wäre, kann somit mit diesem Ansatz nicht erreicht werden. Allerdings können die Einflüsse dieser Parameter auf das Systemverhalten im Reglerentwurf berücksichtigt werden. Damit können die dabei erhaltenen Aussagen über den

geschlossenen Regelkreis auch für alle parametrischen Abhängigkeiten getroffen werden. Diese Eigenschaft ist insbesondere im Hinblick auf dessen Stabilität wertvoll, ermöglicht aber auch ein homogeneres Regelverhalten bei Variation dieser Parameter.

### 3.3 Reglerentwurf

Die in diesem Kapitel dargestellten Entwurfsverfahren basieren auf einer Minimierung der in Kapitel 3.1 definierten induzierten  $L_2$ -Norm des geschlossenen Regelkreises. Der geschlossene Regelkreis hat die Form des LPV-Systems in Gleichung (3.1) und es wird die Norm zwischen dem Eingang  $w$  und dem Ausgang  $z$  betrachtet. Die Struktur des geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Er besteht aus der

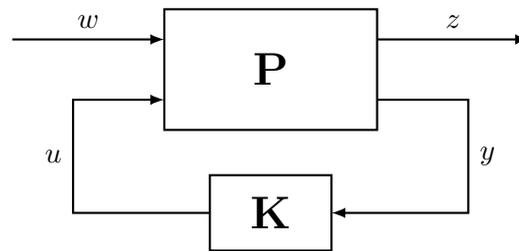


Abbildung 3.1: Regelkreis mit verallgemeinerter Regelstrecke

Regelstrecke  $\mathbf{P}$ , deren Formulierung der in der  $H_\infty$ - oder  $H_2$ -Regelung von LTI-Systemen häufig verwendeten verallgemeinerten Regelstrecke (siehe Raisch (1994, S. 309), oder unter *generalized plant* in Skogestad und Postlethwaite (2001, S. 363)) entspricht, und einem noch allgemeinen, nicht genauer spezifizierten Regler  $\mathbf{K}$ . Die verallgemeinerte Regelstrecke  $\mathbf{P}$  besteht aus der ursprünglichen Regelstrecke mit dem Eingangssignal  $u$  als dessen Stellgrößen und den aus den Messgrößen bestehenden Ausgangssignal  $y$ , welche um die zusätzlichen Ein- und Ausgänge  $w$  und  $z$  erweitert wird. Mit dem Eingang  $w$  werden Störgrößen, deren Effekt abgemindert werden soll, oder Führungsgrößen, denen das System folgen soll, eingeführt. In dem Ausgang  $z$  werden sämtliche Größen zusammengefasst, die mit Hilfe des Reglers  $\mathbf{K}$  beeinflusst werden sollen oder dessen Leistungsfähigkeit beschreiben. Eine typische Wahl für den Ausgang  $z$  ist beispielsweise die Regeldifferenz, also die Differenz zwischen Führungs- und Messgröße, Zustände des Systems oder die Stellgrößen  $u$ . Für ein LPV-System wie es in (2.9) definiert wurde, wird die verallgemeinerte Regelstrecke mit dem Zustandsraumssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) & \mathbf{B}_2(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & \mathbf{D}_{12}(\rho) \\ \mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{21}(\rho) & \mathbf{D}_{22}(\rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

beschrieben. In den im Folgenden beschriebenen Verfahren zum Reglerentwurf wird nun ein Regler  $\mathbf{K}$  entworfen, der die induzierte  $L_2$ -Norm (3.2) vom Eingang  $w$  auf den

Ausgang  $z$  des Systems in (3.9) minimiert. Der Regler wird hierzu mit den Messgrößen  $y$  gespeist und nimmt durch die Stellgrößen  $u$  Einfluss auf die Regelstrecke.

Als Regelgesetz wird in den beschriebenen Entwurfsverfahren eine statische Rückführung (*feedback* – *FB*) der Form

$$u = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot y \quad (3.10)$$

verwendet, mit einer stetigen und kontinuierlichen Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FB} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  als Reglerverstärkung. Bei einem Regelungsproblem bei dem das System dem externen Eingang  $w$  in Form von Sollgrößen folgen soll, kann optional die Rückführung durch eine statische Vorsteuerung (*feedforward* – *FF*) mit der stetigen und kontinuierlichen Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FF} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  ergänzt werden. Zusammen mit der Rückführung ergibt sich in diesem Fall das Regelgesetz

$$u = \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \cdot w + \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot y. \quad (3.11)$$

Die Besonderheit der in (3.10) und (3.11) dargestellten Regelgesetze stellt die parametrische Abhängigkeit des Reglers dar. Während konventionelle LPV-Regler immer von dem gesamten Parametervektor  $\rho$  der Regelstrecke (3.9) abhängen, basiert die Abhängigkeit des entworfenen Reglers in diesem Fall nur auf dem in Kapitel 3.2 definierten partiellen Parametervektor  $\hat{\rho}$ . Die Bestimmung der beiden Reglerverstärkungen  $\mathbf{K}_{FF}$  und  $\mathbf{K}_{FB}$  im Falle eines Reglerentwurfs zur Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm werden im Folgenden am Beispiel der Zustands- und Ausgangsrückführung gezeigt.

### 3.3.1 Zustandsrückführung

Bei einer Zustandsrückführung werden anstatt der Messgrößen  $y$  die Zustandsgrößen  $x$  zurückgeführt. Das Regelgesetz hat in diesem Fall die Form

$$u = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot x \quad (3.12)$$

mit der Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FB} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  als Reglerverstärkung (Amato, 2006, S. 130). Damit ist die Ausgangsgleichung für die Messgrößen  $y$  nicht erforderlich und die verallgemeinerte Regelstrecke vereinfacht sich zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) & \mathbf{B}_2(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & \mathbf{D}_{12}(\rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Setzt man das in (3.12) definierte Regelgesetz in die verallgemeinerte Regelstrecke (3.13) ein, erhält man den geschlossenen Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{B}_1(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Die Matrix-Funktion  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  wird so berechnet, dass das System in (3.14) quadratisch stabil ist und außerdem die induzierte  $L_2$ -Norm durch ein positives  $\bar{\gamma} > 0$  beschränkt ist. Dies kann gewährleistet werden, wenn die LMI (3.5) für das geschlossene System (3.14) erfüllt ist. Aus dieser Bedingung resultiert das im Folgenden genannte Theorem 3.3, mit dessen Hilfe die Synthese eines entsprechenden LPV-Reglers für eine Zustandsrückführung durchgeführt werden kann.

**Theorem 3.3** (LPV-Regelung mit Zustandsrückführung mit nur partiell messbaren Parametern). *Gegeben sei eine parameterabhängige Lyapunov Matrix-Funktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  nach Definition 2.5, eine beliebige Matrix-Funktion  $\mathbf{Y}(\hat{\rho}) : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ , für die  $\mathbf{Y}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot \mathbf{P}(\hat{\rho})$  gilt, und eine positive Zahl  $\bar{\gamma}$ , für die*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.15)$$

für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  erfüllt ist. In diesem Fall ist der geschlossene Regelkreis (3.14) für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  mit der parameterabhängigen Reglermatrix  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) = \mathbf{Y}(\hat{\rho})\mathbf{P}^{-1}(\hat{\rho})$  quadratisch stabil und dessen induzierte  $L_2$ -Norm ist durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt. (Herleitung siehe Anhang A.1)

Ergänzend zu Theorem 3.3 sei erwähnt, dass in (3.15) mit  $\mathbf{I}_{n_w}$  und  $\mathbf{I}_{n_z}$  Einheitsmatrizen in der indizierten Dimension bezeichnet und unter  $\star$  die symmetrische Vervollständigung verstanden wird. Zusätzlich wird mit  $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho)$  der Term

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho) = \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) \quad (3.16)$$

abgekürzt. Für eine detaillierte Herleitung der LMI (3.15) in Theorem 3.3 aus (3.5) sei auf den Anhang A.1 verwiesen. Die Reglermatrix  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  wird bestimmt, indem für die beiden Matrix-Funktionen  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  eine Lösung gefunden wird, welche die LMI (3.15) erfüllt und gleichzeitig die obere Schranke  $\bar{\gamma}$  der induzierten  $L_2$ -Norm minimiert. Während bei einer konventionellen LPV-Reglersynthese (wie beispielsweise in Wu (1995)) die LMI (3.15) für die Menge aller Parameter  $\rho \in \mathcal{A}$  betrachtet wird, werden in diesem Fall beide in Kapitel 3.2 definierten Mengen an Parametern betrachtet. Dies ist erforderlich, weil die Matrix-Funktionen  $\mathbf{A}(\rho)$ ,  $\mathbf{B}(\rho)$ ,  $\mathbf{C}(\rho)$  und  $\mathbf{D}(\rho)$ , sowie deren Untermatrizen, von dem vollständigen Parametervektor  $\rho \in \mathcal{P}$  abhängen. Die unbekannt Matrix-Funktionen wurden jedoch so definiert, dass sie nur von dem partiellen Parametervektor  $\hat{\rho} \in \hat{\mathcal{P}}$  abhängig sind. Das ist darin begründet, dass der zu erzielende Regler nur von dem partiellen Parametervektor, also dem messbaren Teil der Parameter abhängen soll. Es wird also eine Lösung in Abhängigkeit von  $\hat{\rho}$  gesucht, die für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  die LMI (3.15) erfüllt wird und somit das geschlossene LPV-System für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  quadratisch stabil und die induzierte  $L_2$ -Norm durch  $\bar{\gamma}$  beschränkt ist (Goßmann u. a., 2017).

Wenn die beschriebene Synthese erfolgreich durchgeführt werden konnte, lässt sich wie in Theorem 3.3 beschrieben, die parameterabhängige Reglermatrix der Zustandsrückführung mit

$$\mathbf{K}(\hat{\rho}) = \mathbf{Y}(\hat{\rho})\mathbf{P}^{-1}(\hat{\rho}). \quad (3.17)$$

berechnen. Somit kann ein Regler ermittelt werden, der das geschlossene LPV-System für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  stabilisiert und gleichzeitig die induzierte  $L_2$ -Norm nach oben beschränkt, jedoch nur von dem messbaren Teil  $\hat{\rho}$  des Parametervektors abhängig ist.

### 3.3.2 Ausgangsrückführung

Bei einer Ausgangsrückführung wird das Regelgesetz, welches in (3.10) definiert wurde verwendet. Anstatt des Zustandsvektors  $x$  steht in diesem Fall nur der Ausgangsvektor  $y$  für eine Rückführung zur Verfügung. Im Gegensatz zur Zustandsrückführung ist die Berechnung einer statischen Ausgangsrückführung nicht ohne weiteres in allen Fällen möglich. Um das Problem zu verdeutlichen, wird zunächst der einfachste Fall einer konventionellen LPV-Regelung, eine rein stabilisierende Regelung, betrachtet. Das vorgestellte Beispiel hierfür stammt aus Goßmann und Svaricek (2019). Hierzu wird ein LPV-System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}(\rho) \\ \mathbf{C}(\rho) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

angenommen, welches mit der Ausgangsrückführung

$$u = \mathbf{K}(\rho) \cdot y \quad (3.19)$$

stabilisiert werden soll. Das bedeutet, dass die Matrixfunktion  $\mathbf{K} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  so bestimmt werden soll, dass der geschlossene Regelkreis aus System (3.18) und Regler (3.19), der sich zu

$$\dot{x} = [\mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)] \cdot x \quad (3.20)$$

ergibt, stabil ist. Mit dem in Kapitel 2.2.1 dargestellten Vorgehen zur Bestimmung der quadratischen Stabilität eines LPV-Systems mit konstanter Lyapunov-Matrix (siehe Definition 2.4) ergibt sich, dass der geschlossene Regelkreis genau dann asymptotisch stabil ist, wenn eine konstante Lyapunov Matrix  $\mathbf{P} > 0$  existiert, für die LMI

$$\mathbf{A}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\rho)\mathbf{K}^T(\rho)\mathbf{B}^T(\rho) < 0 \quad (3.21)$$

erfüllt ist. In der erhaltenen Matrixungleichung (3.21) ergibt sich ein Produkt aus beiden Unbekannten  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{P}$ , wodurch das zu lösende Problem nichtlinear wird. Es ist für die Lösung des Regelungsproblems keine LMI zu lösen, sondern eine bilineare

Matrix-Ungleichung (BMI). Wie bereits in Kapitel 2.1 beschrieben, resultiert hieraus ein nicht-konvexes Optimierungsproblem, welches numerisch nur schwer zu lösen ist. Zwar führt das Regelungsproblem der Zustandsrückführung (Kap. 3.3.1) initial ebenfalls auf ein BMI-Problem, allerdings kann durch das Einführen einer zusätzlichen Variable  $\mathbf{Y}(\rho)$  das Problem in ein konvexes LMI-Problem überführt werden (siehe Anhang A.1). Es wäre auch in diesem Fall möglich, durch das Einführen einer zusätzlichen Variable  $\mathbf{Y}(\rho) = \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)$  das BMI-Problem in (3.21) in ein LMI-Problem zu überführen. Jedoch ist es in diesem Fall im Allgemeinen nicht möglich, anschließend den Regler  $\mathbf{K}(\rho)$  zu berechnen, weil dafür eine invertierbare und damit symmetrische Matrix  $\mathbf{C}(\rho)$  erforderlich wäre. Das ist in den meisten Fällen nicht gegeben und ist damit für die Lösung des Regelungsproblems nicht praktikabel.

Wie von Crusius und Trofino (1999) für LTI-Systeme gezeigt wurde, ist es allerdings in manchen Fällen möglich, durch das Einführen von zwei zusätzlichen Variablen das Problem trotzdem in ein konvexes LMI Problem zu überführen. Dieser Ansatz wurde von Goßmann und Svaricek (2019) für konventionelle LPV-Systeme erweitert und wird im Folgenden vorgestellt. Hierzu werden zwei Matrixfunktionen  $\mathbf{M} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  und  $\mathbf{N} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  so definiert, dass für den gesuchten LPV-Regler

$$\mathbf{N}(\rho) = \mathbf{K}(\rho)\mathbf{M}(\rho). \quad (3.22)$$

gilt. Damit ergibt sich basierend auf (3.21)

$$\mathbf{A}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{B}(\rho)\mathbf{N}(\rho)\mathbf{C}(\rho) + \mathbf{C}^T(\rho)\mathbf{N}^T(\rho)\mathbf{B}^T(\rho) < 0, \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{M}(\rho)\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{C}(\rho)\mathbf{P}, \quad (3.23b)$$

als LMI-Bedingung für ein asymptotisch stabiles LPV-System. Der Übergang von der BMI (3.21) zur LMI-Bedingung (3.23) mit Hilfe von (3.22) ist im Detail in Anhang A.2 beschrieben. Können eine Lyapunov-Matrix  $\mathbf{P}$ , sowie zwei Matrixfunktionen  $\mathbf{M}(\rho)$  und  $\mathbf{N}(\rho)$  gefunden werden die (3.23) erfüllen, kann ein stabilisierender Regler mit

$$\mathbf{K}(\rho) = \mathbf{N}(\rho)\mathbf{M}^{-1}(\rho) \quad (3.24)$$

berechnet werden. Wie in (3.23) erkennbar, ist dies jedoch nur unter der Nebenbedingung (3.23b) möglich. Diese Nebenbedingung kann eine sehr große Einschränkung darstellen, weil sie nicht generell für jedes Regelungsproblem erfüllt werden kann. Und selbst wenn sie erfüllt werden kann, beschreiben die mit (3.23) erhaltenen Lösungen nur eine Teilmenge aller stabilisierenden Regler. Das kann dazu führen, dass zwar ein Regler, der (3.21) erfüllt, gefunden wird, dieser jedoch im Hinblick auf die Stabilität sehr konservativ ausfällt (Sadabadi und Peaucelle, 2016).

Unter der Berücksichtigung der genannten Einschränkungen kann dieser Ansatz dafür verwendet werden, eine statische Ausgangsrückführung für LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern basierend auf einer Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm des

geschlossenen Regelkreises zu entwerfen. Dies wurde in Goßmann und Svaricek (2019) bereits für konventionelle LPV-Systeme gezeigt und wird im Folgenden entsprechend für die betrachtete Unterklasse mit partiell messbaren Parametern erweitert. Für dieses Regelungsproblem ergibt sich die verallgemeinerte Regelstrecke direkt aus (3.9), wobei die beiden Matrizen  $\mathbf{D}_{21}(\rho)$  und  $\mathbf{D}_{22}(\rho)$  gleich Null sein müssen. Mit dieser Anforderung werden solche Systeme von der Anwendung ausgeschlossen, welche einen direkten Durchgriff von den Eingangsgrößen  $w$  und  $u$  auf die Messgröße  $y$  aufweisen. Damit ergibt sich das Zustandsraumssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) & \mathbf{B}_2(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & \mathbf{D}_{12}(\rho) \\ \mathbf{C}_2(\rho) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

als verallgemeinerte Regelstrecke. Im Gegensatz zur Zustandsrückführung wird jetzt das Messsignal  $y$  für die Regelung zurück geführt, sodass sich das Regelgesetz zu

$$u = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})y = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)x \quad (3.26)$$

ergibt. In Kombination mit der Regelstrecke (3.25) ergibt sich daraus der geschlossene Regelkreis zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Die Reglerverstärkung  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  in (3.19) wird ebenfalls so berechnet, dass das geschlossene System in (3.27) quadratisch stabil und dessen induzierte  $L_2$ -Norm durch ein positives  $\bar{\gamma} > 0$  beschränkt ist. Dies ist der Fall, wenn die LMI (3.5) für das geschlossene System erfüllt ist. Mit dieser Bedingung, und dem im vorherigen Absatz erläuterten Ansatz, lässt sich entsprechend das Theorem 3.4 formulieren.

**Theorem 3.4** (LPV-Regelung mit Ausgangsrückführung mit nur partiell messbaren Parametern). *Gegeben sei eine parameterabhängige Lyapunov Matrix-Funktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  nach Definition 2.5, die beiden beliebigen Matrix-Funktionen  $\mathbf{M}(\hat{\rho}) : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  und  $\mathbf{N}(\hat{\rho}) : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , für die  $\mathbf{N}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{M}(\hat{\rho})$  gilt, und eine positive Zahl  $\bar{\gamma}$ , für die*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1(\rho)^T & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{M}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) = \mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}), \quad (3.28b)$$

für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  erfüllt ist. In diesem Fall ist der geschlossene Regelkreis (3.27) für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  mit der parameterabhängigen Reglermatrix  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) = \mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{M}^{-1}(\hat{\rho})$  quadratisch stabil und dessen induzierte  $L_2$ -Norm ist durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt. (Herleitung siehe Anhang A.2)

Ergänzend zu Theorem 3.4 sei ebenfalls erwähnt, dass für  $\mathbf{I}_{n_w}$ ,  $\mathbf{I}_{n_z}$  und  $\star$  die selben Definitionen wie in Kapitel 3.3.1 gelten und mit  $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho)$  der Term

$$\mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho) = \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) \quad (3.29)$$

abgekürzt wird. Für eine detaillierte Herleitung von (3.28) sei auf den Anhang A.2 verwiesen. Die Lösung des Regelungsproblems in (3.28) erfolgt nach dem selben Prinzip wie die Lösung des in Kapitel 3.3.1 beschriebenen Problems der Zustandsrückführung. Es werden die drei Matrix-Funktionen  $\mathbf{M}(\hat{\rho})$ ,  $\mathbf{N}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  so bestimmt, dass (3.28) erfüllt ist und die obere Schranke  $\bar{\gamma}$  der induzierten  $L_2$ -Norm minimal wird. Auch in diesem Fall finden sich in dem dargestellten LMI-Problem zwei verschiedene Parametermengen, da die Matrix-Funktionen der Regelstrecke vom vollständigen Parametervektor  $\rho \in \mathcal{P}$  abhängen. Die unbekanntes Matrix-Funktionen wurden hingegen so definiert, dass sie nur vom messbaren Teil des Parametervektors  $\hat{\rho} \in \hat{\mathcal{P}}$  abhängen, damit der erzielte Regler nur die gewünschte Abhängigkeit von diesem Teil des Parametervektors besitzt.

Nach einer erfolgreichen Synthese kann die Reglermatrix dann wie in Theorem 3.4 beschrieben berechnet werden und ergibt sich zu

$$\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) = \mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{M}^{-1}(\hat{\rho}). \quad (3.30)$$

Zur Berechnung von (3.30) muss zusätzlich sichergestellt werden, dass die Matrix-Funktion  $\mathbf{M}(\hat{\rho})$  für alle  $\hat{\rho} \in \hat{\mathcal{P}}$  invertierbar ist. Besitzt die Matrix-Funktion  $\mathbf{C}_2(\rho)$  für alle  $\rho \in \mathcal{P}$  vollen Rang, ist diese Bedingung aufgrund von (3.28b) automatisch erfüllt. In allen anderen Fällen kann durch die zusätzliche Bedingung

$$\mathbf{M}(\hat{\rho}) + \mathbf{M}^T(\hat{\rho}) > 0. \quad (3.31)$$

der volle Rang von  $\mathbf{M}(\hat{\rho})$  für alle  $\hat{\rho} \in \hat{\mathcal{P}}$  und damit die Invertierbarkeit sichergestellt werden (Contzen, 2017).

### 3.3.3 Vorsteuerung

Zur Verbesserung der Leistungsfähigkeit eines Regelkreises ohne dessen Stabilität und Robustheit zu beeinflussen, kann es hilfreich sein den Regelkreis um eine Vorsteuerung, wie in (3.11) dargestellt, zu ergänzen. Dieses Regelgesetz wird oftmals als eine Regelung mit zwei Freiheitsgraden bezeichnet (Hoyle u. a., 1991). Ein solcher Ansatz besitzt den Vorteil, dass die Stabilität des Regelkreises durch die Rückführung gewährleistet und gleichzeitig eine Sollwertfolge durch die Vorsteuerung realisiert werden kann, ohne dass eine Verbesserung der Sollwertfolge die Stabilität des Regelkreises beeinflusst. Es existieren also zwei Freiheitsgrade, wodurch die beiden Teile der Regelung unabhängig von einander entworfen oder verändert werden können. Die Verwendung einer solchen

Vorsteuerung kann aus verschiedenen Gründen erfolgen. Eine Zustandsrückführung weist in einer Folgeregung inhärent keine stationäre Genauigkeit in der Regelgröße auf. Diese stationäre Genauigkeit kann mit einer solchen Vorsteuerung hergestellt werden. Ein beispielhaftes Vorgehen hierfür wurde in Abbas u. a. (2014) gezeigt. In der genannten Publikation wird eine Vorsteuerung mit Hilfe der Forderung nach stationärer Genauigkeit an den geschlossenen Regelkreis aus den Matrix-Funktionen der Regelstrecke und der Zustandsrückführung ermittelt. Diese ergibt sich in diesem Fall dann zu

$$\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) = -\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot \mathbf{C}_2^T(\hat{\rho}), \quad (3.32)$$

wobei mit  $\mathbf{C}_2(\hat{\rho})$  der Zusammenhang aus (3.9) zwischen dem Zustandsvektor  $x$  und dem zu regelnden Ausgangsvektor  $y$  angegeben wird. Es gilt allerdings zu beachten, dass die stationäre Genauigkeit in diesem Fall nur in Form einer Steuerung gewährleistet wird und der geschlossene Regelkreis somit nur dann stationär genau ist, wenn das Systemverhalten exakt dem Modell der Regelstrecke entspricht.

Dies ist in der praktischen Anwendung aufgrund von Unsicherheiten in der Modellierung im Allgemeinen nicht erfüllt, wodurch entsprechend keine exakte stationäre Genauigkeit erzielt werden kann. Bei der Verwendung des in (3.32) dargestellten Ansatzes für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern ergibt sich in diesem Kontext eine weitere Schwierigkeit. In (3.32) wurde angenommen, dass die Matrix-Funktion  $\mathbf{C}_2(\hat{\rho})$  nur von dem messbaren Teil  $\hat{\rho}$  des Parametervektors abhängt. Besitzt  $\mathbf{C}_2(\rho)$  hingegen Abhängigkeiten über den messbaren Teil  $\hat{\rho}$  hinaus, würde sich mit (3.32) eine Abhängigkeit der Vorsteuerung von nicht messbaren Parametern ergeben. In diesem Fall kann nur der messbare Teil  $\mathbf{C}_2(\hat{\rho})$  betrachtet werden, wodurch sich bei Variation der nicht messbaren LPV-Parameter ebenfalls Abweichungen zwischen Systemverhalten und dessen Modell ergeben. Daraus resultieren entsprechende Auswirkungen auf die stationäre Genauigkeit, welche durch die Vorsteuerung nicht mehr gewährleistet werden kann. In diesen Fällen kann die exakte stationäre Genauigkeit nur durch eine Integration des Regelfehlers erreicht werden. Aber auch in solchen Fällen bietet die Verwendung einer Vorsteuerung einen Vorteil. Zum einen kann die stationäre Abweichung deutlich reduziert werden. Zum anderen kann der Regler aufgrund des direkten Durchgriffs von dem Sollwert auf die Stellgröße bei Änderungen des Sollwerts schneller reagieren und somit ein schnelleres Folgeverhalten realisieren. Aus diesem Grund kann die Verwendung einer Vorsteuerung auch bei keiner Gewährleistung der stationären Genauigkeit eine sinnvolle Ergänzung darstellen.

Neben der in (3.32) dargestellten Berechnungsvorschrift kann eine Vorsteuerung  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  auch direkt in der Reglersynthese mit bestimmt werden. Ein Ansatz, eine Regelung mit zwei Freiheitsgraden für ein LTI-System in eine  $H_\infty$ -Synthese mit LMIs zu integrieren wurde von Prempain und Postlethwaite (2001a) gezeigt. In Goßmann u. a. (2018) wurde dieser Ansatz aufgegriffen und für die Verwendung von LPV-Systemen mit

partiell messbaren Parametern für eine Regelung mit Zustandsrückführung erweitert. Hierzu wird ebenfalls die verallgemeinerte Regelstrecke aus (3.13) betrachtet, welche mit dem Regelgesetz

$$u = \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \cdot w + \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot x \quad (3.33)$$

geregelt werden soll. Neben der Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FB} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  der Zustandsrückführung besteht das Regelgesetz zusätzlich noch aus der Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FF} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_w}$ , welche die Reglerverstärkung der Vorsteuerung beschreibt. Bildet man aus dem Regelgesetz (3.33) und der Regelstrecke (3.13) den geschlossenen Regelkreis, ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

In dem geschlossenen Regelkreis (3.34) besitzt man mit  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  die beiden angesprochenen Freiheitsgrade. Die beiden Matrix-Funktionen werden im Folgenden ebenfalls mit dem Ansatz einer Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm ermittelt. Es wird analog zum Entwurf der Zustandsrückführung in Kapitel 3.3.1 die LMI in (3.5) für das geschlossene System (3.34) betrachtet. Dementsprechend lässt sich das Theorem 3.3 zum folgenden Theorem 3.5 erweitern, mit dessen Hilfe der Regler in (3.33) berechnet werden kann.

**Theorem 3.5** (LPV-Regelung mit Zustandsrückführung und Vorsteuerung mit nur partiell messbaren Parametern). *Gegeben sei eine parameterabhängige Lyapunov Matrix-Funktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  nach Definition 2.5, die beliebige Matrix-Funktion  $\mathbf{Y}(\hat{\rho}) : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ , für die  $\mathbf{Y}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot \mathbf{P}(\hat{\rho})$  gilt, die Matrix-Funktion der Vorsteuerung  $\mathbf{K}_{FF} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_w}$ , sowie eine positive Zahl  $\bar{\gamma}$ , für die*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) + \mathbf{K}_{FF}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.35)$$

für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  erfüllt ist. In diesem Fall ist der geschlossene Regelkreis (3.34) für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  mit den parameterabhängigen Reglermatrizen  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) = \mathbf{Y}(\hat{\rho})\mathbf{P}^{-1}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}$  quadratisch stabil und dessen induzierte  $L_2$ -Norm ist durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt. (Herleitung siehe Anhang A.3)

Der Term  $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho)$  in (3.35) bezeichnet ebenfalls die in (3.16) definierte Abkürzung. Bis auf die zusätzlichen Terme für die Vorsteuerung  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  entspricht die LMI (3.35) in Theorem 3.5 der für die reine Zustandsrückführung (3.15) in Theorem 3.3. Daraus folgt, dass die Lyapunov-LMI in (3.35) entsprechend identisch zum Fall der reinen Zustandsrückführung und damit unabhängig von  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  ist. Die Vorsteuerung mit

der statischen Verstärkung  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  hat dementsprechend keinen Einfluss auf die quadratische Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Für Details zum Erhalt der LMI (3.35) in Theorem 3.5 sei auf Anhang A.3 verwiesen.

Kann (3.35) entsprechend Theorem 3.5 erfolgreich gelöst werden, ergibt sich das vollständige Regelgesetz zu

$$u = \underbrace{\left[ \mathbf{Y}(\hat{\rho}) \mathbf{P}^{-1}(\hat{\rho}) \right]}_{\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})} x + \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) w. \quad (3.36)$$

Das erhaltene Regelgesetz garantiert die quadratische Stabilität für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  durch die Zustandsrückführung des geschlossenen Regelkreises (3.34) und beschränkt die induzierte  $L_2$ -Norm des Regelkreises durch die obere Schranke  $\bar{\gamma}$  (Goßmann u. a., 2018).

Dieser Ansatz lässt sich analog auch für eine Regelung mit Ausgangsrückführung anwenden. Hierfür wird entsprechend die verallgemeinerte Regelstrecke aus (3.25) für ein Regelungsproblem mit Ausgangsrückführung betrachtet, die mit dem Regelgesetz

$$u = \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \cdot w + \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \cdot y \quad (3.37)$$

geregelt werden soll. Neben der Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FB} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  aus der Rückführung des Systemausganges  $y$  wird ebenfalls eine weitere Matrixfunktion  $\mathbf{K}_{FF} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_w}$  für den Teil der Vorsteuerung in (3.37) gesucht. Mit der verallgemeinerten Regelstrecke (3.25) und (3.37) ergibt sich für diesen Fall der geschlossene Regelkreis zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho) \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho) \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho) \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho) \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Die beiden Unbekannten in (3.38) können auch in diesem Fall über eine Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm des geschlossenen Regelkreises bestimmt werden. Hierzu wird ebenfalls die LMI in (3.5) für (3.38) betrachtet. Analog zu Theorem 3.5 kann auch für diesen Fall Theorem 3.4 entsprechend erweitert werden.

**Theorem 3.6** (LPV-Regelung mit Ausgangsrückführung und Vorsteuerung mit nur partiell messbaren Parametern). *Gegeben sei eine parameterabhängige Lyapunov Matrix-Funktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  nach Definition 2.5, die beiden beliebigen Matrix-Funktionen  $\mathbf{M}(\hat{\rho}) : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  und  $\mathbf{N}(\hat{\rho}) : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , für die  $\mathbf{N}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) \mathbf{M}(\hat{\rho})$  gilt, die Matrix-Funktion der Vorsteuerung  $\mathbf{K}_{FF} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_w}$ , sowie eine positive Zahl  $\bar{\gamma}$ , für die*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) + \mathbf{K}_{FF}^T(\hat{\rho}) \mathbf{B}_2^T & -\bar{\gamma} \mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho) \mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho) \mathbf{N}(\hat{\rho}) \mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho) \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) & -\bar{\gamma} \mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{M}(\hat{\rho}) \mathbf{C}_2(\rho) = \mathbf{C}_2(\rho) \mathbf{P}(\hat{\rho}), \quad (3.39b)$$

für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  erfüllt ist. In diesem Fall ist der geschlossene Regelkreis (3.34) für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  mit den parameterabhängigen Reglermatrizen  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) = \mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{M}^{-1}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}$  quadratisch stabil und dessen induzierte  $L_2$ -Norm ist durch  $\bar{\gamma}$  nach oben beschränkt. (Herleitung siehe Anhang A.3)

Mit dem Term  $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho)$  in (3.39) wird die in (3.29) definierte Abkürzung bezeichnet. Analog zum vorherigen Fall unterscheidet sich das LMI Problem (3.39) in Theorem 3.6 abgesehen von den zusätzlichen Termen durch die Vorsteuerung nicht von dem LMI Problem (3.28) aus Theorem 3.4 der reinen Ausgangsrückführung. Für Details zur Aufstellung von LMI (3.39) sei an dieser Stelle ebenfalls auf Anhang A.3 verwiesen. Nach einem erfolgreichen Lösen von (3.39) in Theorem 3.6 ergibt sich das vollständige Regelgesetz zu

$$u = \underbrace{\left[ \mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{M}^{-1}(\hat{\rho}) \right]}_{\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})} y + \mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})w. \quad (3.40)$$

Das so erhaltene Regelgesetz garantiert ebenfalls die quadratische Stabilität für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  des geschlossenen Regelkreises (3.38) und beschränkt dessen induzierte  $L_2$ -Norm durch die obere Schranke  $\bar{\gamma}$ . Es gelten jedoch im Gegensatz zum Problem der Zustandsrückführung ebenfalls die in Kapitel 3.3.2 beschriebenen Einschränkungen.

### 3.4 Synthese der Reglermatrizen

Ein Kernproblem bei der Synthese von LPV-Reglern stellen die zu lösenden LMIs dar. Alle Einträge der in den vorherigen Kapiteln vorgestellten LMIs stellen Matrixfunktionen in der Zeit dar, womit das zu lösende Problem eine unendliche Dimension besitzt und damit im Allgemeinen nicht analytisch lösbar ist. In der Vergangenheit haben sich, wie beispielsweise von Hoffmann und Werner (2015) beschrieben, drei Ansätze herauskristallisiert, mit denen ein Problem mit einer unendlichen Dimension durch eines mit einer endlichen Dimension beschrieben beziehungsweise approximiert werden kann. Diese teilen sich auf in den polytopen LPV Ansatz, den auf Multiplikatoren basierenden LFT (*linear fractional transformation*) Ansatz und den auf Gitterpunkten basierenden Ansatz.

Ist die parametrische Abhängigkeit des LPV-Systems eine affine Abbildung und das zulässige Intervall aller Parameter  $\rho$  ein Polytop, kann das Problem mit dem nach dieser Eigenschaft benannten polytopen LPV Ansatz (siehe Apkarian u. a. (1995)) betrachtet werden. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass das LMI-Problem durch eines mit einer endlichen Dimension beschrieben werden kann. Sind die genannten Bedingungen erfüllt und die Matrizen  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{12}$  und  $\mathbf{D}_{21}$  (siehe Gleichung (3.9)) konstant, dann kann das LPV-Problem vollständig durch Betrachtung der Eckpunkte des Parameterraumes  $\mathcal{P}$

beschrieben werden. Diese beiden Bedingungen stellen zwar eine Einschränkung in der Anwendbarkeit des Ansatzes dar, können aber in vielen Fällen erfüllt werden. Dieser Ansatz hat darüber hinaus jedoch den Nachteil, dass nur konstante Lyapunov-Matrizen für den Stabilitätsnachweis und den Reglerentwurf verwendet werden können. Somit muss ein in vielen Fällen deutlich zu konservativer Ansatz zur Sicherstellung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises verwendet werden, wie es bereits in Kapitel 2.2.1 erläutert wurde. Dies kann dazu führen, dass innerhalb der Reglersynthese keine stabilisierende Lösung gefunden wird oder deutliche Abstriche in der Leistungsfähigkeit des erzielten Reglers gemacht werden müssen. Bei einem LFT-Ansatz ist es hingegen möglich, auch parameterabhängige Lyapunov-Matrizen zu verwenden, jedoch können dabei keine beliebigen parametrischen Abhängigkeiten berücksichtigt werden. Die Anwendung kann nur genau dann erfolgen, wenn der Parameterraum zum einen konvex ist und zum anderen durch rationale Funktionen beschrieben werden kann (Hoffmann und Werner, 2015). Eine häufig vorkommende Anwendung, bei denen diese Anforderung nicht erfüllt ist, ist die Verwendung eines Kennfelds innerhalb des LPV-Modells. In diesem Fall ist das Modell nur in diesen diskreten Punkten definiert. Es wäre zwar möglich ein solches Kennfeld ebenfalls durch einen Parameterraum zu beschreiben, der den beiden oben genannten Anforderungen entspricht, jedoch werden dadurch auch Parameterbereiche eingeführt die physikalisch im System gar nicht erreicht werden können. Stellt der Parameterraum  $\mathcal{P}$  eine nicht-konvexe Menge dar, ergibt sich ein ähnliches Problem. Auch hier müsste der betrachtete Parameterraum gewissermaßen überdimensioniert werden, um ihn für die Synthese konvex zu gestalten. Dadurch würden in einer Reglersynthese ebenfalls Bereiche berücksichtigt werden, die in der praktischen Anwendung nicht relevant wären.

In dieser Arbeit wird die dritte dieser Herangehensweisen, die auf Gitterpunkten basierende Betrachtung von LPV-Systemen zur Lösung von Regelungsproblemen verwendet. Dieser Ansatz basiert im wesentlichen auf der Arbeit von Wu (1995) und approximiert das LPV-Problem mit einer diskreten Formulierung. Um dies zu erreichen, werden die Matrix-Funktionen des Regelungsproblems an einer bestimmten Menge von diskreten Punkten innerhalb der zulässigen Parameter  $\mathcal{P}_{grid} \subset \mathcal{P}$  ausgewertet (Wu, 1995, S.90 - 91). Für die zusätzlich berücksichtigten Ratenbeschränkungen kann die Vereinfachung, welche auch bei den polytopen LPV-Verfahren zum Einsatz kommt, verwendet werden. Dies ist damit begründet, dass diese Menge genau durch ein Polytop beschrieben wird. Somit müssen hier nur die Eckpunkte  $vert(\dot{\mathcal{P}})$  von  $\dot{\mathcal{P}}$  betrachtet werden. Die LMIs müssen dadurch nur an den oberen und unteren Ratenbeschränkungen ausgewertet werden. Der gesamte Parameterraum  $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$  wird also mit Hilfe von  $\mathcal{P}_{grid} \times vert(\dot{\mathcal{P}})$  approximiert. An allen Punkten des dabei entstehenden Gitters werden dann die zu lösenden LMIs aufgestellt. Dadurch entsteht ein diskretes, mehrdimensionales LMI Problem, welches mit Hilfe von numerischen Lösungsverfahren effizient gelöst werden kann. Im Wesentlichen hat der Ansatz den Vorteil, dass für dessen Anwendung keinerlei Einschränkungen an das LPV-System und die Beschaffenheit

der parametrischen Abhängigkeit existieren. Wie bei einem LFT-Ansatz ist es auch bei der auf Gitterpunkten basierenden Betrachtung möglich, parameterabhängigen Lyapunov-Matrizen zu verwenden. Unter Umständen können somit auch Systeme stabilisiert werden, bei denen ein Ansatz mit einer konstanten Lyapunov-Matrix zu keiner Lösung führte (siehe Kapitel 2.2.1). Bei einem gitterbasierten Ansatz können aufgrund der Charakteristik des Verfahrens nur diskrete Punkte des LPV-Systems berücksichtigt werden, weshalb bei diesem Ansatz auch nicht-konvexe Parametermengen sowie Kennfelder, oder andere diskrete Modelle für die kein rationaler Zusammenhang vorliegt, betrachtet werden können. Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes ergibt sich bei der Verwendung von LPV-Modellen, die mit Hilfe von Taylor-Linearisierungen generiert wurden. Die entstehende Form des LPV-Systems entspricht einer mehrdimensionale Menge an LTI-Systemen und somit bereits einem auf Gitterpunkten basierenden LPV-Modell.

Der Ansatz hat allerdings einen entscheidenden Nachteil. Das entstehende diskrete Problem stellt nur eine Approximation des eigentlichen Problems dar und entspricht nur genau an den diskreten Punkten dem ursprünglichen System. Bei der Betrachtung von kontinuierlichen parametrischen Abhängigkeiten führt dies dazu, dass über das Verhalten zwischen den diskreten Punkten mit der Approximation keine Aussage getroffen werden kann (Wu, 1995, S. 93). Die Wahl eines geeigneten Parametergitters stellt daher einen essentiellen Schritt im Entwurfsprozess dar. Ein zu grobes Gitter gibt das zu lösende Problem nicht ausreichend genau wieder, während ein zu feines Gitter den Rechenaufwand erheblich erhöht und unter Umständen zu einem numerisch nicht lösbaren Problem führt. Eine ausreichend feine Schrittweite des Gitters bei kontinuierlichen Abhängigkeiten lässt sich beispielsweise mit Hilfe einer Analyse der induzierten  $L_2$ -Norm bestimmen. Hierbei wird die Schrittweite des Gitters in allen Parametern so lange verkleinert, bis die Norm sich mit einer weiteren Reduzierung nicht mehr merkbar ändert. Sollte mit der dabei erhaltenen Schrittweite ein für den geplanten Entwurf zu hoher Rechenaufwand erforderlich sein, hat es sich in der Praxis etabliert den Regler in zwei Schritten zu berechnen. Im ersten Schritt wird der Regler auf einem größeren Gitter ausgelegt. Dies spart Rechenzeit im Entwurfsprozess und ermöglicht beispielsweise auch einen umfangreicheren Optimierungsprozess um den Regler wie gewünscht einzustellen. Im zweiten Schritt wird der erhaltene Regler dann auf dem deutlich feineren Gitter auf Stabilität und gewünschte Eigenschaften hin überprüft um sicherzustellen, dass diese im gesamten Parameterraum erfüllt werden können. Aber selbst auf einem sehr feinen Gitter stellt diese Betrachtung immer noch nur eine Annäherung an das reale System dar. Daher gilt, dass endgültige Aussagen über Stabilität und weitere Eigenschaften des Reglers nur basierend auf dem zugrundeliegenden nichtlinearen System getroffen werden können.

Für die Lösung der LMIs ist es außerdem erforderlich, die Form der noch unbekanntenen Matrix-Variablen festzulegen um eine Abhängigkeit der Variablen von dem Parameter-

vektor  $\rho$  zu vermeiden. Hierzu wurde von Wu (1995, S. 88) vorgeschlagen, eine noch unbekannte Matrix-Funktion  $\mathbf{X}(\rho)$  mit Hilfe von  $\rho$  abhängigen Basisfunktionen  $f_i(\rho)$  und konstanten Matrix-Koeffizienten  $\mathbf{X}_i$  in der Form

$$\mathbf{X}(\rho) = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(\rho) \mathbf{X}_i \quad (3.41)$$

zu beschreiben. In der Wahl und Anzahl  $n_f$  der Basis-Funktionen  $f_i(\rho)$  ist der Anwender dabei frei, jedoch gilt es zu beachten das eine größere Anzahl oder eine komplexere Form von Basis-Funktionen das zu lösende Problem ebenfalls entsprechend komplexer gestalten. Ein gängiger Ansatz ist hier die Wahl von Polynomen der Form

$$\mathbf{X}(\rho) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^{n_\rho} \rho_i \cdot \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^{n_\rho} \rho_i^2 \cdot \mathbf{X}_{n_\rho+i} + \dots \quad (3.42)$$

Es kann aber jede beliebige Form von Funktionen, wie zum Beispiel trigonometrische Zusammenhänge, verwendet werden. Durch das Verwenden solcher Basis-Funktionen werden die vom Parametervektor  $\rho$  abhängigen Matrix-Variablen in Form von  $\mathbf{X}(\rho)$  durch konstante Matrix-Variablen der Form  $\mathbf{X}_i$  ersetzt, welche die Lösung des LMI-Problems bedeutend vereinfachen. Es existieren jedoch keine klar definierten Regeln dafür, welche Form von Basis-Funktion für ein konkretes Problem zu verwenden ist, sodass die Auswahl einer geeigneten Struktur nur auf Basis von der Beschaffenheit des Parametervektors und letztendlich auf Basis von Erfahrung des Anwenders erfolgen muss.

Für die in diesem Kapitel vorgestellten Ansätze zum Reglerentwurf bei LPV-Systemen mit nur partiell messbaren Parametern gilt es darüber hinaus zusätzlich zu beachten, dass die Menge aller Parameter  $\mathcal{P}$  in einen messbaren und einen nicht messbaren Teil aufgeteilt wird, wie es in Kapitel 3.2 beschrieben wurde. Es wurden in Kapitel 3.3 in allen vorgestellten Entwurfsverfahren nur Regler betrachtet, welche nur von dem messbaren Teil  $\hat{\rho}$  des Parametervektors abhängen. Somit sind auch alle in den vorgestellten LMIs vorkommenden unbekannt Matrix-Funktionen als nur von  $\hat{\rho}$  abhängig anzunehmen, weil andernfalls eine Abhängigkeit von nicht messbaren Parametern entstehen würde. Deshalb ergibt sich für die Basis-Funktionen

$$\hat{\mathbf{X}}(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(\hat{\rho}) \hat{\mathbf{X}}_i \quad (3.43)$$

Für die Synthese des Reglers bedeutet dies, dass während einer Variation eines nicht messbaren Parameters bei einem Festhalten der restlichen Parameter keine Variation in den Unbekannten auftritt. Somit wird für diesen Fall eine konstante Lösung für das gesamte Intervall der nicht messbaren Parameter gesucht, während sich bei einer Variation eines messbaren Parameters auch eine variable Lösung ergibt. Betrachtet man zur Veranschaulichung nur die nicht messbaren Parametern als variabel und alle anderen

Parameter als konstant, wird somit eine konstante Lösung für ein parameterabhängiges Regelungsproblem gesucht. Es entsteht ein Regler, welcher robust gegenüber einer Änderung in den nicht-messbaren Parametern ist. In Kombination mit den messbaren Parametern entsteht dadurch ein Regler, welcher von dem messbaren Teil  $\hat{\rho}$  des Parametervektors abhängig ist und gleichzeitig gegenüber einer Variation in den nicht messbaren Parametern robust ist. Zusätzlich gilt es zu beachten, dass sich dadurch auch nur eine in den messbaren Parametern variable Lyapunov-Matrixfunktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  ergibt. Das hat zur Folge, dass in der Stabilitätsbetrachtung auch nur eine von diesen Parametern abhängige Stabilität berücksichtigt werden kann. Im Hinblick auf die nicht messbaren Parameter bedeutet dies, dass für diese automatisch eine unendlich hohe Änderungsrate angenommen wird und es sich somit um eine sehr konservative Stabilitätsbetrachtung handelt. Das ist im Hinblick auf die Leistungsfähigkeit des erzielten Reglers eine bei der Anwendung der vorgestellten Methoden zu beachtende Einschränkung, die aber nicht vermieden werden kann.

## 4 Betrachtung eines illustrativen Beispiels

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 3 entwickelten Methoden mit Hilfe eines exemplarischen Beispiels bewertet und dessen Leistungsfähigkeit im Fall einer nicht vorhandenen Messbarkeit eines LPV-Parameters demonstriert. Damit können die mit einem LPV-Reglerentwurf mit nur partiell messbaren Parametern einhergehenden Einschränkungen besser bewertet und dessen Einsatzfähigkeit beurteilt werden. Es werden zusätzlich die Unterschiede zwischen einem solchen Entwurf und einem konventionellen LPV-Entwurf mit einem vollständig messbaren Parametervektor anhand des Beispiels dargestellt. Dieser Vergleich wird für zwei verschiedene LPV-Ansätze betrachtet. Zuerst wird ein LPV-Entwurf ohne eine Beschränkung der Änderungsraten der jeweiligen LPV-Parameter betrachtet. Im zweiten Schritt werden die Änderungsraten der messbaren Parameter beschränkt.

### 4.1 Beschreibung des Regelungsproblems

Als illustratives Beispiel wird ein Regelungsproblem betrachtet, welches auch in Wu (1995, S. 108ff) als Anwendungsbeispiel verwendet wurde. Im Detail wurde der dort thematisierte Entwurf in Wu u. a. (2002) weiter ausgearbeitet, aus welchem auch das in diesem Beispiel behandelte Modell samt Parametern entnommen wurde. Es wird der Entwurf eines LPV-Reglers für die Nickdynamik eines Lenkflugkörpers betrachtet, welche wie in Kapitel 2.3.2 beschrieben ein Teil der Längsdynamik ist. In diesem Beispiel wird die nichtlineare Dynamik bei einer konstanten Flughöhe angegeben. Durch die Linearisierung der Dynamik in Trimpunkten ergibt sich ein LPV-Modell, welches von der Machzahl und dem aktuellen Anstellwinkel abhängig ist. Während die Bestimmung der Machzahl in der Regel unproblematisch ist, ist das Messen des aktuellen Anstellwinkels in ausreichender Genauigkeit sehr schwierig. Es wird aus diesem Grund angenommen, dass der Anstellwinkel als Parameter des LPV-Systems nicht messtechnisch erfasst werden kann. Dieses Problem wurde ebenfalls bereits in Wu (1995, S. 115) thematisiert und wurde dort über eine Schätzung des Anstellwinkels aus anderen messbaren Größen realisiert.

Die Dynamik der Nickbewegung des betrachteten Flugkörpers in einer konstanten Flughöhe, aber mit einer variablen Machzahl (und damit Fluggeschwindigkeit) wird nach Wu u. a. (2002) durch das nichtlineare System

$$\dot{\alpha}(t) = K_{\alpha} \cdot M(t) \cdot C_n(\alpha(t), \delta(t), M(t)) \cdot \cos(\alpha) + q(t), \quad (4.1)$$

$$\dot{q} = K_q \cdot M^2(t) \cdot C_m(\alpha(t), \delta(t), M(t)), \quad (4.2)$$

**Tabelle 4.1:** Koeffizienten des Flugkörper-Nickdynamik Modells (Wu u. a., 2002)

Koeffizient	Wert	Koeffizient	Wert
$K_\alpha$	1.18587	$a_m$	$0.000215 \text{ deg}^{-3}$
$K_q$	70.586	$b_m$	$-0.0195 \text{ deg}^{-2}$
$K_z$	0.6661697	$c_m$	$0.051 \text{ deg}^{-1}$
$a_n$	$0.000103 \text{ deg}^{-3}$	$d_m$	$-0.206 \text{ deg}^{-1}$
$b_n$	$-0.00945 \text{ deg}^{-2}$		
$c_n$	$-0.1696 \text{ deg}^{-1}$		
$d_n$	$-0.034 \text{ deg}^{-1}$		

beschrieben. Die zugehörige Ausgangsgleichung ist mit

$$n_z(t) = K_z \cdot M^2(t) \cdot C_n(\alpha(t), \delta(t), M(t)) \quad (4.3)$$

angegeben. Dabei werden die beiden aerodynamischen Koeffizienten  $C_n$  und  $C_m$  jeweils durch

$$C_n = \alpha(t) \left[ a_n |\alpha(t)|^2 + b_n |\alpha(t)| + c_n \left( 2 - \frac{M(t)}{3} \right) \right] + d_n \delta(t), \quad (4.4)$$

$$C_m = \alpha(t) \left[ a_m |\alpha(t)|^2 + b_m |\alpha(t)| + c_m \left( \frac{8M(t)}{3} - 7 \right) \right] + d_m \delta(t), \quad (4.5)$$

beschrieben. Hierbei stellen die beiden Zustandsgrößen  $\alpha$  und  $q$  den Anstellwinkel und die Nickrate des Flugkörpers dar, mit  $\delta$  wird der Ausschlag der Steuerfläche bezeichnet und die Ausgangsgröße  $n_z$  stellt den vertikalen Lastfaktor (Beschleunigung  $a_z$  pro Erdbeschleunigung  $g$ ) dar. Die Koeffizienten des nichtlinearen Systems sind in Tabelle 4.1 angegeben. Diese beschreiben das Verhalten der nichtlinearen Differentialgleichungen in (4.2) und der Ausgangsgleichung (4.3) bei einer konstanten Flughöhe von 20.000 ft (etwa 6.000 m) und einer Machzahl  $M$  zwischen 2 und 4. Mit Hilfe einer Trimmung des nichtlinearen Systems in stationären Werten für  $\alpha$  und  $M$  und anschließender Linearisierung in den erhaltenen Trimpunkten kann, wie in Kapitel 2.2.2 beschrieben, aus diesem ein LPV-System erzeugt werden. Es ergeben sich dabei mit dem Anstellwinkel  $\rho_1 = \alpha$  und der Machzahl  $\rho_2 = M$  die beiden LPV-Parameter, woraus der Parametervektor  $\rho$

$$\rho(t) = (\alpha(t), M(t))^T, \quad (4.6)$$

resultiert. Für diesen werden die zulässigen Wertebereiche

$$\alpha \in [-25, 25]^\circ, \quad M \in [2, 4] \quad (4.7)$$

entsprechend aus Wu u. a. (2002) übernommen. Für die geplante Anwendung der in Kapitel 3 vorgestellten Methoden muss an der vorgestellten Regelstrecke noch eine Vereinfachung vorgenommen werden. Durch den Einfluss der Stellgröße  $\delta$  in dem Koeffizienten  $C_n$  in (4.4) ergibt sich in der Ausgangsgleichung (4.3) ein direkter Durchgriff von der Stellgröße auf die betrachtete Regel- und später verwendete Messgröße. Ein solcher Durchgriff kann in den betrachteten Regelungsmethoden nicht berücksichtigt werden. Für die in diesem Kapitel betrachtete Anwendung wird der aerodynamische Koeffizient  $C_n$  für die Ausgangsgleichung (4.3) entsprechend vereinfacht und der Einfluss des Aktuators  $\delta$  vernachlässigt

$$\tilde{C}_n = \alpha(t) \left[ a_n |\alpha(t)|^2 + b_n |\alpha(t)| + c_n \left( 2 - \frac{M(t)}{3} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Somit ergibt sich entsprechend die vereinfachte Ausgangsgleichung zu

$$n_z(t) = K_z \cdot M^2(t) \cdot \tilde{C}_n(\alpha(t), M(t)), \quad (4.9)$$

mit der das System keinen Durchgriff mehr aufweist. Im Folgenden wird außerdem aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine Angabe der Zeitabhängigkeit der entsprechend gekennzeichneten Größen verzichtet.

Das LPV-System aus dem im vorherigen Absatz beschriebenen nichtlinearen System wird nach dem in Kapitel 2.2.2 dargestellten Vorgehen mit Hilfe einer Linearisierung in Trimpunkten erzeugt. Hierzu werden die nichtlinearen Differentialgleichungen in (4.2) sowie die vereinfachte Ausgangsgleichung (4.9) an einer Menge von Punkten in den beiden betrachteten LPV-Parametern aus (4.7) getrimmt und anschließend linearisiert. Für die Trimmung und Linearisierung wird der in (4.7) definierte Bereich der beiden Parameter mit jeweils elf äquidistanten Punkten diskretisiert. Zusätzlich ist das LPV-System im Parameter  $\rho_1$  symmetrisch, weshalb nur eine Hälfte des Parameterintervalls betrachtet werden muss. Damit ergeben sich mit

$$\rho_1 \in \{0, 2.5, 5, \dots, 20, 22.5, 25\}^\circ \quad (4.10a)$$

$$\rho_2 \in \{2, 2.2, 2.4, \dots, 3.6, 3.8, 4\} \quad (4.10b)$$

die im Regler-Entwurf betrachteten Punkte des relevanten Parameterbereichs. Durch dieses Vorgehen entsteht an jeder Kombination der in (4.10) aufgeführten Werte ein lineares LTI-System. Das dadurch entstehende LPV-System besitzt die Form

$$\dot{x} = \mathbf{A}(\rho) \cdot x + \mathbf{B}(\rho) \cdot u, \quad (4.11a)$$

$$y = \mathbf{C}(\rho) \cdot x + \mathbf{D}(\rho) \cdot u, \quad (4.11b)$$

wobei für den Zustands-, Eingangs- und Ausgangsvektor

$$x = (\alpha, q)^T, \quad u = \delta, \quad y = (n_z, q)^T \quad (4.12)$$

gilt. Die Matrizen  $\mathbf{A} - \mathbf{D}$  in (4.11) liegen aufgrund der Erzeugung durch lokale Linearisierungen entsprechend in gitterbasierter Form vor.

Im Folgenden soll für (4.11) ein LPV-Regler mit Zustandsrückführung entworfen werden. Für diesen Entwurf ist im Vorfeld eine Zustandstransformation erforderlich, mit der die Zustandsgrößen  $\alpha$  und  $q$  durch die beiden gemessenen Ausgangsgrößen ersetzt werden. Dies ist erforderlich, weil der Zustand  $\alpha$ , wie einleitend in diesem Kapitel beschrieben, als nicht messbar angenommen wird und somit auch nicht für die Rückführung zur Verfügung steht. Des Weiteren soll die Ausgangsgröße  $n_z$  als Regelgröße verwendet werden. Deshalb wird mit Hilfe einer Zustandstransformation der nicht messbare Zustand  $\alpha$  durch die messbare Ausgangsgröße  $n_z$  ersetzt. Hierzu muss der Zustandsvektor  $x$  des Systems durch einen neuen Zustandsvektor  $\tilde{x}$  ersetzt werden, welcher die gewünschten Einträge besitzt. Dafür muss eine Transformationsmatrix so bestimmt werden, dass der Zusammenhang

$$\tilde{x} = T \cdot x \quad (4.13)$$

erfüllt ist. Wie bereits genannt, soll die Zustandsgröße  $\alpha$  durch die Ausgangsgröße  $n_z$  ersetzt werden. Die zweite Ausgangsgröße  $q$  entspricht bereits der anderen Zustandsgröße der Regelstrecke, wodurch  $\tilde{x}$  in (4.13) dem Ausgangsvektor

$$y = \tilde{x} = \begin{pmatrix} n_z & q \end{pmatrix}^T. \quad (4.14)$$

des LPV-Systems (4.11) entspricht. Aufgrund der in (4.9) vorgenommenen Vereinfachung enthält das System keinen Durchgriff, weshalb sich die  $\mathbf{D}$ -Matrix des linearisierten Systems zu einer Nullmatrix ergibt. Dementsprechend ist der in (4.13) beschriebene Zusammenhang äquivalent mit der Ausgangsgleichung des LPV-Systems (4.11) und die gesuchte Transformation  $\mathbf{T}$  entspricht dessen  $\mathbf{C}$ -Matrix. Mit Hilfe der so erhaltenen Transformationsmatrix kann dann das Zustandsraumssystem mit

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\mathbf{TAT}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \tilde{x} + \underbrace{\mathbf{TB}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot u \quad (4.15)$$

umgeformt werden, wobei für  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} n_z & q \end{pmatrix}^T$  und für  $u = \delta$  gilt. Die Ausgangsmatrix des Zustandsraumsystems verschwindet unter den getroffenen Annahmen, da entsprechend mit einem  $\mathbf{T} = \mathbf{C}$

$$y = \underbrace{\mathbf{CT}^{-1}}_{\mathbf{CC}^{-1}} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}, \quad (4.16)$$

gilt. Aufgrund der Betrachtung eines gitterbasierten LPV-Systems kann diese Transformation lokal in jedem Gitterpunkt durchgeführt werden. Somit entsteht eine für den angestrebten Entwurf einer Zustandsrückführung geeignete Regelstrecke.

## 4.2 Entwurf einer LPV-Regelung mit unbeschränkten Änderungsraten

In diesem Kapitel wird zunächst ein LPV-Reglerentwurf mit unbeschränkten Änderungsraten der LPV-Parameter betrachtet. Nach Definition 2.4 in Kapitel 2.2.1 wird in diesem Fall die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für beliebig hohe Änderungsraten der jeweiligen Parameter garantiert. Die dadurch erhaltene Stabilität ist demzufolge entsprechend konservativ, was negative Auswirkungen auf die Leistungsfähigkeit des erhaltenen LPV-Reglers haben kann. Unter der Annahme eines nicht messbaren Anstellwinkels wird für das im vorherigen Kapitel 4.1 beschriebene Regelungsproblem ein LPV-Regler mit den in Kapitel 3 entwickelten Methoden entworfen. Dieser wird im Anschluss analysiert und mit einem konventionellen LPV-Regler mit einem vollständig messbaren Parametervektor verglichen.

### 4.2.1 Beschreibung des Reglerentwurfs

Entsprechend der im Vorfeld formulierten Annahme des nicht messbaren Parameters  $\rho_1 = \alpha$  ergibt sich somit mit

$$\hat{\rho} = \rho_2 = M \quad (4.17)$$

ein partieller Parametervektor nach Definition 3.1, welcher nur noch aus der Machzahl  $M$  besteht. Es wird somit ein Regler gesucht, welcher nur von  $M$  abhängig ist, aber das LPV-System (4.11) für alle erreichbaren Trajektorien des vollständigen Parametervektors (4.6) stabilisiert. Zum Vergleich wird zusätzlich ein LPV-Regler entworfen, welchem ein vollständig messbarer Parametervektor zur Verfügung steht und somit einem konventionellen LPV-Entwurf entspricht.

Der geschlossene Regelkreis mit der verallgemeinerten Regelstrecke und dem zu entwerfenden Regler mit Zustandsrückführung ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Der Regler

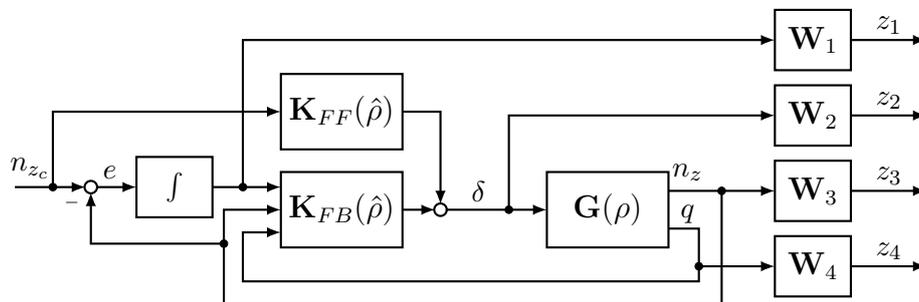


Abbildung 4.1: Darstellung des Regelungsproblems

wird dabei durch die beiden Blöcke  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  repräsentiert und diese werden

als nur vom in (4.17) definierten partiellen Parametervektor  $\hat{\rho}$  abhängig angenommen. Der Regler entspricht somit der in Kapitel 3.3.3 definierten Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden. Dieser Regler wird zusätzlich mit einer Integration des Regelfehlers  $e = n_{z_c} - n_z$  erweitert. Die Erweiterung dient der Sicherstellung der stationären Genauigkeit der Sollwertfolge. Die Vorsteuerung wird hierzu ergänzend verwendet, dient aber in erster Linie der Realisierung eines schnelleren Anregelverhaltens. Mit dem Block  $\mathbf{G}(\rho)$  wird die in (4.11) angegebene Regelstrecke bezeichnet. Der Regler wird entworfen, indem die induzierte  $L_2$ -Norm des geschlossenen Regelkreises von dem Eingangssignal  $n_{z_c}$ , welches den vorgegebenen Lastfaktor darstellt, auf die vier Ausgangssignale  $z_1 - z_4$  minimiert wird. Hierbei stellen  $z_2$  die vom Regler erzeugte Stellgröße und  $z_1, z_3$  und  $z_4$  die Zustandsgrößen des geschlossenen Regelkreises dar. Mit  $z_3$  und  $z_4$  werden die Zustandsgrößen der Regelstrecke und mit  $z_1$  der Zustand des im Regler enthaltenen Integrators bezeichnet. Mit Hilfe der vier Gewichte  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_4$  können diese vier Signale im Entwurfsprozess untereinander gewichtet und somit der Regler gezielter eingestellt werden. Die Wahl dieser vier Größen wird im folgenden Kapitel 4.2.2 beschrieben. Für den im Vorfeld angesprochenen für Vergleichszwecke zu entwerfenden konventionellen LPV-Regler wird ebenfalls der in Abbildung 4.1 dargestellte Regelkreis verwendet und die beiden Regler-Komponenten  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  mit dem nur partiell messbaren Parametervektor durch die Komponenten  $\mathbf{K}_{FB}(\rho)$  und  $\mathbf{K}_{FF}(\rho)$  mit dem vollständigen Parametervektor  $\rho$  ersetzt.

Die in Abbildung 4.1 verwendete Reglerkomponente  $\mathbf{K}_{FB}$  wird mit dem in Kapitel 3.3.1 aufgestellten Theorem 3.3 zur Synthese einer Zustandsrückführung ermittelt. Zu diesem Zweck muss die Form der unbekanntenen Matrizen  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$ , beziehungsweise  $\mathbf{P}(\rho)$  und  $\mathbf{Y}(\rho)$  für den konventionellen Regler, festgelegt werden. Wie einleitend erwähnt, wird für die Betrachtung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises von unbeschränkten Änderungsraten der LPV-Parameter ausgegangen. Demzufolge wird wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, eine konstante Lyapunov-Matrix  $\mathbf{P}$  verwendet. Zusätzlich wird der Term  $\dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}})$  in der LMI (3.15) zu Null gesetzt, welcher nach Definition 2.5 nur bei einer Beschränkung der Änderungsraten relevant ist. Für die Matrix-Funktion  $\mathbf{Y}(\rho)$  wird ein Polynom zweiter Ordnung in der Machzahl, beziehungsweise in beiden Parametern im konventionellen Fall verwendet.

Im Fall des nur partiell messbaren Parametervektors ergeben sich daher die folgenden Terme

$$\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{P}_0, \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{Y}(\hat{\rho}) = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1 \cdot M + \mathbf{Y}_2 \cdot M^2. \quad (4.18b)$$

Analog wird für den Vergleichsregler ebenfalls ein Polynom zweiter Ordnung in der Machzahl  $M$  sowie dem zweiten LPV-Parameter  $\alpha$  verwendet

$$\mathbf{P}(\rho) = \mathbf{P}_0, \quad (4.19a)$$

$$\mathbf{Y}(\rho) = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1 \cdot \alpha + \mathbf{Y}_2 \cdot M + \mathbf{Y}_3 \cdot \alpha^2 + \mathbf{Y}_4 \cdot M^2. \quad (4.19b)$$

Die Vorsteuerung  $\mathbf{K}_{FF}$  wird in diesem Fall mit dem bereits in Kapitel 3.3.3 genannten vereinfachten Ansatz aus Abbas u. a. (2014) bestimmt, welche sich direkt aus der negativen Reglerverstärkung der  $n_z$ -Rückführung ergibt. Der bereits in Kapitel 3.3.3 genannte Zusammenhang ist mit

$$\mathbf{K}_{FF} = -\mathbf{K}_{FB} \cdot \mathbf{C}_2^T, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

angegeben, wobei mit der Matrix  $\mathbf{C}_2$  die entsprechende Zuweisung der gewünschten Komponenten aus der Rückführung erfolgt. Die Abhängigkeit von dem jeweiligen Parametervektor  $\hat{\rho}$  bzw.  $\rho$  wurde in (4.21) nicht mit angegeben, weil dieser Zusammenhang entsprechend für beide Regler verwendet wird. Zur Berechnung des Reglers werden die LMIs (3.15) in jedem einzelnen in (4.10) definierten Gitterpunkt mit Hilfe der in (4.18) bzw. (4.19) definierten Funktionen für die unbekanntenen Matrix-Variablen aufgestellt. Anschließend kann das entstehende Problem als ein mehrdimensionales LMI-Problem gelöst werden. Die Berechnung wird mit MATLAB unter der Zuhilfenahme von zwei Toolboxen durchgeführt. Für das Aufstellen und Verarbeiten der LPV-Matrizen wird die durch die in Seiler und Hjartarson (2015) beschriebene Toolbox *LPVTools* in MATLAB eingeführte LPV-Klasse verwendet. Gelöst werden die aufgestellten LMIs mithilfe der in Lofberg (2004) vorgestellten YALMIP-Toolbox und dem *Mosek*-Solver.

## 4.2.2 Bestimmung der Gewichtungsgrößen

Die Bestimmung der geeigneten Gewichte  $\mathbf{W}_i$  ist ein wichtiger Schritt im Entwurfsprozess des Reglers. Wie im vorherigen Kapitel 4.2.1 beschrieben, werden mit Hilfe dieser Größen die Signale in dem Ausgangsvektor  $z$  untereinander gewichtet, was eine gezieltere Einstellung des Reglers ermöglicht. Der Vektor  $z$  besteht in diesem Fall aus den Zustandsgrößen der Regelstrecke und dessen Stellgröße. Aufgrund der Wahl dieser Ausgangssignale in  $z$  sind die Gewichte  $\mathbf{W}_i$  mit den Größen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  bei einem LQR-Entwurf (siehe Skogestad und Postlethwaite (2001, S. 359ff.)) vergleichbar.

Aufgrund der Ähnlichkeit der Gewichtungsgrößen zu einem LQR-Entwurf bietet sich in diesem Fall ein ähnliches Vorgehen zur Bestimmung selbiger an. Wie es in Skogestad und Postlethwaite (2001, S. 363) beschrieben wurde, ist für die Regelung in erster Linie das Verhältnis zwischen der Gewichtung der Stellgrößen und Zustandsgrößen relevant. Ein empfehlenswertes Vorgehen ist es daher, den Wert für die Stellgröße auf  $\mathbf{W}_1 = 1$  festzusetzen und nur die Werte der verbleibenden drei Gewichte zu variieren. Die drei Gewichte der Zustandsgrößen sind dabei in zwei Gruppen aufzuteilen. Die Gewichte von  $n_z$  sowie dem integrierten Regelfehler haben einen direkten Einfluss auf das Folgeverhalten des geschlossenen Regelkreises, während das Gewicht von  $q$  Einfluss auf dessen Dämpfung nimmt. Für das Erreichen eines optimalen Folgeverhalten des geschlossenen Regelkreises werden aus diesem Grund zunächst die Gewichte

$\mathbf{W}_2$  und  $\mathbf{W}_4$  der beiden entsprechenden Zustandsgrößen betrachtet. Die Einstellung dieser Werte wird iterativ mit Hilfe einer nichtlinearen Simulation des geschlossenen Regelkreises aus der Regelstrecke in (4.2) und (4.9) sowie dem mit der aktuellen Wahl der Gewichtungsrößen ermittelten Regler durchgeführt.

In diesem ersten Schritt werden diese beiden Gewichte sukzessive so lange erhöht, bis eine gewünschte Anregelgeschwindigkeit erreicht oder zu große Ausschläge der Stellgröße benötigt werden. Der Wert der Zustandsgröße  $q$  zugehörigen Gewichtes wird dabei zunächst auf  $\mathbf{W}_3 = 1$  festgesetzt. Dieses Vorgehen führt zu denen in (4.22) aufgeführten Werten.

$$\mathbf{W}_1 = 1, \mathbf{W}_2 = 8, \mathbf{W}_3 = 1, \mathbf{W}_4 = 8 \quad (4.22)$$

In einem zweiten Schritt kann dann noch die Dämpfung des geschlossenen Regelkreises über das Gewicht der Zustandsgröße  $q$  ( $\mathbf{W}_3$ ) beeinflusst werden. Durch eine Erhöhung dieses Wertes kann somit ein Überspringen oder grundsätzlich stärkeres Schwingen der Antwort des geschlossenen Regelkreises auf ein Sollwert-Kommando abgemildert werden. Die in (4.22) genannten Werte führen zwar zu einem ausreichend schnellen Folgeverhalten, jedoch weist das Antwortverhalten ein stärkeres Schwingungsverhalten auf. Aus diesem Grund wird der Wert von  $\mathbf{W}_3$  leicht erhöht, sodass schlussendlich die Werte

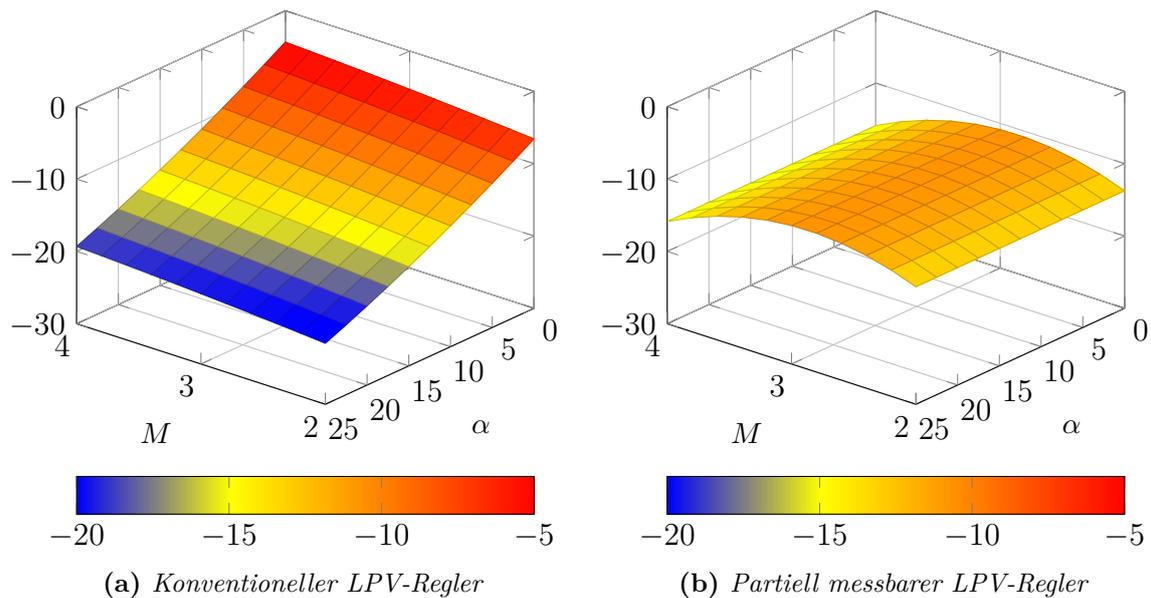
$$\mathbf{W}_1 = 1, \mathbf{W}_2 = 8, \mathbf{W}_3 = 3, \mathbf{W}_4 = 8 \quad (4.23)$$

resultierten. Die in (4.23) aufgeführten Werte werden für beide in Kapitel 4.2.1 beschriebene Reglerentwürfe verwendet.

### 4.2.3 Analyse der Ergebnisse

Im Folgenden werden die in den vorherigen Kapiteln entworfenen Regler analysiert und miteinander verglichen. Ziel der Analyse ist es, die Unterschiede zwischen beiden Reglern darzustellen und das Potential des entwickelten Ansatzes für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern aufzuzeigen. Hierzu werden im ersten Schritt die Reglerverstärkungen beider Regler miteinander verglichen. In einem zweiten Schritt wird eine nichtlineare Simulation durchgeführt und das Folgeverhalten beider Entwürfe gegenübergestellt.

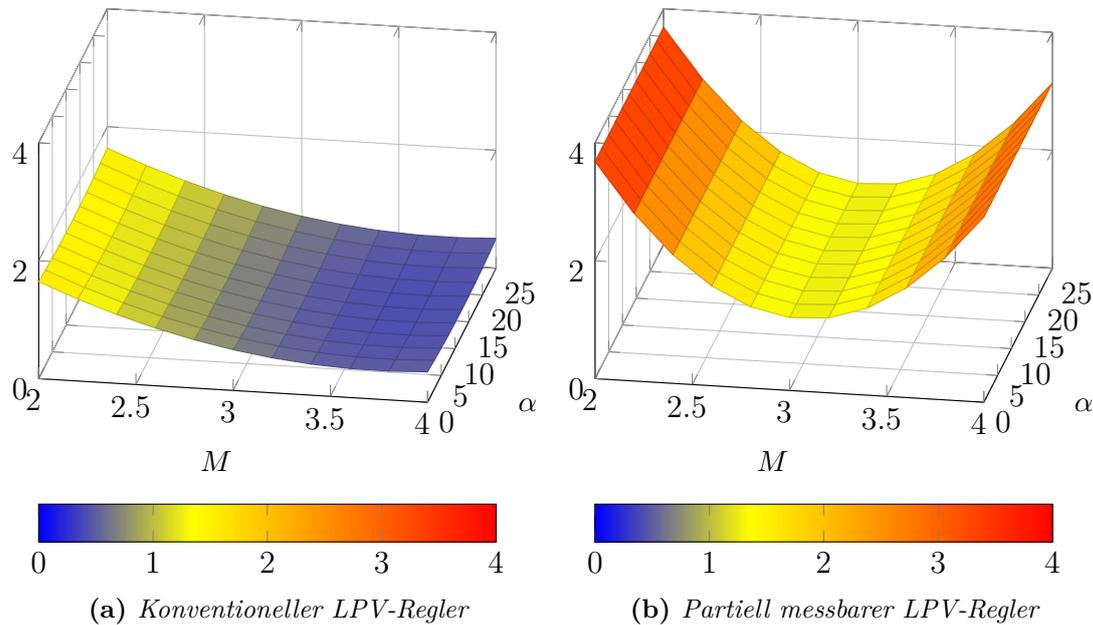
Die entworfenen Regler bestehen beide aus drei Komponenten, jeweils einer Reglerverstärkung für die beiden Ausgänge  $n_z$  und  $q$  der Regelstrecke, sowie einer Verstärkung des integrierten Regelfehlers  $e = n_{zc} - n_z$ . Die Vorsteuerung entspricht, wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben, der negativen Reglerverstärkung von  $n_z$  und wird daher nicht gesondert betrachtet. Für den Vergleich dieser Verstärkungen werden alle Komponenten jeweils einzeln betrachtet. Als erstes ist in Abbildung 4.2 der Vergleich der



**Abbildung 4.2:** Reglerverstärkung der  $n_z$ -Rückführung mit unbeschränkten Änderungsraten im Vergleich

Verstärkung der  $n_z$ -Rückführung des konventionellen LPV-Reglers und der des nur mit einem partiell messbaren Parametervektors entworfenen LPV-Reglers über den gesamten betrachteten Parameterbereich gegenübergestellt. Bei der Betrachtung der Reglerverstärkungen des konventionellen LPV-Reglers wird deutlich, dass der Betrag der Verstärkung mit zunehmendem Anstellwinkel  $\alpha$  und steigender Machzahl  $M$  größer wird. Der Verlauf der Reglerverstärkungen im Fall des nur partiell messbaren Parametervektors gestaltet sich hingegen anders. Im Fall der Machzahl zeigt sich ein Maximum der Verstärkungen im Bereich einer Machzahl von  $M = 3$  und ein Abfallen zu beiden Rändern des Parameterbereichs. Insgesamt bewegen sich die Verstärkungen in Abhängigkeit der Machzahl in diesem Fall zusätzlich nur in einem deutlich kleineren Bereich als es beim konventionellen Regler der Fall ist. Diese können in diesem Fall außerdem aufgrund der nicht vorhandenen Messbarkeit des Anstellwinkels entsprechend nicht an ein sich änderndes  $\alpha$  angepasst werden und die Werte für alle Anstellwinkel bewegen sich im Bereich des Mittelwertes aller Verstärkungen des konventionellen LPV-Reglers. Dieser Vergleich lässt insgesamt den Schluss zu, dass bei der Synthese eines solchen Reglers ein möglichst optimaler Kompromiss über den gesamten Bereich des nicht messbaren Parameters gesucht wird.

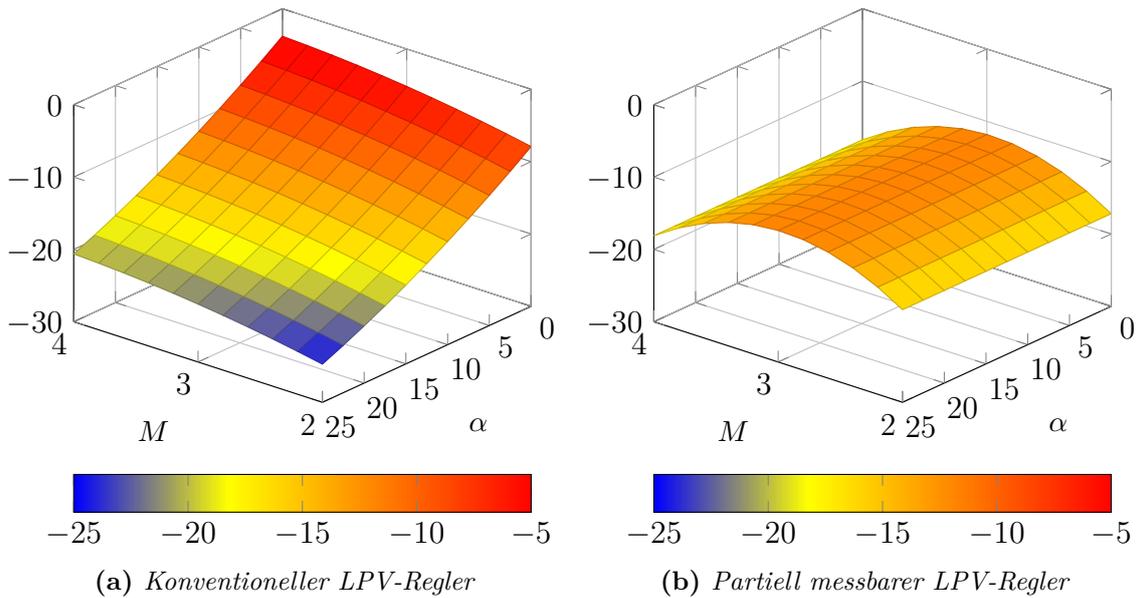
Bei der Betrachtung der Reglerverstärkung der  $q$ -Rückführung in Abbildung 4.3 zeigen sich hingegen andere Ausprägungen. Während sich bei dem konventionellen LPV-Regler eine Zunahme der Verstärkungen mit steigendem  $\alpha$  und eine Abnahme mit steigender Machzahl  $M$  zeigt, haben die Verstärkungen im Fall des nur partiell messbaren Parametervektors eine andere Tendenz. Es zeigen sich zum einen sehr große



**Abbildung 4.3:** Reglerverstärkung der  $q$ -Rückführung mit unbeschränkten Änderungs-raten im Vergleich

Werte in den Randbereichen des Parameterbereiches der Machzahl  $M$  und ein Abfallen zur Mitte hin. Die Werte, welche im mittleren Bereich auftreten, bewegen sich im Bereich des Maximums des konventionellen Reglers, wohingegen die Ränder bereits bei etwa dem doppelten Wert liegen. Somit besitzt der Regler für den nur partiell messbaren Parametervektor bei dieser Rückführung über den gesamten Parameterbereich teilweise deutlich höhere Verstärkungen.

Schlussendlich werden in Abbildung 4.4 die Verstärkungen des integrierten Regelfehlers in beiden Fällen dargestellt. Bei dem konventionellen LPV-Regler zeigt sich hier ein stetiges Zunehmen der Verstärkung mit abnehmenden  $\alpha$  und zunehmender Machzahl  $M$ , wie es schon bei der  $n_z$ -Rückführung der Fall war. Bei dem LPV-Regler mit nur partiell messbarem Parametervektor zeigt sich hier ebenfalls ein anderes Bild. Zum einen sind die Verstärkungen des integrierten Regelfehlers auch in diesem Fall über den gesamten Parameterbereich bei den Mittelwerten des konventionellen LPV-Reglers angesiedelt. Und zum anderen zeigen sich ebenfalls nicht so große Unterschiede über eine steigende Machzahl. Insgesamt ist ebenfalls ein sehr ähnlicher Verlauf wie im Fall der  $n_z$ -Rückführung zu beobachten. Die Verstärkung nimmt im Bereich von  $M = 3$  den größten Wert an und fällt zu den Rändern des Machzahl Intervalls ab. Zusammenfassend lässt sich bei dem Vergleich der beiden Regler festhalten, dass sich für den LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor tendenziell Reglerverstärkungen ergeben, welche sich im Bereich der Mittelwerte eines vergleichbaren konventionellen LPV-Reglers befinden. Ausnahme bildet hierbei die  $q$ -Rückführung, bei welcher sich



**Abbildung 4.4:** Reglerverstärkung der Regelfehler-Integration mit unbeschränkten Änderungsraten im Vergleich

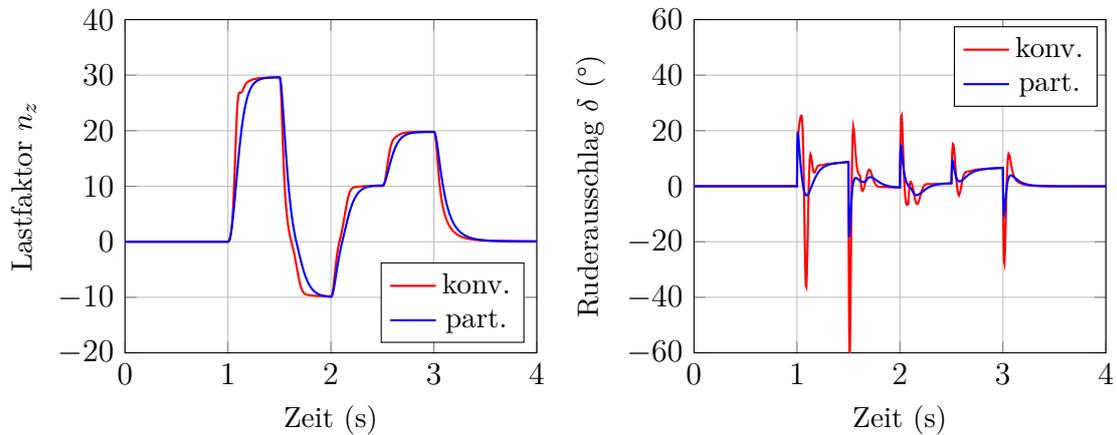
im gesamten Parameterbereich im Fall des nur partiell messbaren Parametervektors teilweise deutlich höhere Verstärkungen ergeben haben.

Abschließend werden beide Regler noch innerhalb einer nichtlinearen Simulation der Regelstrecke (4.2) und (4.9) untersucht. Ziel ist es, die genauen Unterschiede zwischen einem konventionellen LPV-Regler und einem mit dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren entworfenen Regler für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern zu untersuchen. Für die Durchführung einer nichtlinearen Simulation ist für den exogenen LPV-Parameter der Machzahl  $M$  ein zeitlicher Verlauf über die Simulationszeit erforderlich, weil diese von anderen Parametern des Flugkörpers abseits der Nickbewegung abhängig ist. In Wu (1995, S. 115) wird zu diesem Zweck ein von den beiden Größen  $n_z$  und  $\alpha$  abhängiges Profil

$$\dot{M}(t) = \frac{1}{v_s} \left[ -|n_z(t)| \cdot \sin(|\alpha(t)|) + A_x \cdot M(t)^2 \cdot \cos(\alpha(t)) \right], \quad (4.24a)$$

$$M(0) = 3.75 \quad (4.24b)$$

verwendet, welches auch in diesem Fall in der Simulation zur Anwendung kommt. Durch Integration von (4.24a) kann entsprechend die aktuelle Machzahl errechnet werden. Durch Wahl des Anfangswerts dieses Integrators kann darüber hinaus der Machzahl-Bereich bestimmt werden, in dem die Simulation ausgeführt werden soll. Dieser wird in diesem Fall mit  $M = 3.75$  initialisiert. Mit Hilfe von (4.24) wird eine Simulation des Regelkreises aus (4.2), (4.9) und den beiden im vorherigen Kapitel entworfenen Reglern durchgeführt, in der jeweils beiden Regler eine Folge von  $n_z$ -Kommandos gegeben



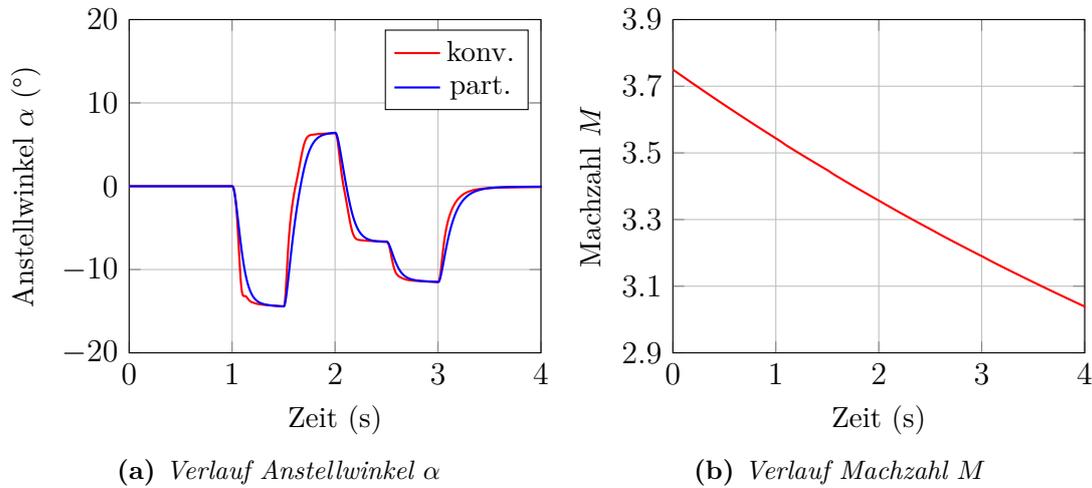
(a) Folgeverhalten des kommandierten Lastfaktors (b) Ruderausschläge während Manöver

**Abbildung 4.5:** Ergebnisse der nichtlinearen Simulation beider Regelkreise im Fall unbeschränkter Änderungsraten

**Tabelle 4.2:** Vergleich der Anregelzeiten beider Regler mit unbeschränkten Änderungsraten

Regler	Sprung 1	Sprung 2	Sprung 3	Sprung 4	Sprung 5	$\emptyset$
konventionell	0.18 s	0.26 s	0.20 s	0.15 s	0.44 s	0.25 s
partiell messbar	0.25 s	0.39 s	0.31 s	0.21 s	0.48 s	0.33 s
Differenz (abs.)	0.07 s	0.13 s	0.11 s	0.06 s	0.04 s	0.08 s
Differenz (%)	39 %	50 %	55 %	40 %	9 %	32 %

wird. Die Resultate dieser beiden Simulationen sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Die Folgesignale der beiden Regelkreise sind in den Abbildungen übereinander gelegt, wobei mit dem roten Verlauf der konventionelle LPV-Regler und mit dem blauen Verlauf der LPV-Regler mit nur partiell messbaren Parametern dargestellt wird. Zusätzlich sind in Abbildung 4.5b noch die jeweiligen Verläufe des Ruderausschlags  $\delta$  abgebildet. Bei dem Vergleich zwischen den beiden Verläufen wird auf den ersten Blick deutlich, dass der konventionelle Regler merkbar dynamischer ist und schneller den kommandierten Sollwert erreicht als der Regler mit dem nur partiell messbaren Parametervektor. Um die beiden Regler genauer zu vergleichen, sind die Anregelzeiten der fünf Sprünge in Tabelle 4.2 dargestellt. Als Anregelzeit wird in diesem Fall der Zeitraum betrachtet, welcher für das Erreichen von 95 % des Sollwertes erforderlich ist. Aus den erhaltenen Werten wird vor allem das bereits angesprochene schnellere Ansprechverhalten des konventionellen Reglers deutlich, welches in allen Fällen ein schnelleres Erreichen des Zielwertes ermöglicht. Am größten sind die Unterschiede beim zweiten und dritten



**Abbildung 4.6:** Verlauf der beiden LPV-Parameter in der nichtlinearen Simulation mit unbeschränkten Änderungsraten

Sprungkommando, welche auch der stärksten Änderung in  $\alpha$  entsprechen. Dessen Verlauf ist in Abbildung 4.6a dargestellt. In diesen Fällen wirkt sich der Nachteil der nicht vorhandenen Anpassbarkeit an Änderungen in  $\alpha$  des Reglers mit nur partiell messbaren Parametern am stärksten aus. Jedoch sind die Unterschiede in allen Fällen erkennbar und es liegt eine insgesamt um durchschnittlich 32 % geringere Anregelzeit vor. Bei der Betrachtung der Stellausschläge in Abbildung 4.5b wird allerdings auch deutlich, dass der konventionelle LPV-Regler für diese schnellere Anregelzeit auch deutlich höhere Stellausschläge benötigt. Die Ursache hierfür ist in den steigenden Reglerverstärkungen mit zunehmendem  $\alpha$  zu suchen, welche bei dem LPV-Regler mit nur partiell messbaren Parametern entsprechend nicht auftreten und somit zu deutlich moderateren Stellausschlägen führen.

Abschließend sind in Abbildung 4.6 noch die Verläufe der beiden LPV-Parameter abgebildet. Bei der Darstellung des Anstellwinkels wurden die gleichen Farben wie zuvor in Abbildung 4.5 verwendet, bei der Machzahl wurde aufgrund der gleichen Machzahl-Profile in beiden zu vergleichenden Simulationen auf eine Unterscheidung verzichtet. Bei der Betrachtung des Parameters  $\alpha$  zeigt sich, dass während des simulierten Manövers größere Teile des Parameterbereichs durchfahren werden. Auch das Machzahl-Profil zeigt eine kontinuierliche Veränderung dieses Parameters während der gesamten Simulation. Die durchgeführte Simulation ermöglicht demnach eine sehr gute Beurteilung des Regelverhaltens bei sich ändernden LPV-Parametern.

Zusammenfassend lässt sich bei dieser Betrachtung festhalten, dass sich unter der Annahme von unbeschränkten Änderungsraten der LPV-Parameter mit den Verfahren für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern die nicht vorhandene Messbarkeit des LPV-Parameters  $\alpha$  kompensieren lässt. Es zeigen sich zwar im Folgeverhalten

des Reglers Unterschiede, die zu schnelleren Anregelverhalten des konventionellen LPV-Reglers (also mit einem vollständig messbaren LPV-Parametervektor) führen. Allerdings erfordert der konventionelle Regler durch die höheren Reglerverstärkungen bei steigendem Anstellwinkel auch ein deutlich dynamischeres Stellverhalten mit entsprechend höheren Ruderausschlägen. Es zeigt sich insgesamt, dass mit dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren bei einer nicht vorhandenen Messbarkeit eines Parameters ein im gesamten Parameterbereich stabiles Reglerverhalten erzielt werden kann, jedoch mit nicht zu vernachlässigenden Einschränkungen in der Anregelzeit gegenüber einem vergleichbaren Entwurf mit vollständig messbarem Parametervektor.

### 4.3 Entwurf einer LPV-Regelung mit beschränkten Änderungsraten

Im Folgenden werden bei dem LPV-Entwurf im Gegensatz zu Kapitel 4.2 zusätzlich noch die Änderungsraten der LPV-Parameter beschränkt, wie es in Definition 2.5 festgehalten wurde. Hierbei muss die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht mehr für beliebig hohe Änderungsraten der LPV-Parameter garantiert werden, was potentiell einen leistungsfähigeren Entwurf ermöglicht. In diesem Fall weist das Entwurfsverfahren für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern einen weiteren Nachteil gegenüber dem konventionellen LPV-Entwurf auf. Durch die nicht vorhandene Abhängigkeit der Lyapunov-Matrixfunktion von dem nicht messbaren Parameter, können die Änderungsraten entsprechend auch nicht beschränkt werden, weil der dafür erforderliche Term  $\dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}})$  unabhängig von dem nicht messbaren Parameter ist. Somit muss für den nicht messbaren Parameter in jedem Fall eine unbeschränkte und damit beliebig hohe Änderungsrate angenommen werden. Inwieweit sich dieser Nachteil zusätzlich auf die Leistungsfähigkeit eines Reglerentwurfes auswirkt, wird in diesem Kapitel ebenfalls beleuchtet.

#### 4.3.1 Beschreibung des Reglerentwurfs

Der Reglerentwurf erfolgt analog zu dem bereits in Kapitel 4.2.1 beschriebenen Entwurf. Es gilt in diesem Fall ebenfalls die getroffene Annahme eines nicht messbaren Parameters  $\rho_1 = \alpha$ , womit sich ebenfalls mit

$$\hat{\rho} = \rho_2 = M \tag{4.25}$$

ein partieller Parametervektor nach Definition 3.1 ergibt. Der geschlossene Regelkreis mit der verallgemeinerten Regelstrecke entspricht ebenfalls dem bereits in Abbildung 4.1 dargestellten Regelungsproblem. Für die in Abbildung 4.1 dargestellten Gewichtungparameter werden aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit mit den in Kapitel 4.2.2 ermittelten Werten (4.23) die gleichen wie in Kapitel 4.2 verwendet. Im Unterschied

zu dem in Kapitel 4.2.1 durchgeführten Entwurf werden in diesem Fall zusätzlich die Änderungsraten der LPV-Parameter beschränkt, weshalb nach Definition 2.5 für den Stabilitätsnachweis eine parameterabhängige Lyapunov-Matrixfunktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  verwendet wird. Der Reglerentwurf wird ebenfalls mit Hilfe von Theorem 3.3 durchgeführt, wobei der Term  $\dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}})$  in LMI (3.15) im Gegensatz zum Entwurf in Kapitel 4.2 nicht mehr vernachlässigt werden kann. Für die weiterhin erforderliche Matrixfunktion  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  wird wie zuvor in (4.18) ein Polynom zweiter Ordnung verwendet, während für die parameterabhängige Lyapunov-Matrixfunktion  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  ein Polynom erster Ordnung verwendet wird. Die Basisfunktionen ergeben sich somit zu

$$\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \cdot M, \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{Y}(\hat{\rho}) = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1 \cdot M + \mathbf{Y}_2 \cdot M^2. \quad (4.26b)$$

Für den zu Vergleichszwecken entworfenen konventionellen LPV-Regler werden ebenfalls Polynome zweiter und erster Ordnung verwendet, welche allerdings entsprechend von beiden LPV-Parametern abhängig sind. Diese ergeben sich damit zu

$$\mathbf{P}(\rho) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \cdot \alpha + \mathbf{P}_2 \cdot M, \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{Y}(\rho) = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1 \cdot \alpha + \mathbf{Y}_2 \cdot M + \mathbf{Y}_3 \cdot \alpha^2 + \mathbf{Y}_4 \cdot M^2. \quad (4.27b)$$

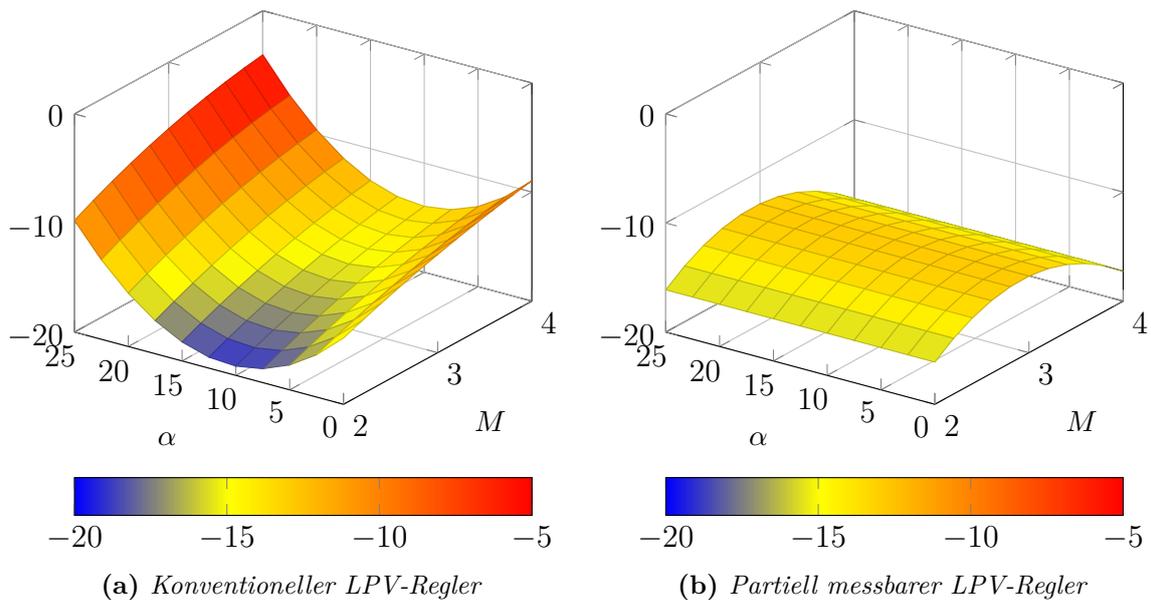
Zusätzlich gilt es in diesem Fall, die Änderungsraten der LPV-Parameter zu beschränken. Hierbei werden die Grenzwerte

$$\dot{M} \in [-0.5, 0.5], \quad \dot{\alpha} \in [-200, 200] \text{ } ^\circ/\text{s} \quad (4.28)$$

verwendet. In dem Fall des nur partiell messbaren Parametervektors gilt es eine Besonderheit zu beachten. Die Ratenbeschränkungen werden in LMI (3.15) durch den bereits genannten Term  $\dot{\mathbf{P}}(\rho, \dot{\rho})$  berücksichtigt, welcher sich durch Differentiation der gewählten Basis-Funktion von  $\mathbf{P}(\rho)$  ergibt. Ist diese Matrix-Funktion nur in Abhängigkeit von dem partiellen Parametervektor  $\hat{\rho}$  formuliert, ist der Term der Ratenbeschränkungen entsprechend auch nur von den Ratenbeschränkungen der messbaren Parameter in  $\hat{\rho}$  abhängig. Für die nicht messbaren Parameter können somit in dem entwickelten Verfahren keine Beschränkungen berücksichtigt werden und es wird automatisch von unbeschränkten Änderungsraten in diesen Parametern ausgegangen. Daraus folgt automatisch ein konservativerer Entwurf im Fall mit nur partiell messbaren LPV-Parametern. Auf den Einfluss dieser Einschränkung auf das Reglerverhalten wird im folgenden Kapitel 4.3.2 noch genauer eingegangen. Das Regelungsproblem selbst wird ebenfalls wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben unter Zuhilfenahme der beiden MATLAB-Toolboxen Seiler und Hjartarson (2015) und Lofberg (2004) und dem *Mosek*-Solver gelöst.

### 4.3.2 Analyse der Ergebnisse

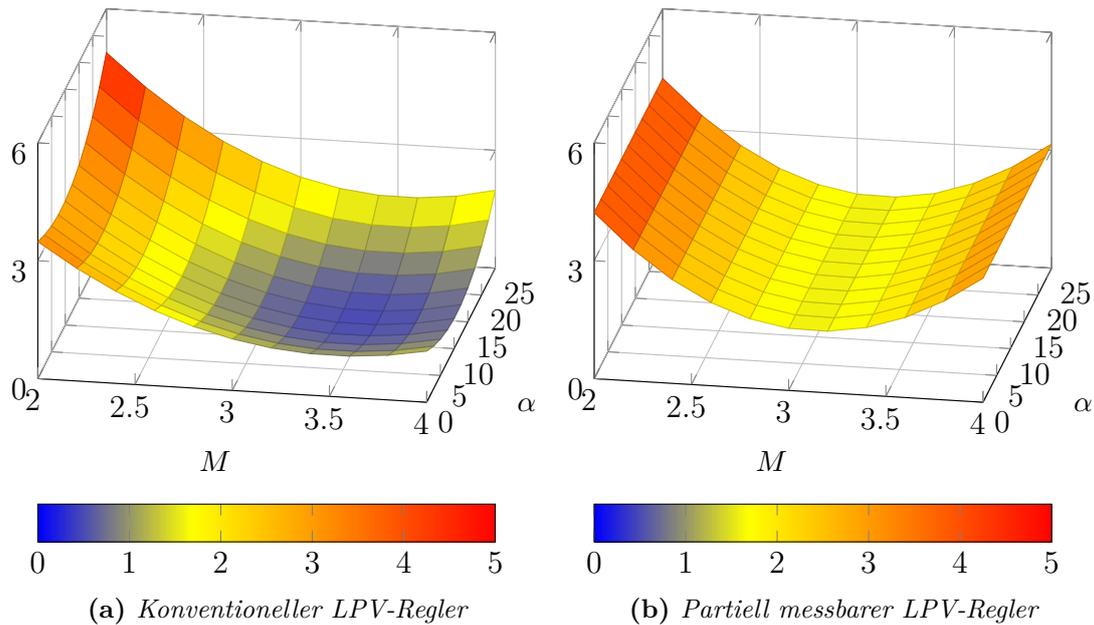
Im Folgenden werden die beiden entworfenen Regler mit Ratenbeschränkung miteinander verglichen, um wie bereits schon im vorherigen Kapitel 4.2.3 die Unterschiede



**Abbildung 4.7:** Reglerverstärkung der  $n_z$ -Rückführung mit beschränkten Änderungsraten im Vergleich

zwischen beiden Entwürfen herauszustellen. Hierzu werden ebenfalls zunächst die resultierenden Regler-Verstärkungen gegenüber gestellt. Anschließend werden beide Regler analog zum vorherigen Kapitel in einer nichtlinearen Simulation betrachtet und verglichen. Im Anschluss wird zusätzlich noch der Einfluss der Ratenbeschränkung auf das Reglerverhalten untersucht.

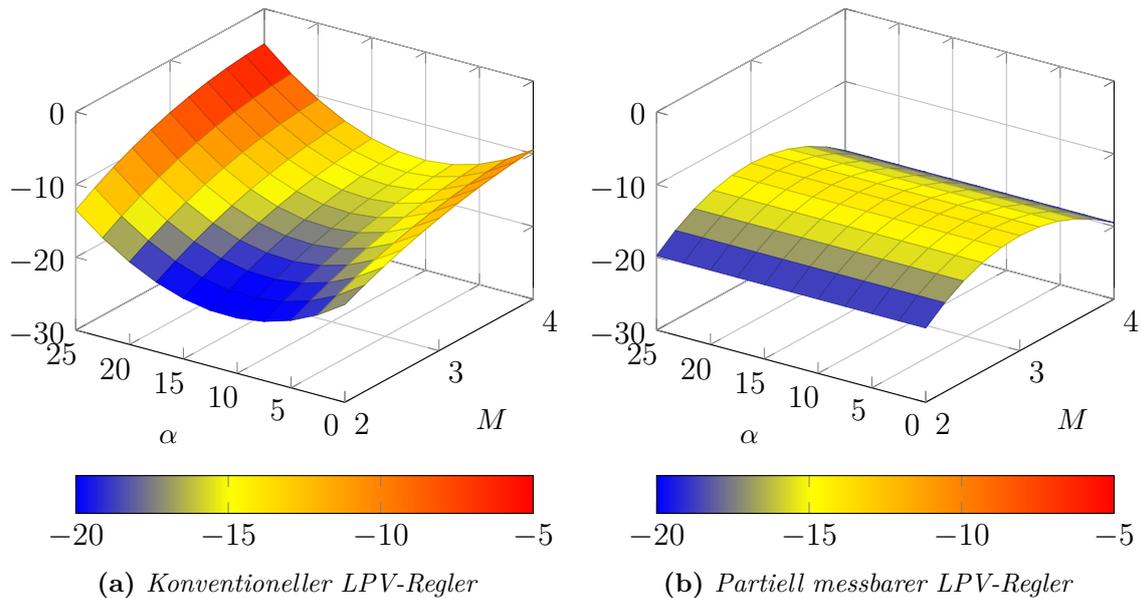
Die beiden Regler bestehen wie auch in dem vorherigen Entwurf aus jeweils drei Komponenten, welche im Folgenden einzeln miteinander verglichen werden. In Abbildung 4.7 sind die Verstärkungen der  $n_z$ -Rückführung über den gesamten betrachteten Parameterbereich dargestellt, welche wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben auch für die Vorsteuerung verwendet werden. Es fällt zunächst bei dem Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor der im Vergleich zum entsprechenden Regler mit unbeschränkten Änderungsraten in Abbildung 4.2 sehr ähnliche Verlauf der Reglerverstärkung in Abhängigkeit der Machzahl  $M$  auf. Auch in diesem Fall bewegen sich die Verstärkungen im Bereich des Mittelwertes der Werte des konventionellen LPV-Reglers. Dieser hingegen besitzt in diesem Fall einen anderen Verlauf und kennzeichnet sich zum einen durch ein starkes Zunehmen der Beträge der Verstärkungen hin zum mittleren Bereich der Machzahl und zum anderen durch deutlich niedrigere Beträge an den Rändern des Parameterraums. In Abhängigkeit der Machzahl lässt sich ein leichtes Steigen der Beträge hin zu niedrigeren Machzahlen beobachten. Es zeigt sich auch in diesem Fall, dass die Reglerverstärkungen des LPV-Reglers mit nur partiell messbaren Parametern über den Parameterbereich deutlich weniger stark angepasst werden, als es bei dem konventionellen LPV-Regler der Fall ist.



**Abbildung 4.8:** Reglerverstärkung der  $q$ -Rückführung mit beschränkten Änderungsraten im Vergleich

Die Verläufe der Reglerverstärkungen für die  $q$ -Rückführung sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Bei dem konventionellen LPV-Regler zeigen sich zur Mitte des  $\alpha$  Parameterbereichs abfallende Regler-Verstärkungen, welche zu den Rändern des betrachteten Intervalls von Anstellwinkeln wieder zunehmen. Bei der Machzahl zeigen sich die größten Werte bei der niedrigsten Machzahl  $M = 2$  und ebenfalls ein Abfallen zur Mitte des zugehörigen Intervalls von  $M$ . Zum oberen Rand dieses Intervalls nehmen die Werte wieder leicht zu. Auffällig gegenüber den anderen Reglerverstärkungen ist in diesem Fall der sehr ähnliche Verlauf der Reglerverstärkungen des LPV-Reglers mit dem nur partiell messbaren Parametervektor. Hierbei ergeben sich auch bei der kleinsten betrachteten Machzahl die größten Werte, welche zur Mitte des Intervalls hin abfallen und zum oberen Rand hin wieder ansteigen. Über den gesamten  $\alpha$ -Bereich sind die Werte entsprechend der nicht vorhandenen Abhängigkeit konstant.

Abschließend werden in Abbildung 4.9 die Verstärkungen der Regelfehler-Integration miteinander verglichen. Hierbei zeigt sich bei dem konventionellen LPV-Regler ein zur  $n_z$ -Rückführung ähnlicher Verlauf der Reglerverstärkung. Auch die Reglerverstärkungen des LPV-Reglers mit einem nur partiell messbaren Parametervektor weisen einen ähnlichen Verlauf wie bei der  $n_z$ -Rückführung in Abbildung 4.7 auf. Im Gegensatz zu dieser befinden sich die Werte in diesem Fall allerdings im Bereich zwischen Mittelwert und Maximum derer des konventionellen Reglers. Zusammenfassend lässt sich in diesem Fall ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Reglern feststellen. Wohingegen die Verstärkungen des konventionellen LPV-Reglers in allen drei Fällen ähnliche

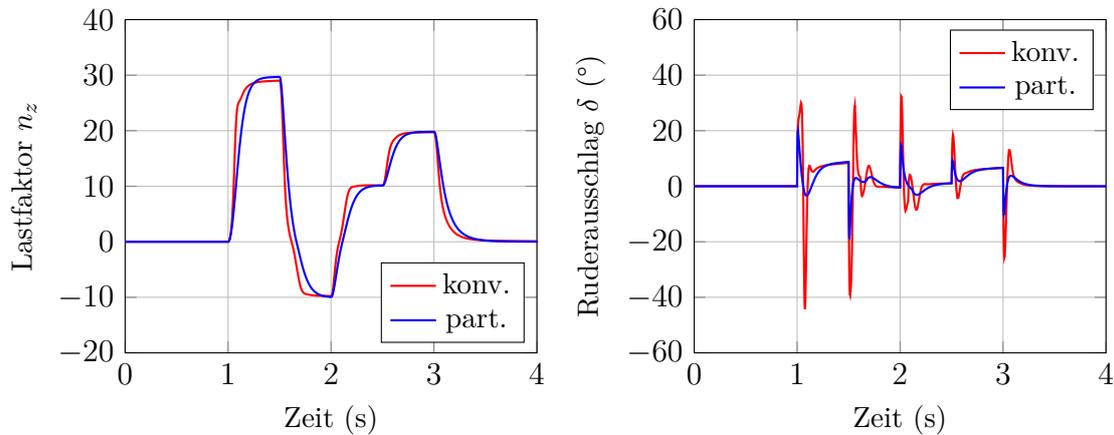


**Abbildung 4.9:** Reglerverstärkung der Regelfehler-Integration mit beschränkten Änderungsraten im Vergleich

Tendenzen besitzen, lässt sich bei dem LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor keine klare Gemeinsamkeit erkennen. Während die Verstärkungen der  $n_z$ -Rückführung und der des integrierten Regelfehlers einen ähnlichen Verlauf aufweisen, welcher sich von dem des konventionellen LPV-Reglers stark unterscheidet, weist die  $q$ -Rückführung einen zu seinem konventionellen Pendant sehr ähnlichen Verlauf auf. Insgesamt zeigen sich aber auch in diesem Fall bei dem konventionellen LPV-Regler die betragsmäßig höheren Verstärkungen und die Verläufe weisen auch die größeren Unterschiede über den gesamten betrachteten Parameterraum auf. Inwieweit sich diese Unterschiede auf die Leistungsfähigkeit der jeweiligen Regler auswirkt, wird im Folgenden mit Hilfe einer nichtlinearen Simulation untersucht.

Für die nichtlineare Analyse wird die bereits in Kapitel 4.2.3 verwendete nichtlineare Simulation der Regelstrecke (4.2) und (4.9) verwendet. Für den Verlauf der Machzahl wird ebenfalls das in (4.24) beschriebene Modell verwendet. In der Simulation werden wie bereits bei der vorherigen Analyse beiden Reglern jeweils eine Folge von  $n_z$ -Kommandos gegeben. Die Resultate dieser beiden Simulationen sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Die Folgesignale von beiden Regelkreisen sind übereinander gelegt, wobei mit dem roten Verlauf der konventionelle LPV-Regler und mit dem blauen Verlauf der LPV-Regler mit nur partiell messbaren Parametern dargestellt wird. Zusätzlich sind in Abbildung 4.10 noch die jeweiligen Verläufe des Ruderausschlags  $\delta$  abgebildet.

Es zeigt sich hierbei in erster Linie, dass trotz der Beschränkung der Änderungsraten das Folgeverhalten beider Regler jeweils sehr ähnlich zu dem Fall unbeschränkter



(a) Folgeverhalten des kommandierten Lastfaktors

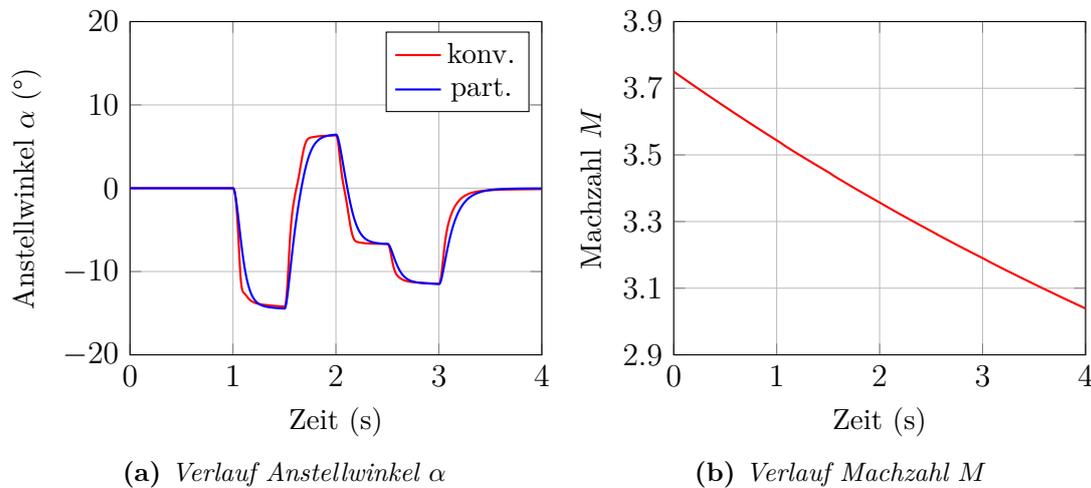
(b) Ruderausschläge während Manöver

**Abbildung 4.10:** Ergebnisse der nichtlinearen Simulation beider Regelkreise mit einer Beschränkung auf  $\dot{\alpha}_{max} = 200^\circ/s$

**Tabelle 4.3:** Vergleich der Anregelzeiten beider Regler mit beschränkten Änderungsraten ( $\dot{\alpha}_{max} = 200^\circ/s$ )

Regler	Sprung 1	Sprung 2	Sprung 3	Sprung 4	Sprung 5	$\emptyset$
konventionell	0.24 s	0.28 s	0.18 s	0.15 s	0.39 s	0.25 s
partiell messbar	0.25 s	0.39 s	0.32 s	0.20 s	0.44 s	0.32 s
Differenz (abs.)	0.01 s	0.11 s	0.14 s	0.1 s	0.05 s	0.07 s
Differenz (%)	4 %	39 %	77 %	52 %	13 %	18 %

Änderungsraten in Abbildung 4.5 ist. Dies wird auch bei der Betrachtung der Anregelzeiten in Tabelle 4.3 im Vergleich zu denen aus Tabelle 4.2 im unbeschränkten Fall deutlich. Einzig ist der LPV-Regler mit nur partiell messbarem Parametervektor im Durchschnitt minimal schneller, als noch im Fall der unbeschränkten Änderungsraten. Der Unterschied beträgt allerdings nur 0.01 s und ist dementsprechend sehr gering. Dies kann durch die sehr hoch angenommene Beschränkung der Änderungsrate des Anstellwinkel  $\alpha$  verursacht sein, welche zu einem weiterhin eher konservativem Reglerentwurf führt. Dieser Einfluss wird im weiteren Verlauf des Kapitels im Detail untersucht. Auffällig ist hingegen, dass die erforderlichen Stellauschläge im Vergleich zum unbeschränkten Fall in Abbildung 4.5b geringer ausfallen. Beide Regler weisen somit eine vergleichbare Leistungsfähigkeit bei gleichzeitig geringerem Stellaufwand auf. Abschließend sind in Abbildung 4.11 die Verläufe der beiden LPV-Parameter in der nichtlinearen Simulation dargestellt.



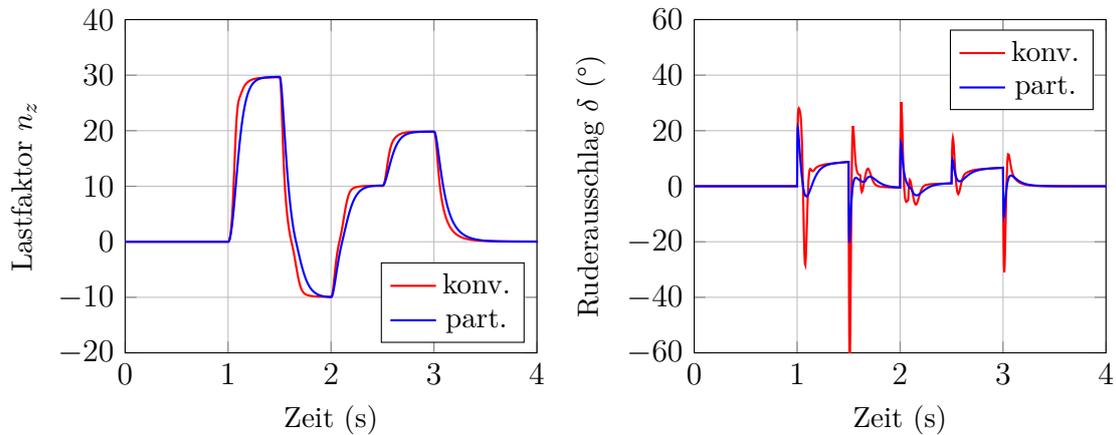
**Abbildung 4.11:** Verlauf der beiden LPV-Parameter in der nichtlinearen Simulation mit einer Beschränkung auf  $\dot{\alpha}_{max} = 200^\circ/\text{s}$

Zusätzlich zu der grundsätzlichen Leistungsfähigkeit beider Regler wird in diesem Fall der Einfluss der angenommenen Beschränkung der Änderungsrate des Anstellwinkels  $\alpha$  untersucht. Grund hierfür ist die bereits in Kapitel 4.3.1 genannte Einschränkung bei dem LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor, bei dem eine Ratenbeschränkung der nicht messbaren Parameter nicht betrachtet werden kann und somit immer automatisch von dem Fall einer unbeschränkten Änderungsrate ausgegangen wird. Um diesen Einfluss genauer darzustellen, wird mit dem in Kapitel 4.3 beschriebenen Reglerentwurf zusätzlich ein konventioneller LPV-Regler mit einer reduzierten maximalen Änderungsrate des LPV-Parameters  $\alpha$  von

$$\dot{\alpha} \in [-50, 50]^\circ/\text{s} \quad (4.29)$$

entworfen. Die Änderungsrate der Machzahl wird nicht verändert. Der erhaltene LPV-Regler wird in der gleichen Simulation ebenfalls mit dem LPV-Regler mit nur partiell messbaren Parametern verglichen. Der Verlauf von  $n_z$  sowie die erforderlichen Stellausschläge  $\delta$  in dieser Simulation sind in Abbildung 4.12 dargestellt.

In diesem Fall zeigen sich deutlichere Unterschiede zwischen den beiden Reglern. Der konventionelle LPV-Regler ist in diesem Fall mit einer Anregelzeit von durchschnittlich 0.22s deutlich schneller als der LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor, welcher wie zuvor auf durchschnittlich 0.32s kommt. Dieser Regler ist identisch zu dem aus dem vorherigen Fall, da eine Änderung der Beschränkung der Änderungsrate von  $\alpha$  aufgrund der nicht vorhandenen Abhängigkeit keinen Einfluss auf den Regler besitzt. Der konventionelle LPV-Regler ist demnach im Durchschnitt 0.1s schneller als der LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor. Im unbeschränkten Fall lag der Unterschied im Durchschnitt bei nur 0.08s, womit



(a) Folgeverhalten des kommandierten Lastfaktors (b) Ruderausschläge während Manöver

**Abbildung 4.12:** Ergebnisse der nichtlinearen Simulation beider Regelkreise mit einer Beschränkung auf  $\dot{\alpha}_{max} = 50^\circ/\text{s}$

**Tabelle 4.4:** Vergleich der Anregelzeiten beider Regler mit beschränkten Änderungsraten ( $\dot{\alpha}_{max} = 50^\circ/\text{s}$ )

Regler	Sprung 1	Sprung 2	Sprung 3	Sprung 4	Sprung 5	$\emptyset$
konventionell	0.18 s	0.26 s	0.20 s	0.14 s	0.35 s	0.22 s
partiell messbar	0.25 s	0.39 s	0.32 s	0.20 s	0.44 s	0.32 s
Differenz (abs.)	0.07 s	0.13 s	0.12 s	0.06 s	0.09 s	0.10 s
Differenz (%)	39 %	50 %	60 %	43 %	26 %	46 %

der weniger konservative Entwurf in diesem Fall den Vorteil des konventionellen LPV-Reglers erhöht. Jedoch erfordert dieser Regler auch in diesem Fall auch einen deutlich höheren Stellaufwand. Es zeigt sich somit, dass bei Parametern mit einer geringeren Änderungsrate der Unterschied in der Leistungsfähigkeit tendenziell noch weiter zunimmt. Allerdings zeigt auch in diesem Fall der LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor ein über den gesamten Parameterbereich stabiles Regelverhalten, mit allerdings den bereits angesprochenen Einbußen in der Leistungsfähigkeit gegenüber einem konventionellen LPV-Regler.

## 4.4 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel wurde das in Kapitel 3 entwickelte Verfahren für den Reglerentwurf für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern auf ein illustratives Beispiel

angewandt und mit einem konventionell entworfenen LPV-Reglern verglichen. Dabei wurde die Annahme betrachtet, dass einer der Parameter messtechnisch nicht erfassbar ist und somit einem LPV-Regler nicht zur Verfügung gestellt werden konnte. Für diesen Sachverhalt wurde mit den in dieser Arbeit entwickelten Verfahren ein entsprechender Regler entworfen, welcher nur von den messbaren Parametern abhängig ist, aber trotzdem die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für alle LPV-Parameter garantiert. Dieser wurde einem konventionellen LPV-Entwurf gegenübergestellt, für den ein vollständig messbaren Parametervektor angenommen wurde. Somit konnten die sich ergebenden Einschränkungen einer nicht vorhandenen Messbarkeit eines Parameters aufgezeigt werden.

Die Untersuchung gliederte sich in zwei Teile. Im ersten Teil in Kapitel 4.2 wurde angenommen, dass die Änderungsraten der LPV-Parameter als nicht beschränkt angesehen werden und somit theoretisch unbegrenzt hohe Werte annehmen können. Dies führt zu einem deutlich konservativerem Stabilitätsnachweis, kann aber dafür im Gegenzug zu entsprechenden Einschränkungen in der Leistungsfähigkeit des Reglers führen. Im zweiten Teil in Kapitel 4.3 hingegen wurde der Fall mit beschränkten Änderungsraten betrachtet und zusätzlich untersucht, inwieweit die Höhe dieser Beschränkungen einen Einfluss auf die Unterschiede zwischen einem konventionellen LPV-Entwurf und dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren besitzt.

Es zeigten sich in beiden betrachteten Fällen erkennbare Unterschiede zwischen beiden Reglern. Der konventionelle LPV-Regler wies in allen Fällen ein schnelleres Anregelverhalten auf und erreichte somit den kommandierten Zielwert schneller. Der Unterschied betrug hierbei durchschnittlich je nach betrachtetem Fall zwischen 18 % und 46 %. Absolut betrachtet ergibt sich daraus ein Unterschied von 0.07 s – 0.1 s, die sich der Regler mit einem nur partiell messbaren LPV-Parametervektor in den jeweiligen Fällen langsamer gegenüber einem konventionellen LPV-Regler zeigt. Dieser weist Anregelzeiten zwischen 0.22 s und 0.25 s auf. Allerdings erfordert der konventionelle LPV-Regler auch einen deutlich höheren Stellaufwand mit höheren absoluten Ausschlägen und einer ebenfalls höheren Dynamik. Die Verantwortlichkeit hierfür ist in der Anpassung der Regler-Verstärkungen an den Anstellwinkel zu suchen, welche gleichzeitig auch zu einem schnellere Anregelverhalten führt. Ein steigender Anstellwinkel führt bei diesem zu einer höheren Reglerverstärkung um sich dem ändernden Systemverhalten anzupassen, wodurch neben dem besseren Anregelverhalten auch die entsprechend höheren Stellausschläge entstehen. Der LPV-Regler mit dem nur partiell messbaren Parametervektor besitzt eine solche Anpassung hingegen nicht, weil die Reglerverstärkungen aufgrund der angenommenen nicht vorhandenen Messbarkeit des Anstellwinkels von selbigen unabhängig sind. Daraus resultiert das beobachtete langsamere Anregelverhalten bei allerdings gleichzeitig deutlich niedrigerem Stellaufwand.

Zusätzliche Unterschiede zwischen beiden Entwürfen ergeben sich bei der Betrachtung des Einflusses der gewählten Beschränkung von Änderungsraten der LPV-Parameter.

Als Besonderheit gilt es dabei zu beachten, dass der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern keine Beschränkung der Änderungsraten der nicht messbaren Parameter zulässt. Deren Änderungsraten müssen somit in diesem Fall weiterhin als unbeschränkt betrachtet werden. Zunächst wurde der nicht messbare Parameter im Vergleichsentwurf mit dem konventionellen Verfahren auf einen sehr hohen Wert beschränkt. Bei dem anschließenden Vergleich der beiden Regler zeigten sich vergleichbare Unterschiede wie bereits zuvor im unbeschränkten Fall. Damit der Einfluss der Höhe der Beschränkung auf die Leistungsfähigkeit des Reglers besser beurteilt werden kann, wurde im zweiten Schritt die Beschränkung der Änderungsrate des Anstellwinkels, und damit des nicht messbaren Parameters deutlich reduziert. Diese Änderung hat entsprechend nur einen Einfluss auf den konventionellen LPV-Regler. Mit dieser Absenkung vergrößerte sich der Unterschied zwischen den beiden Reglern merkbar und die Anregelzeit des konventionellen LPV-Reglers verkleinerte sich entsprechend, wohingegen die des LPV-Reglers mit nur partiell messbarem Parametervektor auf einem vergleichbaren Wert zum unbeschränkten Fall blieb.

Die erzielten Ergebnisse lassen einige Schlussfolgerungen im Hinblick auf die Nachteile eines LPV-Reglerentwurfes mit nur partiell messbaren Parametern gegenüber einem konventionellen Entwurf zu. Die Anpassungsfähigkeit des konventionellen LPV-Reglers an den als nicht messbar angenommenen LPV-Parameter ermöglicht in dem betrachteten Beispiel zwar ein in allen Fällen schnelleres Anregelverhalten, jedoch geht dieses auch mit einem höheren Stellaufwand einher. Mit einer beschränkten Änderungsrate des nicht messbaren Parameters im konventionellen Fall nimmt dieser Unterschied bei niedrigeren maximalen Änderungsraten zusätzlich dazu noch zu. Es ergeben sich somit durchaus erkennbare Leistungseinbußen durch eine nicht vorhandene Anpassung des Reglers an diesen Parameter. Allerdings zeigte auch der LPV-Regler mit einem nur partiell messbaren Parametervektor ein stabiles Regelverhalten über den gesamten betrachteten Parameterbereich und benötigte darüber hinaus zusätzlich noch einen geringeren Stellaufwand. Zusammenfassend ergibt sich somit, dass das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren in der Lage ist, bei LPV-Systemen die nicht vorhandene Messbarkeit eines LPV-Parameters zu kompensieren. Es ermöglicht damit den Entwurf eines Reglers, der in dem gesamten betrachteten Parameterbereich ein stabiles Regelverhalten gewährleistet. Jedoch ergeben sich im Hinblick auf die Leistungsfähigkeit des Reglers potentiell einige Nachteile gegenüber einem konventionellen LPV-Regler mit einer vollständigen Messbarkeit des Parametervektors, dessen Ausprägung zusätzlich direkt mit der Höhe der maximalen Änderungsrate des nicht messbaren Parameters zusammenhängt.



## 5 Anwendung auf eine parameterabhängige Flugzeug-Basisregelung

In diesem Kapitel wird das in Kapitel 3 entwickelte Entwurfsverfahren auf ein Problem in der Flugzeug-Basisregelung angewandt. Es wird zunächst exemplarisch die Nickdynamik eines kleineren Regionalflugzeuges betrachtet. Von diesem wurde vom Institut für Flugsystemdynamik der TU München ein Modell für die Anwendung der entwickelten Entwurfsmethoden zur Verfügung gestellt. Das linearisierte Modell dieses Flugzeugs lässt sich mit einem LPV-System beschreiben, welches von den drei Parametern Flughöhe, -geschwindigkeit und Lastfall abhängt. Mit dem Lastfall wird dabei der Einfluss der Gesamtmasse und Massenverteilung auf die Trimpunkte zusammengefasst. Für dieses Modell wird ein LPV-Regler entworfen, bei dem der LPV-Parameter des Lastfalls  $l$  im Betrieb als nicht messbar angenommen wird. Damit der Einfluss dieser Größe auf das Systemverhalten trotzdem im Reglerentwurf berücksichtigt werden kann, wird das in Kapitel 3 entwickelte Verfahren für die Lösung dieses Regelungsproblems verwendet. Dadurch wird erreicht, dass keine zusätzliche Sensorik oder Filter zum Schätzen der Masse und Schwerpunktlage erforderlich ist. Der dargestellte Entwurf basiert im Kern auf den Arbeiten Goßmann u. a. (2018) und Goßmann u. a. (2020), in denen die LPV-Reglung der Nickdynamik unter den beschriebenen Bedingungen erstmalig vorgestellt wurde. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird dieser außerdem auf die Seitendynamik des betrachteten Flugzeugmodells angewandt, um eine Analyse der entworfenen Regler innerhalb einer sehr detaillierten nichtlinearen Simulation des Flugzeugs mit sechs Freiheitsgraden zu ermöglichen.

### 5.1 Betrachtung der Regelstrecke der Nickdynamik

Als Regelstrecke wird zunächst, wie einleitend erwähnt, die Nickdynamik eines kleineren Regionalflugzeuges betrachtet. Diese ist ein Teil der gesamten Längsdynamik und wird im Allgemeinen, wie in Kapitel 2.3.2 erläutert, unabhängig von der Bahndynamik betrachtet und geregelt. Die in diesem Beispiel verwendete linearisierte Darstellung weicht von der in Kapitel 2.3.2 verwendeten Form ab und wird mit

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_{\dot{q}} \\ Z_{\dot{q}} \end{bmatrix} \dot{q}_c \quad (5.1)$$

beschrieben. Entgegen dem in (2.32) beschriebenen Zustandsraummodell der Nickdynamik wird bei dem hier betrachteten System die Bewegung durch die Vorgabe einer

Nickbeschleunigung  $\dot{q}_c$  gesteuert. Dies ist in einer besseren Kompensation von physikalischen Zusammenhängen und bekannter Nichtlinearitäten begründet. Es können unter anderem starke Unterschiede im Verhalten zwischen unterschiedlichen Trimpunkten besser ausgeglichen werden. Damit wird erreicht, dass sich das nichtlineare System aus Sicht des Reglers linearer verhält und somit das nichtlineare System gegenüber dem linearisierten System ein ähnlicheres Verhalten aufweist. Dies kann als eine Vorgabe des Nickmoments  $M$  an das Flugzeugs verstanden werden, welches wiederum bei der Verwendung am realen System dann in einen erforderlichen Ausschlag des Höhenruders  $\eta$  umgerechnet werden kann. Für Details zur beschriebenen Umrechnung sei an dieser Stelle auf den Anhang B.2 verwiesen.

Bei der Regelung der Nickdynamik wird anstatt des Anstellwinkels  $\alpha$  oft eine vertikale Beschleunigung  $a_z$  oder eine vertikale spezifische Kraft  $f_z$  als Regelgröße verwendet. Diese bezeichnet die Kraft  $F_z$  in Richtung der z-Achse pro Masse  $m$ . Dies wird in der Praxis unter anderem aufgrund der besseren Messbarkeit von Beschleunigungen einer Regelung des Anstellwinkels vorgezogen (McRuer u. a., 1973, S.446). In diesem Fall wird diese spezifische Kraft zusätzlich mit der Erdbeschleunigung  $g$  normalisiert, sodass man mit

$$f_z^* = \frac{F_z}{m \cdot g} \quad (5.2)$$

einen Lastfaktor mit Richtungsinformation als Regelgröße erhält. Die Größe  $f_z^*$  lässt sich direkt aus den beiden Zustandsgrößen in (5.1) berechnen, sodass sich im linearisierten System die folgenden Matrix-Gleichung

$$\begin{pmatrix} f_z^* \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{z\alpha} & f_{zq} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

als Ausgangsgleichung des Zustandsraummodells ergibt.

Für die beschriebene Regelstrecke wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels eine Regelung mit Zustandsrückführung entworfen. In dem dargestellten Modell stehen allerdings nur die beiden Ausgangsgrößen  $f_z^*$  und  $q$  als gemessene Größen für die Regelung zur Verfügung. Aus diesem Grund werden wie bereits in Kapitel 4 mit Hilfe einer Zustandstransformation die beiden Zustandsgrößen der Regelstrecke in  $x$  in die beiden Ausgangsgrößen in  $y$  transformiert, damit diese den im Regelkreis zurückgeführten Größen entsprechen. Es muss dabei nur die Zustandsgröße  $\alpha$  durch die gewünschte Regelgröße  $f_z^*$  ersetzt werden, da mit  $q$  die zweite Zustandsgröße bereits im Ausgangsvektor enthalten ist. Das bedeutet, dass in (5.1) der Zustandsvektor  $x$  durch den Zustandsvektor

$$\tilde{x} = (f_z^*, q)^T = y, \quad (5.4)$$

mit den gewünschten Größen ersetzt wird. Das Regelungsproblem geht somit in ein Zustandsregelungsproblem über. Die Anzahl der Ausgangsgrößen ist identisch mit der Anzahl der Zustandsgrößen, weshalb mit Hilfe einer Zustandstransformation  $\mathbf{T}$

$$\tilde{x} = \mathbf{T} \cdot x, \quad (5.5)$$

die Zustandsgrößen des Systems in die Ausgangsgrößen transformiert werden können. Diese Transformation wurde aus dem in Goßmann u. a. (2018) durchgeführten Reglerentwurf übernommen. Der Zusammenhang (5.5) entspricht wie in Kapitel 4 der Ausgangsgleichung in (5.3), weshalb die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  entspricht. Dementsprechend kann in diesem Fall ebenfalls der Zustandsvektor des Systems in (5.1) in den gewünschten Zustandsvektor mit

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\mathbf{CAC}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \tilde{x} + \underbrace{\mathbf{CB}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \dot{q}_c \quad (5.6)$$

transformiert werden. Weiterhin gilt für die Ausgangsgleichung

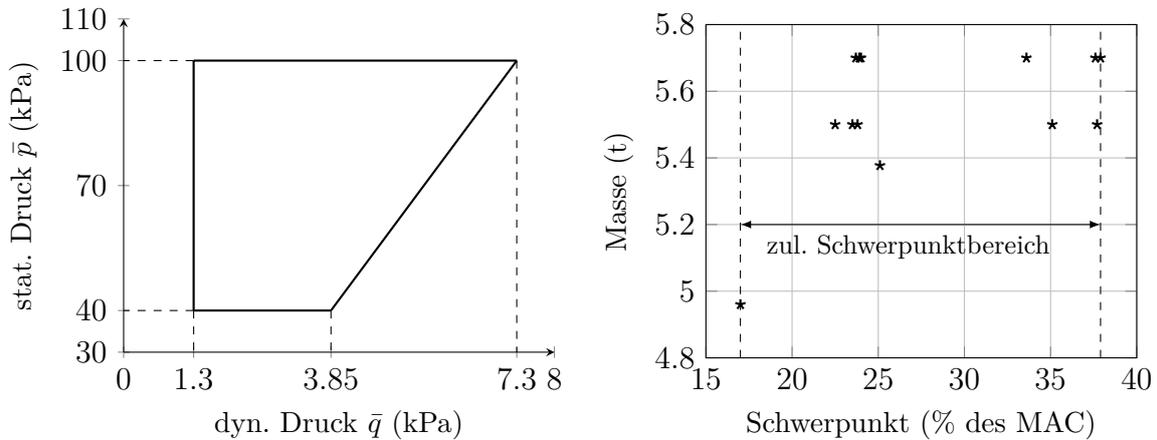
$$y = \mathbf{CC}^{-1} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}, \quad (5.7)$$

sodass der Ausgangsvektor  $y$  dem Zustandsvektor  $\tilde{x}$  des transformierten Systems entspricht. Mit dem beschriebenen Vorgehen kann ein System erzeugt werden, dessen Zustandsvektor aus den zur Verfügung stehenden Messgrößen besteht und somit für den Entwurf einer Zustandsrückführung verwendet werden kann.

### 5.1.1 LPV-Modellierung

Das im vorherigen Kapitel beschriebene lineare System der Nickdynamik ergibt sich aus der in Trimpunkten linearisierten nichtlinearen Längsdynamik des Flugzeugs (siehe Kapitel 2.3.2). Dementsprechend ist das lineare Modell auch nur in der Nähe des jeweils gewählten Trimpunktes gültig. Um ein für den gesamten Betriebsbereich gültiges Modell zu erhalten, wird das dargestellte System als ein LPV-Modell formuliert. Dafür werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen an einer bestimmten Menge von Trimpunkten lokal linearisiert, wodurch eine mehrdimensionale Menge an LTI-Systemen entsteht. Dies entspricht dem Vorgehen, welches in Kapitel 2.2.2 zur Generierung von LPV-Systemen mit Hilfe von Taylor-Linearisierungen vorgestellt wurde.

Bei der betrachteten Regelstrecke wird angenommen, dass der Trimpunkt nur von der Flughöhe, der Fluggeschwindigkeit sowie der Gesamtmasse und der Massenverteilung des Flugzeugs abhängt. Diese Annahme ist in dem großen Einfluss dieser Größen auf die Trimmung, und damit auch auf die Matrizen der linearisierten Systeme begründet, wie es in Kapitel 2.3.3 erläutert wurde. In den meisten Flugzeugen werden die aktuelle Flughöhe und -geschwindigkeit mit Hilfe eines Pitot-Staudrucksystems ermittelt, mit



(a) Darstellung des Parametergitters für  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  (b) Darstellung der betrachteten Lastfälle

**Abbildung 5.1:** Darstellung der betrachteten Menge an Parametern

dem der aktuelle statische  $\bar{p}$  und dynamische Druck  $\bar{q}$  bestimmt werden kann. Mit dem statischen Druck kann die aktuelle Flughöhe und Luftdichte unter Verwendung der Internationalen Standardatmosphäre (ISA, siehe Hull (2007, S. 54ff)) berechnet werden. In Kombination mit der erhaltenen Luftdichte kann aus dem dynamischen Druck die aktuelle Flugeschwindigkeit berechnet werden. Die beiden Größen können im Betrieb direkt gemessen werden, weshalb in diesem Fall die Trimpunkte in Abhängigkeit von statischem und dynamischen Druck anstatt Flughöhe und -geschwindigkeit bestimmt wurden. Der Einfluss der Gesamtmasse und Massenverteilung auf die Trimpunkte wird mit Hilfe sogenannter Lastfälle zusammengefasst. Ein solcher Lastfall  $l$  charakterisiert eine bestimmte Kombination aus Masse und Schwerpunkt des Flugzeugs, sowie allen daraus resultierenden Größen und berücksichtigt somit sämtliche Effekte dieser Kombination auf die nichtlinearen Bewegungsgleichungen. Um die gewünschten LPV-Systeme zu erzeugen, welche den gesamten Betriebsbereich ausreichend genau beschreiben, wurde eine größere Menge an Trimpunkten definiert. An jedem dieser Punkte wurden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen entsprechend linearisiert. Somit ergibt sich für das erhaltene LPV-System

$$\rho = (\bar{p}, \bar{q}, l) , \quad (5.8)$$

als Parametervektor. Der betrachtete Parameterbereich von (5.8) entspricht dem in Goßmann u. a. (2020) betrachteten Flugbereich und berücksichtigten Lastfällen und ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

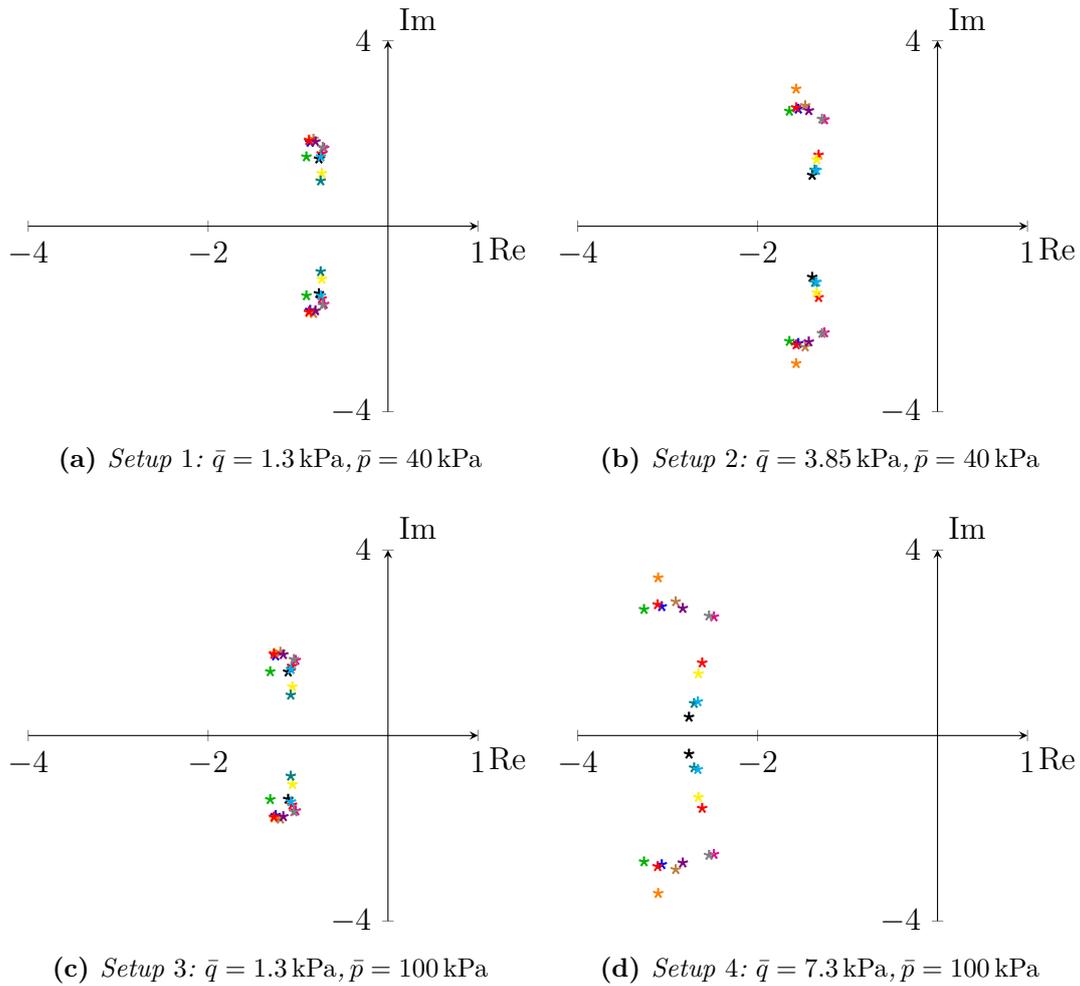
Abbildung 5.1a zeigt den relevante Bereich für den statischen und dynamischen Druck  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$ . Das verwendete  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitter wird durch einen nicht rechteckigen Parameterbereich beschrieben. Das ist ursächlich in dessen Herkunft, die sich bei diesen beiden Parametern aus dem zulässigen Flugbereich (in der englischsprachigen Literatur als *flight envelope* bezeichnet) ergibt. Mit diesem wird der Bereich beschrieben, in dem

das betrachtete Flugzeug stationär getrimmt werden kann. Somit wird es im regulären Betrieb nur innerhalb dieser Grenzen betrieben. Die untere Grenze des dynamischen Druckes  $\bar{q}$  ergibt sich durch den minimal erforderlichen Auftrieb. Dieser ist, wie in Kapitel 2.3.3 erläutert, proportional zu  $\bar{q}$ , weshalb sich für  $\bar{q}$  eine konstante untere Grenze ergibt. Die nicht konstante obere Grenze für den dynamischen Druck  $\bar{q}$  ergibt sich hingegen aus der maximal zulässigen Fluggeschwindigkeit, welche für den gesamten betrachteten Bereich des statischen Druckes  $\bar{p}$  konstant ist. Aufgrund der Proportionalität von  $\bar{q}$  zur Luftdichte und dem Quadrat der Fluggeschwindigkeit, sinkt bei einer konstanten maximalen Fluggeschwindigkeit mit sinkender Luftdichte entsprechend auch der maximal zulässige dynamische Druck. Die Flughöhe ist hingegen direkt proportional zum statischen Druck  $\bar{p}$ , weshalb dessen obere und untere Grenze in diesem Fall konstant sind.

Zusätzlich sind in Abbildung 5.1b die betrachteten Lastfälle dargestellt. Es werden 13 verschiedene Kombinationen aus Masse  $m$  und Schwerpunktlage betrachtet. Die Schwerpunktlage ist dabei wie in Kapitel 2.3.3 beschrieben in Prozent der mittleren Flügeltiefe (MAC) angegeben. Es werden sowohl Punkte an der vorderen (17% der MAC) als auch an der hinteren (38% der MAC) zulässigen Schwerpunktposition betrachtet, sowie typische Beladungszustände innerhalb dieser Grenzen. Für jede dieser betrachteten Kombinationen wurden zusätzlich die resultierenden Massenträgheiten betrachtet, sodass jeder Lastfall eine reale Last-Konfigurationen im Modell abbildet.

### 5.1.2 Analyse der Regelstrecke

In diesem Kapitel wird zunächst die zuvor definierte Regelstrecke der Nickdynamik analysiert. Damit der Einfluss der drei LPV-Parameter  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  und  $l$  auf die dynamischen Eigenschaften des Systems dargestellt werden kann, sind in Abbildung 5.2 die Eigenwerte der Regelstrecke in den vier Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters für jeweils alle 13 betrachteten Lastfälle  $l$  abgebildet. Die Regelstrecke der Nickdynamik besteht lokal jeweils aus einem komplexen Eigenwertpaar, welches die bereits genannte gedämpfte Schwingung (Anstellwinkelschwingung) beschreibt. Es zeigen sich starke Abhängigkeiten in der Lage des jeweiligen Eigenwertpaars, und damit auch in der Eigenfrequenz und Dämpfung der Anstellwinkelschwingung von den genannten Parametern. Während der statische Druck  $\bar{p}$  (Vergleich zwischen Setup 1 und 3) nur einen vergleichbar geringen Einfluss auf die Lage der Eigenwerte hat, zeigen sich bei dem dynamischen Druck  $\bar{q}$  sehr starke Unterschiede. Dies fällt insbesondere im Vergleich zwischen Setup 1 (niedrigster Wert für  $\bar{q}$ ) und Setup 4 (höchster Wert) auf, zwischen denen sich die Lage der Eigenwerte sehr deutlich unterscheidet. Aber auch zwischen Setup 1 und 2 lassen sich bereits merkbare Unterschiede feststellen, wodurch die Notwendigkeit einer parameterabhängigen Regelung verdeutlicht wird. Das kann durch die Anwendung eines LPV-Reglers mit den Parametern  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  entsprechend berücksichtigt werden. Bei der Betrachtung der vier abgebildeten Gitterpunkte des



**Abbildung 5.2:** Eigenwerte der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

$\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters in Abbildung 5.2 wird allerdings ebenfalls deutlich, dass sich die Lage der Eigenwerte auch mit einer Veränderung des Lastfalls  $l$  stark verändert. Das gilt ebenfalls besonders für Setup 4, in dem die sich die Lage der Eigenwerte für die 13 unterschiedlichen Lastfälle am stärksten unterscheidet. Allerdings treten auch in den drei anderen dargestellten Fällen erkennbare Unterschiede auf, sodass eine Berücksichtigung des Lastfalls im Reglerentwurf gut begründet ist.

Zusätzlich ist in Abbildung 5.3 beispielhaft die Sprungantwort des Übertragungsverhaltens  $\dot{q}_c \rightarrow f_z^*$  ebenfalls in den Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters, sowie für alle betrachteten Lastfälle dargestellt. Es zeigt sich auch hier sehr deutlich, dass eine Berücksichtigung der unterschiedlichen Lastkonfigurationen im Reglerentwurf gut begründet ist. Die Sprungantworten variieren mit den unterschiedlichen Lastfällen sehr stark, sodass eine Nichtbeachtung dieses Einflusses die Systemdynamik nicht ausreichend genau beschreiben würde.

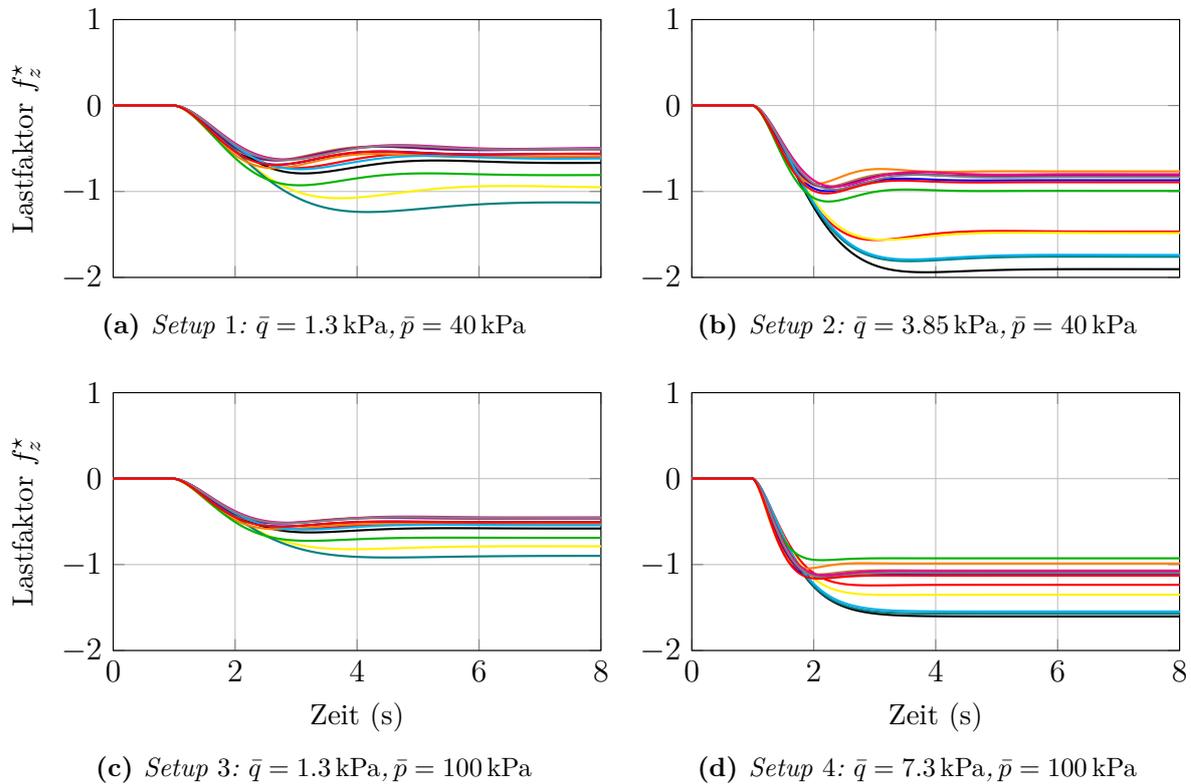


Abbildung 5.3: Sprungantworten der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

## 5.2 Reglerentwurf für die Flugzeug-Nickdynamik

Im Folgenden wird für die im vorherigen Kapitel 5.1 beschriebene Regelstrecke der Entwurf eines LPV-Reglers mit nur partiell messbaren Parametern erläutert. Dafür werden als erstes aus Standards für die Auslegung von Regelkreisen für Autopiloten Anforderungen abgeleitet. Anschließend daran wird der Entwurfsprozess des Reglers beschrieben. Dies beinhaltet die Definition der Reglerstruktur und der für die Lösung des Regelungsproblems erforderlichen Größen. Zum Abschluss wird der für Einstellung des Reglers verwendete Optimierungsprozess beschrieben und die Erfüllung der formulierten Anforderungen mit einer linearen Analyse überprüft.

### 5.2.1 Definition der Regelungsziele

Für den angestrebten Reglerentwurf werden im Folgenden zunächst die Ziele und gewünschten Anforderungen an den Regelkreis formuliert. Der Entwurf wird für den Einsatzzweck innerhalb eines Autopiloten konzipiert. Aus diesem Grund wird der Fokus primär auf das Folgeverhalten des geschlossenen Regelkreises und dessen Robustheit

gelegt und weniger auf Kriterien die üblicherweise für die Bewertung des Verhaltens eines Flugzeug verwendet werden. Wird der Regler darauf ausgelegt, einen Piloten zu unterstützen oder direkte Vorgaben des Piloten umzusetzen, werden diese eher nach dem dynamischen Verhalten des geschlossenen Regelkreis beurteilt. Solche Kriterien sind beispielsweise in MIL-HDBK-1797 (1997, Anhang A, S. 175ff.) beschrieben.

Wird ein Flugregler rein für die Anwendung innerhalb eines Autopiloten konzipiert, rücken andere Anforderungen in den Fokus. Wie in Kapitel 5.1 beschrieben, wird die Nickbewegung über die Vorgabe eines Lastfaktors  $f_z^*$  gesteuert. Der zu entwerfende Regler hat im betrachteten Kontext demnach die Aufgabe, ein von dem ihm überlagerten Regelkreis vorgegebenes  $f_z^*$  durch geeignetes Ausschlagen des Höhenruders zu realisieren. Um passende Anforderungen für einen solchen Regler zu formulieren, bieten sich die beiden aus dem militärischen Bereich stammenden Standards MIL-HDBK-1797 (1997) und MIL-DTL-9490E (2008) an, wie es in Brockhaus u. a. (2011, S. 37) empfohlen wird. Dabei fokussiert sich MIL-HDBK-1797 (1997) in erster Linie auf Anforderungen an die Flugeigenschaften, während in MIL-DTL-9490E (2008) hingegen Anforderungen an den Regelkreis an sich formuliert sind. Basierend darauf ergeben die sich im folgenden formulierten Ziele und Anforderungen an den Regelkreis.

- Der Regler soll eine automatische Folge des Vorgabewertes ohne bleibende Regelabweichung ermöglichen. Im Hinblick auf den Einsatz als ein unterlagerter Regler innerhalb eines Autopiloten gilt es, das Regelverhalten möglichst homogen über den gesamten betrachteten Parameterbereich zu gestalten (sofern es die physikalischen Grenzen ermöglichen). Insbesondere für unterschiedliche Lastfälle bei gleichen Flugbedingungen (statischer und dynamischer Druck) soll dies erreicht werden. Damit soll gewährleistet werden, dass das Flugzeug unabhängig von der Beladung und Schwerpunktlage ein möglichst gleichbleibendes Verhalten aufweist und somit eine Berücksichtigung der Variation dieser Parameter in den überlagerten Regelkreisen nicht zwingend erforderlich ist.
- Die Bewertung des Folgeverhaltens erfolgt über die Bandbreite des geschlossenen Regelkreises. In MIL-HDBK-1797 (1997, Anhang A, S. 250ff) wird hierfür ein Wert von 1.5 rad/s vorgeschlagen. Der Fokus soll allerdings primär in einem stabilen und robusten sowie homogenen Regelverhalten liegen, weshalb dieser Richtwert als Optimum und weniger als verpflichtendes Ziel angenommen wird.
- Bei der Bewertung des Folgeverhaltens wird zusätzlich betrachtet, dass die Antwort des geschlossenen Regelkreises auf ein Vorgabesignal nicht zu stark überschwingt (Dämpfung der Nickbewegung), als auch kein zu starkes Unterschwingen auftritt (Bewegung entgegen des gewünschten Wertes zu Beginn des Regelvorgangs). Das Überschwingen sollte einen Wert von 5 % und das Unterschwingen einen Wert von 10 % nicht überschreiten. Die Anregelzeit (Zeit bis 95 % des Vorgabewerts erreicht sind) sollte möglichst gering sein.

- Die physikalischen Grenzen des Aktuators müssen für alle Flugzustände und in allen Lastfällen eingehalten werden. Diese bestehen aus dem maximalen Ausschlag des Höhenruders von  $\eta = \pm 25^\circ$ , sowie einer maximalen Winkelgeschwindigkeit von  $\dot{\eta} = \pm 20^\circ/\text{s}$  mit der dieser Ausschlag erreicht werden kann.
- Die Robustheit wird mit der Amplituden- und Phasenreserve bewertet. Der Regelkreis soll im gesamten betrachteten Flugbereich und für alle relevanten Lastfälle mindestens eine Amplitudenreserve von  $A_r = 6 \text{ dB}$  und eine Phasenreserve von  $\varphi_r = 45^\circ$  erreichen. Diese Anforderung ist in MIL-DTL-9490E (2008, S. 21) definiert.

Die sich aus den formulierten Ziele und Anforderungen an den Regelkreis ergebenden Kriterien werden in zwei Kategorien aufteilt. In der ersten Kategorie werden Beschränkungen an den Regelkreis aufgelistet. Darunter wird eine Mindestanforderung an das betrachtete Kriterium verstanden, die der geschlossene Regelkreis in allen betrachteten Punkten in jedem Fall erfüllen muss. Ziel ist nur das Erfüllen der Mindestanforderung. In diese Kategorie fallen die physikalischen Grenzen des Aktuators ( $\eta_{max}$  und  $\dot{\eta}_{max}$ ) sowie die Amplituden- ( $A_r$ ) und Phasenreserve ( $\varphi_r$ ). Auch das Über- und Unterschwingen des Folgeverhaltens werden als Beschränkung formuliert. Für die Berechnung der Amplituden- und Phasenreserve zur Beurteilung der Robustheit werden, wie in Bates und Postlethwaite (2002, S. 35) beschrieben, die Werte betrachtet, die durch Aufschnelden des Regelkreis am Eingang des Aktuators ermittelt werden können.

In die zweite Kategorie von Kriterien fallen die Bandbreite des Regelkreises, sowie die Anregelzeit. Diese Größen werden als Optimierungsgrößen definiert. Das bedeutet, dass diese unter Einhaltung der vorher formulierten Beschränkungen im Falle der Bandbreite möglichst groß und im Fall der Anregelzeit möglichst klein ausfallen sollen. Aufgrund der stark unterschiedlichen Schwerpunktlagen der einzelnen Lastfälle, hat das Einhalten der Beschränkungen unterschiedlich starke Auswirkungen auf die erzielbare Bandbreite und Anregelzeit. Aus diesem Grund ist es schwierig, für den gesamten Parameterraum gleiche Anforderungen für diese beiden Größen zu formulieren. Als Beispiele seien hier die physikalischen Grenzen des Aktuators bei geringen Fluggeschwindigkeiten (niedriger Auftrieb an der Stellfläche pro Grad Ausschlag, größere Ausschläge notwendig) oder die Amplituden- und Phasenreserve bei den vorderen Schwerpunkt-lagen (schlechtere Steuerbarkeit, höhere Reglerverstärkungen erforderlich) genannt. Als Ziel wird daher formuliert, dass unter Einhaltung der formulierten Beschränkungen möglichst hohe Bandbreiten und niedrige Anregelzeiten erreicht werden sollen.

### 5.2.2 Reglerentwurf

Bevor mit dem eigentlichen Reglerentwurf begonnen werden kann, gilt es zunächst das zu lösende Regelungsproblem zu beschreiben. Hierzu muss die in Kapitel 3.3 genannte

verallgemeinerte Regelstrecke für das vorliegende Regelungsproblem definiert werden. Die Struktur des Regelgesetzes war aufgrund einer bestehenden Reglerarchitektur bei dem exemplarisch betrachteten Flugzeug vorgegeben und ist in Form eines Blockschaltbildes in Abbildung 5.4 dargestellt. Das Regelgesetz entspricht dem in Kapitel 4.1

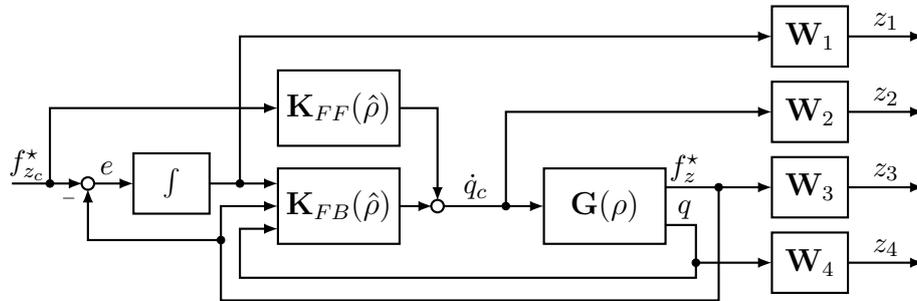


Abbildung 5.4: Darstellung des Regelungsproblems der Nickdynamik

verwendeten und besteht aus den gleichen drei Komponenten. Die erste Komponente ist die Rückführung der beiden Messgrößen  $f_z^*$  und  $q$ . Diese Rückführung wird mit einer Integration des Regelfehlers  $e = f_{zc}^* - f_z^*$ , also der Differenz aus dem Sollwert  $f_{zc}^*$  und der zugehörigen Messgröße, um die zweite Komponente ergänzt. Die Begründung hierfür ist die geforderte Sollwertfolge von  $f_{zc}^*$  ohne bleibende Regelabweichung im gesamten betrachteten Betriebsbereich des Flugzeugs, wie in Kapitel 5.2.1 beschrieben. Die dritte Komponente stellt eine Vorsteuerung mit dem Sollwert  $f_{zc}^*$  dar. Der Regler selbst besteht aus zwei parameterabhängigen Matrix-Funktionen  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$ , mit denen der Sollwert (Vorsteuerung –  $FF$ ) beziehungsweise die Rückführung (Index  $FB$ ) multipliziert wird. Aus der Summe der beiden dabei entstehenden Produkte ergibt sich schlussendlich das Stellsignal  $u$  des Reglers, welches in diesem Fall die Nickbeschleunigung  $\dot{q}_c$  als Stellgröße der Regelstrecke darstellt. Es wird somit eine Regelung mit zwei Freiheitsgraden entworfen, wie es in Kapitel 3.3.3 vorgestellt wurde. Dies ermöglicht eine Verbesserung des Folgeverhaltens, insbesondere der Bandbreite des Regelkreises, ohne die Eigenschaften der Rückführung zu verändern. Das wird insbesondere im Hinblick auf die formulierten Anforderungen an die Robustheit als Vorteil gewertet. Mit  $\mathbf{G}(\rho)$  wird die in Kapitel 5.1 definierte Regelstrecke der Nickdynamik bezeichnet. Für die Reglersynthese werden im Ausgangsvektor  $z$  der verallgemeinerten Regelstrecke vier Größen betrachtet. Diese sind der Regelfehler  $z_1$ , die vom Regler erzeugte Stellgröße  $z_2$ , sowie die beiden Messgrößen  $z_3$  und  $z_4$ . Die Parameter  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$ ,  $\mathbf{W}_3$  und  $\mathbf{W}_4$  stellen die Gewichtung der vier Signale untereinander dar und werden zur Einstellung des Reglers verwendet. Diese sind, wie bereits in Kapitel 4.2.2 genannt, mit den Einstellgrößen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  eines LQR-Reglerentwurfes vergleichbar (siehe Skogestad und Postlethwaite (2001, S. 359ff.)).

Für die Berechnung des Reglers kommt das in Goßmann u. a. (2020) vorgestellte Vorgehen zur Anwendung. Es wird wie im vorherigen Absatz erläutert, ein Regelungsproblem

mit zwei Freiheitsgraden nach Kapitel 3.3.3 betrachtet. Somit muss für die Lösung des Problems die in (3.35) genannte LMI für die Synthese einer Zustandsrückführung mit Vorsteuerung betrachtet werden. Wie einleitend in diesem Kapitel erwähnt wurde, werden nur die beiden Parameter des Flugzustandes  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  als messbar angenommen. Aufgrund der Annahme, dass die aktuelle Masse und Schwerpunktlage im Betrieb unbekannt ist, wird der LPV-Parameter des Lastfalls  $l$  als nicht messbar betrachtet. Nach Kapitel 3 ergibt sich somit der partielle Parametervektor für das betrachtete Regelungsproblem zu

$$\hat{\rho} = (\bar{p}, \bar{q}), \quad (5.9)$$

und besteht nur aus den beiden bereits genannten messbaren Parametern.

Für die Synthese des LPV-Reglers muss, wie in Kapitel 3.4 beschrieben, die Form der unbekanntenen Matrizen  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$ ,  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  festgelegt werden. Für die Lyapunov-Matrix  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  wurden dafür in Kapitel 2.2.1 zwei Möglichkeiten genannt. Das konservativste Vorgehen würde der Wahl einer konstanten Matrix  $\mathbf{P}$  entsprechen. Ein solcher Ansatz beinhaltet jedoch die Annahme, dass die Änderungsraten der LPV-Parameter beliebig groß sein können. Diese Annahme ist in dem hier betrachteten Anwendungsfall nicht notwendig, weshalb für die Lösung des gestellten Regelungsproblems der ebenfalls in Kapitel 2.2.1 beschriebene Ansatz mit einer parameterabhängigen Lyapunov-Matrix  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  verwendet wird. Die hierfür erforderlichen Beschränkungen der Änderungsraten der Parameter wurden auf

$$\dot{\bar{q}} \in [-50, 50] \text{ Pa/s}, \quad \dot{\bar{p}} \in [-100, 100] \text{ Pa/s} \quad (5.10)$$

festgelegt. Diese Grenzen stellen eine Beschränkung im Sinne der Stabilität dar. Das bedeutet, dass die exponentielle Stabilität nicht mehr gewährleistet werden kann, wenn diese im Betrieb überschritten werden. Aus diesem Grund wurden die Raten in (5.10) nach oben abgeschätzt, um ein Überschreiten auszuschließen. Als Form für die unbekanntenen Matrix-Funktionen werden Polynome verwendet, sodass sich für die drei unbekanntenen Funktionen

$$\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{P}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{P}_{p,j}, \quad (5.11a)$$

$$\mathbf{Y}(\hat{\rho}) = \mathbf{Y}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{Y}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{Y}_{p,j}, \quad (5.11b)$$

$$\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{K}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{K}_{p,j}, \quad (5.11c)$$

als Form mit den konstanten symmetrischen Matrizen  $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , sowie den konstanten Matrizen  $\mathbf{Y}_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  und  $\mathbf{K}_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  ergibt. Die Abhängigkeit des zu lösenden LMI-Problems von  $\hat{\rho}$  wird damit entfernt und es ergeben sich nur noch die konstanten

Matrizen  $\mathbf{P}_k$ ,  $\mathbf{Y}_k$  und  $\mathbf{K}_k$  als Unbekannte. Die erforderlichen Ordnungen  $l$  und  $m$  der Polynome in (5.11) werden empirisch bestimmt. Diese wird sukzessive so lange erhöht, bis sich die obere Schranke der induzierten  $L_2$ -Norm  $\bar{\gamma}$  als Lösung des LMI-Problem (3.35) nicht mehr wesentlich ändert. Schlussendlich resultiert das in den Ordnungen  $l = 3$  und  $m = 2$ .

Die Regler-Synthese wird mit dem ebenfalls in Kapitel 3.4 beschriebenen gitterbasierten Verfahren durchgeführt. Hierzu werden zum einen die 13 in Abbildung 5.1b gezeigten diskreten Lastfälle betrachtet. Des Weiteren muss der in Abbildung 5.1a dargestellte Bereich der Parameter  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  diskretisiert werden. Es werden für den statischen Druck  $\bar{p}$  insgesamt 7 Punkte und für den dynamischen Druck  $\bar{q}$  insgesamt 43 Punkte betrachtet. Der dynamische Druck wird hierbei aufgrund des deutlich stärkeren Einflusses auf das Verhalten der Regelstrecke (siehe Kapitel 5.1.2) mit einem wesentlich feineren Gitter betrachtet als der statische Druck. Somit werden im gesamten betrachteten Flugbereich 301 Trimpunkte mit jeweils 13 verschiedenen Lastfällen betrachtet. Insgesamt wird das LPV-System damit durch 3913 Gitterpunkte beschrieben. Die Lösung des Regelungsproblems erfolgt analog zu dem in Kapitel 4.2.1 beschriebenen Vorgehen und unter Verwendung der beiden dort genannten MATLAB-Toolboxen *LPVTools* (Seiler und Hjartarson, 2015) und *YALMIP* (Lofberg, 2004).

### 5.2.3 Optimierung der Gewichtungsrößen

Für die Lösung des Regelungsproblems ist es darüber hinaus erforderlich, die Gewichtungparameter  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_4$  (siehe Abbildung 5.4) festzulegen, welche für die Einstellung des Reglers entsprechend der in Kapitel 5.2.1 formulierten Anforderungen und Regelungsziele verwendet werden. Diese Anforderungen müssen in jedem betrachteten Flugzustand und für jeden betrachteten Lastfall erfüllt werden. Um den Prozess der Bestimmung von  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_4$  zu vereinfachen und systematischer zu gestalten, wird an dieser Stelle im Gegensatz zu Kapitel 4.2.2 auf eine Optimierung des geschlossenen Regelkreises zurückgegriffen. Für diese Optimierung wird die MATLAB Toolbox *MOPS (Multi Objective Parameter Synthesis)* des DLR Oberpfaffenhofen verwendet. Diese ermöglicht sehr schnell und intuitiv Optimierungsprobleme aufzusetzen, die wie in diesem Anwendungsfall neben mehreren Optimierungsgrößen auch diverse Beschränkungen an andere Größen enthalten (Joos u. a., 2002).

Wie im Nutzerhandbuch der *MOPS*-Toolbox (Joos, 2013, S. 6) beschrieben, werden Optimierungsprobleme in *MOPS* bezogen auf den hier verwendeten Anwendungsfall nach dem Schema

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}} \langle c_k(\mathbf{W})/d_k \rangle, & \quad k \in S \\ c_k(\mathbf{W}) \leq d_k, & \quad k \in S \\ \mathbf{W}_{min,i} \leq \mathbf{W}_i \leq \mathbf{W}_{max,i}, & \end{aligned} \quad (5.12)$$

formuliert. Dabei stellt  $S$  die Menge aller Kriterien dar, die mit Hilfe der Optimierung minimiert werden sollen und  $k$  bezeichnet die einzelnen Kriterien. Mit  $\mathbf{W}$  werden die Einstellgrößen bezeichnet, die der Optimierer zum Erreichen des Zieles zur Verfügung hat und in diesem Fall durch die genannten vier Gewichtungsgrößen repräsentiert werden. Jede Einstellgröße darf dabei nur innerhalb eines vorgegebenen Intervalls  $[\mathbf{W}_{min,i}, \mathbf{W}_{max,i}]$  liegen. Mit  $c_k$  wird das einzelne Kriterium  $k$  bezeichnet, welches kleiner oder gleich einem entsprechenden Sollwert  $d_k$  sein soll. In MOPS werden alle formulierten Kriterien  $c_k$  mit ihrem Sollwert  $d_k$  normiert, sodass alle Kriterien bei einem Wert kleiner oder gleich 1 erfüllt sind. Was als Sollwert verwendet wird, hängt von dem zugehörigen Kriterium ab. Bei einer Beschränkung wird als Sollwert der zulässige Maximalwert verwendet, während bei einer Optimierungsgröße entweder eine gewünschte Anforderung oder der Ausgangswert gewählt werden kann. Die normierten Kriterien werden im folgenden als  $\tau_k$  bezeichnet, welche im Vektor  $\vec{\tau}$  zusammengefasst werden. Um eine Entscheidung darüber zu treffen, ob das aktuelle Resultat besser oder schlechter als das vorherige ist, wird die Maximumsnorm eines Vektors verwendet. Diese Norm eines Vektors wird mit

$$\|\vec{\tau}\|_{max} = \max_k \{\tau_k\}, k \in S \quad (5.13)$$

berechnet und stellt den größten Eintrag des Vektors  $\vec{\tau}$  dar (Joos, 2013, S.12). Ist also  $\|\vec{\tau}\|_{max} < 1$ , sind alle formulierten Kriterien ausreichend erfüllt. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die formulierten Beschränkungen relevant. Es wird damit sichergestellt, dass alle Beschränkungen unterhalb der definierten Maximalwerte liegen. Der minimal erreichbare Wert der in (5.13) definierten Norm bezeichnet dann das Optimum des betrachteten Problems, da in diesem Fall alle formulierten Beschränkungen eingehalten werden (normierte Ergebnisse kleiner als 1) und die Optimierungskriterien so klein wie möglich sind. Wird bei einem Kriterium gefordert, dass dies möglichst groß, oder oberhalb eines bestimmten Sollwertes liegen soll, muss bei dieser Formulierung der Kehrwert des Kriteriums betrachtet werden. Die für die Optimierung verwendeten Kriterien resultieren aus den in Kapitel 5.2.1 definierten Anforderungen an den Regelkreis und sind in Tabelle 5.1 dargestellt.

Alle vier verwendeten Signale im Ausgang  $z$  der verallgemeinerten Regelstrecke sind skalar, weshalb die vier Einstellgrößen ebenfalls als skalar angenommen werden. Es werden aufgrund der großen Unterschiede des Systemverhaltens innerhalb des betrachteten Flugbereiches (siehe Kapitel 5.1.2) lineare Funktionen in  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$

$$\mathbf{W}_i = w_{i0} + w_{i1} \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{max}} + w_{i2} \cdot \frac{\bar{q}}{\bar{q}_{max}} \quad (5.14)$$

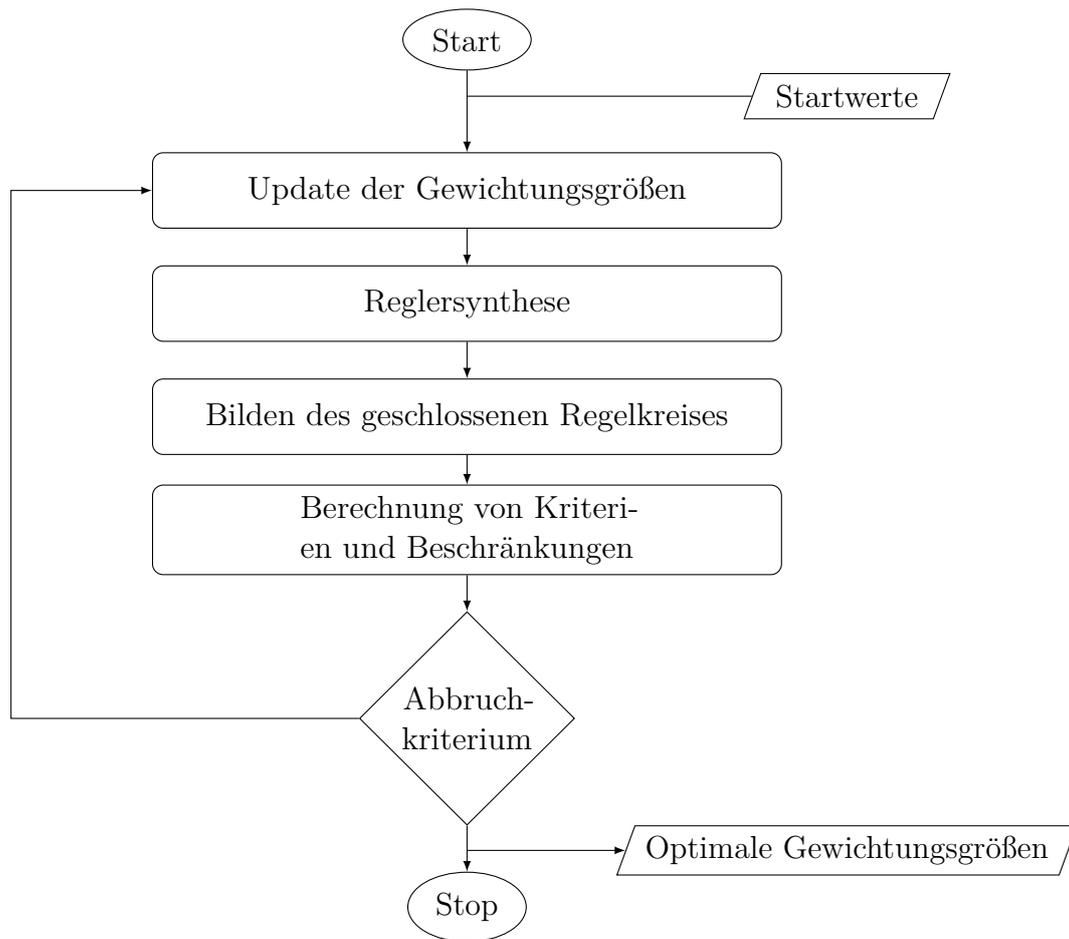
als Gewichtungsgrößen betrachtet. Eine Gewichtung zwischen den verschiedenen Lastfällen wird nicht vorgenommen und damit in jedem Punkt des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters ein konstantes Gewicht für alle Lastfälle verwendet. Die Koeffizienten  $w_i$  in (5.14) dienen

**Tabelle 5.1:** *Optimierungskriterien des Regelkreises der Nickdynamik*

Kriterium	Sollwert	Art des Kriteriums
Bandbreite	$> 1.5 \text{ rad/s}$	Optimum
Anregelzeit	$< 5 \text{ s}$	Optimum
Überschwingen	$< 5 \%$	Beschränkung
Unterschwingen	$< 10 \%$	Beschränkung
Ausschlag Höhenruder (Betrag)	$< 25^\circ$	Beschränkung
Stellrate Höhenruder (Betrag)	$< 20^\circ/\text{s}$	Beschränkung
Amplitudenreserve	$> 6 \text{ dB}$	Beschränkung
Phasenreserve	$> 45^\circ$	Beschränkung

dem Optimierer als Einstellgrößen um das Optimierungsproblem (5.12) zu lösen. Der Prozess der Optimierung selbst ist in Abbildung 5.5 schematisch dargestellt.

In dem Prozess werden innerhalb der dargestellten Iteration die Gewichtungsgroßen mit Hilfe eines Optimierungsalgorithmus solange angepasst, bis ein vorher definiertes Abbruchkriterium erreicht wurde. Hierzu wird in jedem Schritt der Iteration mit den in (5.14) definierten Gewichten die in Kapitel 5.2.2 beschriebene Regler-Synthese durchgeführt. Mit dem dabei erhaltenen Regler wird anschließend der geschlossene Regelkreis aufgestellt. In diesem Regelkreis wird eine erweiterte lineare Regelstrecke verwendet. Dabei handelt es sich um das in Kapitel 5.1 beschriebene lineare System der Anstellwinkelschwingung (5.1), welches mit zusätzlichen linearen Komponenten zur Abbildung weiterer Eigenschaften des realen Systems ergänzt wurde. Dies beinhaltet zum einen die Dynamik des Höhenruders zur Überprüfung der Anforderungen an das Stellsystem, sowie zum anderen der Einfluss der Strukturdynamik und wesentlichen Sensoren und Filtern. Die genaue Struktur dieses Modells ist in Anhang C beschrieben. Mit Hilfe dieses Vorgehens wird bei der Analyse ein möglichst hoher Detailgrad verwendet um sicherzustellen, dass die in Kapitel 5.2.1 gestellten Anforderungen auch in einer nichtlinearen Simulation erfüllt werden. Mit Hilfe des hierbei erhaltenen geschlossenen Regelkreises werden die in Tabelle 5.1 genannten Kriterien berechnet. Damit der Regler diese für alle zulässigen Werte von  $\rho \in \mathcal{A}$  erfüllt, werden die Kriterien an allen betrachteten Gitterpunkten lokal berechnet. Dies ist dadurch begründet, dass die genannten Eigenschaften für ein LPV-Modell nicht ermittelt werden können. In diesem Fall wurde ein gitterbasiertes LPV-System für die Synthese des Reglers verwendet und das LPV-Modell der Regelstrecke wurde mit Hilfe von Taylor-Linearisierungen eines nichtlinearen Modells erzeugt. Der erhaltene geschlossene Regelkreis liegt daher ebenfalls in Form einer mehrdimensionalen Menge von LTI-Systemen vor, weshalb eine Analyse der LTI-Systeme an allen Gitterpunkten relevante Rückschlüsse auf die Leistungsfähigkeit des Systems ermöglicht. Mit Hilfe des Abbruchkriteriums wird nach



**Abbildung 5.5:** Schematische Darstellung des Optimierungsprozesses

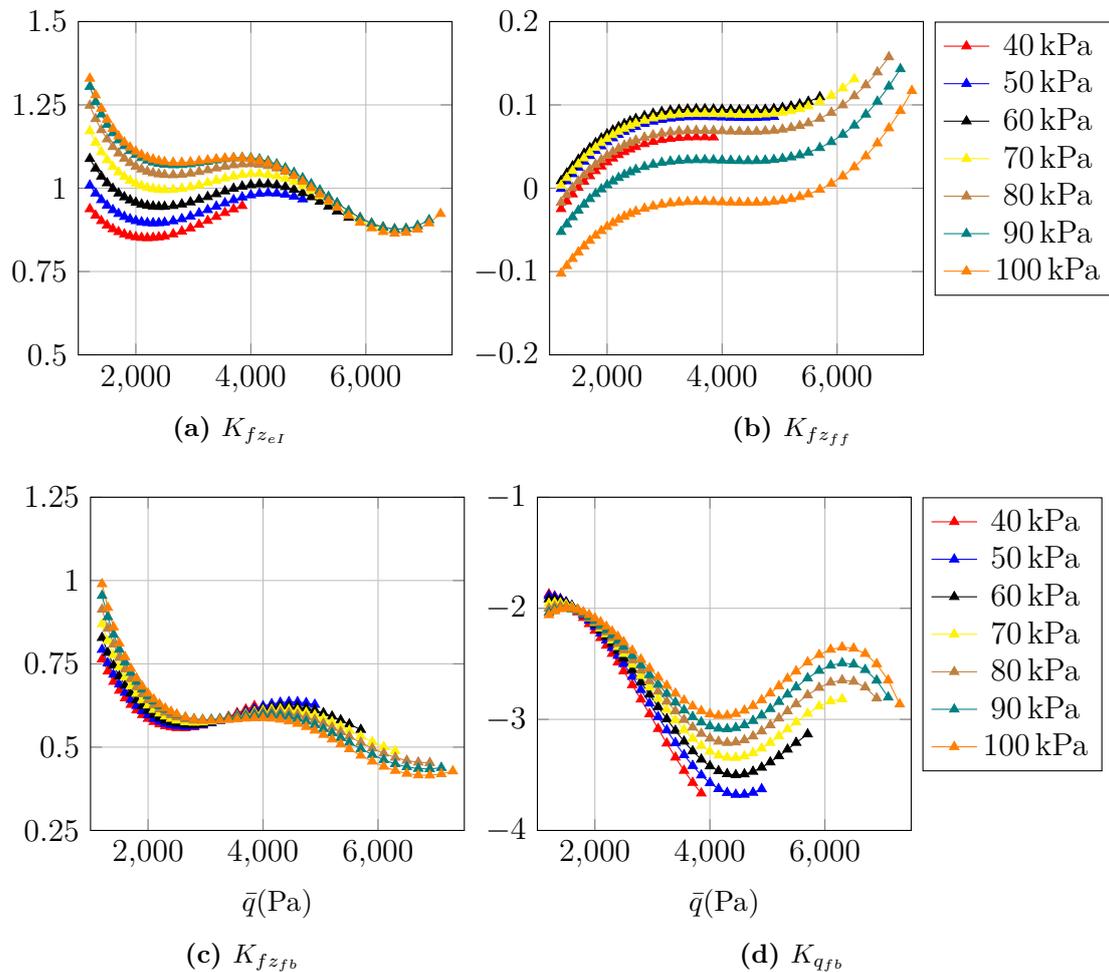
der Berechnung der Kriterien der Fortschritt der Optimierung im Hinblick auf dessen Erfüllung beurteilt und eine Entscheidung gefällt, ob das erzielte Resultat bereits ein Optimum darstellt. Diese Auswertung wird in jedem Optimierungsschritt durchgeführt und basierend auf den Resultaten dann die Einstellgrößen angepasst. Dieser iterative Prozess läuft so lange, bis gestellte Beschränkungen erreicht wurden und das bereits genannte Abbruchkriterium erfüllt wird.

Die Optimierung selbst wird aufgrund der größeren Menge an Einstellgrößen mit einem genetischen Algorithmus durchgeführt (Algorithmus *ga2* aus der genannten Toolbox, siehe Joos (2013, S. 40ff) für Details). Darunter versteht man eine Klasse von Algorithmen, die versuchen angelehnt an die aus der Natur bekannten Strategien der Evolution eine Lösung für das formulierte Optimierungsproblem zu finden. Hierzu wird eine sogenannte Population von Einstellgrößen gebildet. Eine Population besteht aus einer vorher zu definierenden Anzahl an Individuen, wobei jedes Individuum aus einer zufällig generierten Kombination der Einstellgrößen gebildet wird. Dabei wird bei jedem Individuum für jede Einstellgröße  $w_i$  die dem Optimierer zur Verfügung

steht, ein zufälliger Wert innerhalb des zulässigen Intervalls dieser Größe ausgewählt. Anschließend werden alle Individuen einer Population berechnet und im Anschluss die besten 10 % im Hinblick auf das formulierte Optimierungsziel ausgewählt und die anderen verworfen. Auf Basis dieser dabei ausgewählten Individuen werden durch Kombination dieser 10 % neue Individuen erzeugt und jeweils wieder die besten 10 % ausgewählt. Die dabei erzielten Verbesserungen werden mit jeder Generation immer kleiner, sodass irgendwann mit Hilfe des genannten Abbruchkriteriums ein globales Minimum identifiziert werden kann. Wenngleich diese Art von Algorithmen sehr zuverlässig globale Minima finden, erfordern sie eine sehr große Anzahl an Berechnungen, insbesondere bei Problemen mit sehr vielen Einstellgrößen. Es hat sich als Faustregel etabliert, eine Population mindestens doppelt so groß zu gestalten wie Einstellgrößen zur Verfügung stehen. Deshalb ergeben sich in Fällen mit vielen Einstellgrößen entsprechend auch sehr große Populationen. Die einzelnen Individuen einer Population können allerdings unabhängig von einander betrachtet werden, weshalb der Berechnungsprozess einer Generation vollständig parallelisiert werden kann. Damit kann die Optimierung erheblich beschleunigt werden. Aufgrund der sehr großen Menge an zu erfüllenden Kriterien wurde in diesem Fall eine Populationsgröße von 72 gewählt, welche auf einem lokalen Großrechner des Instituts für Steuer- und Regelungstechnik auf 24 Kernen parallel berechnet wurde. Es konnte somit ein Drittel der Generation parallel berechnet werden. Insgesamt wurde die Optimierung über 200 Generationen durchgeführt.

#### 5.2.4 Analyse der resultierenden Reglerverstärkungen

Nach Abschluss der Reglersynthese werden in diesem Kapitel die dabei erzielten Reglerverstärkungen, sowie dessen Veränderung in Abhängigkeit der beiden LPV-Parameter  $\bar{q}$  und  $\bar{p}$  betrachtet. Der in den vorherigen Kapiteln entworfene Regler besteht aus vier Komponenten. Diese setzen sich zusammen aus den drei Verstärkungen der Rückführung, also  $K_{fz_{eI}}$  für den integrierten Regelfehler,  $K_{fz_{fb}}$  für den Lastfaktor und  $K_{q_{fb}}$  für die Nickrate, sowie der Vorsteuerung  $K_{fz_{ff}}$ . Der Verlauf dieser vier Komponenten über die beiden LPV-Parameter ist in Abbildung 5.6 dargestellt. In dieser werden die Reglerverstärkungen über den dynamischen Druck  $\bar{q}$  dargestellt. Die unterschiedlichen betrachteten statischen Drücke  $\bar{p}$  sind über jeweils eigene Verläufe der Reglerverstärkungen dargestellt. Es sei zusätzlich angemerkt, dass die Verläufe für die verschiedenen Werte von  $\bar{p}$  nicht in allen Fällen über den gesamten betrachteten Bereich von  $\bar{q}$  reichen. Dies ist in dem nicht quadratischen Gitter der LPV-Parameter begründet, welches in Abbildung 5.1 in Kapitel 5.1.1 beschrieben wurde. Somit existieren nicht für alle möglichen Kombinationen aus  $\bar{q}$  und  $\bar{p}$  Reglerverstärkungen, weil nicht in jedem Fall ein trimmbarer Flugzustand vorliegt. Existiert ein solcher Flugzustand nicht, befindet sich diese Kombination von LPV-Parametern außerhalb des zulässigen Betriebsbereichs des Flugzeuges und es wurde dementsprechend auch kein Regler für diese Kombination entworfen.



**Abbildung 5.6:** Darstellung der vier erhaltenen Reglerverstärkungen des Nickdynamik-Reglers über den gesamten Parameterbereich

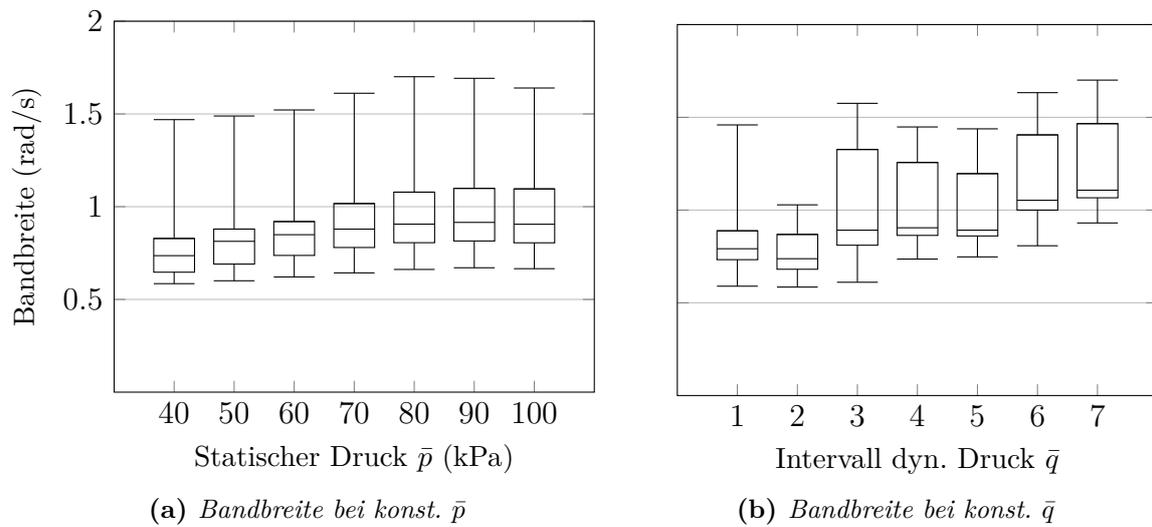
Bei der Betrachtung der Werte lassen sich jeweils sehr klare Trends beobachten. Bei der Verstärkung des integrierten Regelfehlers  $K_{fz_{eI}}$  zeigt sich, dass bei niedrigen Werten von  $\bar{q}$  (niedrigen Fluggeschwindigkeiten) eine große Abhängigkeit von  $\bar{p}$  (Flughöhe) vorliegt. Mit steigendem  $\bar{q}$  nimmt diese Abhängigkeit stark ab, wodurch sich an der oberen Grenze von  $\bar{q}$  kein Unterschied mehr zwischen unterschiedlichen Werten von  $\bar{p}$  feststellen lässt. Zusätzlich sinken die Reglerverstärkungen in diesem Fall für alle Werte von  $\bar{p}$  mit zunehmendem  $\bar{q}$ . Ein gegenläufiger Trend lässt sich bei der Betrachtung der Verläufe der Reglerverstärkung der Nickrate  $K_{q_{fb}}$  feststellen. Zwar sinken die Verstärkungen in diesem Fall ebenfalls mit einem steigenden  $\bar{q}$ , allerdings nimmt die Abhängigkeit von  $\bar{p}$  mit zunehmendem  $\bar{q}$  zu. Während bei niedrigen Werten von  $\bar{q}$  die Regler-Verstärkungen nur sehr gering von Änderungen in  $\bar{p}$  betroffen sind, zeigen sich bei höheren Werten von  $\bar{q}$  stärkere Unterschiede für verschiedene Werte des statischen Druckes  $\bar{p}$ . Die Reglerverstärkungen der  $f_z$ -Rückführung  $K_{fz_{fb}}$  hingegen zeigen über

den gesamten Bereich von  $\bar{q}$  nur geringe Abhängigkeiten von  $\bar{p}$  und werden primär von dem dynamischen Druck  $\bar{q}$  beeinflusst. Diese Verstärkungen werden ebenfalls mit zunehmendem  $\bar{q}$  kleiner. Dieser Trend in den Verstärkungen entspricht der sich verändernden Wirksamkeit der Steuerflächen. Diese ist bei den niedrigsten Werten von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  am geringsten und steigt entsprechend mit größer werdenden Werten für die beiden Parameter an. Die größten Reglerverstärkungen werden entsprechend auch bei den Parametern mit der niedrigsten Wirksamkeit der Steuerflächen benötigt und sinken entsprechend, wenn dessen Wirksamkeit steigt. Im Gegensatz dazu weisen die Verläufe der statischen Vorsteuerung  $K_{fzff}$  einen komplett anderen Trend auf. Bei diesen ist die Abhängigkeit von  $\bar{p}$  über den gesamten Verlauf des dynamischen Drucks  $\bar{q}$  nahezu gleichbleibend. Zusätzlich ergibt sich in diesem Fall eine Zunahme des Wertes mit steigendem  $\bar{q}$  anstatt einer Abnahme, wie es bei den drei anderen Komponenten der Fall ist.

### 5.2.5 Lineare Analyse des Regelkreises

Anschließend an die Betrachtung der Reglerverstärkungen wird in diesem Kapitel der entworfene Regler linear mit Hilfe des LPV-Systems des geschlossenen Regelkreises analysiert, welches auch in Kapitel 5.2.3 für die Berechnung der Optimierungskriterien verwendet wurde. Von diesen werden mit der Bandbreite und der Amplituden- und Phasenreserve diese Kriterien betrachtet, welche nur für einen linearen Regelkreis bestimmt werden können. Die Erfüllung der formulierten Anforderungen an diese Größen im gesamten Parameterbereich wird überprüft, indem diese in jedem einzelnen betrachteten Gitterpunkt berechnet werden. Dieses ist analog zu dem in der Optimierung verwendeten Vorgehen, mit dessen Hilfe die Gewichtungsfunktionen für eine gezielte Auslegung des Reglers bestimmt wurden. Aufgrund der großen Menge der dabei entstehenden Daten werden die Ergebnisse mit sogenannten Box-Whisker-Plots dargestellt. Diese bieten einen guten Überblick darüber, in welchem Bereich sich die Resultate befinden und wie sie sich innerhalb dieses Bereiches verteilen. Hierzu werden fünf verschiedene Werte betrachtet, der Median, die zwei Quartile und die beiden Extremwerte. Mit diesen lässt sich die relative Verteilung der Ergebnisse bestimmen und anschaulich darstellen. Der Median stellt dabei den Wert in der Mitte dar und bedeutet, dass 50 % alle Resultate kleiner als dieser Wert sind. Die beiden Quartile, genauer oberes und unteres Quartil, beschreiben den Wert unter dem 25 % (unteres) bzw. 75 % (oberes) der Resultate liegen. Die beiden Extremwerte stellen den insgesamt minimal und maximal auftretenden Wert dar. In den Abbildungen werden die Extremwerte mit Hilfe der Whisker und der Bereich der Quartile wird als Box dargestellt. Innerhalb dieser Box wird der Median durch einen waagerechten Strich gekennzeichnet.

Im Folgenden wird der geschlossene Regelkreis mit dem entworfenen LPV-Regler der Nickdynamik untersucht. Als erstes wird die Bandbreite des Übertragungsverhaltens



**Abbildung 5.7:** Bandbreite von  $f_{z,c}^* \rightarrow f_z^*$  für konstante Werte von  $\bar{q}$  und  $\bar{p}$

**Tabelle 5.2:** Intervalle des dynamischen Drucks  $\bar{q}$

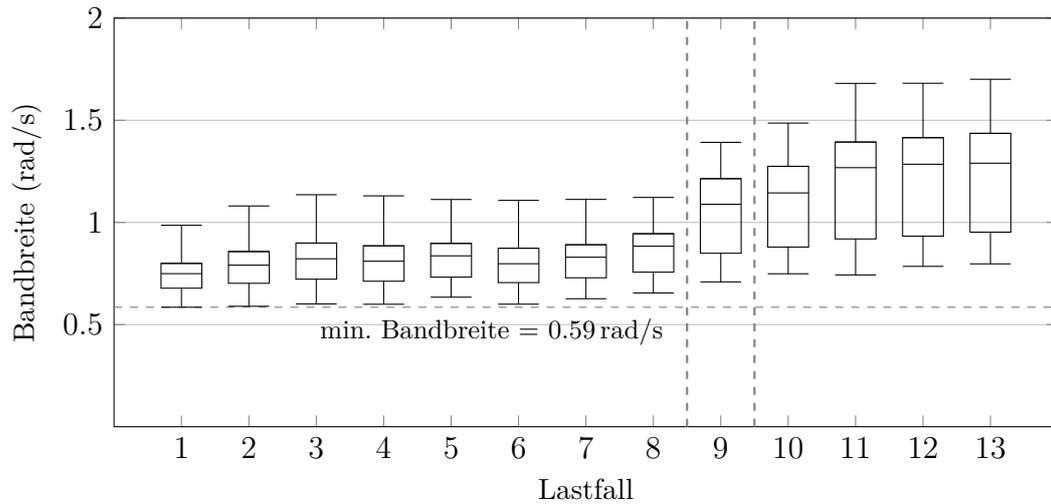
Intervall-Nummer	1	2	3	
Wertebereich $\bar{q}$ (kPa)	1.3 – 2.1	2.1 – 2.95	2.95 – 3.85	
Intervall-Nummer	4	5	6	7
Wertebereich $\bar{q}$ (kPa)	3.85 – 4.75	4.75 – 5.55	5.55 – 6.3	6.3 – 7.3

$f_{z,c}^* \rightarrow f_z^*$  betrachtet, wie es auch in MIL-HDBK-1797 (1997, Anhang A, S. 250ff) vorgeschlagen wird. In Abbildung 5.7 ist für diesen Zweck zunächst die erzielte Bandbreite zum einen für alle Werte von  $\bar{q}$  und alle Lastfälle bei jeweils konstanten Werten des statischen Drucks  $\bar{p}$  (also einer konstanten Flughöhe), sowie für alle Werte von  $\bar{p}$  und alle Lastfälle in definierten Intervallen von  $\bar{q}$  dargestellt. Bei der Analyse der Bandbreite bei konstanten Werten von  $\bar{p}$  in Abbildung 5.7a lässt sich feststellen, dass die erzielten Werte in allen Gitterpunkten über alle dargestellten statischen Drücke  $\bar{p}$  sehr ähnlich sind. Es zeigt sich dazu eine leicht steigende Tendenz hin zu größeren statischen Drücken (und damit niedrigeren Flughöhen). Dies entspricht im Hinblick auf die gleichzeitig steigende Luftdichte und die damit zunehmende Wirksamkeit des Höhenruders dem erwartbaren Ergebnis (siehe Kapitel 2.3.3). Es werden entsprechend bei den beiden höchsten statischen Drücken  $\bar{p}$  insgesamt auch die höchsten Werte in der Bandbreite erreicht. Allerdings zeigt sich auch, dass sich die oberen 25 % der Bandbreiten bei allen betrachteten Werten von  $\bar{p}$  über einen sehr großen Bereich verteilen und somit sehr stark variieren. Das deutet darauf hin, dass bei einem konstanten  $\bar{p}$  für einzelne Lastfälle oder Werte von  $\bar{q}$  deutlich höhere Bandbreiten erreicht werden konnten.

Bei der Betrachtung der Bandbreiten innerhalb definierter Intervalle des dynamischen Drucks  $\bar{q}$  für alle Werte von  $\bar{p}$  und alle Lastfälle in Abbildung 5.7b wurde der gesamte zulässige Bereich von  $\bar{q}$  in sieben etwa gleich große Intervalle aufgeteilt, welche in Tabelle 5.2 dargestellt sind. In diesem Fall zeigt sich kein so klares Bild, wie es bei der Betrachtung der konstanten statischen Drücke der Fall war. Insgesamt lässt in diesem Fall festhalten, dass die Werte über die unterschiedlichen betrachteten Intervalle des dynamischen Druckes  $\bar{q}$  stark schwanken. Es zeigt sich allerdings auch in diesem Fall die Tendenz, dass die erzielten Bandbreiten mit zunehmenden  $\bar{q}$  (und damit steigenden Fluggeschwindigkeiten) steigen. Auch in diesem Fall nimmt die Wirksamkeit des Höhenruders mit steigendem  $\bar{q}$  zu (siehe Kapitel 2.3.3), weshalb dies der erwarteten Tendenz entspricht. Es bestätigt sich hierbei auch die am Ende des letzten Absatz getätigte Beobachtung, dass die große Streuung der oberen 25 % der erzielten Bandbreiten in Gitterpunkten mit hohem  $\bar{q}$  auftreten. Wie bei der Betrachtung der Intervalle mit den höchsten dynamischen Drücken deutlich wird, konzentrieren die höchsten erzielten Werte der Bandbreite auf diese beiden Intervalle.

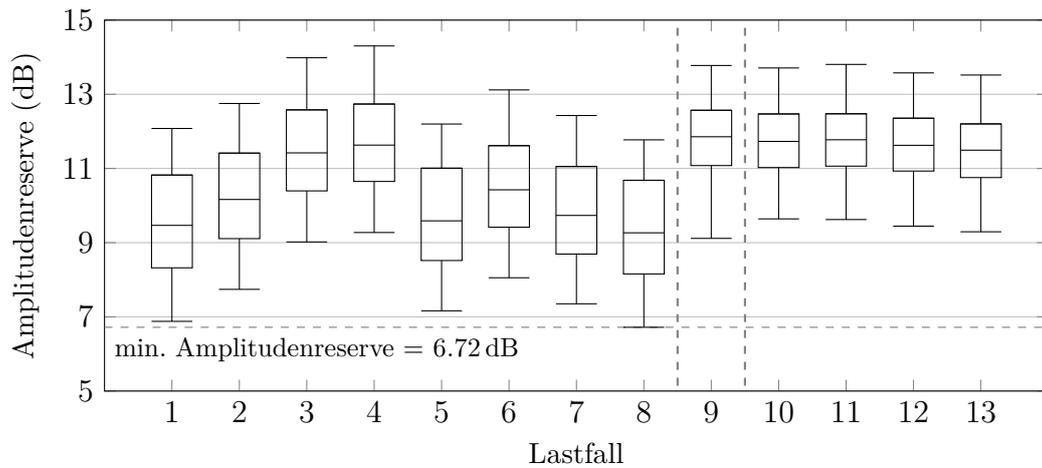
Im zweiten Schritt werden die erzielten Bandbreiten für jeden berücksichtigten Lastfall einzelnen betrachtet. Hintergrund dieser Betrachtung ist der starke Einfluss des Lastfalls (insbesondere die Lage des Schwerpunkts) auf die Längsdynamik des Flugzeugs und die Tatsache, dass der Regler aufgrund dessen Struktur bei Veränderungen des Lastfalls im Gegensatz zu den anderen beiden Parametern nicht angepasst wird. Zu diesem Zweck sind in Abbildung 5.8 die erzielten Bandbreiten in jedem betrachteten Lastfall für jeweils alle Werte von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  einzeln aufgeführt. Die dargestellten Lastfälle sind sortiert nach der im jeweiligen Fall vorliegenden Schwerpunktlage, wobei der erste Lastfall die vorderste darstellt. Der Lastfall 9 stellt den Auslegungsfall bei einer maximalen Beladung des Flugzeugs dar. Somit liegt der Schwerpunkt in den Fällen 1 – 8 vor und den Fällen 10 – 13 hinter dem in der Auslegung des Flugzeugs betrachteten Schwerpunkt.

Es wird deutlich, dass die Schwerpunktlage einen sehr starken Einfluss auf die erreichbare Bandbreite hat. Diese nimmt mit der Verschiebung des Schwerpunktes von der vorderen Grenze in Richtung Heck des Flugzeugs sukzessive zu. Dazu zeigt sich, dass in allen vorderen Schwerpunktlagen sehr ähnliche Bandbreiten erreicht werden. Die niedrigste insgesamt erreichte Bandbreite von 0.59 rad/s im gesamten Parameterbereich tritt dazu bei der vordersten Schwerpunktlage (Lastfall 1) auf. Auch insgesamt lässt sich beobachten, dass alle kleineren Werte der erzielten Bandbreite bei vorderen Schwerpunktlagen auftreten. Die Ursache hierfür ist in dem Einfluss der Schwerpunktlage auf die Flugdynamik zu suchen. Bei vorderen Schwerpunktlagen besitzt das Flugzeug eine deutlich schlechtere Steuerbarkeit als in hinteren Schwerpunktlagen (siehe Kapitel 2.3.3). Aus diesem Grund sind für eine höhere Bandbreite in diesen Fällen auch höhere Reglerverstärkungen erforderlich. Durch die harte Einschränkung an eine minimale Amplituden- und Phasenreserve können diese jedoch nicht beliebig erhöht

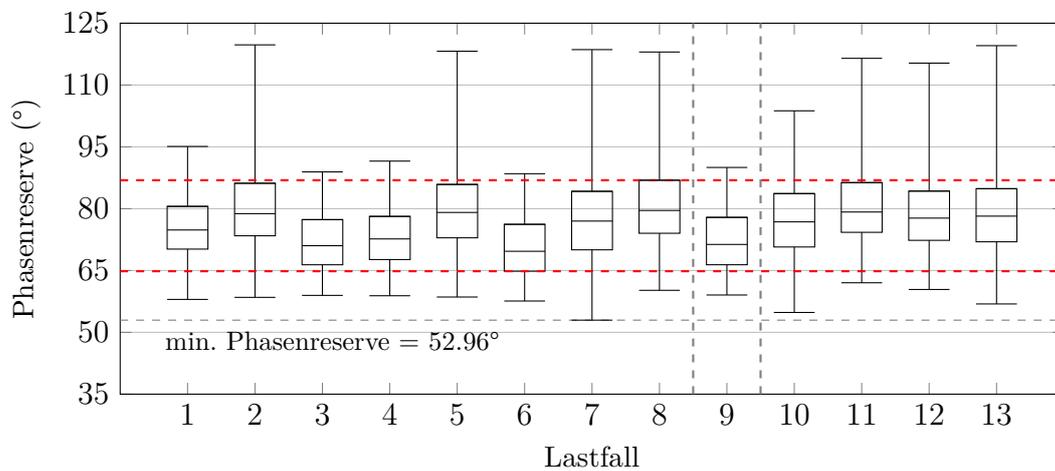


**Abbildung 5.8:** Bandbreite von  $f_{z,c}^* \rightarrow f_z^*$  für alle Lastfälle

werden, sodass die Bandbreite in diesen Lastfällen merkbar hinter denen in hinteren Schwerpunktlagen zurückfällt. Dazu kommt die Tatsache, dass der Regler sich infolge einer Änderung des Lastfalles nicht an die veränderte Dynamik anpassen kann, sodass bei konstanten Werten von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  für alle Lastfälle der gleiche Regler verwendet wird. Eine zu starke Erhöhung der Reglerverstärkungen führt dementsprechend bei den hinteren Schwerpunktlagen zu einer deutlich stärkeren Antwort, sodass hier sehr schnell die Anforderung an das maximale Überschwingen verletzt wird. Dadurch wird der Spielraum bei den vorderen Schwerpunktlagen entsprechend eingeschränkt. Bei den hinteren Schwerpunktlagen führt die gleiche Reglerverstärkung entsprechend auch zu besseren Resultaten. Allerdings werden die erreichten Bandbreiten in den hinteren Schwerpunktlagen nur noch marginal größer gegenüber dem Auslegungsfall. Bei den Lastfällen 9 – 13 werden in dem überwiegenden Teil der Gitterpunkte Bandbreiten im Bereich von etwa 0,85 – 1,44 rad/s erzielt. Im Gegensatz zur Schwerpunktlage hat die sich ändernde Masse keinen starken Einfluss auf die erreichten Bandbreiten. Wie in Abbildung 5.3 dargestellt, wurden einige Lastfälle mit sehr ähnlichen Schwerpunktlagen aber stark unterschiedlichen Massen betrachtet. In den Lastfällen 3 und 4 sowie 12 und 13 liegen jeweils sehr ähnliche Schwerpunktlagen vor, wohingegen sich die Masse zwischen den beiden Lastfällen jeweils unterscheidet. Beide Kombinationen in Abbildung 5.8 weisen jeweils sehr ähnliche Verteilungen der erzielten Bandbreiten auf und auch die definierenden Werte des Box-Whisker-Plots sind vergleichbar. Entsprechend kann daraus ein eher geringer Einfluss auf das Regelverhalten geschlossen werden. Die Ursache ist hier in dem Einfluss der Masse zu suchen, welcher sich in erster Linie nur auf die Trimmung und damit die Matrizen der linearisierten Regelstrecke auswirkt. Einen so starken Einfluss auf die Steuerbarkeit wie die Schwerpunktlage besitzt die Masse hingegen nicht, was die erzielten Ergebnisse auch widerspiegeln. Ein anderes Bild gibt die Analyse der Amplitudenreserve ab, welche in Abbildung 5.9a dargestellt



(a) Amplitudenreserve



(b) Phasenreserve

**Abbildung 5.9:** Amplituden- und Phasenreserve der Nickdynamik für alle Lastfälle

ist. Während die Resultate im Auslegungsfall 9 sowie allen hinteren Schwerpunktlagen (Lastfälle 10 – 13) weitestgehend konstant ausfallen, zeigt sich bei den vorderen Schwerpunktlagen ein sehr gemischtes Bild. Hierbei stechen in erster Linie die Lastfälle 3 und 4 mit merkbar höheren Amplitudenreserven hervor, während in den anderen vorderen Schwerpunktlagen deutlich niedrigere Werte erreicht werden. Im schlechtesten Fall (Lastfall 8) werden mit minimal  $A_r = 6.72$  dB allerdings trotzdem noch Werte oberhalb des definierten Minimums erreicht. Das kleinste untere Quartil bei den vorderen Schwerpunktlagen liegt bei etwa  $A_r = 8$  dB, weshalb selbst bei diesen Lastfällen in der Mehrheit der Gitterpunkte ein ausreichender Puffer zur minimal geforderten Amplitudenreserve vorliegt. In dem Auslegungsfall sowie allen Lastfällen mit einer Schwerpunktlage hinter diesem Fall hingegen wird minimal etwa ein  $A_r = 9$  dB erreicht und im überwiegenden Teil der Gitterpunkte liegt die Amplitudenreserve im Bereich

von etwa 10 – 12.5 dB. Damit lässt sich festhalten, dass in den hinteren Schwerpunktlagen die Robustheit des Regelkreises merkbar stärker ausfällt, als es bei den vorderen Schwerpunktlagen der Fall ist.

Bei den Resultaten der Phasenreserven, welche in Abbildung 5.9b dargestellt sind, lässt sich ein solcher Trend über die Verschiebung des Schwerpunktes nicht feststellen. Zum einen liegen die beiden Quartile in diesem Fall in allen Lastfällen sehr nah beieinander und auch die minimal erzielten Werte liegen alle innerhalb eines ähnlichen Intervalls. Es lässt sich anhand der Lage der Quartile feststellen, dass der Großteil der auftretenden Werte im Bereich einer Phasenreserve von etwa 65 – 87° liegt (gestrichelte rote Linien). Eine so stark erkennbare Abhängigkeit von der Schwerpunktlage, wie es bei der Bandbreite und der Amplitudenreserve der Fall ist, lässt sich bei der Phasenreserve nicht feststellen. Im gesamten betrachteten Flugbereich und über alle Lastfälle wurde in jedem Fall mindestens eine Phasenreserve von  $\varphi_r = 53^\circ$  erreicht, was ebenfalls deutlich über der minimalen Vorgabe von  $\varphi_r = 45^\circ$  liegt.

## 5.3 Anwendung auf die Flugzeug-Seitenbewegung

Die Leistungsfähigkeit des in den vorherigen Kapiteln entworfenen LPV-Reglers für die Nickbewegung soll neben einer linearen Analyse auch innerhalb einer nichtlinearen Simulation mit sechs Freiheitsgraden (6DoF) evaluiert werden. Zu diesem Zweck wird in diesem Kapitel der Entwurf eines LPV-Reglers mit nur partiell messbaren Parametern für die Seitenbewegung des bereits betrachteten Regionalflugzeugs, und damit der Entwurf einer Mehrgrößenregelung beschrieben. Der Entwurfsprozess erfolgt in großen Teilen analog zu dem im bisherigen Verlauf des Kapitels beschriebenen Entwurf der Nickdynamik-Regelung und es wird daher nur im Detail auf die Teile des Prozesses eingegangen, welche sich vom vorherigen Entwurf unterscheiden.

### 5.3.1 Beschreibung und Analyse der Regelstrecke

Im Gegensatz zur Längsbewegung beschreibt die Seitenbewegung die asymmetrische Bewegung des Flugzeugs. Diese wurde ebenfalls in Kapitel 2.3.2 vorgestellt und wird durch das linearisierte Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta & N_p & 0 \\ -1 & Y_\beta & 0 & g/v_0 \\ L_r & L_\beta & L_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} N_{\dot{p}} & N_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{r}} \\ L_{\dot{p}} & L_{\dot{r}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_c \\ \dot{r}_c \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

beschrieben. Im Vergleich zu dem in Kapitel 2.3.2 beschriebenen Modell, werden analog zur vorher betrachteten Regelung der Nickdynamik auch in diesem Fall Vorgaben für die beiden zugehörigen Winkelbeschleunigungen als Stellgrößen verwendet. Dies erfolgt

aus den selben, bereits in Kapitel 5.1 beschriebenen Gründen. Für die Details zu den physikalischen Zusammenhängen sei auf Anhang B.2 verwiesen. Für (5.15) soll eine Regelung der beiden Winkel  $\beta$  (Schiebewinkel) und  $\Phi$  (Hängewinkel) entworfen werden. Der Schiebewinkel ist wie auch der Anstellwinkel  $\alpha$  in der Praxis nur schwer während des Flugs messbar, weshalb analog zur Nickdynamik oftmals auf eine Regelung der Querbeschleunigung anstatt  $\beta$  zurückgegriffen wird (McRuer u. a., 1973, S. 483). In dem hier vorgestellten Ansatz wird ebenfalls wie in der im vorherigen Kapitel 5.1 vorgestellten Regelstrecke eine spezifische Kraft  $f_y$  verwendet. Diese spezifische Kraft entspricht der in Abbildung 2.1 dargestellten Seitenkraft  $F_y$ , welche mit der Flugzeugmasse  $m$  normalisiert wurde. Darüber hinaus wird diese spezifische Kraft ebenfalls mit der Erdbeschleunigung  $g$  normalisiert, wodurch man mit

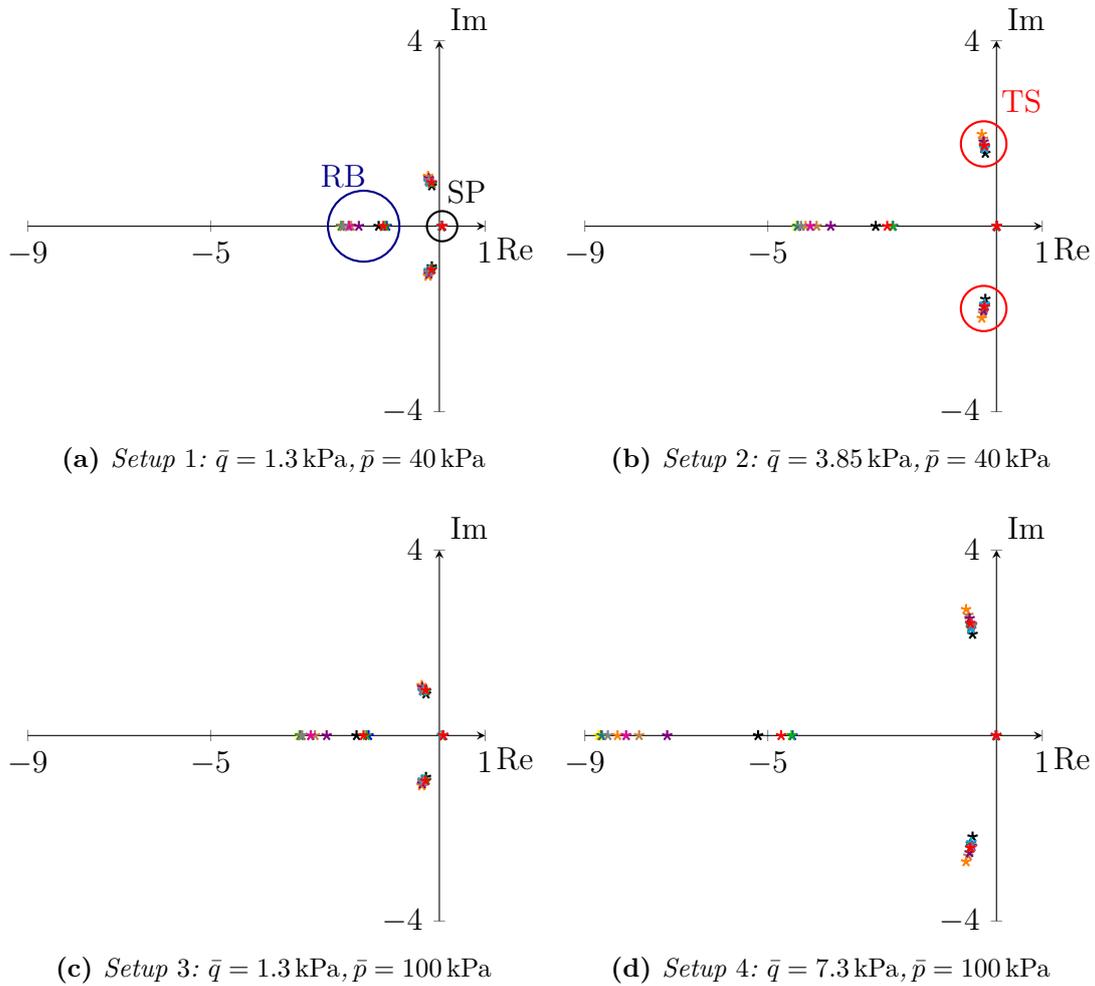
$$f_y^* = \frac{F_y}{m \cdot g} \quad (5.16)$$

ebenfalls einen entsprechenden Lastfaktor erhält. Die dabei entstehende Größe  $f_y^*$  ist direkt aus den Zustandsgrößen bestimmbar, und ersetzt  $\beta$  im Ausgangsvektor. Dieser besteht neben  $f_y^*$  aus den drei übrigen Zustandsgrößen  $r$ ,  $p$  und  $\Phi$ . Somit ergibt sich die Ausgangsgleichung zu

$$\begin{pmatrix} r \\ f_y^* \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{y_r} & f_{y_\beta} & f_{y_p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Zur Anwendung des Entwurfs einer Zustandsrückführung muss zusätzlich noch die ebenfalls bereits in Kapitel 5.1 verwendete Zustandstransformation angewandt werden. Mit dieser werden die Zustandsgrößen in (5.15) mit den in (5.17) auftretenden Ausgangsgrößen ersetzt. Das Zustandsraummodell wird wie bereits in Kapitel 5.1.1 beschrieben, über den gesamten Flugbereich und alle betrachteten Lastfälle in lokalen Trimpunkten durch Linearisierung erzeugt, womit ebenfalls ein gitterbasiertes LPV-Modell entsteht. Es wird ebenfalls der in Kapitel 5.1.1 definierte Parameterbereich verwendet.

Im Vorfeld des Reglerentwurfes für die Seitenbewegung gilt es ebenfalls zunächst die Eigenschaften der Regelstrecke der Seitenbewegung zu analysieren. Wie bereits in der Nickdynamik in Kapitel 5.1.2 durchgeführt, werden zur Darstellung des Einflusses der drei LPV-Parameter  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  und  $l$  auf die Dynamik des Systems die Eigenwerte an den vier Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters, sowie für alle 13 berücksichtigten Lastfälle  $l$  betrachtet. Diese sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Damit der Einfluss der LPV-Parameter auf das Systemverhalten genauer beschrieben werden kann, gilt es zunächst die drei Eigenbewegungsformen der Seitenbewegung zu charakterisieren. Die Rollbewegung (RB) eines Flugzeugs, also die Drehung des Flugzeugs um dessen Längsachse ( $x$ -Achse, siehe Kapitel 2.3), wird durch eine schnelle aperiodische Bewegung beschrieben. Dieser



**Abbildung 5.10:** Eigenwerte der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

Eigenbewegungen werden die in Abbildung 5.10 entsprechend gekennzeichneten links des Ursprungs liegenden Eigenwerte auf der reellen Achse zugeordnet. Die Taumelschwingung (TS) resultiert aus der Kopplung zwischen Roll- und Gierbewegung und stellt eine schnelle, aber schwach gedämpfte Schwingung dar. Diese Dynamik wird durch die in Abbildung 5.10 entsprechend gekennzeichneten komplexen Eigenwertpaare beschrieben. Die dritte Bewegungsform stellt die Spiralbewegung (SP) dar, welche durch die entsprechend gekennzeichneten Eigenwerte in der Nähe des Ursprungs charakterisiert wird. Diese Eigenbewegung besitzt ein sehr langsames und aperiodisches Verhalten und ist oftmals instabil. Die Spiralbewegung wird nur sehr gering durch eine Veränderung der Parameter beeinflusst, wie in Abbildung 5.10 deutlich wird. Es zeigt sich allerdings, dass während die Spiralbewegung bei niedrigen Werten des dynamischen Drucks  $\bar{q}$  instabil ist, sie an der oberen Grenze von  $\bar{q}$  ein stabiles Verhalten aufweist. Die Veränderung des Lastfalls hingegen hat keinen merkbaren Einfluss auf

die Lage des zugehörigen Eigenwerts. Bei der Betrachtung der Taumelschwingung zeigt sich, dass diese in erster Linie ebenfalls durch den dynamischen Druck  $\bar{q}$  beeinflusst wird. Mit einem zunehmenden  $\bar{q}$  zeigt sich eine Wanderung der Eigenwerte nach außen und damit eine zunehmende Eigenfrequenz dieser Schwingung. Auch eine Veränderung des Lastfalles hat einen merkbaren Einfluss auf dessen Eigenfrequenz, da sich bei einem konstanten Flugzustand (konstantes  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$ ) mit einem sich verändernden Lastfall auch eine entsprechende Wanderung der Eigenwerte nach außen beobachten lässt. Allerdings ist der Einfluss auf diese Schwingung nicht so stark, wie es sich bei der Anstellwinkelschwingung in der Nickdynamik in Kapitel 5.1.2 beobachten lässt. Den stärksten Einfluss der LPV-Parameter auf die Systemdynamik lässt sich bei der Rollbewegung feststellen. Sowohl der Flugzustand ( $\bar{p}$  und  $\bar{q}$ ), als auch der Lastfall haben einen deutlichen Einfluss auf die Lage des entsprechenden Eigenwerts. Es zeigt sich zum einen, dass mit zunehmenden Werten von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  auch der Betrag der jeweiligen Eigenwerte zunimmt. Zusätzlich zeigt sich zum anderen, dass bei einem konstanten Flugzustand sich die Lage des Eigenwerts ebenfalls mit einem verändernden Lastfall ändert. Des Weiteren lässt sich festhalten, dass auch der Einfluss des Lastfalls auf die Rollbewegung mit zunehmendem  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  stärker wird. So zeigt sich im Setup 4 eine deutlich stärkere Verschiebung des Eigenwerts mit einer Veränderung des Lastfalls, als es bei Setup 1 der Fall ist. Insgesamt ist aufgrund der beschriebenen Einflüsse der Parameter auf die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke die Verwendung der in Kapitel 3 entwickelten Verfahren für LPV-Systeme mit partiell messbaren Parametern und die Berücksichtigung des Lastfalls  $l$  im Reglerentwurf gut zu begründen.

### 5.3.2 Definition der Regelungsziele und Entwurf des Reglers

Der zu entwerfende Regler soll die Funktion der Basisregelung der Seitenbewegung innerhalb eines Autopiloten ausfüllen und wird als eine Regelung des Hängewinkels  $\Phi$  konzipiert, wie es in Brockhaus u. a. (2011, S. 647) beschrieben ist. Die Verwendung von  $\Phi$  als primäre Regelgröße der Seitenbewegung hat zwei Gründe. Zum einen kann mit einer solchen Regelung sichergestellt werden, dass im Geradeausflug ein Hängewinkel vermieden wird und somit der Auftriebsvektor in der Vertikalen bleibt. Zum anderen stellt das Einnehmen eines bestimmten Hängewinkels  $\Phi$  die wirksamste Stellgröße für die Einleitung eines Kurvenflugs dar, weil die resultierende Rollbewegung gleichzeitig auch eine Gierbewegung einleitet. Diese Roll-Gierkopplung resultiert aus der Änderung der Auftriebsverteilung auf dem Flügel des Flugzeugs. Durch die Rollbewegung wird der lokale Anstellwinkel auf der einen Seite vergrößert und auf der anderen Seite verringert, wodurch sich auf beiden Flügeln ein jeweils unterschiedlicher Auftrieb ergibt. Dadurch verändert sich auch der durch den Auftrieb induzierte Widerstand, was in einer Gierbewegung resultiert (Brockhaus u. a., 2011, S.133 - 134). Zusätzlich wird angestrebt, während eines Kurvenflugs mit Hilfe des Seitenruders den Schiebewinkel  $\beta$  möglichst klein zu halten. Die dadurch entstehenden Querschleunigungen werden von Menschen

als unangenehm empfunden und sollen aus diesem Grund während eines Kurvenflugs möglichst gering sein. Zusätzlich werden durch ein  $\beta \neq 0^\circ$  die Strömungsverhältnisse am Flügel nachteilig beeinflusst, was aufgrund des dadurch entstehenden zusätzlichen Strömungswiderstandes ebenfalls unerwünscht ist. Diese Form des Kurvenflugs wird stationärer schiebefreier Kurvenflug genannt. Dabei wird mit Hilfe des Querruders der Hängewinkel  $\Phi$  so eingestellt, dass eine gewünschte stationäre Giergeschwindigkeit  $r$  erreicht und nach dem Abschluss der Kurve das Flugzeug wieder in eine horizontale Lage mit  $\Phi = 0^\circ$  gebracht wird. Während dieses Manövers wird das Seitenruders genutzt, um ein durch den Kurvenflug entstehendes  $\beta \neq 0^\circ$  zu kompensieren und die genannten Effekte zu vermeiden. Wie in Kapitel 5.3.1 beschrieben, wird anstatt  $\beta$  aufgrund der besseren Messbarkeit in diesem Fall eine normalisierte spezifische Kraft  $f_y^*$  als Regelgröße verwendet. Daraus ergibt sich eine Mehrgrößenregelung mit den beiden Regelgrößen  $\Phi$  und  $f_y^*$ .

Aus dem erläuterten Anwendungsfall ergeben sich entsprechend die im folgenden formulierten Ziele und Anforderungen an den Regelkreis. Analog zur Nickdynamik kommen an dieser Stelle auch die beiden militärischen Standards MIL-HDBK-1797 (1997) und MIL-DTL-9490E (2008) als Grundlage zur Anwendung.

- Der Regler soll entsprechend der geplanten Funktion einen Hängewinkel  $\Phi$  automatisiert und ohne bleibende Regelabweichung einstellen. Das Regelverhalten soll über den gesamten betrachteten Parameterbereich weitestgehend gleich ausfallen. Grund hierfür ist wie schon bei der Nickdynamik der angedachte Einsatz innerhalb eines Autopiloten, weil somit eine Anpassung der überlagerten Regelkreise an Änderungen in den Parametern nicht zwingend erforderlich ist.
- Die Bewertung des Folgeverhaltens erfolgt mit Hilfe der Bandbreite des Übertragungsverhaltens  $\Phi_{cmd} \rightarrow \Phi$  und der benötigten Anregelzeit. Für die Rolldynamik des Flugzeugs ergibt sich aus MIL-DTL-9490E (2008, S.10) eine Winkelgeschwindigkeit von mindestens  $1^\circ/\text{s}$ , woraus sich entsprechend die gewünschte Anregelzeit ergibt. Ziel des Entwurfs ist es, dieser Empfehlung möglichst nahe zu kommen und die Bandbreite des entsprechenden Übertragungsverhaltens so groß wie möglich zu gestalten.
- Die Antwort des geschlossenen Regelkreises auf ein Vorgabesignal  $\Phi_{cmd}$  sollte weder ein zu starkes Überschwingen noch ein zu starkes Unterschwingen (Bewegung entgegen des gewünschten Wertes zu Beginn des Regelvorgangs) aufweisen. Das Überschwingen sollte einen Wert von 5% und das Unterschwingen einen Wert von 10% nicht überschreiten.
- Der erläuterte schiebefreie Kurvenflug soll automatisiert gewährleistet werden. Während des Einstellens eines gewünschten  $\Phi$  sollte die Querbeschleunigung ein  $f_y^* < 0.1$  nicht überschreiten. Während des stationären Kurvenflugs soll  $\beta < 2^\circ$

und  $f_y^* < 0.03$  gelten (MIL-DTL-9490E, 2008, S. 11). Diese Bedingungen sind in allen Flugzuständen und für alle betrachteten Lastfälle zu erfüllen.

- Die physikalischen Grenzen beider Aktuatoren müssen im gesamten Parameterbereich eingehalten werden. Diese bestehen aus dem maximalen Ausschlag des Querruders von  $\xi = \pm 20^\circ$  sowie des Seitenruders von maximal  $\zeta = \pm 25^\circ$  und den jeweiligen maximalen Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\xi} = \pm 40^\circ/\text{s}$  und  $\dot{\zeta} = \pm 30^\circ/\text{s}$ .
- Für die Robustheit werden wie in MIL-DTL-9490E (2008, S. 21) beschrieben, mindestens 6 dB Amplitudenreserve und  $45^\circ$  Phasenreserve vorausgesetzt. Die Berechnung dieser Werte ist bei einem Mehrgrößenproblem nicht eindeutig, weshalb auf die im Folgenden aufgeführten Erläuterungen verwiesen sei.

Wie schon bei der Definition der Regelungsziele in Kapitel 5.2.1, werden auch in diesem Fall die formulierten Kriterien in Beschränkungen und Optimierungsgrößen aufgeteilt. Optimiert werden mit der Bandbreite und der zugehörigen Anregelzeit zwei der Anforderungen an das Folgeverhalten des Regelkreises. Als Beschränkung werden die restlichen Anforderungen an das Folgeverhalten des Hängewinkels (Über- und Unterschwingen), sowie die Bedingungen für den schiebefreien Kurvenflug und die physikalischen Grenzen beider Aktuatoren definiert. Auch die formulierten Ziele für die Amplituden- und Phasenreserve fallen in diese Kategorie. Bei deren Berechnung gibt es eine Besonderheit zu beachten, weil das Regelungsproblem durch eine Mehrgrößenregelung mit zwei Stellgrößen repräsentiert wird. Für diesen Fall wird in MIL-DTL-9490E (2008, S. 21) vorgeschlagen, die Eingangsgrößen separat voneinander zu betrachten. Das bedeutet, dass der Regelkreis jeweils nur an der aktuell betrachteten Eingangsgröße aufgeschnitten wird. Somit wird für jede der Eingangsgrößen ein eigenes Wertepaar an Amplituden- und Phasenreserve berechnet, die alle jeweils die genannten Werte von  $A_r = 6 \text{ dB}$  und  $\varphi_r = 45^\circ$  erfüllen müssen. In der englischsprachigen Literatur werden die dabei erhaltenen Werte auch als *Loop-at-a-time Margins* bezeichnet.

Diese Werte müssen jedoch mit Vorsicht betrachtet werden, da die dabei erhaltenen Resultate oftmals zu optimistisch ausfallen und damit eine zu hohe Robustheit vortäuschen können. Die Problematik wurde in Bates und Postlethwaite (2002, S. 36 - 39) anhand eines Beispiels detailliert ausgearbeitet. In dem dort betrachteten Fall wies eine betrachtete Mehrgrößenregelung nach dem im vorherigen Abschnitt erläuterten Vorgehen der einzelnen Betrachtung aller Eingangsgrößen ausreichend hohe Werte von Amplitude- und Phasenreserve auf. Eine alleinige Betrachtung dieser Werte ist im Hinblick auf die Robustheit eines Regelkreises bei einem Mehrgrößensystem allerdings nicht geeignet. Das beschriebene Vorgehen beschreibt nur die Robustheit des Regelkreises gegenüber Unsicherheiten in dem jeweils betrachteten Eingangssignal. Bei allen anderen Eingangssignalen wird hingegen gleichzeitig ein nicht durch Unsicherheiten behaftetes Verhalten angenommen. In dem in Bates und Postlethwaite (2002, S. 36 - 39) betrachteten Beispiel führte beispielsweise bereits eine sehr kleine

Unsicherheit in beiden Eingangssignalen gleichzeitig zu einer Instabilität des Regelkreises. Dies zeigt sehr deutlich, dass eine alleinige Betrachtung der so berechneten Amplituden- und Phasenreserve bei einem Mehrgrößenproblem nicht ausreichend ist, um die Robustheit des Systems genügend zu beschreiben. Um den Sachverhalt der gleichzeitigen Unsicherheiten in mehreren Signalen bei der Analyse zu berücksichtigen, wird in Bates und Postlethwaite (2002, S. 44 - 45) die Verwendung einer alternativen Berechnung von Amplituden- und Phasenreserve vorgeschlagen. Die dabei berechneten Werte basieren auf der Betrachtung der strukturierten Singulärwerte (*structured singular value*) des Regelkreises und werden in der englischsprachigen Literatur als *Disk Margins* bezeichnet (Seiler u. a., 2020). Der Vorteil dieser Betrachtung ist der, dass diese sowohl für Eingrößen- als auch für Mehrgrößensysteme ermittelt werden und die am Anfang dieses Absatzes genannte Problematik lösen können. Die damit erhaltenen Werte für Amplituden- und Phasenreserve beschreiben im Gegensatz zu der Vorgehensweise der einzelnen Signalbetrachtung die Unsicherheit, die alle betrachteten Signale des Systems gleichzeitig kompensieren können, ohne dass der Regelkreis instabil wird. Diese ermöglichen somit eine bessere Einschätzung über die Robustheit des betrachteten Regelkreises. Aufgrund dieser Tatsache werden in diesem Fall entgegen der Empfehlung in MIL-DTL-9490E (2008, S. 21) für die Betrachtung der Robustheit die erläuterten, auf strukturierten Singulärwerten basierenden Werte der Amplituden- und Phasenreserve betrachtet.

Im nächsten Schritt wird die für den Reglerentwurf erforderliche verallgemeinerte Regelstrecke (siehe Kapitel 3.3) des behandelten Regelungsproblems definiert. Die Struktur der Regelung war analog zur Nickdynamik in Kapitel 5.2.2 aufgrund der vorhandenen Reglerarchitektur im exemplarisch betrachteten Flugzeug vorgegeben und ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Das Ziel der zu entwerfenden Regelung der

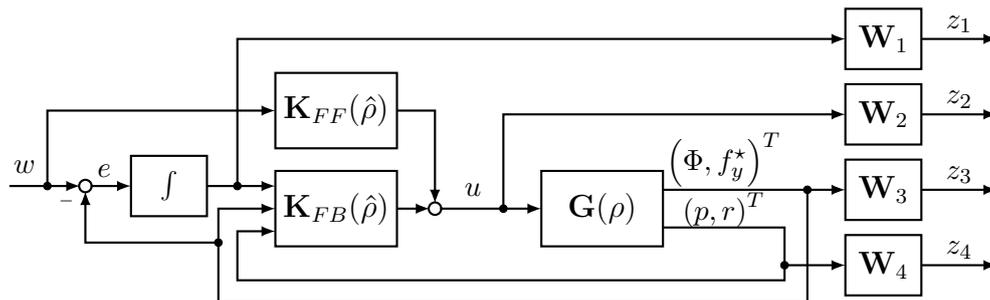


Abbildung 5.11: Darstellung des Regelungsproblems der Seitenbewegung

Seitenbewegung ist es, einen gewünschten Hängewinkel  $\Phi_c$  ohne bleibende Regelabweichung einzustellen. Zusätzlich gilt es den lateralen Lastfaktor auf  $f_y^* = 0$  zu halten, um den definierten schiebefreien Kurvenflug zu ermöglichen. Der Eingangsvektor ergibt sich daher zu  $w = (\Phi_c, f_{y,c}^*)^T$ , wobei  $f_{y,c}^* = 0$  gesetzt wird. Um die Anforderung keiner bleibenden Regelabweichung umzusetzen, wird die Regelung um eine Integration der

Regelfehler  $e$  dieser beiden Größen erweitert. Die Rückführung der verwendeten Reglerstruktur enthält neben den beiden integrierten Regelfehlern außerdem noch die vier in (5.15) definierten Zustandsgrößen der Seitenbewegung. Die Regelung wird um eine Vorsteuerung der beiden Sollwerte in  $w$  ergänzt, wodurch ein Regelgesetz mit zwei Freiheitsgraden nach Kapitel 3.3.3 entsteht. Das Signal  $u$  enthält die beiden in (5.15) definierten Stellgrößen  $\dot{p}_c$  und  $\dot{r}_c$ . Mit  $\mathbf{G}(\rho)$  wird die in Kapitel 5.3.1 beschriebene Regelstrecke bezeichnet. In der Reglersynthese werden im Ausgangsvektor  $z$  vier Teilsignale betrachtet. In  $z_1$  sind die beiden integrierten Regelfehler enthalten,  $z_2$  enthält die beiden vom Regler erzeugten Stellgrößen und in  $z_3$  und  $z_4$  werden die vier Messgrößen erfasst. Mit Hilfe von  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_4$  werden die in  $z$  enthaltenen Signale untereinander gewichtet, um den Regler entsprechend der zu Beginn dieses Kapitels formulierten Anforderungen einzustellen.

Der Regler wird ebenfalls mit dem in Kapitel 5.2.2 beschriebenen Verfahren entworfen. Beide Regelstrecken entstammen dem gleichen Flugzeugmodell, weshalb für die Parameterbereiche und die maximalen Änderungsraten der LPV-Parameter der in Abbildung 5.1 dargestellte Parameterbereich, sowie die in (5.10) definierten Änderungsraten verwendet werden. Für die Form der noch unbekanntenen Matrizen  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$ ,  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  in der zu lösenden LMI (3.35) wird ebenfalls auf die in Kapitel 5.2.2 verwendeten Polynome zurückgegriffen, welche in (5.11) definiert wurden. Des Weiteren muss für die Regler-Synthese der in Abbildung 5.1 dargestellte Parameterbereich diskretisiert werden, damit das in Kapitel 3.4 beschriebene gitterbasierte LPV-Verfahren angewandt werden kann. Hierbei wurden für  $\bar{p}$  sieben äquidistante Punkte im gesamten Bereich und für  $\bar{q}$  insgesamt 35 Punkte verwendet. Aufgrund des geringeren Einflusses des dynamischen Druckes  $\bar{q}$  auf das dynamische Verhalten der Regelstrecke (siehe Abbildung 5.10) gegenüber der Nickdynamik im vorherigen Kapitel 5.2.2, ist in diesem Fall eine gröbere Diskretisierung des Parameterbereiches ausreichend. Somit wird der zulässige Flugbereich durch 245 Trimpunkte beschrieben. Hinzu kommen die 13 definierten Lastfälle und das Regelungsproblem wird durch insgesamt 3185 Gitterpunkte beschrieben. Die Durchführung der Reglersynthese erfolgt ebenfalls in MATLAB mit Hilfe der beiden bereits in Kapitel 5.2.3 verwendeten Toolboxen *LPVTools* (Seiler und Hjartarson, 2015) und *YALMIP* (Lofberg, 2004).

Abschließend müssen ebenfalls die in Abbildung 5.11 definierten Gewichtungen  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_4$  bestimmt werden. Hierzu wird ebenfalls das in Kapitel 5.2.3 beschriebene Optimierungsverfahren verwendet. Die Kriterien mit denen die Optimierung erfolgt, resultieren aus den zu Beginn dieses Kapitels formulierten Zielen und sind in Tabelle 5.3 dargestellt. Die Größen, die aus dem Verhalten der Sollwertfolge von  $\Phi$  resultieren, werden für eine Sprungantwort von  $\Phi_c = 15^\circ$  betrachtet. Während des Regelvorganges müssen dabei neben den Anforderungen an die Systemantwort (Anregelzeit, Über- und Unterschwingen) zusätzlich die Werte für  $\beta$  und  $f_y^*$  unterhalb des angegebenen Wertes und beide Aktuatoren innerhalb der angegeben physikalischen Grenzen bleiben. In

**Tabelle 5.3:** Optimierungskriterien des Regelkreises der Seitenbewegung

Kriterium	Sollwert	Art des Kriteriums
Bandbreite $\Phi_c \rightarrow \Phi$	$> 1 \text{ rad/s}$	Optimum
Anregelzeit $\Phi$	$< 1 \text{ s}$	Optimum
Überschwingen $\Phi$	$< 5 \%$	Beschränkung
Unterschwingen $\Phi$	$< 10 \%$	Beschränkung
max. Schiebewinkel $\beta$	$< 2^\circ$	Beschränkung
max. lat. Lastfaktor $f_y^*$	$< 0.03$	Beschränkung
Ausschlag Querruder $\xi$ (Betrag)	$< 20^\circ$	Beschränkung
Ausschlag Seitenruder $\zeta$ (Betrag)	$< 25^\circ$	Beschränkung
Stellrate Querruder $\dot{\xi}$ (Betrag)	$< 40^\circ/\text{s}$	Beschränkung
Stellrate Seitenruder $\dot{\zeta}$ (Betrag)	$< 30^\circ/\text{s}$	Beschränkung
Amplitudenreserve (beide Eingänge)	$> 6 \text{ dB}$	Beschränkung
Phasenreserve (beide Eingänge)	$> 45^\circ$	Beschränkung

diesen Fall besteht jedes der vier in Abbildung 5.11 verwendeten Ausgangssignale  $z$  aus einem Vektor-Signal, weshalb für die Gewichtungen in diesem Fall Matrizen verwendet werden müssen. Hierzu werden einfache Diagonalmatrizen der Form

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & W_n \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

verwendet, wobei  $n$  die Dimension der quadratischen Matrix  $\mathbf{W}$  beschreibt. Somit wird jedes Signal mit einem einzelnen skalaren Gewicht  $W_i$  versehen. Aufgrund der großen Unterschiede zwischen den einzelnen Gitterpunkten innerhalb des gesamten Parameterbereichs, werden hierzu ebenfalls lineare Funktionen der Form

$$W_i = w_{i0} + w_{i1} \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{max}} + w_{i2} \cdot \frac{\bar{q}}{\bar{q}_{max}} \quad (5.19)$$

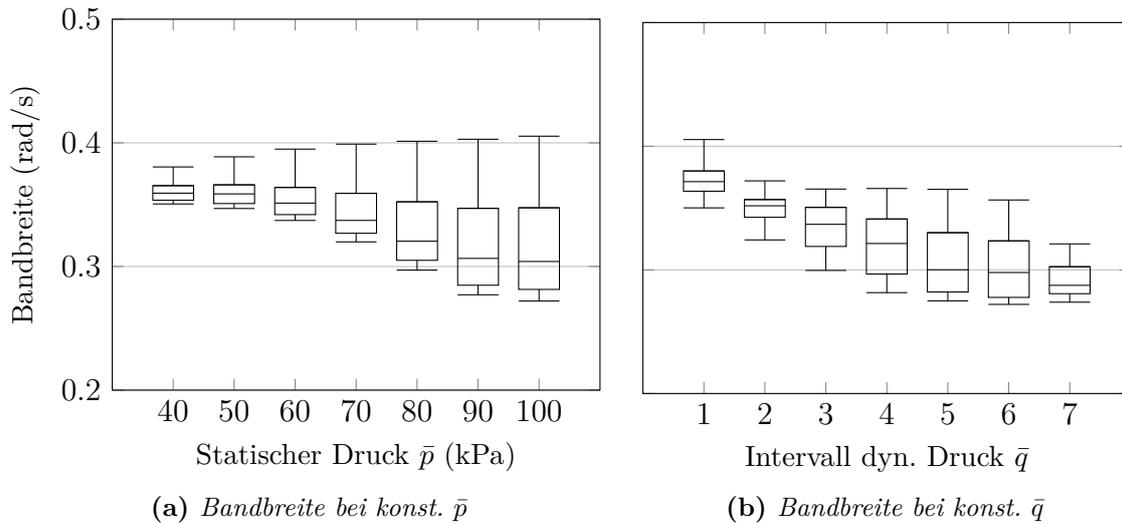
verwendet. Diese Form der Gewichte ist identisch zu denen in Kapitel 5.2.3 verwendeten Funktionen, welche in (5.14) angegeben sind.

Der Prozess der Optimierung erfolgt analog zu dem in Kapitel 5.2.3 vorgestellten Vorgehen und ist in Abbildung 5.5 schematisch dargestellt. Die in Tabelle 5.3 definierten Optimierungskriterien werden hierbei ebenfalls mit einem Regelkreis aus ermitteltem Regler und einer erweiterten linearen Regelstrecke ermittelt. Durch diese Erweiterung wird bei der Berechnung der Kriterien das System realitätsnaher abgebildet und beugt damit einem Nichterfüllen der Regelungsziele innerhalb der nichtlinearen Simulationsumgebung des Flugzeuges vor. Die Struktur der erweiterten Regelstrecke ist im Detail

in Anhang C beschrieben. Als Optimierungsverfahren kommt aufgrund der ebenfalls sehr großen Menge an Einstellgrößen der bereits in Kapitel 5.2.3 verwendete genetische Algorithmus zur Anwendung. Infolge der deutlich größeren Menge an Kriterien und Einstellgrößen gegenüber der Optimierung in der Nickdynamik, wird in diesem Fall mit 240 eine deutlich größere Populationsgröße gewählt. Für die Anzahl an Generationen werden ebenfalls 200 betrachtet. Die Berechnung erfolgt wie schon im Fall der Nickdynamik auf einem lokalen Großrechner mit 24 Kernen, sodass ein Zehntel jeder Generation parallel berechnet werden kann.

### 5.3.3 Lineare Analyse des Regelkreises

Der Regler der Seitenbewegung wird an dieser Stelle ebenfalls zunächst linear analysiert. Analog zu Kapitel 5.2.5 wird hierfür der geschlossene LPV-Regelkreis verwendet, welcher auch im vorherigen Kapitel 5.3.2 zur Berechnung der Optimierungskriterien verwendet wurde. Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit ist in Abbildung 5.12 die erzielte Bandbreite des Übertragungsverhaltens  $\Phi_{cmd} \rightarrow \Phi$  zum einen für alle Werte von  $\bar{q}$  und Lastfälle bei jeweils konstanten statischen Drücken  $\bar{p}$  (konstante Flughöhen), sowie für alle Werte von  $\bar{p}$  und alle Lastfälle für jeweils bestimmte Intervalle von  $\bar{q}$  dargestellt. Zunächst fällt es sehr stark auf, dass die Bandbreite insgesamt über den gesamten betrachteten Parameterbereich deutlich weniger schwankt, als es in der Nickdynamik der Fall ist. Das ist ursächlich in dem deutlich schwächeren Einfluss des Lastfalls auf die Seitenbewegung gegenüber der Nickdynamik. Zwar werden die dynamischen Eigenschaften der Seitenbewegung durch eine Variation darin ebenfalls beeinflusst, wie es in Kapitel 5.3.1 gezeigt wurde. Die Veränderung des Schwerpunktes hat in diesem Fall allerdings keinen so starken Einfluss auf die Steuerbarkeit des Systems. Des Weiteren zeigt sich im Hinblick auf die erzielten Bandbreiten eine leichte Abhängigkeit von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$ . In Abbildung 5.12a sind alle erzielten Bandbreiten für jeweils konstante Werte von  $\bar{p}$  dargestellt. Es zeigt sich, dass mit steigendem statischen Druck  $\bar{p}$  die erzielten Bandbreiten im Mittel sinken. Die Ursache hierfür ist primär in der sogenannten Rolldämpfung zu sehen. Wie es in Brockhaus u. a. (2011, S. 133 - S. 134) erläutert ist, wird darunter ein entgegen der Rollbewegung wirkendes Moment verstanden, welches durch bei der Rollbewegung entstehenden unterschiedlichen Anstellwinkeln an beiden Flügeln erzeugt wird. Die dadurch verursachten Unterschiede im Auftrieb am linken und rechten Flügel bewirken ein entsprechendes Rollmoment entgegen der Bewegungsrichtung und stellen eine Form von dynamischer Dämpfung der Rollbewegung dar. Die Größe dieses Moments ist proportional zum Staudruck  $\bar{q}$  und damit auch proportional zur Luftdichte  $\bar{\rho}$  und zum Quadrat der Fluggeschwindigkeit  $V_K$ . Der Effekt der Rolldämpfung wird dementsprechend mit einem steigenden  $\bar{p}$  und einer damit steigenden Luftdichte  $\bar{\rho}$  stärker und wirkt damit der von dem Regler eingeleiteten Rollbewegung immer stärker entgegen. Zusätzlich ist eine stärker werdende Schwankung der Werte mit zunehmenden  $\bar{p}$  zu beobachten. Das hat zur

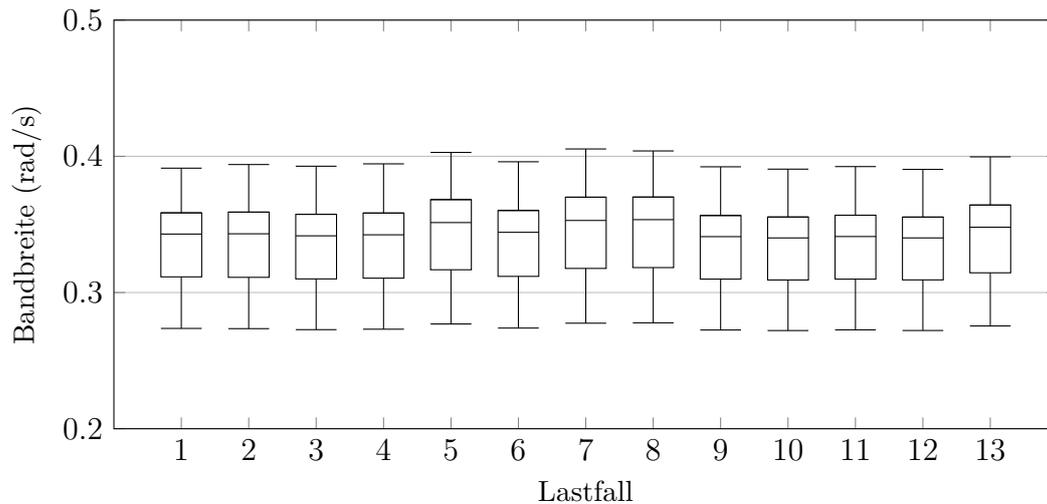


**Abbildung 5.12:** Bandbreite von  $\Phi_c \rightarrow \Phi$  für konstante Werte von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$

Folge, dass zwar die Mehrheit der erzielten Bandbreiten mit zunehmendem  $\bar{p}$  abnimmt, die maximal erzielten Werte hingegen größer werden. Die Ursache hierfür ist in der gleichzeitig mit steigendem  $\bar{p}$  zunehmenden Wirksamkeit der Steuerflächen zu suchen (siehe Kapitel 2.3.3). Das führt dazu, dass in einzelnen Gitterpunkten der Effekt der stärker werdenden Rolldämpfung entsprechend kompensiert werden kann und ähnliche Bandbreiten erreicht werden können.

Der Effekt der zunehmenden Rolldämpfung wird insbesondere bei der Betrachtung der erzielten Bandbreiten innerhalb einzelner Intervalle des dynamischen Drucks  $\bar{q}$  für alle Werte von  $\bar{p}$  und alle Lastfälle deutlich, welche in Abbildung 5.12b dargestellt sind. Für die Darstellung wurden die gleichen Intervalle wie zuvor in der Analyse der Nickdynamik verwendet, die in Tabelle 5.2 definiert wurden. Die erzielten Bandbreiten über alle Werte von  $\bar{p}$  und alle Lastfälle nehmen im Mittel ab, wenn der dynamische Druck  $\bar{q}$  steigt. Damit bestätigen sich die bereits bei der Betrachtung der Bandbreiten für konstante Werte von  $\bar{p}$  getätigten Aussagen. Durch den steigenden dynamischen Druck  $\bar{q}$  nimmt entsprechend auch die Fluggeschwindigkeit  $V_K$  zu, wodurch der Effekt der bereits angesprochenen Rolldämpfung ebenfalls zunimmt. Somit werden die höchsten Werte der Bandbreite allesamt in dem ersten Intervall von  $\bar{q}$ , und damit den niedrigsten Werten des dynamischen Druckes erreicht.

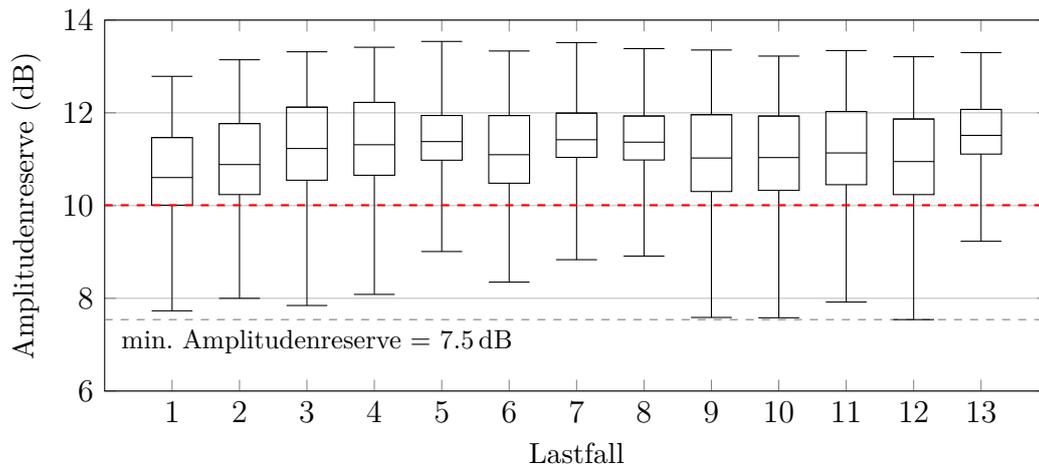
Abschließend werden die erzielten Bandbreiten für alle Werte von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  bei einem jeweils konstanten Lastfall betrachtet, was in Abbildung 5.13 dargestellt ist. Es wird deutlich, dass die erzielten Bandbreiten über alle betrachteten Lastfälle nahezu konstant sind. Dies steht im starken Gegensatz zur Nickdynamik, wo der Lastfall einen erheblichen Einfluss auf die erreichten Werte hatte. Neben der Beeinflussung der dynamischen Eigenschaften liegt dies im Fall der Nickdynamik insbesondere an der



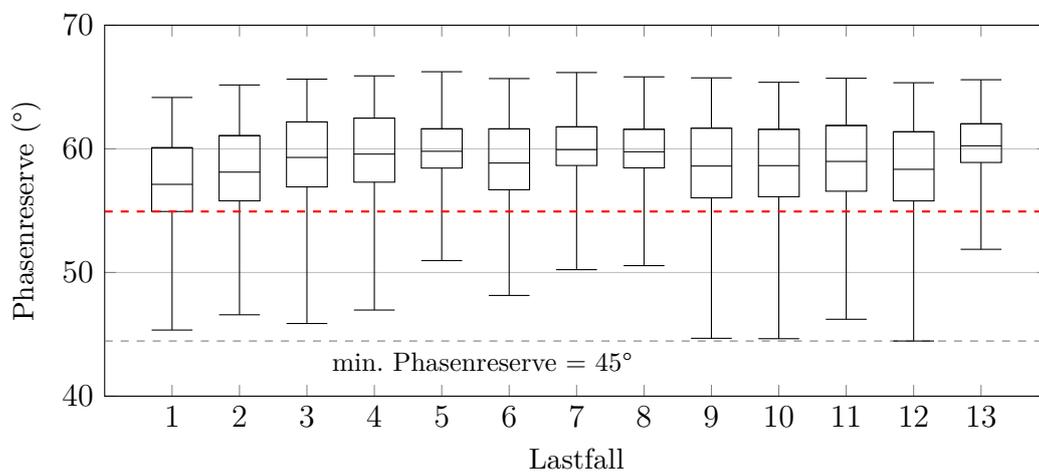
**Abbildung 5.13:** Bandbreite von  $\Phi_c \rightarrow \Phi$  für alle Lastfälle

Veränderung der Steuerbarkeit mit einer sich ändernden Schwerpunktlage. Im Fall der Seitenbewegung existiert kein solch starker Einfluss auf Steuerbarkeit der Rollbewegung, sodass der demonstrierte Reglerentwurf ein sehr gleichbleibendes Regelverhalten über alle Lastfälle hinweg ermöglicht.

Sehr gleichbleibende Werte über alle Lastfälle hinweg zeigen sich auch bei der Auswertung der Amplituden- und Phasenreserve. Im Gegensatz zur Analyse der Nickdynamik werden in diesem Fall die in Kapitel 5.3.2 erläuterten Werte für Mehrgrößensysteme betrachtet, welche auf der Analyse der strukturierten Singulärwerte basieren (*Disk Margins*). Die erzielten Werte werden in Abbildung 5.14 jeweils für den gesamten Flugbereich und alle Lastfälle einzeln dargestellt. Bei der Betrachtung der Amplitudenreserve in Abbildung 5.14a zeigen sich in allen Lastfällen sehr große Schwankungen über den Flugbereich, welche aber in allen Fällen sehr ähnlich ausfallen. Zusätzlich bewegen sich etwa 50 % der Werte innerhalb eines kleineren Bereichs zwischen den beiden Quartilen, wobei sich das kleinste unterste Quartil (rote gestrichelte Linie) bei  $A_r = 10$  dB befindet. Minimal werden insgesamt 7.5 dB Amplitudenreserve erreicht, welches deutlich über dem geforderten Minimum von 6 dB liegt. Eine vergleichbare Verteilung ergibt sich ebenfalls bei den erzielten Phasenreserven, welche in Abbildung 5.14b dargestellt sind. Es zeigt sich ebenso eine sehr starke Schwankung über den gesamten Flugbereich, wohingegen sich die Verteilung der Werte zwischen den verschiedenen Lastfällen nicht sehr stark ändert. Auch in diesem Fall liegen die beiden Quartile sehr nah beieinander, womit sich 50 % der Werte in einem sehr kleinen Bereich befinden. Das unterste Quartil liegt in diesem Fall bei  $\varphi_r = 55^\circ$ , während der insgesamt minimal erreichte Wert genau der formulierten Mindestanforderung von  $45^\circ$  Phasenreserve entspricht. Insgesamt befindet sich der Großteil der erzielten Werte aber deutlich oberhalb des geforderten Minimums.



(a) Amplitudenreserve



(b) Phasenreserve

Abbildung 5.14: Amplituden- und Phasenreserve der Seitenbewegung für alle Lastfälle

## 5.4 Nichtlineare Analyse der entworfenen Regler

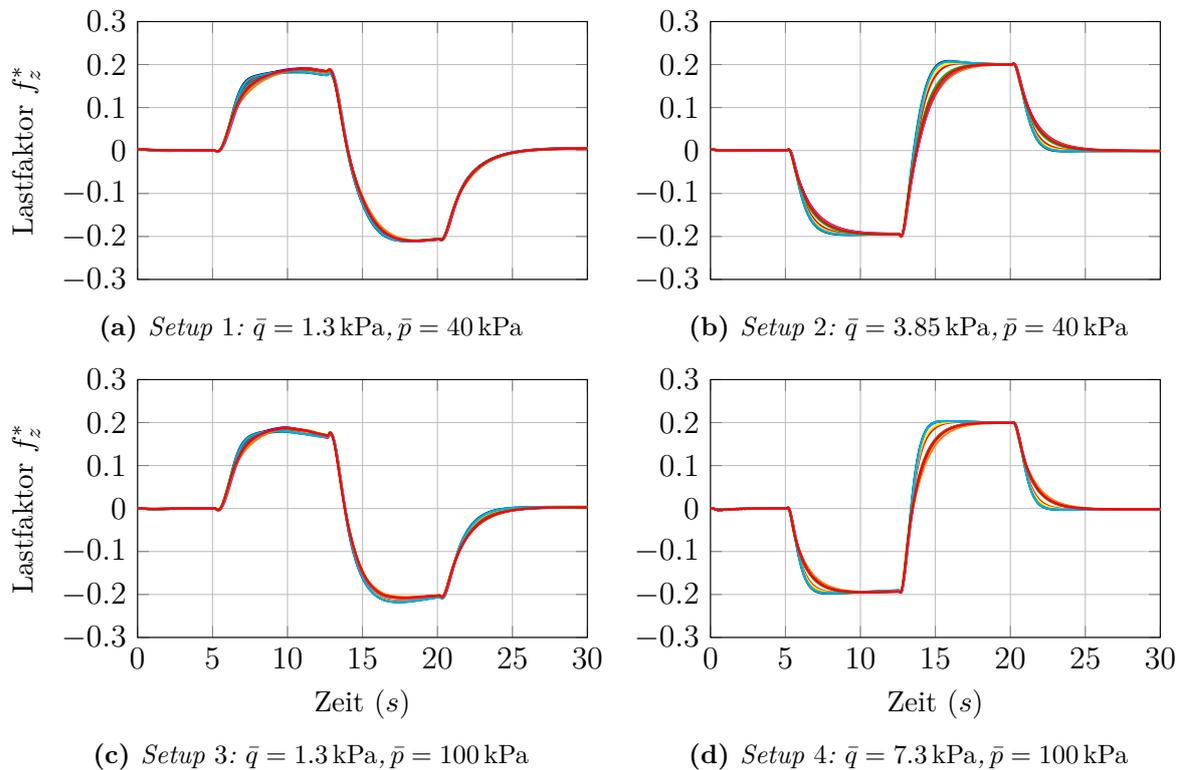
Nachdem die beiden entworfenen Regler in den Kapiteln 5.2.5 und 5.3.3 zunächst einzeln und im linearen untersucht wurden, werden beide Regler in diesem Kapitel mit Hilfe einer sehr detaillierten nichtlinearen Simulationsumgebung des betrachteten Flugzeugs mit sechs Freiheitsgraden ( $6DoF$ ) analysiert. Diese wurde von dem Institut für Flugsystemdynamik der TU München zu Auswertungszwecken für diese Arbeit zur Verfügung gestellt. Es wird beispielsweise für die finale Analyse und Bewertung von entworfenen Reglern vor realen Flugtests verwendet. Diese Simulationsumgebung besteht neben den nichtlinearen Bewegungsgleichungen aus Anhang B zusätzlich noch aus den bereits in der Optimierung und linearen Analyse verwendeten zusätzlichen

Elementen. Dazu gehören die Dynamik der Aktuatoren, Einflüsse der Strukturdynamik und weiteren Komponenten, wie den in einem realen System verwendeten Filtern. Es ist damit daher möglich, die entworfenen LPV-Regler unter sehr genauen Modell-Bedingungen auf deren Stabilität und Leistungsfähigkeit zu untersuchen. Für die Analyse in dieser Simulationsumgebung wird das Flugzeug jeweils in mehreren Flugzuständen und Lastfällen getrimmt und für jeden dieser Punkte ein Referenzszenario simuliert. Die Auswertung erfolgt nacheinander, wobei jeweils einer der beiden Regler mit einem entsprechenden Referenzszenario analysiert wird und der andere Regler entsprechend die nicht betrachtete Dynamik stabilisiert und die Effekte der Kopplung ausgleicht. Diese gemeinsame Betrachtung ist aufgrund der im nichtlinearen nicht mehr vernachlässigbaren Kopplung zwischen Seiten- und Längsbewegung erforderlich (Für Details sei auf Anhang B verwiesen).

### 5.4.1 Regelung der Nickdynamik

Das Verhalten des Reglers für die Nickdynamik wird mit Hilfe eines Referenzszenarios untersucht, in dem dem Regelkreis eine Folge von  $f_{z_c}^*$ -Kommandos übergeben wird. Anschließend wird das Antwortverhalten des Flugzeugs und die erforderlichen Ausschläge  $\eta$  des Höhenruders ausgewertet. Es wird zunächst ein Wert von  $f_z^* = 0.2$  kommandiert, gefolgt von einem Kommando von  $f_z^* = -0.2$  und einer anschließenden Rücknahme des Kommandos zu einem  $f_z^* = 0$ . An den oberen Grenzwerten des dynamischen Drucks ( $\bar{q} = 3.85 \text{ kPa}$  bis  $\bar{q} = 7.3 \text{ kPa}$ ) wird dieses Szenario spiegelverkehrt durchgeführt, also mit einem Kommando von  $f_z^* = -0.2$  begonnen, um ein Verlassen des zulässigen Flugbereichs zu vermeiden. Das Kommando eines positiven Lastfaktors hätte in diesen Fällen zunächst einen Anstieg der Fluggeschwindigkeit zur Folge und es würden an den oberen Grenzen des dynamischen Drucks  $\bar{q}$  die maximal zulässigen Werte überschritten. Der Regler der Seitenbewegung wird in diesem Szenario dazu verwendet, den Hängewinkels bei  $\Phi = 0^\circ$  zu halten und Querbeschleunigungen zu vermeiden. Damit wird ein stationärer Geradeausflug während des gesamten Manövers garantiert. Die Fluggeschwindigkeit  $V_K$  ist während des Testszenarios ungerregelt und kann sich dementsprechend auch infolge der durchgeführten Manöver verändern.

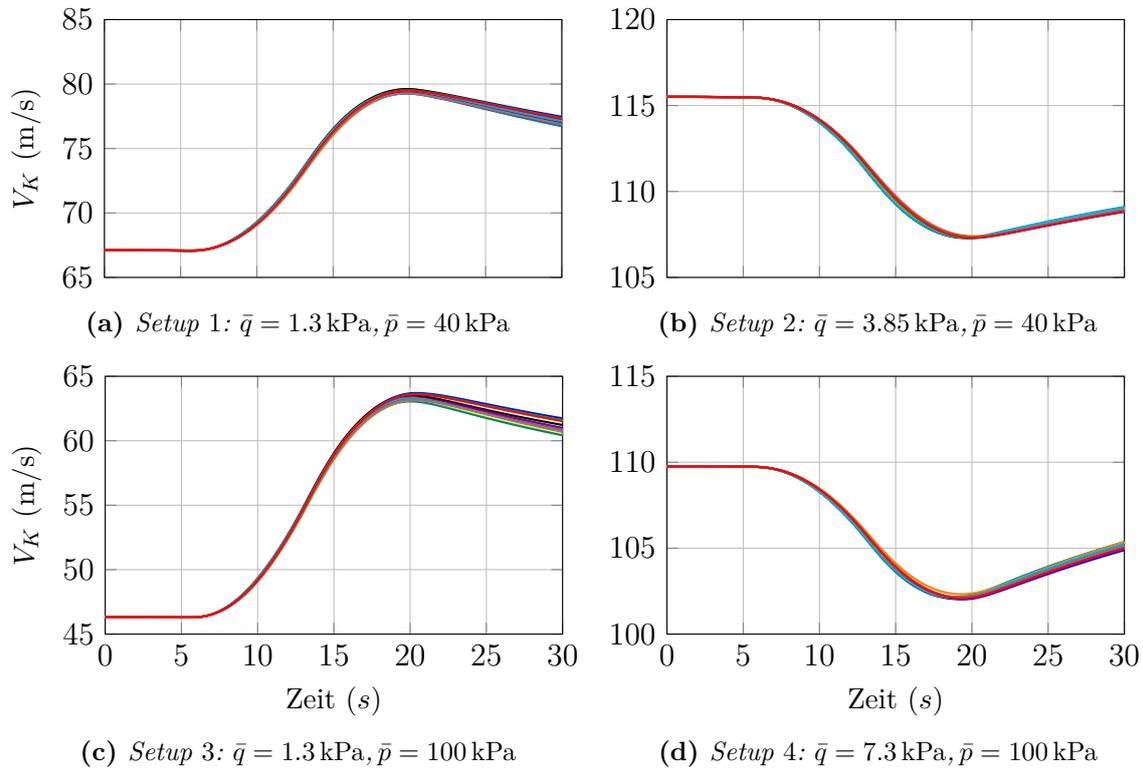
Die erzielten Resultate des beschriebenen Referenzszenarios werden exemplarisch an den vier Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters und jeweils für alle betrachteten Lastfälle in Abbildung 5.15 dargestellt. Damit werden die vier Grenzfälle des betrachteten Parameterbereichs betrachtet (jeweils Kombinationen aus zwei Flugbereichsgrenzen). Es zeigt sich, dass durch den Regler eine Sollwertfolge ohne bleibende Regelabweichung in allen gezeigten Punkten ermöglicht wird, die sich zusätzlich zwischen den betrachteten Lastfällen nicht wesentlich unterscheidet. Die Einbeziehung der Lastfälle in den Reglerentwurf führt also zu einem sehr homogenen Regelverhalten über alle betrachteten Lastfälle. Darüber hinaus wird durch die Anpassung an den aktuellen Flugzustand



**Abbildung 5.15:** Nichtlineare Simulation des geschlossenen Regelkreises der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

(Staudruck  $\bar{q}$  und statischer Druck  $\bar{p}$ ) ein Einsatz in dem gesamten zulässigen Flugbereich ermöglicht. Damit wird ein ebenfalls weitestgehend ähnliches Folgeverhalten in allen dargestellten Punkten erreicht, sodass die in Kapitel 5.2.1 formulierte Anforderung eines vergleichbaren Flugverhaltens im gesamten zulässigen Flugbereich erfüllt wird. Auch die Vorgaben an das maximale Über- (5 %) und Unterschwingen (10 %) werden in allen dargestellten Fällen eingehalten. Zusätzlich gilt es noch zu erwähnen, dass sich während des simulierten Testszenarios die Fluggeschwindigkeit  $V_K$  infolge des sich ändernden Lastfaktors  $f_z^*$  ändert. Diese wird wie einleitend erwähnt nicht geregelt. Somit verändert sich ebenso der dynamische Druck  $\bar{q}$  und es findet während des Testszenarios eine Anpassung des Reglers an die sich ändernden Parameter statt. Der Verlauf der Fluggeschwindigkeit in allen betrachteten Gitterpunkten ist in Abbildung 5.16 dargestellt. Die dort erkennbaren Änderungen von  $V_K$  haben in keinem der betrachteten Gitterpunkte einen merkbaren Einfluss auf das Folgeverhalten in  $f_z^*$ . Die in Abbildung 5.15 dargestellten Ergebnisse demonstrieren somit sehr gut die Fähigkeit des entworfenen Reglers, sich an sich ändernde Flugzustände anzupassen und ein gleichbleibendes Regelverhalten zu ermöglichen.

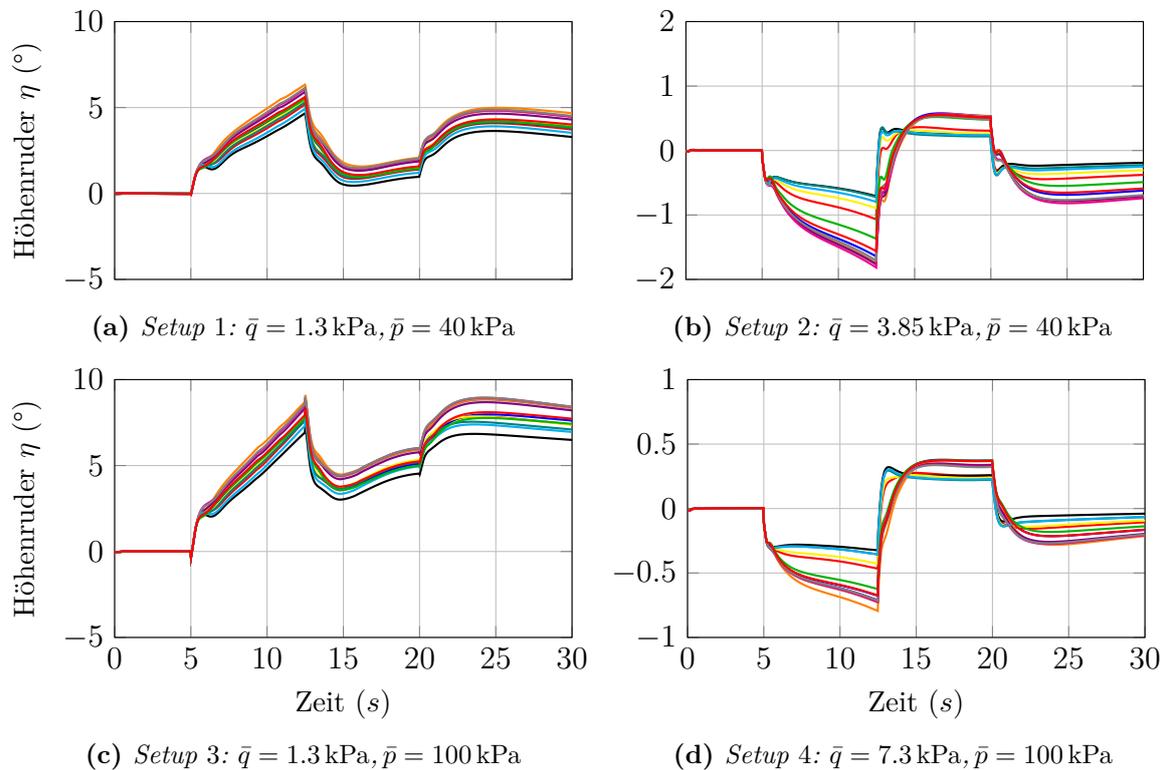
In Abbildung 5.17 sind die während des Manövers auftretenden Ausschläge des



**Abbildung 5.16:** *Fluggeschwindigkeit  $V_K$  in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises der Nickdynamik für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters*

Höhenruders  $\eta$  an den gleichen Gitterpunkten dargestellt. Es werden die in der Simulation effektiv auftretenden Ausschläge des Höhenruders dargestellt, also die Werte die das Höhenruder infolge der Reglerkommandos in der Nickbeschleunigung  $\dot{q}_c$  einnimmt. Aufgrund der Simulation der nichtlinearen Bewegungsgleichungen ist es in jedem Gitterpunkt erforderlich, das Flugzeug mit Hilfe des Höhenruders zu trimmen. Damit die Resultate besser untereinander vergleichbar sind, wurden die erforderlichen Trimmwerte bei  $t = 0$  von den Kommandos subtrahiert. Somit zeigen die Verläufe des Höhenruderausschlags in Abbildung 5.17 nur die zusätzlich von dem Regler für die Änderung von  $f_z^*$  erzeugten Stellsignale. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs (und damit der dynamische Druck  $\bar{q}$ ) verändert sich darüber hinaus während des simulierten Manövers, wie es bereits im vorherigen Absatz beschrieben wurde. Daher werden neben dem Regler auch die Trimmwerte während der Simulation an den sich verändernden Flugzustand angepasst. Aus diesem Grund weisen die Ausschläge des Höhenruders nach dem Testszenario eine bleibende Abweichung auf und kehren nicht in die Ausgangslage zurück.

Bei der Betrachtung der dargestellten Werte wird deutlich, dass der erforderliche Ausschlag des Höhenruders innerhalb des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters stark variiert. Dies ist auf die

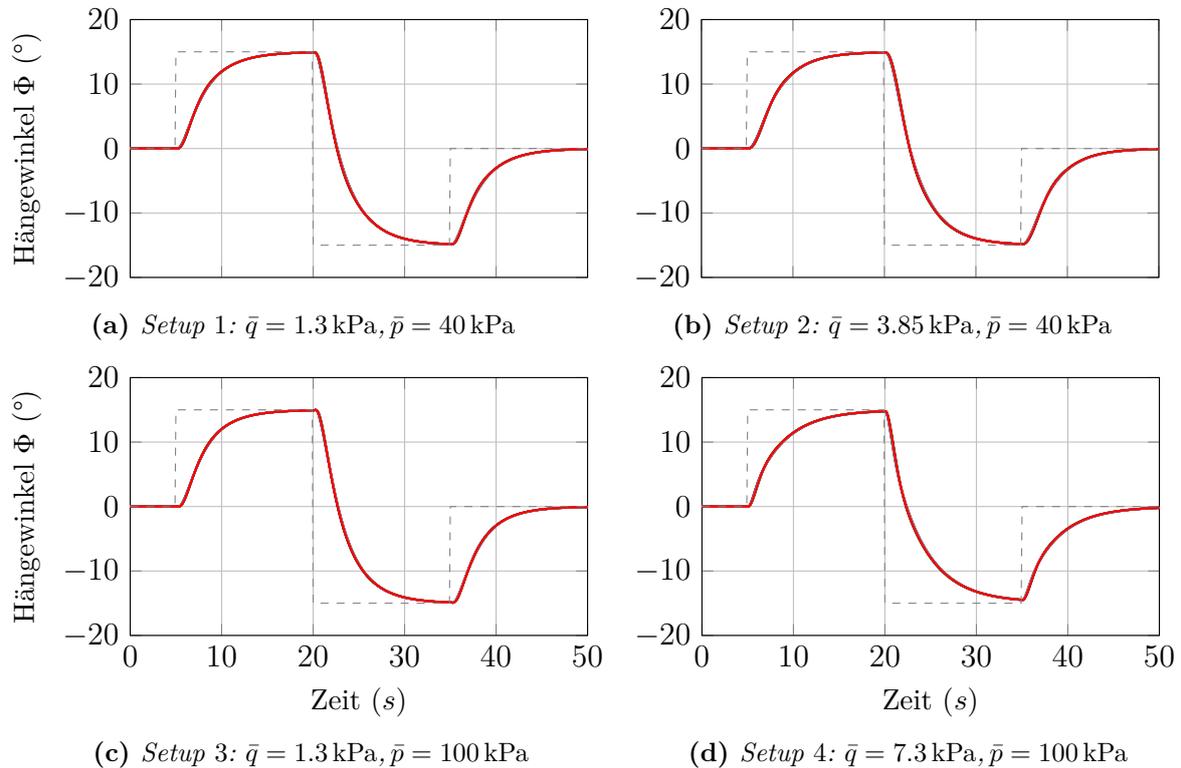


**Abbildung 5.17:** Höhenruderausschläge in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

große Variation des dynamischen Verhaltens des Flugzeugs zwischen den verschiedenen Gitterpunkten zurückzuführen. Insbesondere der dynamische Druck, beziehungsweise die Fluggeschwindigkeit ist hier als wesentlicher Einflussfaktor zu nennen. Wie in Kapitel 2.3.3 erläutert wurde, ist das durch das Höhenruder erzeugte Moment proportional zum erzeugten Auftrieb des Höhenruders, welcher wiederum quadratisch von der Fluggeschwindigkeit abhängt. Somit erfordert der gleiche Sollwert von  $f_z^*$  bei niedrigeren dynamischen Drücken eine deutlich größere Auslenkung des Höhenruders. Es ist dadurch sehr gut dargestellt, dass sich der Regler durch die Variation der Verstärkungen mit sich ändernden Werten für  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  an die sich verändernden Bedingungen anpassen und somit die physikalischen Rahmenbedingungen gut ausnutzen kann.

### 5.4.2 Regelung der Seitenbewegung

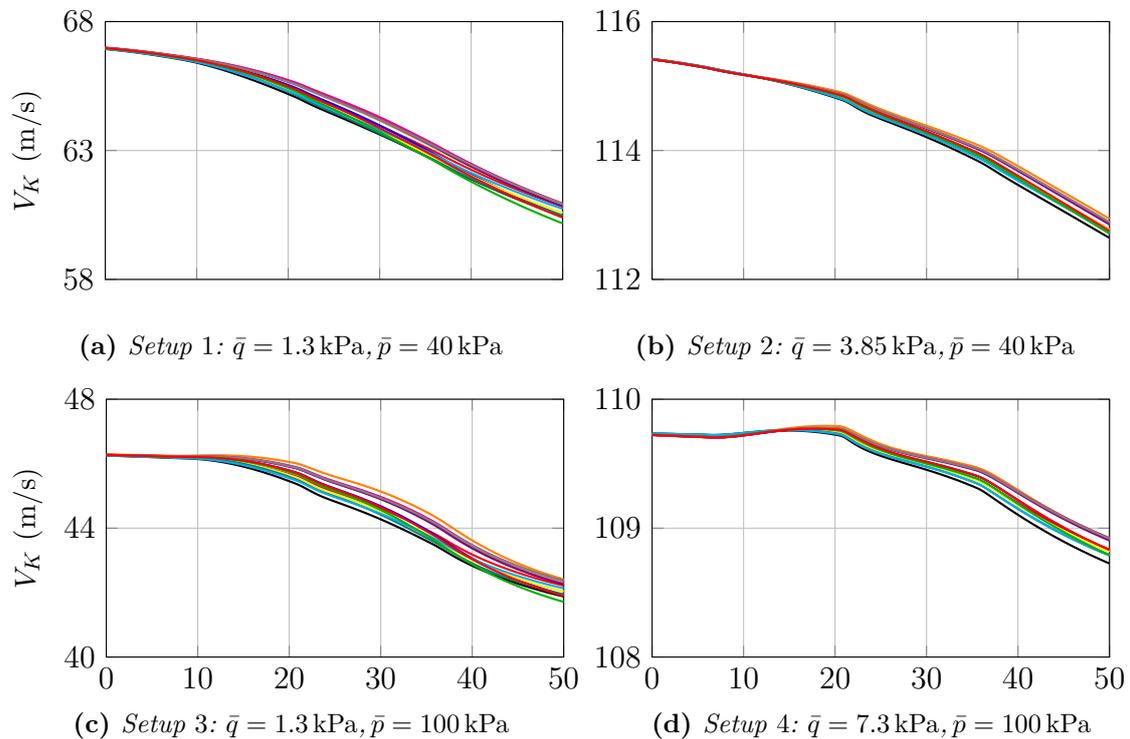
Das Regelverhalten des Reglers für die Seitenbewegung wird ebenfalls mit Hilfe eines ähnlichen Referenzszenarios untersucht. Dem Regelkreis wird eine Folge von  $\Phi$ -Kommandos übergeben und das Antwortverhalten des Flugzeugs nach den in Kapi-



**Abbildung 5.18:** Nichtlineare Simulation des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

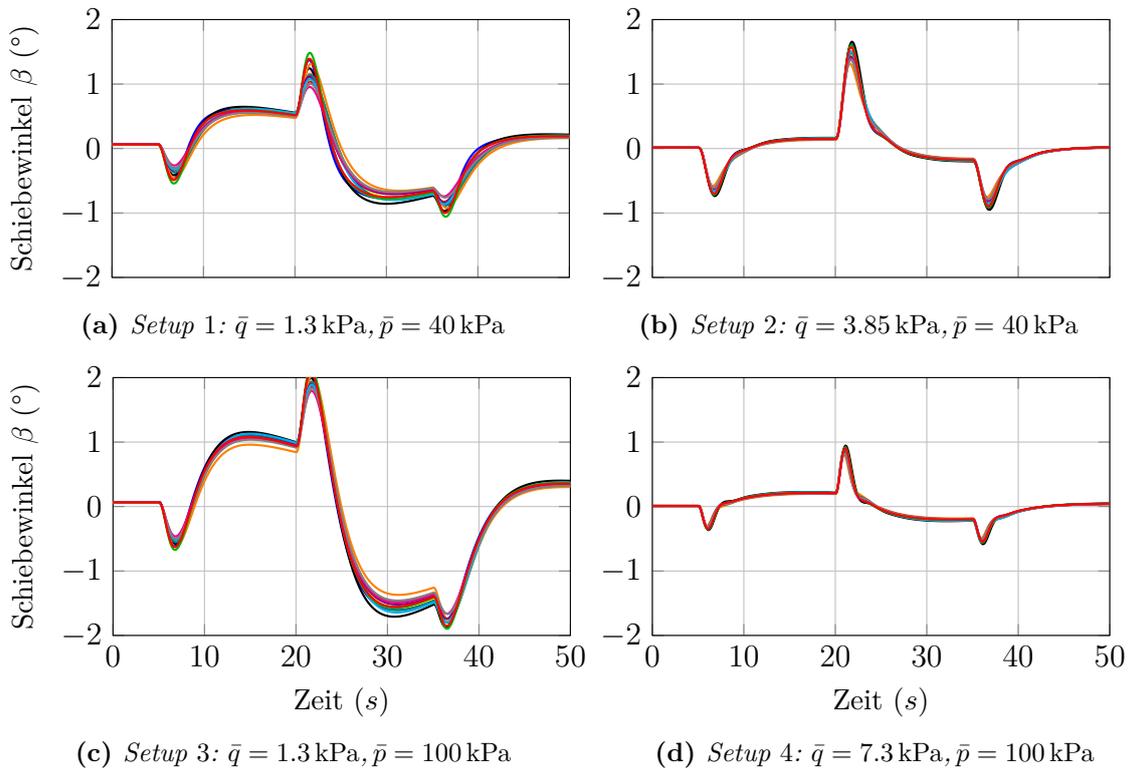
tel 5.3.2 formulierten Regelungszielen bewertet. Ähnlich des Szenarios, welches in der Nickdynamik verwendet wurde, wird zunächst ein Wert von  $\Phi = 15^\circ$  kommandiert, welchem nach 15 s ein Kommando von  $\Phi = -15^\circ$  folgt. Nach weiteren 15 s wird dieses wieder zurück genommen und ein Sollwert von  $\Phi = 0^\circ$  vorgegeben. Der Vorgabewert von  $f_y^*$  wird während des gesamten Manövers auf  $f_{y,c}^* = 0$  gehalten, um den in Kapitel 5.3.2 erläuterten schiebefreien Kurvenflug zu ermöglichen. Dem Regler der Nickdynamik wird währenddessen ein dauerhafter Sollwert von  $f_{z,c}^* = 0$  vorgegeben, um der bereits angesprochenen Kopplung zwischen Längs- und Seitenbewegung entgegen zu wirken. Die Fluggeschwindigkeit  $V_K$  ist in diesem Fall ebenfalls unregelt und kann sich während der Manövers ändern.

Es werden wie bei der Analyse der Nickdynamik die erzielten Resultate exemplarisch jeweils an den vier Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters für jeweils alle 13 Lastfälle betrachtet. Zunächst ist in Abbildung 5.18 das Folgeverhalten des Regelkreises in dem Hängewinkel  $\Phi$  dargestellt. Es zeigt sich ein nahezu identisches, und damit vom aktuellen Lastfall unabhängiges Regelverhalten. Es kann somit die formulierte Anforderung eines weitestgehend gleichen Regelverhalten über alle betrachteten Lastfälle hinweg gewährleistet werden. Auch für unterschiedliche Flugbedingungen konnte ein sehr homogenes Regel-



**Abbildung 5.19:** Fluggeschwindigkeit  $V_K$  in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

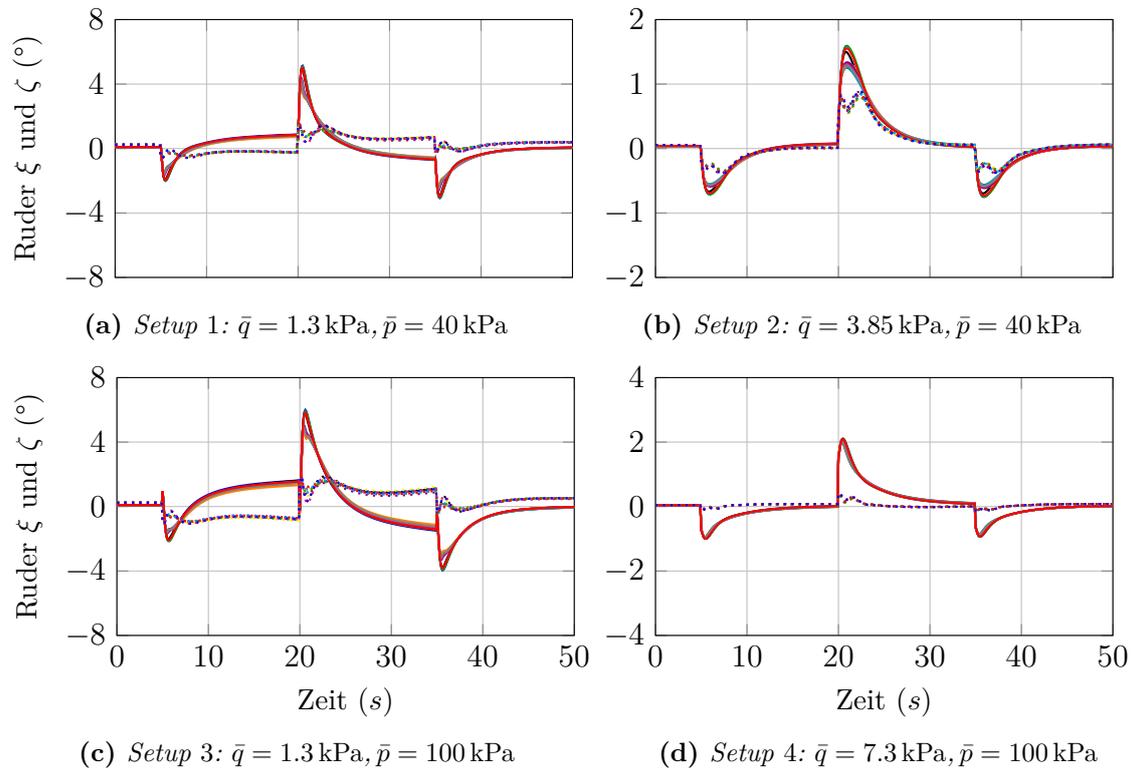
verhalten erzielt werden, da das Folgeverhalten weitestgehend unabhängig von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  ausfällt. Durch die Anpassung des Reglers an die aktuellen Flugbedingungen können die dadurch entstehenden Unterschiede in der Regelstrecke sehr gut kompensiert und ein Einsatz im gesamten zulässigen Flugbereich ermöglicht werden. Einzig der vierte in Abbildung 5.18 betrachtete Gitterpunkt ( $\bar{q} = 7.3 \text{ kPa}$  und  $\bar{p} = 100 \text{ kPa}$ ) fällt in diesem Kontext auf. Der Regler benötigt in diesem Gitterpunkt eine merkbar längere Zeit um den gewünschten Sollwert zu erreichen. Dieses Verhalten lässt sich allerdings sehr gut mit der bereits in Kapitel 5.3.3 angesprochenen Rolldämpfung erklären, welche in dem betrachteten Gitterpunkt den stärksten Einfluss besitzt. Die Vorgaben an das maximale Überschwingen (5%) und Unterschwingen (10%) werden ebenfalls in allen dargestellten Gitterpunkten erfüllt. Zusätzlich sei erwähnt, dass sich durch die im nichtlinearen vorhandene Kopplung zwischen Längs- und Seitenbewegung durch das durchgeführte Manöver die Fluggeschwindigkeit ändert. Diese Änderungen der Fluggeschwindigkeit sind in Abbildung 5.19 abgebildet. Die sich ändernde Fluggeschwindigkeit während der Simulation hat in keinem der betrachteten Gitterpunkte einen sichtbaren Einfluss auf das Regelverhalten, wodurch darüber hinaus sehr gut die Fähigkeit des entworfenen Reglers sich an ändernde Flugbedingungen anzupassen gezeigt wird.



**Abbildung 5.20:** Schiebewinkel in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

Eine weitere in Kapitel 5.3.2 formulierte Anforderung war die Vermeidung von Schiebewinkeln  $\beta$  während des in Abbildung 5.18 dargestellten Manövers. Es wurde die Bedingung formuliert, dass währenddessen ein Wert von  $\beta = 2^\circ$  nicht überschritten werden soll. Aus diesem Grund ist in Abbildung 5.20 entsprechend für die gleichen Gitterpunkte der Verlauf von  $\beta$  dargestellt. Es zeigt sich, dass diese Anforderung in allen betrachteten Punkten erfüllt wird, wenngleich in dem zweiten betrachteten Flugzustand (Setup 2,  $\bar{q} = 3.85 \text{ kPa}$  und  $\bar{p} = 40 \text{ kPa}$ ) während des Übergangs von einem  $\Phi = 15^\circ$  zu einem  $\Phi = -15^\circ$  der maximal zulässige Wert erreicht wird. Insgesamt zeigen sich hierbei deutlich stärkere Unterschiede zwischen den verschiedenen Flugzuständen, über die Lastfälle hinweg betrachtet sind die Werte jedoch sehr ähnlich. Einzig die maximal auftretenden Schiebewinkel variieren merkbar zwischen verschiedenen Lastfällen.

Zusätzlich sind in Abbildung 5.21 noch die Ausschläge der beiden Steuerflächen dargestellt. Die Ausschläge des Querruders  $\xi$  werden dabei mit den durchgezogenen Linien und die Ausschläge des Seitenruders  $\zeta$  mit den gestrichelten Linien abgebildet. Es zeigt sich, dass in jedem betrachteten Fall die physikalischen Limits der Aktuatoren eingehalten werden. Erwähnenswert an dieser Stelle sind noch die Unterschiede in den erforderlichen Ausschlägen in den unterschiedlichen Gitterpunkten. Diese fallen



**Abbildung 5.21:** Ausschläge der primären Stellflächen in nichtlinearer Simulation des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewegung für alle betrachteten Lastfälle an den Ecken des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters

allerdings nicht so stark aus, wie es beispielsweise bei den Höhenruderausschlägen in der Nickdynamik der Fall war. Es sind nur starke Unterschiede bei unterschiedlichen dynamischen Drücken  $\bar{q}$  erkennbar, während sich die Werte bei unterschiedlichen statischen Drücken  $\bar{p}$  in gleichen Größenordnungen bewegen. Die Ursache hierfür ist hier ebenfalls in der unterschiedlichen Wirksamkeit der Steuerflächen bei unterschiedlichen Flugbedingungen zu suchen, wie es in Kapitel 2.3.3 erläutert wurde.

## 5.5 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel wurde das in Kapitel 3 entwickelte Verfahren auf realitätsnahe Probleme der Flugzeug-Basisregelung angewandt. Es wurde der Entwurf einer Regelung der Nickdynamik sowie der Seitenbewegung eines kleinen Regionalflugzeuges demonstriert. In beiden Fällen wurde das Regelungsproblem mit Hilfe eines LPV-Modells beschrieben, welches von den drei Parametern statischer Druck  $\bar{p}$ , dynamischer Druck  $\bar{q}$  und dem Lastfall  $l$  abhängig ist. Mit Hilfe des Lastfalls  $l$  wurden dabei verschiedene Kombinationen aus Masse und Schwerpunktlage beschrieben, welcher dabei als nicht messbar angenommen wurde. Das Regelungsproblem wurde damit in beiden Fällen

durch ein LPV-System mit nur partiell messbaren Parametern beschrieben, für welches mit Hilfe von Kapitel 3 entsprechende LPV-Regler entworfen werden konnten. Diese Regler wurden im Anschluss in zwei Schritten analysiert und auf die Erfüllung der im Vorfeld definierten Regelungsziele untersucht. Diese Analyse gliederte sich in einen linearen und einen nichtlinearen Teil. In dem linearen Teil wurden die Regler unabhängig voneinander in einem Regelkreis mit einem erweiterten LPV-Modell der jeweiligen Regelstrecke betrachtet und die erreichten Bandbreiten sowie Amplituden- und Phasenreserven detailliert ausgewertet. In dem zweiten Teil der Analyse wurden beide Regler gemeinsam innerhalb einer nichtlinearen Simulation mit allen sechs Freiheitsgraden des Flugzeugs analysiert, um das Folgeverhalten und insbesondere die Stabilität auf dem nichtlinearen Modell während sich ändernden Parametern zu beurteilen.

Bei der Betrachtung der erreichten Bandbreiten des Nickdynamik-Regelkreises ergaben sich einige erwähnenswerte Erkenntnisse. Es zeigte sich eine leichte Tendenz zu besseren Werten mit einer zunehmenden Wirksamkeit des Höhenruders, welche mit zunehmenden  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  steigt. Allerdings blieben die erzielten Werte für das Übertragungsverhalten  $f_{z,c}^* \rightarrow f_z^*$  im Mittel unterhalb des in MIL-HDBK-1797 (1997, Anhang A, S. 250ff) empfohlenen Wertes von 1.5 rad/s. Bei der Betrachtung für jeden Lastfall einzeln zeigte sich sehr deutlich, dass insbesondere die vorderen Schwerpunktlagen Ursache für die im Schnitt eher niedrigen Bandbreiten sind. Bei den eher hinteren Schwerpunktlagen hingegen wurden Resultate in der Nähe des empfohlenen Wertes von 1.5 rad/s erreicht. Bei den entsprechenden Lastfällen der vorderen Schwerpunktlagen wurden auch insgesamt die niedrigsten Werte erzielt. Als Begründung wurde der Einfluss der Schwerpunktlage auf das Verhalten des Flugzeugs angeführt. Die Steuerbarkeit des Flugzeugs nimmt bei einer Schwerpunktlage weiter vorne im Flugzeug gegenüber den eher hinteren Schwerpunktlagen deutlich ab. Aus diesem Grund muss ein Kompromiss zwischen allen betrachteten Lastfällen gefunden werden, der sich bei den vorderen Schwerpunktlagen nachteilig auf die erzielte Bandbreite auswirkt. Dies ist in erster Linie dadurch verursacht, dass für eine Verbesserung der Bandbreite höhere Reglerverstärkungen erforderlich sind. Eine solche Erhöhung kann nicht beliebig erfolgen, ohne gleichzeitig andere Anforderungen an den Regelkreis zu verletzen. Zum einen führt es bei den eher hinteren Schwerpunktlagen dazu, dass Kriterien an das Folgeverhalten nicht mehr erfüllt werden können. Zum anderen hat eine Erhöhung der Reglerverstärkung gleichzeitig eine Abnahme der Robustheit des Regelkreises zur Folge. Wie bei der Betrachtung der Amplitudenreserven beobachtet werden konnte, bewegen sich diese bei den vorderen Schwerpunktlagen teilweise bereits an der Untergrenze der formulierten Anforderung. Eine weitere Erhöhung der Reglerverstärkung und damit der Bandbreite ist dadurch nicht mehr möglich, ohne die Anforderungen an die Robustheit zu verletzen. In der praktischen Anwendung hat das zur Konsequenz, dass das geregelte Flugzeug in der Längsbewegung bei für die Regelung ungünstigen, eher vorderen Schwerpunktlagen ein langsames, weniger dynamisches Antwortverhalten aufweist.

An diesem Sachverhalt zeigt sich ein Nachteil des verwendeten Ansatzes, weil entsprechend ein Kompromiss über alle Lastfälle gefunden werden muss. Das dabei erhaltene Ergebnis ist somit in jedem Fall einem Regler unterlegen, welcher sich an den ändernden Lastfall anpassen kann. Dieser Nachteil konnte auch bereits in Kapitel 4 im direkten Vergleich heraus gearbeitet werden. Die Bestimmung ist jedoch in vielen Fällen nicht möglich, weshalb der demonstrierte Ansatz eine gute Möglichkeit bietet, den Einfluss der Lastfälle trotzdem im Entwurf einer Regelung zu berücksichtigen. Die Auswertung der relevanten Bandbreiten des Regelkreises der Seitenbewegung ergab sehr ähnliche Resultate über den gesamten betrachteten Parameterbereich, mit einer leichten Tendenz zu besseren Resultaten mit einer zunehmenden Wirksamkeit der primären Steuerflächen. Im Vergleich zu dem Regelkreis der Nickdynamik konnte in diesem Fall allerdings ein sehr homogenes Resultat über alle Lastfälle erreicht werden. In der Seitenbewegung besitzt die Schwerpunktlage, und damit auch der Lastfall, keinen so elementaren Einfluss auf die Steuerbarkeit des Systems. Dadurch konnte mit dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren ein Regler entworfen werden, welcher ein sehr konsistentes Regelverhalten über alle nicht messbaren Parameter gewährleistet. Es wurden darüber hinaus mit beiden Reglern in allen betrachteten Lastfällen und in gesamten zulässigen Flugbereich ausreichend hohe Werte in Amplituden- und Phasenreserve erreicht, womit beide Entwürfe im Hinblick auf die Robustheit des Regelkreises als erfolgreich gewertet werden können.

Im zweiten Schritt wurde exemplarisch an den vier Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters für jeweils alle 13 Lastfälle ein Testszenario für die beiden betrachteten Regelgrößen  $f_z^*$  und  $\Phi$  simuliert, damit die Sollwertfolge der entworfenen Regler analysiert werden kann. In der Analyse der Nickbewegung konnte in allen betrachteten Gitterpunkten ein weitestgehend gleiches Regelverhalten beobachtet werden, jedoch mit leichten Unterschieden zwischen den verschiedenen Lastfällen und Flugbedingungen. Diese Unterschiede zwischen den einzelnen Lastfällen bei konstanten Flugbedingungen (konstante Werte für  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$ ) sind sehr gut mit dem Einfluss des Lastfalls auf die Steuerbarkeit zu begründen, wie es bereits bei der linearen Analyse des Regelkreises festgestellt werden konnte. In den Simulationsergebnissen der Sollwertfolge von der Regelgröße  $\Phi$  der Seitenbewegung hingegen konnte über den gesamten Flugbereich und auch über alle Lastfälle ein nahezu identisches Regelverhalten festgestellt werden.

Das mit Hilfe des entwickelten Verfahrens erzielte Resultat ist gerade im Hinblick auf die Anwendung innerhalb eines Autopiloten sehr vorteilhaft, da die geregelte Flugzeugbewegung dadurch weitestgehend unabhängig von der aktuellen Beladung ist und in den übergeordneten Regelkreisen dieser Einfluss nicht mehr betrachtet werden muss. Dazu kommen die Vorteile eines LPV-Reglers, welcher zusätzlich die Anpassung an die messbaren Flugbedingungen ermöglicht. Es können somit Regler entworfen werden, welche im gesamten zulässigen Flugbereich und bei allen Beladungszuständen einsetzbar sind. Durch die Anpassungen an die Flugbedingungen können

die Regler sehr gut mit sich ändernden Eigenschaften der Flugzeug-Dynamik umgehen. Insbesondere die unterschiedliche Wirksamkeit der Steuerflächen sei hier erwähnt, an dessen Änderungen sich die Regler im Rahmen der formulierten Anforderungen sehr gut anpassen können. Bei den dargestellten Punkten handelte es sich um die vier Eckpunkte des betrachteten Flugbereichs und damit sehr stark unterschiedliche statische und dynamische Drücke. In den beiden simulierten Fällen wurde darüber hinaus die Fluggeschwindigkeit nicht geregelt, sodass sich diese infolge der Manöver veränderte und daraus zusätzlich eine Änderung des dynamischen Druckes  $\bar{q}$  während der Simulation resultierte. In allen dargestellten Fällen zeigten sich hierbei keinerlei merkbare Einflüsse auf das Folgeverhalten der beiden Regler, noch waren Instabilitäten zu beobachten.

Aus diesem Grund kann festgehalten werden, dass mit dem Regler das primäre im Vorfeld formulierte Ziel eines über den gesamten zulässigen Flugbereich und in allen betrachteten Lastfällen weitestgehend gleichbleibendes Regelverhalten erreicht werden konnte. Dazu wurden in allen Fällen die physikalischen Limits der Aktuatoren eingehalten und auch die Bedingungen an das Über- und Unterschwingen des Folgeverhaltens wurden in beiden betrachteten Fällen erfüllt. Auch erreichten beide Regelkreise über den gesamten betrachteten Parameterbereich hinweg ausreichend hohe Werte in der Amplituden- und Phasenreserve. Allerdings konnten trotz des sehr gleichmäßigen Folgeverhaltens in sehr vielen Gitterpunkten des Regelkreises der Nickdynamik nicht die in MIL-HDBK-1797 (1997, Anhang A, S. 250ff) empfohlenen Werte für die Bandbreite erreicht werden, was für den erzielten Regler als Nachteil gewertet werden muss. Die niedrigen Bandbreiten treten überwiegend bei den vorderen Schwerpunktlagen auf, welche aufgrund des angesprochenen Einflusses auf die Steuerbarkeit der Nickdynamik im Betrieb eher versucht werden zu vermeiden. Der erzielte Basisregler der Nickdynamik erfüllt allerdings außer dieses Nachteils alle anderen an ihn gestellten Anforderungen, weshalb auch dieser Entwurf als Erfolg gewertet werden kann.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Verfahren für die Synthese von Reglern für eine spezielle Unterklasse von linearen, parametervarianten (LPV) Systemen entwickelt, deren Vor- und Nachteile anhand eines illustrativen Beispiels evaluiert und die Anwendung auf ein realitätsnahes Beispiel demonstriert wurde. Diese Art von LPV-Systemen beschreiben den Sachverhalt, dass ein Teil der Parameter, von denen die Matrizen des entsprechenden Zustandsraummodells abhängen, im Betrieb messtechnisch nicht erfassbar sind. Motivierendes Beispiel hierfür waren Veränderungen in der Masse und Schwerpunktlage eines Flugzeugs während des Betriebs, welche einen deutlichen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Systems haben. Eine Bestimmung dieser beiden Parameter ist jedoch während des Flugs oftmals nicht möglich, weshalb ein Regler in diesem Fall entsprechend nicht an Änderungen in diesem Parameter angepasst werden kann. Im Folgenden werden die Resultate der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf potentielle weitere Fragestellungen zu diesem Thema gegeben.

### 6.1 Zusammenfassung

Der Entwurf von parameterabhängigen Regelungen spielt in der Flugregelung eine elementare Rolle. Bei der regelungstechnischen Behandlung der Flugdynamik ist es üblich, die nichtlinearen Differentialgleichungen in einer Vielzahl von getrimmten Flugzuständen zu linearisieren und lokal mit linearen Regelungsmethoden zu behandeln. Hierbei entstehen lineare Zustandsraummodelle, dessen Matrizen entsprechend von der Trimmung, beziehungsweise dessen primären Einflussgrößen abhängen. Als primäre Einflussgrößen sind hierbei Parameter wie die aktuelle Flughöhe und Geschwindigkeit, aber auch die Masse und Schwerpunktlage zu nennen. Doch während die aktuelle Flughöhe und Geschwindigkeit während des Betriebs problemlos bestimmbar sind, ist dies bei den beiden genannten Parametern Masse und Schwerpunktlage oftmals nicht möglich. Aus diesem Sachverhalt entstammt das motivierende Regelungsproblem für die Betrachtung der einleitend beschriebenen Unterklasse von LPV-Systemen.

In diesem Kontext wurde in dieser Arbeit die Entwicklung eines Entwurfsverfahrens für Regelungen von LPV-Systemen vorgestellt, bei denen ein Teil der Parameter von denen das Systemverhalten abhängig ist, während des Betriebs nicht messbar ist. Bei der Synthese eines konventionellen LPV-Reglers entstehen Abhängigkeiten von allen LPV-Parametern, sodass nicht messbare Parameter nicht betrachtet werden können. Um den Einfluss dieser auf das Systemverhalten trotzdem in dem Entwurf einer LPV-Regelung zu berücksichtigen, wurden in dieser Arbeit bestehende Entwurfsverfahren entsprechend erweitert und auch für den Fall von teilweise nicht messbaren Parametern

anwendbar gemacht. Diese Klasse von Regelungsproblemen wurde in der vorliegenden Arbeit basierend auf Köse und Jabbari (1999) als LPV-System mit nur partiell messbaren Parametern definiert. Durch eine Kombination aus einem konventionellen LPV-Verfahren mit einem Ansatz aus der robusten Regelung konnte der Entwurf von Regelungen für diese Art von Systemen ermöglicht werden. Mit dem so entstehenden Entwurfsverfahren können Regler entworfen werden, die zum einen an Änderungen in den messbaren Parametern angepasst werden können und zum anderen robust gegenüber Änderungen in den nicht messbaren Parametern sind. Somit können die im Entwurfsprozess erhaltenen Aussagen über den geschlossenen Regelkreis, wie beispielsweise dessen Stabilität, für alle parametrischen Abhängigkeiten getroffen werden, während der erhaltene Regler nur von den messbaren Parametern abhängig ist.

Die Anwendung des entwickelten Entwurfsverfahrens wurde zunächst anhand eines illustrativen Beispiels demonstriert. Hierbei wurde die Nickdynamik eines Flugkörpers betrachtet. Das der Regelstrecke zugrunde liegende LPV-System besitzt eine parametrische Abhängigkeit von der aktuellen Machzahl, sowie dem Anstellwinkel des Flugkörpers. Für eine konventionelle LPV-Regelung wäre somit eine Messbarkeit von diesen beiden Parametern erforderlich. Der aktuelle Anstellwinkel ist jedoch in den meisten Fällen nicht in ausreichender Genauigkeit zu bestimmen, wodurch die Anwendung einer LPV-Regelung erschwert wird. Unter der Annahme einer nicht vorhandenen Messbarkeit des Anstellwinkels resultiert aus diesem Regelungsproblem ein LPV-System mit nur partiell messbaren Parametern, auf welches die in dieser Arbeit entwickelten Entwurfsverfahren angewandt werden können. Es wurde Anhand dieses Beispiels demonstriert, dass mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden ein LPV-Regler entworfen werden kann, mit dem die nicht vorhandene Messbarkeit eines LPV-Parameters kompensiert werden kann. Der erhaltene Regler konnte im gesamten betrachteten Parameterbereich auch für den nicht messbaren Parameter ein stabiles Regelverhalten gewährleisten. Damit die Vor- und Nachteile des dabei erhaltenen LPV-Reglers genauer untersucht werden können, wurde zu Vergleichszwecken für dieses System zusätzlich ein konventioneller, von allen LPV-Parametern abhängiger Regler entworfen. Der Vergleich zwischen dem konventionellen LPV-Regler, und dem mit denen in dieser Arbeit entwickelten Methoden entworfenen Regler resultierte in der Erkenntnis, dass der Verzicht auf die parametrische Abhängigkeit eines LPV-Parameters mit Leistungseinbußen verbunden ist. Durch die Anwendung der entwickelten Verfahren ist es somit möglich, auch über nicht messbare LPV-Parameter die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu gewährleisten. Es ist jedoch nicht möglich, eine gleichwertige Leistungsfähigkeit zu erhalten, welche durch die Messbarkeit, und damit einer Anpassung des Reglers an Änderungen dieser Parameter erreichbar wäre.

Zusätzlich zu dem illustrativen Beispiel wurde mit dem Entwurf einer Regelung der Nickdynamik und der Seitenbewegung für ein exemplarisch betrachtetes Regionalflugzeug die Anwendbarkeit des entwickelten Verfahrens auf ein realitätsnahes Beispiel

demonstriert. Die LPV-Modelle zur Beschreibung der jeweiligen Regelstrecke waren zum einen von den beiden messbaren und den Flugbereich beschreibenden Größen des statischen und dynamischen Drucks und zum anderen von dem sogenannten Lastfall abhängig. Mit dem Lastfall wurde dabei eine feste Kombination aus Masse und Schwerpunktlage bezeichnet. Unter der Verwendung des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens konnten für beide Regelstrecken LPV-Regler entworfen werden, welche nur von den messbaren Parametern des Flugbereichs abhängig waren, aber die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für das gesamte LPV-System der jeweiligen Regelstrecke garantieren. Dies beinhaltet auch alle im Entwurf betrachteten Lastfälle, ohne dass der jeweilige LPV-Regler von diesem Parameter abhängig ist. Die erhaltenen Regler wurden im Anschluss an den Entwurf in zwei Schritten analysiert. Zunächst wurden diese zusammen mit detaillierten LPV-Modellen der Regelstrecke betrachtet und die Bandbreite der geschlossenen Regelkreise sowie die Amplituden- und Phasenreserve untersucht. Dieser Schritt diente in erster Linie der Verifikation der im Vorfeld formulierten Anforderungen an den Regler im Hinblick auf dessen Leistungsfähigkeit und Robustheit. Im zweiten Schritt wurden die beiden Regler gemeinsam innerhalb einer sehr detaillierten nichtlinearen Simulationsumgebung getestet, um deren Regelverhalten zu analysieren und die Stabilität auf dem nichtlinearen System und für sich ändernde Parameter zu validieren.

Die durch das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren entworfenen Basisregler des betrachteten Verkehrsflugzeugs weisen dabei einige deutliche Vorteile auf. Durch den von dem statischen und dynamischen Druck abhängigen Entwurf wird ein Einsatz im gesamten zulässigen Flugbereich ermöglicht. Hinzu kommen die im Entwurf berücksichtigten Lastfälle, sodass auch durch Änderung dieses Parameters innerhalb der zulässigen Grenzen für Masse und Schwerpunktlage die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht gefährdet wird. Aufgrund der verwendeten Struktur des entworfenen LPV-Reglers ist darüber hinaus auch keine zusätzliche Bestimmung des aktuellen Lastfalls im Betrieb erforderlich. Durch das angewandte Verfahren konnte außerdem erreicht werden, dass der erhaltene Regler für alle ausgewerteten Lastfälle ein sehr gleichmäßiges Regelverhalten aufweist. In der angedachten Anwendung innerhalb eines Autopiloten bietet diese Eigenschaft den zusätzlichen Vorteil, dass dem betrachteten Regler übergeordnete Regelkreise nicht mehr an den sich ändernden Lastfall angepasst werden müssen. Dies vereinfacht die Auslegung der dort enthaltenen Regler, weil dadurch ein von Masse und Schwerpunktlage weitestgehend unabhängiges Systemverhalten angenommen werden kann. Für die beiden Parameter des Flugzustandes konnte ebenfalls ein für den gesamten zulässigen Flugbereich sehr gleichmäßiges Folgeverhalten erzielt werden, was den Einfluss der beiden Parameter gegenüber dem unregelmäßigen System deutlich reduziert. Die zweite Eigenschaft lässt sich zwar auch mit einem in der Praxis oftmals verwendeten *Gain-Scheduling* Regler erzielen, der in dieser Arbeit verwendete LPV-Ansatz bietet allerdings ein deutlich systematischeres Vorgehen. In Kombination mit der Berücksichtigung der Änderungen in Masse und Schwerpunktlage

ermöglicht der in dieser Arbeit betrachtete Ansatz das Berechnen eines Reglers für alle zulässigen Trajektorien der betrachteten Parameter innerhalb einer Regler-Synthese, wohingegen beim *Gain-Scheduling* für jede betrachtete Parameterkombination zunächst ein einzelner Regler entworfen werden muss. Dies bietet dem Entwickler nicht nur einen merkbaren Zeitvorteil, sondern ermöglicht auch das weitestgehende automatisieren des betrachteten Reglerentwurfs.

Das in dieser Arbeit entwickelte Regler-Entwurfsverfahren für LPV-Systeme mit nur partiell messbaren Parametern bietet somit eine attraktive Möglichkeit, die Problematik nicht messbarer LPV-Parameter aus regelungstechnischer Sicht zu lösen. Wie mit Hilfe des untersuchten illustrativen Beispiels festgestellt werden konnte, ist eine vollständige Kompensation einer Messung dieser Parameter zwar nicht erreichbar, dennoch konnte ein im gesamten Parameterbereich des LPV-Systems stabiler Regler entworfen werden. Der durchgeführte Reglerentwurf ist somit gegenüber einem konventionellem LPV-Regler, welchem alle Parameter des Systems zur Verfügung stehen, mit erkennbaren Leistungseinbußen verbunden, zeigte aber neben dem vollständig stabilen Regelverhalten eine gute Leistungsfähigkeit. Darüber hinaus wurde dieses Entwurfsverfahren erfolgreich auf ein realitätsnahes Problem aus der Flugregelung angewandt, womit die Vorteile des entwickelten Entwurfsverfahrens noch einmal unterstrichen werden konnten.

## 6.2 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit ergaben sich einige zusätzliche Fragestellungen, die in künftigen Arbeiten in diesem Bereich untersucht werden können. Hierzu gehört die Anwendung des ebenfalls erarbeiteten Verfahrens zum Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung. Die in Kapitel 5 beschriebene Anwendung des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens bietet durchaus Argumente für eine Verwendung einer statischen Ausgangsrückführung. Gründe hierfür sind zum einen die erforderliche Zustandstransformation, mit welcher für die Anwendung einer Zustandsrückführung die Zustandsgrößen der Regelstrecke durch die verwendeten Ausgangsgrößen ersetzt wurden. Und zum anderen wurde für die lineare Analyse des erhaltenen Regelkreises eine um die Dynamik der Aktuatoren und andere Effekte erweiterte Regelstrecke betrachtet. Durch die Verwendung einer Ausgangsrückführung könnten diese zusätzlich im Reglerentwurf betrachtet werden. Während jedoch der in Goßmann und Svaricek (2019) entwickelte Ansatz für konventionelle LPV-Systeme in dem genannten Artikel erfolgreich auf ein nichtlineares Regelungsproblem angewandt werden konnte, war dessen Anwendung in dem beschriebenen Regelungsproblem nicht erfolgreich. Dies ist im Detail in Anhang D ausgeführt. Die Ursachen für die nicht umsetzbare Anwendbarkeit sind hier in der zu starken Einschränkung der Menge an stabilisierenden

Reglern für das Regelungsproblem zu suchen, welche in diesem Fall das Finden eines zufriedenstellenden Reglers verhindert haben. Obwohl mit der Verwendung des Reglers mit einer Zustandsrückführung gezeigt werden konnte, dass für die betrachtete Regelstrecke mit Ausgangsrückführung eine entsprechende Lösung existiert, konnte diese mit Hilfe des Verfahrens aus Goßmann und Svaricek (2019) aufgrund der genannten Einschränkungen nicht gefunden werden. Die Bestimmung von Kriterien anhand derer ermittelt werden kann, inwieweit diese Einschränkungen die Lösbarkeit des formulierten Regelungsproblems beeinflussen, ist Bestand aktueller Forschungen und insbesondere im LPV-Fall eine in der Zukunft weiterhin zu betrachtende Fragestellung. Potentielle Möglichkeiten zur Lösung des genannten Problems sind in den beiden Arbeiten von Prempain und Postlethwaite (2001b) und Ebihara u. a. (2014) zu finden. Die beiden dort diskutierten LTI-Methoden betrachten nur Systeme, die einige spezielle Bedingungen an die Matrizen der betrachteten Zustandsraummodelle stellen. Zwar stellen diese in beiden Fällen sehr strikte Einschränkungen an das betrachtete System, welche in vielen praktischen Anwendungen nicht erfüllt werden dürften. Jedoch ermöglichen sie im Gegensatz zu dem in Kapitel 3.3.2 zugrunde liegenden Ansatz von Crusius und Trofino (1999) das Finden aller stabilisierender Regler für das betrachtete Zustandsraummodell. Dies bietet einen erheblichen Vorteil gegenüber dem in dieser Arbeit betrachteten Verfahren, kommt dafür allerdings mit den genannten starken Einschränkungen an das zu lösende Regelungsproblem einher. Eine Erweiterung dieser beiden LTI-Verfahren für die Anwendung mit LPV-Systemen, wie es in Goßmann und Svaricek (2019) für das Verfahren von Crusius und Trofino (1999) erfolgt ist, könnte die Lösung von Regelungsproblemen mit einer statischen Ausgangsrückführung in den genannten speziellen Fällen erheblich vereinfachen. Demgegenüber bietet das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren den Vorteil, dass es keine Anforderungen an das zu lösende Regelungsproblem stellt, mit dem Nachteil der bereits angesprochenen Einschränkung in der Menge der erzielbaren Lösungen. Eine weitere Möglichkeit stellen die in Sadabadi und Peaucelle (2016) zusammengefassten iterativen Ansätze dar, welche allerdings einen geeigneten Startwert erfordern. Es ist also notwendig, im Vorfeld eine stabilisierende Lösung zu bestimmen um die dort beschriebenen Verfahren erfolgreich anzuwenden.

Des Weiteren wurden in dieser Arbeit nur die Fälle von statischen Rückführungen ohne (mit Ausnahme der Integration des Regelfehlers) eigene Dynamik betrachtet. Neben dieser Art von Reglerstruktur können auch LPV-Regler mit einer eigenen Dynamik entworfen werden, wie es in Wu (1995) vorgestellt wurde. Diese Art von Reglern wurden kürzlich in Weiser u. a. (2020) innerhalb eines Entwurfs einer Basisregelung für ein ziviles Verkehrsflugzeug eingesetzt und erfolgreich in Flugtests praktisch evaluiert. Eine Übertragung der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren auf diese Form von LPV-Reglern bietet somit ein weiteres vielversprechendes Anwendungsgebiet. Ein großer Vorteil der diesem Ansatz zugrunde liegenden Verfahren bietet die problemlose Anwendbarkeit im Fall einer Ausgangsrückführung. Als Regler entsteht in diesem Fall

ein beliebiges Zustandsraummodell, in welchem automatisch ein Beobachter für die betrachtete Regelstrecke enthalten ist (Skogestad und Postlethwaite, 2001, S. 367 -368). Dies hat zur Folge, dass das zu lösende Regelungsproblem automatisch konvex ist und für die Lösung keine zusätzlichen Einschränkungen erforderlich sind. Die im vorherigen Paragraph angesprochenen Einschränkungen an die betrachtete Regelstrecke oder die potentiellen Lösungen sind in diesem Fall somit nicht vorhanden. Zwar besitzt der entstehende Regler dadurch eine erhöhte Komplexität und eine wie in dieser Arbeit verwendete feste Reglerstruktur ist nicht umsetzbar. Trotzdem stellt dieses Verfahren aufgrund der genannten Vorteile eine potentielle Möglichkeit der Weiterentwicklung der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren dar.

Zusätzlich sind an dieser Stelle zwei Punkte in der weiteren Betrachtung der vorgestellten Basisregler zu nennen. Als einer der Vorteile der erzielten Regler wurde herausgestellt, dass deren Eigenschaften in der Anwendung innerhalb eines Autopiloten bei der Auslegung der übergeordneten Regelkreise als vorteilhaft einzustufen sind. Das wurde mit dem sehr gleichmäßigen Regelverhalten der beiden erzielten Regler über den gesamten zulässigen Flugbereich und für alle betrachteten Lastfälle begründet. Diese Vorteile gilt es in der praktischen Anwendung zu validieren. Hierbei sollte insbesondere der Sachverhalt der Reduzierung der parametrischen Abhängigkeiten im Fokus stehen. Es gilt zu untersuchen, inwieweit durch die vorgestellten Basisregler die parametrische Abhängigkeit in den übergeordneten Regelkreisen reduziert, oder aufgrund des Reglerentwurfs sogar vernachlässigt werden kann. In diesem Kontext gilt es ebenfalls eine praktische Erprobung der entworfenen Regler anzustreben. Zwar wurden die Regler bereits mit Hilfe einer sehr detaillierten nichtlinearen Simulationsumgebung des exemplarisch betrachteten Flugzeugs evaluiert und dessen Leistungsfähigkeit demonstriert, trotzdem gilt es diese Ergebnisse auch auf dem realen System im praktischen Betrieb zu verifizieren und daraus mögliches Verbesserungspotential abzuleiten.

# A Aufstellen und Umformen der LMIs

Die in Kapitel 3 beschriebenen Entwurfsverfahren erfordern jeweils die Lösung einer LMI, die sich aus der Abschätzung der induzierten  $L_2$ -Norm ergibt. Die dazu notwendigen Umformungen zum Erhalt dieser LMIs werden daher im Folgenden gezeigt. Der Ausgangspunkt in allen Fällen ist jeweils die LMI (3.5), mit der für ein LPV-System sowohl die quadratische Stabilität gezeigt, als auch eine obere Schranke der induzierten  $L_2$ -Norm eines LPV-Systems berechnet werden kann. Hierzu wird für den jeweiligen geschlossenen Regelkreis aus Regelstrecke und Regler die LMI aufgestellt und so umgeformt, dass sich die zur Lösung des jeweiligen Regelungsproblems in Kapitel 3 angegebenen LMIs ergeben.

## A.1 Zustandsrückführung

Wie in Kapitel 3.3.1, Gleichung (3.14) definiert, beschreibt

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{B}_1(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

das LPV-Modell des geschlossenen Regelkreises für eine Zustandsrückführung. Somit ergeben sich als Matrizen des zugehörigen Zustandsraum Modells

$$\mathbf{A}_c(\rho) = \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.2a})$$

$$\mathbf{B}_c(\rho) = \mathbf{B}_1(\rho), \quad (\text{A.2b})$$

$$\mathbf{C}_c(\rho) = \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.2c})$$

$$\mathbf{D}_c(\rho) = \mathbf{D}_{11}(\rho). \quad (\text{A.2d})$$

Um die gewünschte Reglermatrix  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  mit Hilfe einer Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm zu bestimmen, müssen die Matrizen in (A.2) in die LMI aus Gleichung (3.5)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \hat{\rho}) + \mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}_c^T(\rho) & \mathbf{B}_c(\rho) & \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_c^T(\rho) \\ \mathbf{B}_c^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T(\rho) \\ \mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_c(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.3})$$

eingesetzt werden. Es sei erwähnt, dass sich die Matrizen in Kapitel 3.1 auf ein allgemeines LPV-System beziehen und in diesem Fall die induzierte  $L_2$ -Norm des geschlossenen Regelkreises (A.1) betrachtet wird. Daher sind die Matrizen in (A.3) mit dem Index  $c$  versehen. Zusätzlich werden für die noch unbekanntenen Matrizen  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  nur Matrix-Funktionen in Abhängigkeit von dem messbaren, partiellen Parametervektor  $\hat{\rho}$  betrachtet. Die im Folgenden vorgestellten Umformungen basieren auf dem in Amato

(2006, S.130) gezeigten Ansatz zur Lösung des Problems der Zustandsrückführung für konventionelle LPV-Systeme mit vollständig messbarem Parametervektor. Dieser Ansatz wurde in Definition 3.2 und Theorem 3.2 beschrieben und die daraus folgenden Umformungen werden im Folgenden entsprechend zur Anwendung für ein LPV-Problem mit nur partiell messbaren Parametern angepasst.

Zur besseren Übersicht werden die Terme in (A.3) im Folgenden einzeln zusammengefasst. Die Terme  $\mathbf{B}_c(\rho)$  und  $\mathbf{D}_c(\rho)$  entsprechend direkt einem Teil der Regelstrecke (3.13), weshalb eine detaillierte Zusammenfassung nur für die Terme  $\mathbf{A}_c(\rho)$  und  $\mathbf{C}_c(\rho)$  erforderlich ist.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) &= [\mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})]\mathbf{P}(\hat{\rho}) \\ &= \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \underline{\mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{P}(\hat{\rho})}\end{aligned}\quad (\text{A.4a})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) &= [\mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})]\mathbf{P}(\hat{\rho}) \\ &= \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \underline{\mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{P}(\hat{\rho})}\end{aligned}\quad (\text{A.4b})$$

Es zeigt sich, dass in den beiden unterstrichenen Summanden sich jeweils ein Produkt aus den beiden Unbekannten ergibt. Werden diese Terme in (A.1) eingesetzt, ergibt sich ein bilineares Matrix-Ungleichungsproblem (BMI), welches nicht konvex ist (Safonov u. a., 1994). Nicht-konvexe Probleme sind im Allgemeinen allerdings nur eingeschränkt lösbar, weshalb das Problem durch das Einführen einer neuen Variable in ein konvexes, lineares Matrix-Ungleichungsproblem (LMI) überführt wird. Durch die Definition von

$$\mathbf{Y}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{P}(\hat{\rho}) \quad (\text{A.5})$$

ergibt sich beim Einsetzen in (A.4)

$$\mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}). \quad (\text{A.6b})$$

Durch das Einführen der Variable  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  liegt in beiden Termen nur noch ein Produkt aus Variable und bekannter Matrix vor. Analog lassen sich die transponierten Terme von (A.4) umformen.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}_c^T(\rho) &= \mathbf{P}(\hat{\rho})[\mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})]^T \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})[\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho)] \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \underline{\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho)}\end{aligned}\quad (\text{A.7a})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_c^T(\rho) &= \mathbf{P}(\hat{\rho})[\mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})]^T \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})[\mathbf{C}_1^T(\rho) + \mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{D}_{12}^T(\rho)] \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_1^T(\rho) + \underline{\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{D}_{12}^T(\rho)}\end{aligned}\quad (\text{A.7b})$$

In (A.7) zeigt sich das gleiche Problem, wie es schon in (A.4) aufgetreten ist. In den beiden unterstrichenen Summanden ergeben sich Produkte aus den beiden Unbekannten. Betrachtet man die Transponierte der in (A.5) definierten Variablen

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^T(\hat{\rho}) &= [\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{P}(\hat{\rho})]^T \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho}),\end{aligned}\tag{A.8}$$

zeigt sich, dass die Transponierte von  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  ebenfalls der in (A.7) auftretenden Produkte aus beiden Unbekannten entspricht. Somit ergibt sich

$$\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}_c^T(\rho) = \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{Y}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho),\tag{A.9a}$$

$$\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_c^T(\rho) = \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_1^T(\rho) + \mathbf{Y}^T(\hat{\rho})\mathbf{D}_{12}^T(\rho).\tag{A.9b}$$

Setzt man die Umformungen aus (A.6) und (A.9) in (A.3) ein, ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \hat{\rho}) + \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) & & & \\ +\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{Y}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) & \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_1^T(\rho) + \mathbf{Y}^T(\hat{\rho})\mathbf{D}_{12}^T(\rho) & \\ & \mathbf{B}_1^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \mathbf{D}_{11}^T(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} & \end{bmatrix} < 0.\tag{A.10}$$

Durch die definierte Variable  $\mathbf{Y}(\hat{\rho})$  befinden sich in (A.10) nur noch Produkte aus Unbekannten und den Matrizen der Regelstrecke. Somit ist (A.10) eine lineare Matrix-Ungleichung (LMI) und stellt ein konvexes Problem dar. Definiert man die folgenden Terme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho) = \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}),\tag{A.11}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^T(\rho) = \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{Y}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho),\tag{A.12}$$

und führt das Symbol  $\star$  als symmetrische Vervollständigung ein, ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \hat{\rho}) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0,\tag{A.13}$$

die in Theorem 3.3 angegebene LMI (3.15) aus Kapitel 3.3.1.

## A.2 Ausgangsrückführung

In Kapitel 3.3.2 wurde für den vorgestellten Ansatz zur Berechnung eines LPV-Reglers mit Ausgangsrückführung angenommen, dass die Matrix-Ungleichung

$$\mathbf{A}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\rho)\mathbf{K}^T(\rho)\mathbf{B}^T(\rho) < 0\tag{A.14}$$

und die LMI-Bedingung

$$\mathbf{A}(\rho)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{B}(\rho)\mathbf{N}(\rho)\mathbf{C}(\rho) + \mathbf{C}^T(\rho)\mathbf{N}^T(\rho)\mathbf{B}^T(\rho) < 0, \quad (\text{A.15a})$$

$$\mathbf{M}(\rho)\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{C}(\rho)\mathbf{P}, \quad (\text{A.15b})$$

äquivalent sind. Damit das der Fall ist, muss

$$\mathbf{B}(\rho)\mathbf{N}(\rho)\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)\mathbf{P} \quad (\text{A.16})$$

gelten. Für die beiden Matrix-Funktionen  $\mathbf{M}(\rho)$  und  $\mathbf{N}(\rho)$  wurde des Weiteren in Kapitel 3.3.2 definiert, dass der Zusammenhang

$$\mathbf{N}(\rho) = \mathbf{K}(\rho)\mathbf{M}(\rho) \quad (\text{A.17})$$

gelten muss. Der Beweis, dass (A.14) und (A.15) unter den genannten Bedingungen äquivalent sind, wurde ursprünglich von Crusius und Trofino (1999) für LTI-Systeme gezeigt und wurde von Goßmann und Svaricek (2019) für allgemeine LPV-Systeme erweitert. Diese Erweiterung wird im Folgenden kurz vorgestellt.

Wie bereits gezeigt, unterscheiden sich die beiden LMIs nur in den in (A.16) dargestellten Termen. Es gilt also zu zeigen, dass beide Ausdrücke identisch sind. Wenn man den in (A.17) aufgestellten Zusammenhang in (A.16) einsetzt, ergibt sich

$$\mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{M}(\rho)\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)\mathbf{P}. \quad (\text{A.18})$$

Es zeigt sich unmittelbar, dass beide Terme in (A.18) genau dann identisch sind, wenn

$$\mathbf{M}(\rho)\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{C}(\rho)\mathbf{P} \quad (\text{A.19})$$

gilt. Und das ist genau die zweite Bedingung (A.15b) des vorgestellten Ansatzes. Somit sind (A.14) und (A.15) unter den genannten Bedingungen äquivalent.

Für den anschließend gezeigten Ansatz des Reglerentwurfs mit einer Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm bei einem LPV-System mit partiell messbaren Parametern, kann der dargestellte Ansatz ebenfalls verwendet werden. Wie in Kapitel 3.3.2, Gleichung (3.27) dargestellt, wird für diesen Fall der geschlossene Regelkreis mit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

beschrieben. Die Matrizen des geschlossenen Systems ergeben sich dementsprechend zu

$$\mathbf{A}_c(\rho) = \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho), \quad (\text{A.21a})$$

$$\mathbf{B}_c(\rho) = \mathbf{B}_1(\rho), \quad (\text{A.21b})$$

$$\mathbf{C}_c(\rho) = \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho), \quad (\text{A.21c})$$

$$\mathbf{D}_c(\rho) = \mathbf{D}_{11}. \quad (\text{A.21d})$$

Analog zum Problem der Zustandsrückführung kann die gewünschte Reglermatrix  $\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})$  durch eine Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm erreicht werden. Dazu werden die Matrizen in (A.21) ebenfalls in die LMI aus Gleichung (3.5)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}_c^T(\rho) & \mathbf{B}_c(\rho) & \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_c^T(\rho) \\ \mathbf{B}_c^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T(\rho) \\ \mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_c(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.22})$$

eingesetzt. Die im Folgenden dargestellten Umformungen basieren auf dem in Goßmann und Svaricek (2019) vorgestellten Verfahren für konventionelle LPV-Systeme, welches für die Anwendung für die Unterklasse von LPV-Systemen mit partiell messbaren Parametern angepasst wurde.

Die Terme für (A.22) werden im Folgenden einzeln zusammengefasst. Analog zur Zustandsrückführung ist dies nur für die Terme von  $\mathbf{A}_c$  und  $\mathbf{C}_c$  erforderlich, da für die Terme  $\mathbf{B}_c$  und  $\mathbf{D}_c$  ebenfalls eine direkte Entsprechung in der Regelstrecke (A.20) vorliegt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) &= [\mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)]\mathbf{P}(\hat{\rho}) \\ &= \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \underline{\mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho})} \end{aligned} \quad (\text{A.23a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) &= [\mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)]\mathbf{P}(\hat{\rho}) \\ &= \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \underline{\mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho})} \end{aligned} \quad (\text{A.23b})$$

Hier zeigt sich in den unterstrichenen Summanden ebenfalls, dass sich ein Produkt aus den beiden gesuchten Unbekannten ergibt. Somit resultiert durch das Einsetzen der Terme in (A.22) ebenfalls ein nicht konvexes BMI-Problem. Während bei einer Zustandsrückführung dieses Problem durch das Einführen einer Hilfsvariable (siehe (A.5)) gelöst werden kann, ist dies bei einer Ausgangsrückführung im Allgemeinen nicht anwendbar. Es ist zwar ebenfalls möglich, mit Hilfe der Definition einer Variable  $\mathbf{Y}(\rho) = \mathbf{B}(\rho)\mathbf{K}(\rho)\mathbf{C}(\rho)$  die sich ergebene BMI in eine LMI zu überführen. Jedoch ist es im Allgemeinen nicht möglich den Regler im Anschluss zu berechnen, da die Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{C}(\rho)$  nicht immer gegeben ist.

Aus diesem Grund wird der am Anfang des Kapitels vorgestellte Ansatz zur Lösung verwendet. Die in (A.16) gezeigte Gleichung kann hier ebenfalls verwendet werden. Mit Hilfe der in Kapitel 3.3.2, Gleichung (3.22) definierten Beziehung

$$\mathbf{N}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{M}(\hat{\rho}) \quad (\text{A.24})$$

zwischen den beiden Matrixfunktionen  $\mathbf{M}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{N}(\hat{\rho})$  im Fall eines nur partiell messbaren Parametervektors ergibt sich aus (A.16) ebenfalls, dass

$$\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) \quad (\text{A.25})$$

gilt. Diese Definition kann direkt in (A.23) eingesetzt und es ergibt sich

$$\mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho), \quad (\text{A.26a})$$

$$\mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho). \quad (\text{A.26b})$$

Somit liegt in (A.26) durch die neue Variable  $\mathbf{N}(\hat{\rho})$  in beiden Termen nur noch ein Produkt aus Variable und bekannten Matrizen vor. Analog lassen sich die beiden transponierten Terme in (A.22) umformen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}_c^T(\rho) &= \mathbf{P}(\hat{\rho}) [\mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)]^T \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho}) [\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho)] \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \underline{\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho)} \end{aligned} \quad (\text{A.27a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_c^T(\rho) &= \mathbf{P}(\hat{\rho}) [\mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)]^T \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho}) [\mathbf{C}_1^T(\rho) + \mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{D}_{12}^T(\rho)] \\ &= \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_1^T(\rho) + \underline{\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho})\mathbf{D}_{12}^T(\rho)} \end{aligned} \quad (\text{A.27b})$$

Es zeigt sich auch in (A.27) das gleiche Problem in den unterstrichenen Termen. Bildet man die Transponierte der Definition in (A.25)

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho})]^T &= [\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)]^T \\ \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{K}_{FB}^T(\hat{\rho}) &= \mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{N}(\hat{\rho})^T, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

ergibt sich, dass diese ebenfalls den in (A.27) auftretenden Produkten aus Unbekannten entspricht und direkt eingesetzt werden kann. Damit folgt

$$\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}_c^T(\rho) = \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{N}(\hat{\rho})^T\mathbf{B}_2^T(\rho), \quad (\text{A.29a})$$

$$\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_c^T(\rho) = \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_1^T(\rho) + \mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{N}(\hat{\rho})^T\mathbf{D}_{12}^T(\rho). \quad (\text{A.29b})$$

Durch das Einsetzen von (A.26) und (A.29) in (A.22) ergibt sich

$$\left[ \begin{array}{ccc} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) & \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{C}_1^T(\rho) \\ +\mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{N}(\hat{\rho})^T\mathbf{B}_2^T(\rho) & & +\mathbf{C}_2(\rho)^T\mathbf{N}(\hat{\rho})^T\mathbf{D}_{12}^T(\rho) \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \mathbf{D}_{11}^T(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{array} \right] < 0, \quad (\text{A.30a})$$

$$\mathbf{M}(\hat{\rho})\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{C}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}). \quad (\text{A.30b})$$

Mit Hilfe der beiden zusätzlich definierten Variablen  $\mathbf{M}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{N}(\hat{\rho})$  entstehen in (A.30) nur noch Produkte aus den unbekanntem Matrix-Funktionen und den Matrix-Funktionen der Regelstrecke. Somit resultiert ein konvexes LMI-Problem. Definiert man zusätzlich die beiden Terme

$$\mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho) = \mathbf{A}(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho), \quad (\text{A.31a})$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{A}}^T(\rho) = \mathbf{P}(\hat{\rho})\mathbf{A}^T(\rho) + \mathbf{C}_2^T(\rho)\mathbf{N}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T(\rho), \quad (\text{A.31b})$$

und setzt diese in (A.30) ein, ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1(\rho)^T & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.32a})$$

$$\mathbf{M}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) = \mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.32b})$$

die LMI-Bedingung (3.28) in Theorem 3.4 aus Kapitel 3.3.2.

### A.3 Vorsteuerung

Bei dem betrachteten Fall der Regelung mit zwei Freiheitsgraden, bestehend aus einer Zustandsrückführung und einer Vorsteuerung, beschreibt das in Kapitel 3.3.3, Gleichung (3.34) dargestellte Zustandsraumssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

das LPV-System des geschlossenen Regelkreises, für den sich somit die folgenden Matrizen ergeben

$$\mathbf{A}_c(\rho) = \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.34a})$$

$$\mathbf{B}_c(\rho) = \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.34b})$$

$$\mathbf{C}_c(\rho) = \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.34c})$$

$$\mathbf{D}_c(\rho) = \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}). \quad (\text{A.34d})$$

Durch die vorliegende Unabhängigkeit von Rückführung und Vorsteuerung sind die Matrizen  $\mathbf{A}_c(\rho)$  und  $\mathbf{C}_c(\rho)$  identisch zu denen im Falle der reinen Zustandsrückführung (A.2). Es unterscheiden sich nur die beiden Matrizen  $\mathbf{B}_c(\rho)$  und  $\mathbf{D}_c(\rho)$ , welche jedoch ohne weiteres Umformen direkt in die LMI (A.3) eingesetzt werden können. Somit ergibt sich zusammen mit den bereits in Kapitel A.1 gezeigten Umformungen die LMI (3.35) für das Regelungsproblem in Theorem 3.5 zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) + \mathbf{K}_{FF}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{Y}(\hat{\rho}) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A.35})$$

Die LMI (A.35) basiert auf dem von Prempain und Postlethwaite (2001a) gezeigten Ansatz der Regelung mit zwei Freiheitsgraden für LTI-Systeme und wurde für die Anwendung von LPV-Systemen, insbesondere der in dieser Arbeit behandelten Klasse mit nur partiell messbaren Parametern, entsprechend erweitert (Goßmann u. a., 2018).

Der Ansatz lässt sich analog auf das Problem der Ausgangsrückführung anwenden. Nach Kapitel 3.3.3, Gleichung (3.38) ergibt sich mit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \\ \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

das LPV-System des geschlossenen Regelkreises. Die zugehörigen Matrizen ergeben sich daher zu

$$\mathbf{A}_c(\rho) = \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho), \quad (\text{A.37a})$$

$$\mathbf{B}_c(\rho) = \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.37b})$$

$$\mathbf{C}_c(\rho) = \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FB}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho), \quad (\text{A.37c})$$

$$\mathbf{D}_c(\rho) = \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}). \quad (\text{A.37d})$$

Wie bereits im vorher dargestellten Fall der Zustandsrückführung sind die Matrizen  $\mathbf{A}_c(\rho)$  und  $\mathbf{C}_c(\rho)$  identisch mit den Matrizen bei einer reinen Ausgangsrückführung. Die Matrizen  $\mathbf{B}_c(\rho)$  und  $\mathbf{D}_c(\rho)$  unterscheiden sich hier ebenfalls und sind identisch zum vorher beschriebenen Fall. Daher lässt sich das LMI-Problem auch hier ohne weiteres Umformen direkt zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\rho) + \mathcal{M}_{\mathbf{A}}^T(\rho) & \star & \star \\ \mathbf{B}_1^T(\rho) + \mathbf{K}_{FF}^T(\hat{\rho})\mathbf{B}_2^T & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_w} & \star \\ \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{N}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_2(\rho)\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) & -\bar{\gamma}\mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.38a})$$

$$\mathbf{M}(\hat{\rho})\mathbf{C}_2(\rho) = \mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{P}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.38b})$$

formulieren, was der in (3.39) dargestellten LMI aus Theorem 3.6 entspricht.

## B Nichtlineare Bewegungsgleichungen

Im Folgenden werden zum besseren Verständnis des Lesers die Bewegungsdifferentialgleichungen vorgestellt, mit dessen Hilfe die Dynamik eines fliegenden Systems im Raum beschrieben werden kann. Hierbei soll nur eine Übersicht über die wirkenden Zusammenhänge und Zustandsgrößen gegeben werden. Für eine detailliertere Übersicht und Herleitung der beschriebenen Gleichungen sei auf die in diesem Kapitel verwendete Primärliteratur Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 5 und 7) verwiesen, aus denen der Großteil der hier dargestellten Gleichungen und Zusammenhänge entnommen wurde. Im Kontext dieser Arbeit sind die in diesem Kapitel aufgeführten Zusammenhänge in erster Linie für das Verständnis der nichtlinearen Simulationsumgebung des in Kapitel 5 betrachteten Flugzeugs relevant. Aus diesem Grund werden im Folgenden nur die Zusammenhänge eines Flugzeuges erläutert. Das Kapitel gliedert sich hierzu in drei Teile. Im ersten Teil werden kurz die vollständigen nichtlinearen Differentialgleichungen sowie alle dafür relevanten Größen vorgestellt. Im zweiten Teil wird die durchgeführte Transformation der Stellgrößen in dem verwendeten Modell beschrieben. Abschließend werden noch die zuvor beschriebenen Differentialgleichungen der Flugzeug-Dynamik aus Anschauungsgründen mit Hilfe einiger zusätzlicher Annahmen vereinfacht. Diese Annahmen sind bei zivilen Verkehrsflugzeugen in fast allen Flugzuständen gegeben und werden daher in diesen Fällen oft verwendet. Diese vereinfachten Differentialgleichungen dienen als Grundlage der in Kapitel 2.3.2 erläuterten linearisierten Bewegungsgleichungen. Mit Hilfe der so erhaltenen nichtlinearen Differentialgleichungen können die wirkenden Zusammenhänge und insbesondere die Trennung der Gesamtdynamik in Längs- und Seitenbewegung sehr gut dargestellt werden.

### B.1 Vollständige nichtlineare Differentialgleichungen

Der vorgestellte Satz an Differentialgleichungen unterliegt, wie in Brockhaus u. a. (2011, S. 205 - 206) beschrieben, den folgenden Annahmen.

- Die Bewegungsgeschwindigkeit relativ zur Erdrotation ist so langsam, dass sämtliche aus der Erdrotation resultierende Kräfte vernachlässigt werden können. Das geodätische Koordinatensystem fungiert daher als Inertialsystem.
- Das System wird als Starrkörper betrachtet und somit alle elastischen Freiheitsgrade der Struktur vernachlässigt.
- Zeitliche Änderungen der Masse und Schwerpunktlage werden nicht betrachtet. Die in der Einleitung als motivierendes Beispiel genannten unterschiedlichen Massen- und Schwerpunktkonfigurationen eines Flugzeugs werden als diskrete Punkte betrachtet (quasi-stationäre Masse und Massenträgheit).

- Die rotierenden Teile der Triebwerke produzieren keinen Drall und alle aerodynamischen Kräfte werden als quasi-stationär angenommen. Gegenseitige Beeinflussung von Flugzeugumströmung und Triebwerksstrahl wird vernachlässigt
- Alle angreifenden Kräfte werden zusammengefasst und auf den Schwerpunkt bezogen (Einpunktmodell).

Die nichtlinearen Differentialgleichungen zur Beschreibung der Bewegung im Raum werden in Brockhaus u. a. (2011, S. 254) mit

$$\left(\frac{d\vec{V}_K}{dt}\right)_f = \frac{1}{m} \mathbf{T}_{fa} \begin{pmatrix} F_{x,A} \\ F_{y,A} \\ F_{z,A} \end{pmatrix}_a + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_{x,T} \\ F_{y,T} \\ F_{z,T} \end{pmatrix}_f + \begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix} g - \begin{pmatrix} q_K w_K - r_K v_K \\ r_K u_K - p_K w_K \\ p_K v_K - q_K u_K \end{pmatrix}_f, \quad (\text{B.1})$$

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_K}{dt}\right)_f = \mathbf{T}_f^{-1} \left[ \begin{pmatrix} L_A + L_T \\ M_A + M_T \\ N_A + N_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_K r_K (I_z - I_y) - p_K q_K I_{xz} \\ r_K p_K (I_x - I_z) + (p_K^2 - r_K^2) I_{xz} \\ p_K q_K (I_y - I_x) + q_K r_K I_{xz} \end{pmatrix} \right], \quad (\text{B.2})$$

angegeben, dabei stellt (B.1) das Kräftegleichgewicht und (B.2) das Momentengleichgewicht eines bewegten, dynamischen Systems dar.

Die Differentialgleichungen werden in dem in Kapitel 2.3.1 definierten körperfesten Koordinatensystem beschrieben. Alle in diesem Koordinatensystem angegebenen Größen werden mit dem Index  $f$  versehen. Die linken Seiten der beiden Differentialgleichungen bestehen aus den nach der Zeit differenzierten Vektoren der Bahngeschwindigkeit und Bahndrehgeschwindigkeit

$$\vec{V}_{Kf} = (u_K, v_K, w_K)_f^T, \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{\omega}_{Kf} = (p_K, q_K, r_K)_f^T, \quad (\text{B.4})$$

welche beide im körperfesten Koordinatensystem beschrieben werden. Die Bahngeschwindigkeit  $\vec{V}_{Kf}$  im körperfesten Koordinatensystem ergibt sich dabei nach Brockhaus u. a. (2011, S. 211) mit Hilfe von

$$\vec{V}_{Kf} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_K \sin \mu_K + \beta_K \cos \mu_K \\ \alpha_K \cos \mu_K - \beta_K \sin \mu_K \end{pmatrix} V_K, \quad (\text{B.5})$$

wobei  $V_K$  den Betrag der Bahngeschwindigkeit beschreibt. Die Winkel  $\alpha_K$ ,  $\beta_K$  und  $\mu_K$  beschreiben die bereits in Kapitel 2.3.1 definierten Bahnanstellwinkel, Bahnschiebewinkel und Bahnhängewinkel.

Bei dem körperfesten Koordinatensystem handelt es sich um ein bewegtes Koordinatensystem, weshalb die nach der Zeit differenzierten Vektoren  $\vec{V}_{Kf}$  und  $\vec{\omega}_{Kf}$  aus zwei Komponenten bestehen. Die erste Komponente beschreibt, wie sich der Vektor und

dessen Lage relativ zum körperfesten Koordinatensystem verändert. In diesem Fall also die Bahngeschwindigkeit beziehungsweise Bahndrehgeschwindigkeit beschrieben im körperfesten Koordinatensystem jeweils nach der Zeit differenziert. Diese Komponente entspricht jeweils den beiden Termen auf der linken Seite der Differentialgleichungen (B.1) und (B.2). Die zweite Komponente stellt den sogenannten Euler-Term dar, welcher die Änderungen der Vektorkomponenten im bewegten Koordinatensystem berücksichtigt, die durch die Drehung relativ zum Inertialsystem (in diesem Fall das geodätische Koordinatensystem) verursacht werden. Dieser Einfluss wird durch das Kreuzprodukt  $\vec{\omega}_{Kf} \times \vec{V}_{Kf}$  beziehungsweise  $\vec{\omega}_{Kf} \times \mathbf{T}_f \vec{\omega}_{Kf}$  berechnet. Die beiden daraus resultierenden Kreuzprodukte stellen die jeweils letzten Terme in beiden Differentialgleichungen (B.1) und (B.2) auf der rechten Seite dar. Mit der Matrix  $\mathbf{T}_f$  wird dabei die Massenträgheit im körperfesten Koordinatensystem beschrieben. Bei Verwendung des genannten Koordinatensystems ist diese konstant und unter der Annahme, dass das betrachtete Flugzeug symmetrisch ist, lautet diese

$$\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} I_y & 0 & -I_{zx} \\ 0 & I_x & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Die in (B.2) erforderliche Inverse der Matrix  $\mathbf{T}_f$  ergibt sich entsprechend zu

$$\mathbf{T}_f^{-1} = \frac{1}{I_y I^*} \begin{bmatrix} I_y I_z & 0 & I_y I_{zx} \\ 0 & I_x I_z - I_{zx}^2 & 0 \\ I_y I_{zx} & 0 & I_x I_y \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

mit  $I^* = I_x I_z - I_{zx}^2$ .

Die restlichen Terme auf den rechten Seiten der beiden Differentialgleichungen (B.1) und (B.2) beschreiben die auf das System wirkenden Kräfte und Momente. Die beiden Terme mit dem Index  $A$  beschreiben die aerodynamischen Kräfte und Momente. Diese haben die Form von nichtlinearen Funktionen der Bewegung des Systems relativ zur umgebenden Atmosphäre und werden auf den aktuellen Staudruck  $\bar{q}$  (und damit Fluggeschwindigkeit und umgebende Luftdichte), die Flügelfläche  $S$ , sowie die Halbspannweite  $b/2$  beziehungsweise die Flügeltiefe  $\bar{c}$  bezogen, und als dimensionslose Beiwerte  $C_i$  beschrieben (siehe Kapitel 2.3.3). Die beiden Terme in (B.1) und (B.2) ergeben sich somit zu

$$\begin{pmatrix} F_{x,A} \\ F_{y,A} \\ F_{z,A} \end{pmatrix}_a = \bar{q} S \begin{pmatrix} -C_W(\alpha, q_A, \eta, \dots) \\ C_Q(\beta, p_A, r_A, \xi, \zeta, \dots) \\ -C_A(\alpha, q_A, \eta, \dots) \end{pmatrix}_a, \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} = \bar{q} S \begin{pmatrix} b/2 C_l(\beta, p_A, r_A, \xi, \zeta, \dots) \\ \bar{c} C_m(\alpha, q_A, \eta, \dots) \\ b/2 C_n(\beta, p_A, r_A, \xi, \zeta, \dots) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

wobei mit dem Index  $W$  die Widerstandskräfte entlang der Längsachse  $x$ , mit dem Index  $Q$  die Querkräfte und mit  $A$  die Auftriebskräfte beschrieben werden. Die Beiwerte sind in erster Linie nichtlinear von den angegebenen Größen abhängig. Neben dem Anstellwinkel  $\alpha$ , dem Schiebewinkel  $\beta$  und den Drehgeschwindigkeiten  $p_A$ ,  $q_A$  und  $r_A$  sind hier insbesondere die Stellwinkel der primären Stellgrößen zu nennen, mit denen die Bewegung aktiv beeinflusst und somit auch geregelt werden kann. Durch die Koordinatentransformation  $\mathbf{T}_{fa}$ , welche durch den Anstellwinkel  $\alpha$  und den Schiebewinkel  $\beta$  beschrieben wird, werden diese Kräfte in das körperfeste Koordinatensystem umgerechnet. Die darauf folgenden Terme mit dem Index  $T$  beschreiben die durch den Antrieb erzeugten Schubkräfte und -momente, welche als im körperfesten Koordinatensystem wirkend angenommen werden. Der folgende dritte Term in (B.1) beschreibt die wirkende Gewichtskraft, welche im sogenannten geodätischen (erdlotfesten) Koordinatensystem beschrieben wird. In diesem wirkt die Gewichtskraft entlang der Gravitation immer erdlotfest nach unten, und muss daher mit Hilfe des Hängewinkels  $\Phi$  und des Nicklagewinkels  $\Theta$  auf die körperfesten Achsen aufgeteilt werden. Für zusätzliche Details sei an dieser Stelle auf die verwendete Referenz Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 5, insbesondere S. 208 - 216) verwiesen.

Abschließend wird noch die Differentialgleichung für die in (2.25) genannten Lagewinkel angeben, welche den Zusammenhang zwischen den Drehgeschwindigkeiten und den Änderungsraten des Lagewinkel im Inertialsystem angibt. Diese ergibt sich nach Brockhaus u. a. (2011, S. 216) zu

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi / \cos \Theta & \cos \Phi / \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_K \\ q_K \\ r_K \end{pmatrix}_f. \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Verwendung von Winkelbeschleunigungen als Stellgrößen

Für die Regelung der Flugzeug-Bewegung wurde bei dem in dieser Arbeit exemplarisch betrachteten Modell eine Transformation der Eingangsgrößen vorgenommen, wie es bereits in Kapitel 5.1 einleitend erläutert wurde. Diese Transformation dient dazu, physikalische Zusammenhänge und bekannte Nichtlinearitäten teilweise zu kompensieren und das gesamte Verhalten des Systems somit linearer zu gestalten. Die Grundlage für die vorgenommene Transformation ist das Verwenden einer Momenten-Vorgabe anstatt einer direkten Steuerung über die primären Steuerflächen des Flugzeugs. Dies kann mit Hilfe des in (B.2) beschriebenen Momentengleichgewichts

$$\left( \frac{d\vec{\omega}_K}{dt} \right)_f = \mathbf{T}_f^{-1} \left[ \begin{pmatrix} L_A + L_T \\ M_A + M_T \\ N_A + N_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_K r_K (I_z - I_y) - p_K q_K I_{xz} \\ r_K p_K (I_x - I_z) + (p_K^2 - r_K^2) I_{xz} \\ p_K q_K (I_y - I_x) + q_K r_K I_{xz} \end{pmatrix}_f \right]$$

erreicht werden. In dieser Differentialgleichung setzt sich der Term der aerodynamischen und der durch den Schub erzeugten Momente aus den beiden Termen

$$\begin{pmatrix} L_A + L_T \\ M_A + M_T \\ N_A + N_T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_c \\ M_c \\ N_c \end{pmatrix}}_{\vec{Q}_c} - \underbrace{\begin{pmatrix} L_{trim} \\ M_{trim} \\ N_{trim} \end{pmatrix}}_{\vec{Q}_{trim}} \quad (\text{B.11})$$

zusammen, wobei  $\vec{Q}_c$  den Teil der Momente beschreibt, welcher durch die aktive Steuerung des Flugzeugs erzeugt wird und mit  $\vec{Q}_{trim}$  der für die Trimmung des Flugzeugs erforderliche Teil zusammengefasst wird. Die Differentialgleichung wird nun nach  $\vec{Q}_c$  umgestellt, womit sich

$$\begin{pmatrix} L_c \\ M_c \\ N_c \end{pmatrix} = \mathbf{T}_f \left( \frac{d\vec{\omega}_K}{dt} \right)_f + \begin{pmatrix} q_K r_K (I_z - I_y) - p_K q_K I_{xz} \\ r_K p_K (I_x - I_z) + (p_K^2 - r_K^2) I_{xz} \\ p_K q_K (I_y - I_x) + q_K r_K I_{xz} \end{pmatrix}_f + \begin{pmatrix} L_{trim} \\ M_{trim} \\ N_{trim} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

ergibt. Aus dem Term für  $\vec{Q}_c$  können dann mit Hilfe der in Gleichung (B.9) beschriebenen aerodynamischen Zusammenhänge entsprechend die erforderlichen Ausschläge der primären Steuerflächen ermittelt werden. Die Differentialgleichung wird dadurch nicht mehr direkt durch die aerodynamischen Steuerflächen beeinflusst, sondern durch eine Momentenvorgabe. Das ermöglicht es, die in Kapitel 2.3.3 erläuterten äußeren Einflüsse auf den Effekt der primären Steuerflächen auf das erzeugte Moment teilweise zu kompensieren und somit ein ähnlicheres Verhalten des Systems in verschiedenen Flugzuständen zu erzielen.

Die aus der umgestellten Differentialgleichung (B.12) entstehenden Momente  $\vec{Q}_c$  zur aktiven Steuerung des Flugzeugs bestehen aus drei Komponenten. Die für die Trimmung des Flugzeugs in der aktuellen Fluglage erforderlichen Momente  $\vec{Q}_{trim}$  ergeben sich automatisch aus selbiger und sind dementsprechend fest vorgegeben. Die Euler-Terme ergeben sich aus der aktuellen Bewegung des Flugzeuges und können in diesem Zusammenhang dafür verwendet werden, um diese Effekte entsprechend in der Steuerung zu berücksichtigen und zu kompensieren. Dies trägt dazu bei, das nichtlineare System dem Verhalten des linearisierten System anzunähern. Der Term der Drehbeschleunigung schlussendlich

$$\left( \frac{d\vec{\omega}_K}{dt} \right)_f = \begin{pmatrix} \dot{p}_K \\ \dot{q}_K \\ \dot{r}_K \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

kann dann dafür verwendet werden, dem Flugzeug über eine Vorgabe von Winkelbeschleunigungen eine Änderung des Momentes  $\vec{Q}_c$  zu kommandieren und somit eine Änderung der Lage des Flugzeugs zu erreichen.

### B.3 Vereinfachte nichtlineare Differentialgleichungen

Für die Linearisierung des Systems und besseren Veranschaulichung der wirkenden Zusammenhänge, werden die beiden nichtlinearen Differentialgleichungen (B.1) und (B.2) mit Hilfe einiger zusätzlicher Annahmen im Vorfeld bereits so weit wie möglich vereinfacht. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass bei den betrachteten Vereinfachungen auf eine ältere Ausgabe der primär verwendeten Quelle Brockhaus u. a. (2011) zurückgegriffen wurde (2. Auflage, 2001, Kapitel 7). Grund ist die Verwendung einer vollständigen Kleinwinkelnäherung in der genannten Auflage, welche aus Gründen der besseren Anschaulichkeit der wirkenden Zusammenhänge gegenüber der in Brockhaus u. a. (2011) verwendeten Vereinfachung bevorzugt wird.

Die in im folgenden verwendeten Vereinfachungen sind an dieser Stelle kurz zusammengefasst.

- Die Komponenten der Drehgeschwindigkeit  $p, q$  und  $r$  sind allesamt klein
- Die Winkel  $\alpha, \beta, (\chi - \Psi), \Theta, \gamma$  und  $\Phi$  sind allesamt klein
- Die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Flugrichtung  $v_K$  und  $w_k$  sind klein
- Der Schub  $F_T$  liegt in der Symmetrieebene des Flugzeugs und der Schubeinstellwinkel  $i_T$  ist klein
- Die aerodynamischen Momente  $(L_A, M_A, N_A)^T$  im körperfesten und aerodynamischen Koordinatensystem sind aufgrund des kleinen Winkels  $\alpha$  näherungsweise gleich groß
- Die Beschleunigung  $\dot{V}_K$  ist klein
- Der Einfluss des Windes wird vernachlässigt

Mit Hilfe dieser Annahmen können die nichtlinearen Differentialgleichungen in (B.1) und (B.2) deutlich vereinfacht werden. Die Betrachtung von kleinen Winkelgeschwindigkeiten bietet den Vorteil, dass die stark nichtlinearen Euler-Terme in beiden Differentialgleichungen stark vereinfacht, beziehungsweise im Falle der Momentenbilanz vollständig vernachlässigt werden können. Der Begriff einer kleinen Größe ist dabei nach Brockhaus u. a. (2011, S. 255) relativ zu den anderen wirkenden Größen zu sehen. Ist eine Größe innerhalb einer Gleichung weniger als 10% so groß wie die restlichen vorkommenden Größen, so ist der Einfluss des Quadrates dieser Größen nur noch etwa 1% im Verhältnis zu den anderen Größen. Ähnlich verhält es sich bei einem Produkt zweier kleiner Größen. Diese Annahmen können im überwiegenden Teil des Flugbereichs eines konventionellen Passagierflugzeuges getroffen werden und beschreiben das System nur bei besonders dynamischen Flugmanövern nicht ausreichend genau.

Der Euler-Term in (B.2) besteht nur aus Produkten der Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\omega} = (p_K, q_K, r_K)^T$  und kann daher bei der getroffenen Annahme kleiner Winkelgeschwindigkeiten vernachlässigt werden. Unter der weiteren Annahme, dass die Geschwindigkeitskomponenten  $v_K$  und  $w_K$  im Vergleich zu  $u_K \approx V_K$  klein sind, vereinfacht sich der Euler-Term in (B.1) zu

$$\begin{pmatrix} q_K w_K - r_K v_K \\ r_K u_K - p_K w_K \\ p_K v_K - q_K u_K \end{pmatrix}_f \approx \begin{pmatrix} 0 \\ r V_K \\ -q V_K \end{pmatrix}_f. \quad (\text{B.14})$$

Durch die Annahme kleiner Winkel ( $< 10^\circ$ ) können darüber hinaus die sogenannten Kleinwinkelnäherungen

$$\sin x \approx x, \quad (\text{B.15})$$

$$\cos x \approx 1, \quad (\text{B.16})$$

verwendet werden. Dadurch ergeben sich zunächst die bereits in Kapitel 2.3.1 definierten Zusammenhänge für die Lagewinkel

$$\alpha_K = \Theta - \gamma, \quad (\text{B.17})$$

$$\beta_K = \chi - \Psi, \quad (\text{B.18})$$

$$\mu_K = \Phi. \quad (\text{B.19})$$

Zusätzlich vereinfachen sich durch die Kleinwinkelnäherung die notwendigen Koordinatentransformationen. Somit ergibt sich die bereits in (B.14) verwendete Näherung der Bahngeschwindigkeit zu

$$\begin{pmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_K \sin \mu_K + \beta_K \cos \mu_K \\ \alpha_K \cos \mu_K - \beta_K \sin \mu_K \end{pmatrix} V_K \approx \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_K \\ \alpha_K \end{pmatrix} V_K. \quad (\text{B.20})$$

Im Folgenden wird darüber hinaus auf die Unterscheidung zwischen dem bahnfesten (Index  $k$ ) und aerodynamischen Koordinatensystem (Index  $a$ ) verzichtet, da der Einfluss des Windes auf das System vernachlässigt wird. Wie es in Brockhaus u. a. (2011, S. 320) beschrieben ist, ist in diesem Fall diese Unterscheidung nicht notwendig. Soll nur das Eigenverhalten des Flugzeuges betrachtet werden, ist eine Berücksichtigung des Windes nicht erforderlich. Somit kann auf die Unterscheidung zwischen den aerodynamischen Winkel und Winkelgeschwindigkeiten wie beispielsweise  $\alpha$ ,  $q_A$ , usw. sowie dessen Pendant  $\alpha_K$ ,  $q_K$ , usw. im bahnfesten Koordinatensystem verzichtet werden. Daher werden im Folgenden die bahnfesten Indizes nicht mehr angegeben und auf die Unterscheidung zwischen den beiden Koordinatensystemen verzichtet

Mit Hilfe der verwendeten Kleinwinkelnäherung vereinfachen sich darüber hinaus auch die Terme, die die auf das System wirkenden äußeren Kräfte und Momente beschreiben. Für die Gewichtskraft gilt in diesem Fall näherungsweise

$$\begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix} mg \approx \begin{pmatrix} -\Theta \\ \Phi \\ 1 \end{pmatrix} mg. \quad (\text{B.21})$$

Die aerodynamischen Kräfte im körperfesten Koordinatensystem ergeben vereinfacht sich zu

$$\begin{pmatrix} F_{x,A} \\ F_{y,A} \\ F_{z,A} \end{pmatrix}_f \approx \begin{pmatrix} -F_W + \alpha F_A \\ F_Q \\ -\alpha F_W - F_A \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

wobei mit  $F_A$  die Auftriebskraft, mit  $F_W$  der aerodynamische Widerstand und mit  $F_Q$  die aerodynamisch erzeugte Querkraft bezeichnet wird. Durch die weitere Annahme, dass der Schub  $F_T$  nur in der Symmetrieebene des Flugzeugs wirkt und somit nur ein Moment um die  $y$ -Achse (mit dem Hebelarm  $z_T$ ) erzeugt, sowie dessen Einstellwinkel  $i_T$  analog zu allen anderen Winkel ebenfalls klein ist, vereinfachen sich die Terme zu

$$\begin{pmatrix} F_{x,T} \\ F_{y,T} \\ F_{z,T} \end{pmatrix}_f \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i_T \end{pmatrix} F_T, \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{pmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ z_T \\ 0 \end{pmatrix} F_T, \quad (\text{B.24})$$

wobei mit  $F_T$  die resultierende Schubkraft aller Triebwerke bezeichnet wird.

Setzt man alle vorgestellten Vereinfachungen in die nichtlinearen Differentialgleichungen (B.1) und (B.2) ein, ergeben sich mit

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -F_W + \alpha F_A + F_T \\ F_Q \\ -\alpha F_W - F_A - i_T F_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Theta \\ \Phi \\ 1 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} 0 \\ -rV_K \\ qV_K \end{pmatrix}, \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_z}{I^*} & 0 & \frac{I_{zx}}{I^*} \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ \frac{I_{zx}}{I^*} & 0 & \frac{I_x}{I^*} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_A \\ M_A + z_T F_T \\ N_A \end{pmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

die deutlich vereinfachten nichtlinearen Differentialgleichungen. Zusätzlich kann die Differentialgleichung (B.10) im Falle kleiner Euler-Winkel vereinfacht durch

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Theta \\ 0 & 1 & -\Phi \\ 0 & \Phi & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

beschrieben werden, indem Produkte kleiner Größen vernachlässigt werden. Somit können die Lagewinkel direkt mit Hilfe einer Integration der Drehgeschwindigkeiten ermittelt werden.

Bei einer genaueren Betrachtung der in (B.25) und (B.26) dargestellten Differentialgleichungen lässt sich sehr deutlich die in Kapitel 2.3.1 vorgestellte Aufspaltung in zwei getrennt betrachtete Dynamiken erkennen. Die beiden Gleichungen in (B.25), welche die translatorische Bewegung innerhalb der Symmetrieebene des Flugzeugs beschreiben ( $u$  und  $w$ ), sind beispielsweise nur von Kräften und Zustandsgrößen abhängig, die innerhalb der Symmetrieebene wirken. Gleiches gilt auch bei den Differentialgleichungen der Drehgeschwindigkeit in (B.26) in der Gleichung für die Rotation um die  $y$ -Achse ( $q$ ). Es ist daher also möglich, die symmetrische Bewegung des Flugzeugs, auch als Längsbewegung bezeichnet, unabhängig von der asymmetrischen Bewegung zu betrachten. Bei den asymmetrischen Bewegungen, im Folgenden als Seitenbewegung bezeichnet, ist diese Betrachtung mit Ausnahme der Bahngeschwindigkeit  $V_K$  ebenfalls möglich. Somit ist die Seitenbewegung noch über die translatorische Geschwindigkeit (und damit auch über die aerodynamischen Größen  $F_{Q,L}$  und  $N$ ) an die Längsbewegung gekoppelt und kann daher nur näherungsweise (beispielsweise für konstante Geschwindigkeiten) entkoppelt betrachtet werden.

Für die Linearisierung werden im Vorfeld noch einige Zustandsgrößen getauscht. Die Gleichungen in (B.25) werden ausschließlich in Inertialgrößen beschrieben, also Größen die die Bewegung des Flugzeugs innerhalb des Inertialsystems beschreiben. In flugmechanischen Betrachtungen spielen allerdings die aerodynamischen Größen  $\alpha$  und  $\beta$  eine relevantere Rolle, weshalb es sich insbesondere im deutschen Sprachraum etabliert hat, die Differentialgleichungen in (B.1) anstatt in kartesischen Koordinaten (wie in (B.25)) in Kugelkoordinaten ( $V_K$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ) dazustellen. Hierzu wird die für kleine Winkel geltende Näherung der Bahngeschwindigkeit in (B.20) verwendet und nach der Zeit differenziert. Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\beta}V_K + \beta\dot{V}_K \\ \dot{\alpha}V_K + \alpha\dot{V}_K \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Mit Hilfe der Anfangs erwähnten Annahme kleiner Beschleunigungen  $\dot{V}_K$  gilt näherungsweise

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\beta}V_K + \beta\dot{V}_K \\ \dot{\alpha}V_K + \alpha\dot{V}_K \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\beta}V_K \\ \dot{\alpha}V_K \end{pmatrix}, \quad (\text{B.29})$$

womit der Wechsel der Zustandsgrößen in (B.25) durch ein einfaches Ersetzen der entsprechenden Beschleunigungen erfolgen kann. Zusätzlich werden meist noch die beiden Eulerwinkel  $\Theta$  und  $\Psi$  durch die beiden Flugbahnwinkel  $\chi$  und  $\gamma$  ersetzt, da diese

in der Betrachtung der Flugzeugbewegung eine wichtigere Rolle einnehmen. Dieser Tausch kann durch die in (B.17) und (B.18) durch die Kleinwinkelnäherung erhaltenen Winkelbeziehungen erfolgen. Werden diese beiden Gleichungen nach  $\chi$  und  $\gamma$  umgestellt und nach der Zeit differenziert, ergeben sich mit Hilfe von (B.27) mit

$$\dot{\chi} = \dot{\Psi} + \dot{\beta} = r + \dot{\beta}, \quad (\text{B.30})$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\Theta} - \dot{\alpha} = q + \dot{\alpha}, \quad (\text{B.31})$$

die erforderlichen Beziehungen für die Winkelgeschwindigkeiten. Mit Hilfe der Näherung aus (B.29) lässt sich dann die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\beta}V_K \\ \dot{\alpha}V_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\chi}V_K \\ -\dot{\gamma}V_K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ rV_K \\ -qV_K \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

angeben, womit sich dann mit Hilfe von (B.25) mit

$$\dot{\chi}V_K = \frac{1}{m}F_Q + \Phi g, \quad (\text{B.33})$$

$$\dot{\gamma}V_K = \frac{1}{m}(\alpha F_W + F_A + i_T F_T) - g, \quad (\text{B.34})$$

die gesuchten Differentialgleichungen für  $\chi$  und  $\gamma$  angeben lassen.

Mit den neuen Zustandsgrößen können nun basierenden auf den vereinfachten Differentialgleichungen in (B.25) und (B.26) die nach symmetrischer (Längsbewegung) und asymmetrischer (Seitenbewegung) Bewegung getrennten Differentialgleichungen angegeben werden. Für die Längsbewegung gilt somit

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha}V_K \\ \dot{V}_K \\ \dot{\gamma}V_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_y}(M + z_T F_T) \\ \frac{1}{m}(-\alpha F_W - F_A - i_T F_T) + g + qV_K \\ \frac{1}{m}(-F_W + \alpha F_A + F_T) - \Theta g \\ -\frac{1}{m}(-\alpha F_W - F_A - i_T F_T) - g \end{pmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \frac{1}{m}(-F_W + \alpha F_A + F_T) \\ \frac{1}{m}(-\alpha F_W - F_A - i_T F_T) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

Die Differentialgleichung (B.35) wird dazu noch mit der Ausgangsgleichung (B.36) ergänzt, mit dessen Hilfe der zugehörige Euler-Winkel  $\Theta$  (Nicklagewinkel) der Längsbewegung aus den neuen Zustandsgrößen berechnet werden kann. Außerdem werden Berechnungsgleichungen für die spezifischen Kräfte  $f_x$  und  $f_z$  angegeben, da die spezifische Kraft  $f_z$  in  $z$ -Richtung in dieser Arbeit für die Berechnung der Regelgröße

$f_z^*$  erforderlich ist. Für die konkrete Herleitung der Berechnungsvorschrift sei an dieser Stelle auf Brockhaus u. a. (2011, S. 213-214) verwiesen.

Aus den restlichen Gleichungen ergeben sich dann mit den neuen Zustandsgrößen entsprechend die Differentialgleichungen der Seitenbewegung in (B.37). In der zugehörigen Ausgangsgleichung (B.38) wird analog zur Längsbewegung die Berechnungsgleichung für den ersetzten Eulerwinkel  $\Psi$  (Azimut/Steuerkurs), sowie der spezifischen Kraft  $f_y$  angegeben. Für die Herleitung der Berechnungsvorschrift sei ebenfalls auf Brockhaus u. a. (2011, S. 213-214) verwiesen.

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta}V_K \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\chi}V_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_{zx}}{I^*}L + \frac{I_x}{I^*}N \\ \frac{1}{m}F_Q + \Phi g - rV_K \\ \frac{I_z}{I^*}L + \frac{I_{zx}}{I^*}N \\ p \\ \frac{1}{m}F_Q + \Phi g \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi - \beta \\ \frac{1}{m}F_Q \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

Die erhaltenen Differentialgleichungen können nun lokal für den getrimmten stationären Geradeausflug linearisiert werden, wie es in Kapitel 2.3.2 beschrieben wurde. Durch die beschriebenen Vereinfachungen kann die Kinematik des Systems bereits weitestgehend linear gestaltet werden. Die Gleichungen sind nun in erster Linie noch in den aerodynamischen Termen (B.8) und (B.9) nichtlinear. Diese hängen zum einen über den Staudruck  $\bar{q}$  quadratisch von der Fluggeschwindigkeit, als auch von den nichtlinearen Abhängigkeit der Beiwerte von der Bewegung des Flugzeugs relativ zur umgebenden Atmosphäre ab. Für Details zu deren Bestimmung sei an dieser Stelle auf Brockhaus u. a. (2011, Kapitel 3) verwiesen. Zusätzlich wirkt die trotz der vorgenommenen Vereinfachungen weiterhin bestehende Kopplung zwischen Längs- und Seitenbewegung primär über diese Größen. Während die Gleichungen der Längsbewegung (B.35) keine Kopplung mehr mit der Seitenbewegung aufweisen, ist die Seitenbewegung (B.37) über die Bahngeschwindigkeit  $V_K$  noch direkt, sowie über die aerodynamischen Kräfte und Momente ( $F_Q, L$  und  $N$ ) indirekt mit der Längsbewegung gekoppelt. Durch die Linearisierung der Seitenbewegung im stationären Geradeausflug und damit in einem symmetrischen Zustand, entfällt jedoch diese Kopplung in den entstehenden linearen Modellen. Aus diesem Grund ist bei der Betrachtung der linearen Bewegungsgleichungen aus Kapitel 2.3.2 eine unabhängige Behandlung beider Bewegungen möglich. Wird allerdings eine nichtlineare Betrachtung durchgeführt, ist es aus diesem Grund erforderlich das vollständige System zu betrachten, da in diesem Fall die beschriebenen Wechselwirkungen nicht vernachlässigt werden können.



# C Zustandsraum-Matrizen der Flugzeug-Modelle

Für die Analysen der für die Flugzeug-Basisregelung entworfenen Regler in Kapitel 5 wurden erweiterte Regelstrecken verwendet. Hierbei handelt es sich um die grundlegenden in Kapitel 2.3 erläuterten Dynamiken des jeweiligen Problems, welche in den bereitgestellten Modellen mit zusätzlichen Elementen für eine bessere Abbildung der nichtlinearen Simulationsumgebung und des realen Systems erweitert wurden. Diese erweiterten Regelstrecken werden im Folgenden kurz für Nickdynamik und Seitenbewegung getrennt beschrieben.

## C.1 Nickdynamik

Der Ausgangspunkt für die erweiterte Regelstrecke der Nickdynamik ist das in Kapitel 5.1 verwendete Zustandsraummodell in den Gleichungen (5.1) und (5.3), welches durch

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_{\dot{q}} \\ Z_{\dot{q}} \end{bmatrix} \dot{q}_c, \quad (\text{C.1a})$$

$$\begin{pmatrix} f_z^* \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{z_\alpha} & f_{z_q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1b})$$

beschrieben wird.

Um die Regelstrecke (C.1) besser der nichtlinearen Simulationsumgebung und dem realen System anzunähern, wurde ein um zusätzliche Elemente erweitertes Modell bereitgestellt. Die Erweiterungen bestehen in erster Linie aus der Dynamik des Höhenruders und dem Einfluss der Strukturdynamik. Das Höhenruder wird in diesem Fall durch ein  $\text{PT}_2$ -Übertragungsverhalten beschrieben. Durch die Linearisierung der in Kapitel B.2 beschriebenen Transformation der Eingangssignale ergibt sich durch das  $\text{PT}_2$ -Übertragungsverhalten ein Zusammenhang zwischen der kommandierten Nickbeschleunigung  $\dot{q}_c$  und dem Ausschlag des Höhenruders  $\eta$ . Dadurch kann in der Optimierung und Analyse der Regelung die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkungen in  $\eta$  berücksichtigt werden. Um die Effekte der wirkenden Strukturdynamik darzustellen, werden die beiden Ausgangsgrößen  $f_z^*$  und  $q$  in (C.1) zusätzlich durch zwei leicht gedämpfte  $\text{PT}_2$ -Elemente beeinflusst. Des Weiteren wird das System um zusätzliche Filter ergänzt, die im realen System verwendet werden. Das Stellsignal an das Höhenruder wird mit einem Kerbfilter gefiltert, um die Anregung der Strukturdynamik durch die Aktuatorik zu reduzieren. Zusätzlich werden die beiden Ausgangssignale durch

PT<sub>2</sub>-Glieder gefiltert, um die Filterung von Sensorrauschen und Vibrationen, die durch Strukturschwingungen und Antrieb verursacht werden, in den Messsignalen im Modell zu berücksichtigen. Damit ergibt sich für das erweiterte lineare Modell der folgende Zustandsvektor

$$x = (\alpha, q, \dot{\eta}, \eta, \epsilon_{fz}, \dot{\epsilon}_{fz}, \epsilon_q, \dot{\epsilon}_q, \kappa_\eta, \dot{\kappa}_\eta, \dot{x}_{TP,fz}, x_{TP,fz}, \dot{x}_{TP,q}, x_{TP,q})^T. \quad (\text{C.2})$$

Hierbei wird mit  $\eta$  und  $\dot{\eta}$  der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit des Höhenruders bezeichnet, die Zustandsgrößen  $\epsilon_{fz}$  und  $\epsilon_q$  sowie deren Ableitungen beschreiben den Einfluss der berücksichtigten Strukturndynamik aufgrund der elastischen Verformung auf die zugehörigen Ausgangsgrößen und  $\kappa_\eta$  und  $\dot{\kappa}_\eta$  beschreiben den Kerbfilter. Die Tiefpassfilter zur Filterung der Ausgangssignale werden durch  $x_{TP,fz}$  und  $x_{TP,q}$  sowie deren Ableitungen beschrieben.

Die daraus resultierenden Matrizen des Zustandsraummodells sind im folgenden dargestellt. Für die Matrizen **B** und **C** gilt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{H}_{\dot{q}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{K}_{\dot{q}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{fz,x_{TP,fz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{q,x_{TP,q}} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{C.4})$$

Die resultierende Systemmatrix **A** ist in (C.5) angegeben.



## C.2 Seitenbewegung

Analog zur Nickdynamik im vorherigen Kapitel C.1 ist das in Kapitel 5.3.1 verwendete Zustandsraummodell der Seitenbewegung

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta & N_p & 0 \\ -1 & Y_\beta & 0 & g/v_0 \\ L_r & L_\beta & L_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} N_{\dot{p}} & N_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{r}} \\ L_{\dot{p}} & L_{\dot{r}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_c \\ \dot{r}_c \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6a})$$

$$\begin{pmatrix} r \\ f_y^* \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{y_r} & f_{y_\beta} & f_{y_p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6b})$$

der Ausgangspunkt für die erweiterte Regelstrecke, welche in der Optimierung und Analyse der Regelung der Seitenbewegung in den Kapiteln 5.3.2 und 5.3.3 verwendet wurde. Wie bei der Nickdynamik wurde auch in diesem Fall eine um zusätzliche Elemente erweiterte Regelstrecke bereitgestellt, mit welcher die Gegebenheiten der nichtlinearen Simulationsumgebung und des realen Systems besser abgebildet werden. Es ergeben sich somit neben den primären Zustandsgrößen der Seitenbewegung  $r$ ,  $\beta$ ,  $p$  und  $\Phi$  in (C.6) noch zusätzliche Zustandsgrößen. Darunter fällt zum einen die Dynamik der beiden Steuerflächen, welche wie bereits das Höhenruder in der Nickdynamik ebenfalls jeweils durch ein PT<sub>2</sub>-Übertragungsverhalten beschrieben werden. Hierbei ergibt sich ebenfalls durch die Linearisierung der Transformation der Eingangsgrößen aus Kapitel B.2 ein direkter Zusammenhang zwischen den kommandierten Winkelbeschleunigungen und den resultierenden Ausschlägen der beiden Steuerflächen durch das PT<sub>2</sub>-Übertragungsverhalten. Zum anderen werden mit Hilfe von leicht gedämpften PT<sub>2</sub>-Elementen die Effekte der Strukturdynamik auf die drei Ausgangsgrößen  $f_y^*$ ,  $r$  und  $p$  in (C.6) dargestellt. Die vierte Ausgangsgröße  $\Phi$  ergibt sich direkt aus der Integration von  $p$  und ist somit nicht zusätzlich von der Strukturdynamik betroffen. Außerdem wird das linearisierte Modell um einige Filter ergänzt, welche auch im realen System verwendet werden. Dazu gehören zwei Kerbfilter, die jeweils die Anregung der Strukturdynamik durch das Betätigen der Steuerflächen reduzieren sollen, sowie zusätzliche PT<sub>2</sub>-Elemente mit denen die vier Messgrößen  $r$ ,  $f_y^*$ ,  $p$  und  $\Phi$  gefiltert werden. Dadurch wird die Filterung der Sensorsignale zu berücksichtigen, welche im realen System dazu dient, die Vibrationen durch Strukturschwingungen und den Antrieb sowie Sensorrauschen zu verringern. Damit ergibt sich für das erweiterte lineare Modell der folgende Zustandsvektor

$$x = \left( r, \beta, p, \Phi, \dot{\xi}, \xi, \dot{\zeta}, \zeta, \epsilon_r, \dot{\epsilon}_r, \epsilon_{f_y}, \dot{\epsilon}_{f_y}, \epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, \kappa_\xi, \dot{\kappa}_\xi, \kappa_\zeta, \dot{\kappa}_\zeta, \dot{x}_{TP,r}, x_{TP,r}, \dot{x}_{TP,f_y}, x_{TP,f_y}, \dot{x}_{TP,p}, x_{TP,p}, \dot{x}_{TP,\Phi}, x_{TP,\Phi} \right)^T. \quad (\text{C.7})$$

In (C.7) bezeichnen  $\xi$  und  $\dot{\xi}$  den Winkel und die Winkelgeschwindigkeit des Querruders,  $\zeta$  und  $\dot{\zeta}$  entsprechend den des Seitenruders. Mit den Zuständen  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_{f_y}$  und  $\epsilon_p$  sowie deren Ableitungen wird der Einfluss der Strukturodynamik auf die Messgrößen beschrieben. Die Zustandsgrößen  $\kappa_\xi$ ,  $\dot{\kappa}_\xi$ ,  $\kappa_\zeta$  und  $\dot{\kappa}_\zeta$  beschreiben die beiden Kerbfilter und mit  $x_{TP,r}$ ,  $x_{TP,f_y}$ ,  $x_{TP,p}$  und  $x_{TP,\Phi}$  und deren Ableitungen werden die Tiefpassfilter zur Filterung der Ausgangssignale beschrieben.

Die sich daraus ergebende **A**-Matrix des Systems ist in (C.10) beschrieben. Für die Matrizen **B** und **C** gilt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{H}_{\xi,\dot{p}_c} & 0 & \mathcal{H}_{\zeta,\dot{p}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{H}_{\xi,\dot{r}_c} & 0 & \mathcal{H}_{\zeta,\dot{r}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \mathcal{K}_{\kappa_\xi\dot{p}_c} & 0 & \mathcal{K}_{\kappa_\zeta\dot{p}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \mathcal{K}_{\kappa_\xi\dot{r}_c} & 0 & \mathcal{K}_{\kappa_\zeta\dot{r}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{r,x_{TP,r}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{r,x_{TP,\Phi}} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{f_y,x_{TP,f_y}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{p,x_{TP,p}} & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{p,x_{TP,\Phi}} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Y}_{\Phi,x_{TP,\Phi}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$







## D Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung

In dem folgenden Kapitel wird die Anwendung des in Kapitel 3.3.2 beschriebenen Verfahrens der Synthese einer statischen Ausgangsrückführung für ein LPV-Problem mit partiell messbaren Parametern diskutiert. In dem genannten Kapitel wurde beschrieben, dass der vorgestellte Ansatz nur unter der Berücksichtigung einer zusätzlichen Bedingung durchgeführt werden kann. Diese zusätzliche Gleichheitsbedingung in Theorem 3.4 führt jedoch zu einer wesentlichen Einschränkung im Entwurf, weil die damit ermittelten Regler nur aus einem Teil der Menge aller möglicher Regler stammen, welche das gestellte Problem lösen würden. Das kann dazu führen, dass das erzielte Resultat nicht das Bestmögliche darstellt, weil nur ein Teil aller möglichen Lösungen gewonnen werden kann. Im Fall eines Reglerentwurfs könnte dies beispielsweise einen sehr konservativen Regler oder das Gegenteil, einen Regler der den geschlossenen Regelkreis sehr nah an den Stabilitätsrand führt, bedeuten. Im schlechtesten Fall kann diese Einschränkung auch dazu führen, dass ein gestelltes Problem durch das Verfahren nicht gelöst werden kann, obwohl eine Lösung existiert. In der zugrunde liegenden Veröffentlichung Goßmann und Svaricek (2019) des Verfahrens für konventionelle LPV-Systeme wurde dessen Anwendung auf ein nichtlineares Beispiel demonstriert. Eine Verwendung dieses Verfahrens für die Lösung der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Regelungsprobleme wurde ebenfalls betrachtet, führte jedoch aufgrund der genannten Einschränkungen zu keinem zufriedenstellenden Resultat. Dies wird im Folgenden am Beispiel der Regelung der Nickdynamik aus Kapitel 5.2 demonstriert.

### D.1 Reglerentwurf am Beispiel der Nickdynamik

Für den Reglerentwurf der Nickdynamik wird das in Anhang C beschriebene LPV-System der erweiterten Regelstrecke betrachtet, welches in Kapitel 5.2.3 für die Optimierung und in Kapitel 5.2.5 für die lineare Analyse der Nickdynamik-Regelung verwendet wurde. Bei der Anwendung des in Kapitel 3.3.2 entwickelten Verfahrens auf diese Regelstrecke mit 14 Zustandsgrößen und den beiden Messgrößen  $y = (f_{z_c}^*, q)^T$  tritt die einleitend in diesem Kapitel erwähnte Problematik auf, dass das resultierende LMI-Problem für dieses System nicht lösbar ist. In Kapitel 5.2 wurde allerdings mit dem Entwurf einer Zustandsrückführung basierend auf einem LPV-Modell der reinen Nickdynamik erfolgreich gezeigt, dass eine stabile Lösung für die betrachtete Regelstrecke existiert. Damit zeigt sich, dass die Menge aller möglichen Lösungen durch die zusätzliche Bedingung in diesem Fall so stark beschränkt wird, dass alle möglichen stabilisierenden Lösungen ausgeschlossen werden. Damit eine Lösung des Problems der Ausgangsrückführung gefunden werden kann, wird daher die Ordnung

der Regelstrecke mit Hilfe des Ordnungsreduktionsverfahrens der Residualisierung verkleinert. Dieses Verfahren ermöglicht es, gezielt einzelne Zustandsgrößen aus dem Modell zu entfernen und so dessen Ordnung zu reduzieren. Dieses Verfahren wird in Skogestad und Postlethwaite (2001, S. 450-451) für die Anwendung auf LTI-Systeme beschrieben und wird in diesem Fall lokal in jedem Gitterpunkt einzeln angewendet.

Bei einer Modellreduktion durch Residualisierung werden die zeitlichen Ableitungen der zu entfernenden Zustandsgrößen als Null angenommen. Anschließend werden die dabei entstehenden Gleichungen nach den zu entfernenden Zustandsgrößen aufgelöst und in die restlichen Zustandsdifferentialgleichungen eingesetzt. Dadurch wird erreicht, dass das reduzierte Modell  $\mathbf{G}_r$  im stationären Zustand dem ursprünglichen System  $\mathbf{G}$  gleicht, also  $\mathbf{G}(0) = \mathbf{G}_r(0)$  gilt. Somit wird die stationäre Verstärkung des Systems erhalten. Für die Reduktion wird der Zustandsvektor  $x$  des zu reduzierenden Systems in die beiden Teile

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

aufgeteilt. Dabei beschreibt der Vektor  $x_2$  den Teil des Zustandsvektors  $x$ , der durch die Ordnungsreduktion entfernt werden soll. Somit ergibt sich für den in (D.1) aufgeteilten Zustandsvektor die folgende Struktur im zu reduzierenden Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \cdot u, \quad (\text{D.2})$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{D} \cdot u, \quad (\text{D.3})$$

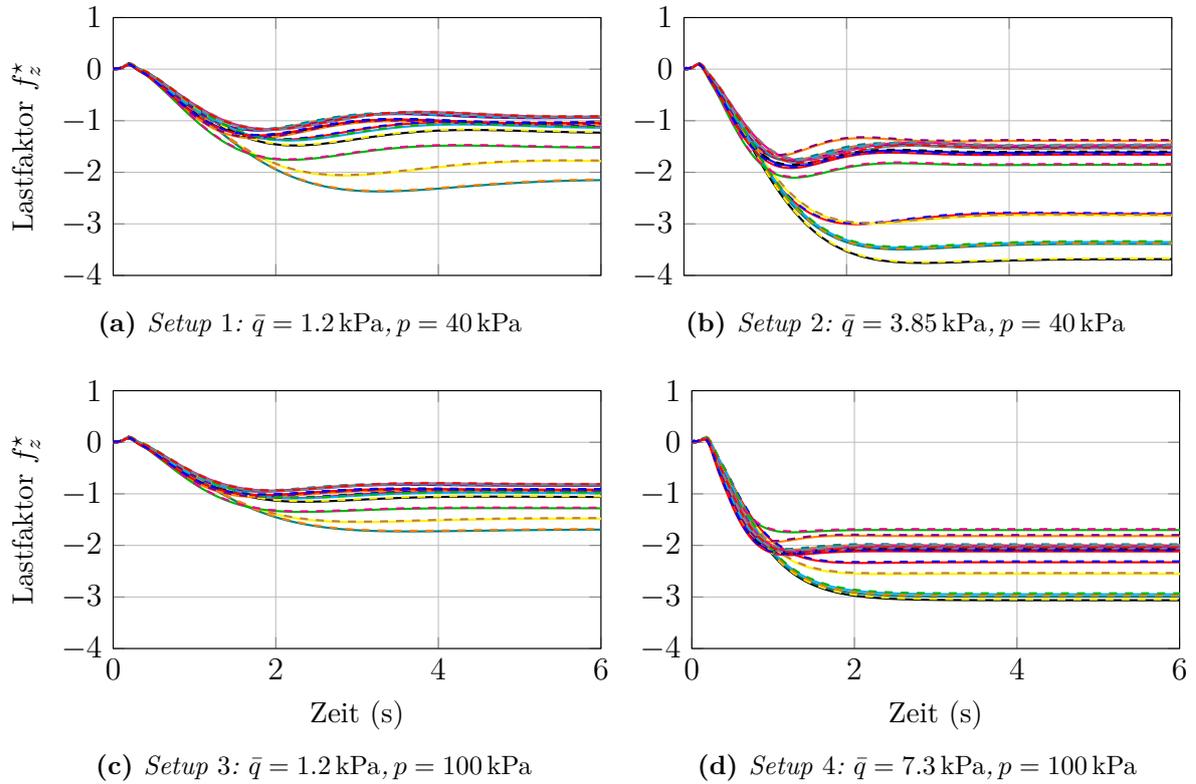
wobei  $\mathbf{A}_{11}$  eine  $(k \times k)$ -Matrix darstellt und  $k+1$  den Index des ersten abgeschnittenen Zustandes beschreibt. Die Dimensionen aller anderen in (D.3) auftretenden Matrizen ergeben sich entsprechend.

Die Zustandsgrößen in  $x_2$  werden aus dem System entfernt, indem in (D.3)  $\dot{x}_2 = 0$  gesetzt wird. Anschließend werden die resultierenden Gleichungen nach  $x_2$  in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $u$  aufgelöst und in die übrigen Differentialgleichungen eingesetzt. Somit entsteht mit

$$\dot{x}_1 = \underbrace{(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})}_{\tilde{\mathbf{A}}} x_1 + \underbrace{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)}_{\tilde{\mathbf{B}}} u, \quad (\text{D.4})$$

$$y = \underbrace{(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})}_{\tilde{\mathbf{C}}} x_1 + \underbrace{(\mathbf{D} - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)}_{\tilde{\mathbf{D}}} u, \quad (\text{D.5})$$

ein reduziertes System, welches nur noch durch die überbleibenden Zustandsgrößen in  $x_1$  beschrieben wird und das ursprüngliche Verhalten näherungsweise wiedergibt (Skogestad und Postlethwaite, 2001, S. 451).



**Abbildung D.1:** Vergleich zwischen vollständigem und reduziertem Modell der Nickdynamik an vier Gitterpunkten

Mit diesem Verfahren werden aus der erweiterten Regelstrecke aus Anhang C einige Zustandsgrößen entfernt. Der Fokus dieser Ordnungsreduktion liegt auf dem Erhalt der Genauigkeit in dem Übertragungsverhalten von der Nickbeschleunigung  $\dot{q}_c$  als Stellgröße auf den Lastfaktor  $f_z^*$  als die betrachtete Regelgröße. Damit dieses Übertragungsverhalten weitestgehend unverändert erhalten bleibt, werden in der Regelstrecke nur die Einflüsse der Strukturodynamik auf die Zustandsgröße  $q$  sowie die Tiefpassfilterung der entsprechenden Messgröße entfernt. Das dadurch entstehende reduzierte System besteht dann nur noch aus 10 Zustandsgrößen und gibt das Übertragungsverhalten  $\dot{q}_c \rightarrow f_z^*$  exakt wieder. Nur in dem Übertragungsverhalten  $\dot{q}_c \rightarrow q$  kommt es durch die Vernachlässigung von vier Zustandsgrößen zu einem abweichenden Systemverhalten. Der Vergleich des Übertragungsverhaltens  $\dot{q}_c \rightarrow f_z^*$  zwischen dem ursprünglichem und reduzierten System ist exemplarisch am Beispiel der Sprungantworten in den vier Eckpunkten des  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Gitters und in allen Lastfällen in Abbildung D.1 dargestellt. Die Sprungantwort des reduzierten Systems ist dabei gestrichelt dargestellt.

Es wird deutlich, dass durch das Entfernen der vier genannten Zustandsgrößen das Übertragungsverhalten  $\dot{q}_c \rightarrow f_z^*$  des Systems kaum beeinflusst wurde. Mit dieser

Reduktion ist dann ein Entwurf einer Ausgangsrückführung, wie er in Kapitel 3.3.2 vorgestellt wurde möglich, weil für die erforderlichen LMIs mit Hilfe der so erhaltenen reduzierten Regelstrecke Lösungen existieren.

Für den Reglerentwurf wird ebenfalls die in Abbildung 5.4 dargestellte Reglerstruktur verwendet und somit kommt ebenfalls der in Kapitel 3.3.3 vorgestellte Ansatz für den Entwurf einer Regelung mit zwei Freiheitsgraden zur Anwendung. Hierzu müssen die LMIs in Theorem 3.6 für das betrachtete Regelungsproblem erfüllt werden. Für die Regler-Synthese muss analog zu dem Reglerentwurf in Kapitel 5.2 die Form der unbekannt Matrix-Funktionen  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$ ,  $\mathbf{M}(\hat{\rho})$ ,  $\mathbf{N}(\hat{\rho})$  und  $\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho})$  festgelegt werden. Um die Vergleichbarkeit mit den in Kapitel 5.2 ermittelten Regler zu gewährleisten, wird in diesem Fall ebenfalls ein Ansatz mit einer parameterabhängigen Lyapunov-Matrix  $\mathbf{P}(\hat{\rho})$  verwendet. Aus diesem Grund werden auch für die Beschränkungen der Änderungsraten mit

$$\dot{\bar{q}} \in [-50, 50] \text{ Pa/s}, \quad \dot{\bar{p}} \in [-100, 100] \text{ Pa/s} \quad (\text{D.6})$$

die gleichen Werte wie in Kapitel 5.2 verwendet. Des Weiteren werden für die unbekannt Matrix-Funktionen ebenfalls Polynome der Form

$$\mathbf{P}(\hat{\rho}) = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{P}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{P}_{p,j}, \quad (\text{D.7a})$$

$$\mathbf{M}(\hat{\rho}) = \mathbf{M}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{M}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{M}_{p,j}, \quad (\text{D.7b})$$

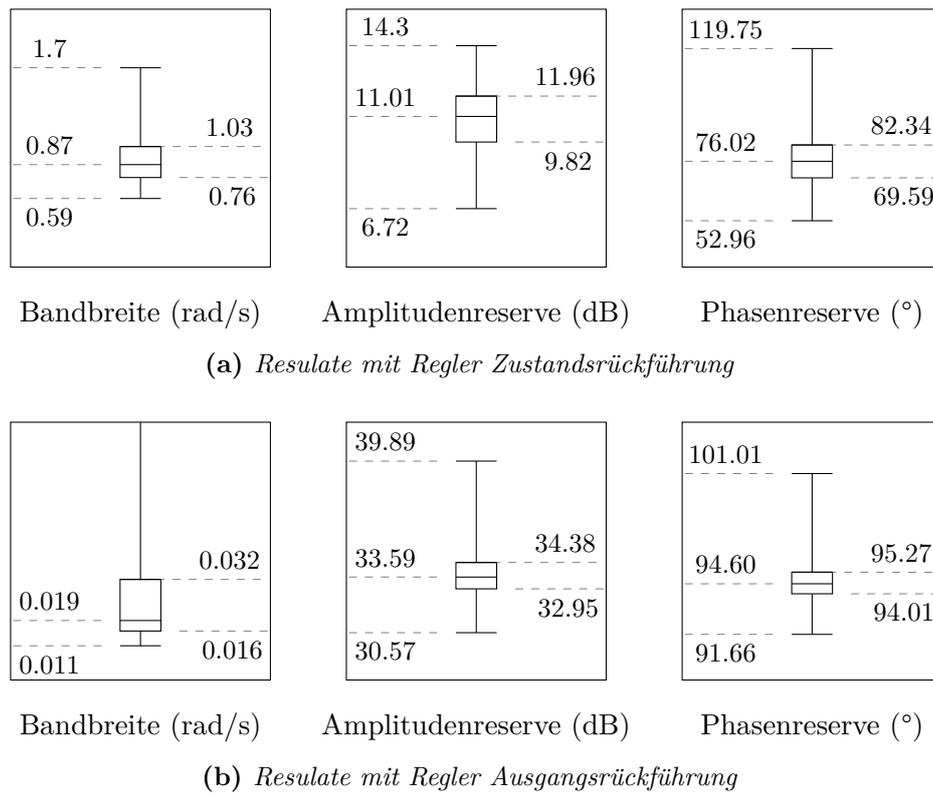
$$\mathbf{N}(\hat{\rho}) = \mathbf{N}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{N}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{N}_{p,j}, \quad (\text{D.7c})$$

$$\mathbf{K}_{FF}(\hat{\rho}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^l \bar{q}^i \cdot \mathbf{K}_{\bar{q},i} + \sum_{j=1}^m \bar{p}^j \cdot \mathbf{K}_{p,j}, \quad (\text{D.7d})$$

mit den konstanten symmetrischen Matrizen  $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , sowie den konstanten Matrizen  $\mathbf{M}_k \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $\mathbf{N}_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  und  $\mathbf{K}_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  verwendet. Für die Ordnungen gilt analog  $l = 3$  und  $m = 2$ . Auch das sonstige Verfahren des Reglerentwurfs wurde zwecks der Vergleichbarkeit von Ergebnissen gleich dem Entwurf in Kapitel 5.2 gestaltet. Die Synthese wird ebenfalls mit dem gitterbasierten Verfahren und dem selben Parametergitter wie in Kapitel 5.2 durchgeführt und die für die Reglersynthese erforderlichen Gewichtungparameter  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_4$  werden ebenfalls mit der in Kapitel 5.2.3 erläuterten Optimierung ermittelt.

## D.2 Vergleich der beiden Entwürfe

In diesem Abschnitt wird der im vorherigen Kapitel D.1 entworfene Regler dem Entwurf aus Kapitel 5.2 gegenübergestellt. Hierzu werden beide Regler jeweils in einem



**Abbildung D.2:** Vergleich zwischen dem Regler mit Ausgangsrückführung und dem in Kapitel 5.2 entworfenen Regler mit Zustandsrückführung

geschlossenen Regelkreis mit dem LPV-System der erweiterten Regelstrecke mit 14 Zustandsgrößen aus Kapitel C.1 betrachtet und Anhand der in Kapitel 5.2.5 verwendeten Kriterien miteinander verglichen. Für den angestrebten Vergleich werden in jedem betrachteten Gitterpunkt mit der Bandbreite des Systems sowie dessen Amplituden- und Phasenreserve eine Optimierungsgröße und zwei definierte Beschränkungen herangezogen.

In Abbildung D.2 sind die erzielten Resultate mit beiden Reglern im gesamten Parameterbereich in Form der bereits in Kapitel 5.2.5 verwendeten Box-Whisker-Plots dargestellt. Bei der Auswertung der beiden Resultate wird deutlich, dass der mit einer Zustandsrückführung der reinen Nickdynamik entworfene Regler deutlich bessere Ergebnisse liefert, als der in Kapitel D.1 entworfene Regler auf Basis einer Ausgangsrückführung. Es zeigt sich, dass die dabei zusätzlich eingeführte Gleichheitsbedingung (siehe Kapitel 3.3.2), mit der das bilineare Ungleichungsproblems in ein lineares überführt wurde, eine Anwendung des vorgestellten Entwurfs merkbar erschwert. Wie es in Kapitel 3.3.2 erläutert wurde, führt diese zusätzliche Bedingung dazu, dass mit der durchgeführten Regler-Synthese nur noch eine Teilmenge aller das Problem lösender Regler gefunden werden kann. In diesem Fall resultiert dies in einem deutlich zu kon-

servativen Regler, wie die Werte für Amplituden- und Phasenreserve in Abbildung D.2 sehr eindeutig zeigen. Insbesondere die Amplitudenreserven fallen im Vergleich zum Entwurf aus Kapitel 5.2 sehr hoch aus. Das geht deutlich zu Lasten der Bandbreiten, welche im Fall der Ausgangsrückführung um mehr als den Faktor 10 geringer sind als im Fall der Zustandsrückführung. Als Ausnahme sei hier erwähnt, dass die Bandbreite in einzelnen Gitterpunkten deutlich höher ist (bis etwa 2 rad/s, wurde aus Darstellungsgründen in Abbildung D.2 nicht dargestellt). Dies betrifft einige Lastfälle mit einer eher hecklastigen Schwerpunktlage im Fall  $\bar{q} = 7.3$  kPa und  $\bar{p} = 100$  kPa, welche gut steuerbar sind. In der große Mehrheit aller Gitterpunkte liegt die Bandbreite jedoch im angesprochenen Bereich (75 % der Werte liegen unterhalb von 0.032 rad/s) und somit deutlich unterhalb von den Werten, die mit der Zustandsrückführung erzielt werden.

Basierend auf dem dargestellten Vergleich lässt sich festhalten, dass die durch die Einschränkungen der Synthese einer Ausgangsrückführung beinhalteten Nachteile, den durch die höhere Modellgüte erhaltenen Vorteilen deutlich überwiegen. Darüber hinaus zeigt sich, dass mit dem in Kapitel 5.2 durchgeführten Entwurf einer Zustandsrückführung trotz stärkerer Unterschiede zwischen erweiterter Regelstrecke und dem für den Entwurf verwendeten Modell der reinen Nickdynamik ein sehr gutes Resultat erzielt wurde. Daraus resultiert, dass die zusätzlichen Einschränkungen beim Entwurf der Ausgangsrückführung, die für die Überführung in ein konvexes LMI-Problem eingeführt werden mussten, bei dem hier behandelten Beispiel merkbare Probleme in der Lösung des Regelungsproblems hervorrufen. Das führt dazu, dass die erzielbare Menge an Reglern erheblich eingeschränkt wird und in diesem Fall zu einem nicht zufriedenstellenden Ergebnis führt. Dass für das behandelte Regelungsproblem eine deutlich bessere Lösung existiert, zeigt der Entwurf aus Kapitel 5.2. Darüber hinaus erfordert der Entwurf einer Ausgangsrückführung Rechenzeiten zur Synthese eines Reglers, die um den Faktor 10 größer sind als in dem Fall der Zustandsrückführung. Die Ursache ist hierfür in erster Linie in der größeren Menge an zu ermittelnden Variablen und der höheren Modellordnung zu suchen. Das führt in diesem Fall aufgrund der sehr vielen zu erfüllenden Kriterien zu einem sehr langen Entwurfsprozess. Dieser ist zwar mit Hilfe einer Optimierung weitestgehend automatisierbar, jedoch ist der gesamte Prozess mit dem Ansatz einer Zustandsrückführung der reinen Nickdynamik deutlich schneller und führt darüber hinaus noch zu deutlich besseren Resultaten. Insgesamt zeigt sich also recht deutlich, dass aufgrund der starken numerischen Einschränkungen das Verfahren in diesem Anwendungsfall zu keinen zufriedenstellenden Resultaten führt und sich aus diesem Grund gegen eine Anwendung entschieden wurde.

# Literaturverzeichnis

- Abbas, H. S., A. Ali, S. M. Hashemi** und **H. Werner**. 2014. LPV state-feedback control of a control moment gyroscope. *Control Engineering Practice* 24(1). 129–137.
- Amato, F.** 2006. *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer Berlin-Heidelberg.
- Apkarian, P., P. Gahinet** und **G. Becker**. 1995. Self-scheduled  $H_\infty$  Control of Linear Parameter-varying Systems: A Design Example. *Automatica* 31(9). 1251–1261.
- Åström, K. J.** und **R. M. Murray**. 2012. *Feedback Systems.* Princeton: Princeton University Press.
- Balas, G. J.** 2002. Linear, Parameter-Varying Control and Its Application To Aerospace Systems. *ICAS - International Congress of Aeronautical Sciences.*
- Balas, G., I. Fialho, A. Packard, J. Renfrow** und **C. Mullaney**. 1997. On the Design of LPV Controllers for the F-14 Aircraft Lateral-Directional Axis During Powered Approach. *Proc. of the American Control Conference.* IEEE. 123–127.
- Bates, D.** und **I. Postlethwaite**. 2002. *Robust Multivariable Control of Aerospace Systems. Control and Simulation.* Control and Simulation. Delft, Niederlande: DUP Science.
- Becker, G.** und **a. Packard**. 1994. Robust Performance of Linear Parametrically Varying Systems using Parametrically-Dependent Linear Feedback. *Systems & Control Letters* 23(3). 205–215.
- Becker, G., A. Packard, D. Philbrick** und **G. Balas**. 1993. Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: A Single Quadratic Lyapunov Approach. *Proc. of the American Control Conference.* IEEE. 2795–2799.
- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron** und **V. Balakrishnan**. 1994. *Linear Matrix Inequalities In System And Control Theory.* Philadelphia: SIAM.
- Brockhaus, R., W. Alles** und **R. Luckner**. 2011. *Flugregelung.* 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Casella, F.** und **M. Lovera**. 2008. LPV/LFT Modelling and Identification: Overview, Synergies and a Case Study. *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design.* San Antonio (Texas), USA. 852–857.

- Contzen, M. P.** 2017. Robust PI design with Pole Allocation for MIMO Systems using LMI. *25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Valletta, Malta. 882–887.
- Crusius, C.** und **A. Trofino.** 1999. Sufficient LMI Conditions for Output Feedback Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(5). 1053–1057.
- Ebihara, Y., D. Peaucelle** und **D. Arzelier.** 2014. On the Structure of Generalized Plant Convexifying Static  $H_\infty$  Control Problems. *Automatica* 50(6). 1706–1714.
- Feron, E., P. Apkarian** und **P. Gahinet.** 1996. Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41(7). 1041–1046.
- Gahinet, P.** und **P. Apkarian.** 1994. A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 4(4). 421–448.
- Gahinet, P., P. Apkarian** und **M. Chilali.** 1996. Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41(3). 436–442.
- Ganguli, S., A. Marcos** und **G. Balas.** 2002. Reconfigurable LPV Control Design for Boeing 747-100/200 Longitudinal Axis. *American Control Conference*. 41–46.
- Goßmann, F., G. P. Falconí** und **F. Svaricek.** 2017. Fault Tolerant Control Approach for Passive Handling of Actuator Degradation of a Hexacopter using an LPV State-Feedback Controller with Partly-Measured Parameters. *25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Valletta, Malta. 467–473.
- Goßmann, F., A. Gabrys** und **F. Svaricek.** 2018. Control of Longitudinal Aircraft Motion with Loadcase Robustness using LPV-Control with Partly-Measurable Parameters. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Kissimmee (Florida), USA. 1 – 13.
- Goßmann, F., A. Gabrys** und **F. Svaricek.** 2020. Longitudinal Short-Period Aircraft Motion Control Under Loadcase Variation. *Proc. of the American Control Conference*. Denver (Colorado), USA. 4188 – 4194.
- Goßmann, F.** und **F. Svaricek.** 2019. Parameter Dependent Static Output Feedback Control - An LPV Approach. *8th European Control Conference (ECC 2019)*. Neapel, Italien. 3322–3327.
- Hoffmann, C.** und **H. Werner.** 2015. A Survey of Linear Parameter-Varying Control Applications Validated by Experiments or High-Fidelity Simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 23(2). 416–433.

- Hoyle, D., R. Hyde und D. Limbeer.** 1991. An  $H_\infty$  Approach to Two Degree of Freedom Design. *IEEE Conference on Decision & Control*. Brighton, England. 1581–1585.
- Hull, D. G.** 2007. *Fundamentals of Airplane Flight Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Joos, H.-D.** 2013. *MOPS - Multi-Objective Parameter Synthesis User Guide V6.5*. Technical report. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Robotik und Mechatronik. Oberpfaffenhofen.
- Joos, H.-D., J. Bals, G. Looye, K. Schnepfer und A. Varga.** 2002. A Multi-Objective optimisation-based Software Environment for Control Systems Design. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design Proceedings*. Glasgow, Schottland. 7–14.
- Khalil, H. K.** 2002. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Pearson Education.
- Köse, I. E. und F. Jabbari.** 1999. Control of LPV systems with partly measured parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(3). 658–663.
- Leith, D. J. und W. E. Leithead.** 2000. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control* 73(11). 1001–1025.
- Lofberg, J.** 2004. YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan. 284–289.
- Lunze, J.** 2010. *Regelungstechnik 1 - Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Bochum: Springer Berlin-Heidelberg.
- McRuer, D., D. Graham und I. Ashkenas.** 1973. *Aircraft Dynamics and Automatic Control*. Princeton: Princeton University Press.
- MIL-DTL-9490E** 2008. *General Specification for Flight Control Systems - Design, Installation and Test of Piloted Aircraft*. Technical report. United States Airforce. Washington, USA.
- MIL-HDBK-1797** 1997. *Flying Qualities of Piloted Aircraft*. Technical report. United States Department of Defense. Washington, USA.
- Papageorgiou, G., K. Glover, G. D’Mello und Y. Patel.** 2000. Taking Robust LPV Control into Flight on the VAAC Harrier. *IEEE Conference on Decision and Control*. 4558–4564.

- Prempain, E.** und **I. Postlethwaite.** 2001b. Static Output Feedback Stabilisation with  $H_\infty$  Performance for a Class of Plants. *Systems and Control Letters* 43(3). 159–166.
- Prempain, E.** und **I. Postlethwaite.** 2001a. Feedforward Control: A Full-Information Approach. *Automatica* 37(1). 17–28.
- Raisch, J.** 1994. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich.* München: Oldenbourg Verlag.
- Rotondo, D., F. Nejjari** und **V. Puig.** 2014. Robust State-Feedback Control of Uncertain LPV Systems: An LMI-Based Approach. *Journal of the Franklin Institute* 351(5). 2781–2803.
- Rugh, W. J.** und **J. S. Shamma.** 2000. Research on Gain Scheduling. *Automatica* 36(10). 1401–1425.
- Sadabadi, M. S.** und **D. Peaucelle.** 2016. From Static Output Feedback to Structured Robust Static Output Feedback: A Survey. *Annual Reviews in Control* 42. 11–26.
- Safonov, M., K. Goh** und **J. Ly.** 1994. Control System Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities. *American Control Conference.* 45–49.
- Seiler, P., A. Packard** und **P. Gahinet.** 2020. An Introduction to Disk Margins [Lecture Notes]. *IEEE Control Systems Magazine* 40(5). 78–95.
- Seiler, P. J.** und **A. Hjartarson.** 2015. A Toolbox for Modeling, Analysis, and Synthesis of Parameter Varying Control Systems. *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems.* Grenoble, France. 139–145.
- Shamma, J. S.** und **M. Athans.** 1991a. Gain Scheduling: Potential Hazards and Possible Remedies. *American Control Conference.* 516–521.
- Shamma, J. S.** und **M. Athans.** 1990. Analysis of Gain Scheduled Control for Nonlinear Plants. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35(8). 898–907.
- Shamma, J. S.** und **M. Athans.** 1991b. Guaranteed Properties of Gain Scheduled Control for Linear Parameter-Varying Plants. *Automatica* 27(3). 559–564.
- Skogestad, S.** und **I. Postlethwaite.** 2001. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design.* Chichester: John Wiley & Sons.
- Sloth, C., T. Esbensen** und **J. Stoustrup.** 2010. Active and Passive Fault-Tolerant LPV Control of Wind Turbines. *Proc. of the American Control Conference.* 4640–4646.

- Spillman, M. S.** 2000. Robust Longitudinal Flight Control Design Using Linear Parameter-Varying Feedback. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23(1). 101–108.
- Weiser, C., D. Ossmann und G. Looye.** 2020. Design and Flight Test of a Linear Parameter Varying Flight Controller. *CEAS Aeronautical Journal* 11(4). 955–969.
- Wu, F.** 1995. *Control of Linear Parameter Varying Systems*. Dissertation. UC Berkeley.
- Wu, F., A. Packard und G. Balas.** 2002. Systematic Gain-Scheduling Control Design: a Missile Autopilot Example. *Asian Journal of Control* 4(3). 341–347.
- Wu, F., X. H. Yang, A. Packard und G. Becker.** 1996. Induced  $L_2$ -Norm Control for LPV Systems with Bounded Parameter Variation Rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 6. 983–998.