Konstruktion induktiv geordneter Modelle aus algebraischen Spezifikationen

Peter Kempf, Gunther Schmidt, Michael Winter
Fakultät für Informatik
Universität der Bundeswehr München

Zusammenfassung

Bei theoretischen Untersuchungen zur Softwareentwicklung werden unter anderem Interpretationsmittel für Funktionen höherer Ordnung und algebraische Spezifikationen benötigt. Zur semantischen Beschreibung von Funktionen höherer Ordnung verwendet man Konstrukte wie algebraische cpo's. Algebraische Spezifikationen werden mit Hilfe der Termalgebra und einer Kongruenz, die durch die Gesetze induziert wird, interpretiert. Will man nun semantische Bereiche direkt aus algebraischen Spezifikationen gewinnen, so muß die Informationsordnung mit der induzierten Kongruenz verträglich sein. Frühere Arbeiten (siehe [Möller 85, Jiři et al. 91, Jouannoud Okada 91]) führten dabei eine Ordnung auf der dividierten Termalgebra ein und erhielten mittels Idealvervollständigung ein Modell. Wir zeigen, daß diese Methode zu ungewollten Effekten führt. Durch unseren Ansatz über die sogenannten vollständigen und approximationserhaltenden Kongruenzen auf Bereichen mit Keimen (siehe [Gunter 85, Schmidt et al. 86, Schmidt et al. 89]) lassen sich diese Effekte vermeiden. Dieser Ansatz erlaubt es uns, direkt aus einer algebraischen Spezifikation mit einer erweiterten Herleitungslogik über den inversen Limes einen semantischen Bereich zu konstruieren, der das initiale Modell in der Klasse der induktiv geordneten Modelle dieser Spezifikation ist.

1 Einleitung

Zwei Methoden sind für die theoretische Betrachtung von Softwareentwicklung von großer Bedeutung: Algebraische Spezifikationen und die Semantik von Programmiersprachen.

Eine algebraische Spezifikation wird meist durch Restklassen der freien Termalgebra über einer Signatur interpretiert. Die Gesetze der Spezifikation induzieren dabei die Äquivalenzrelation. Diese so entstandene Algebra ist zunächst ungeordnet. Allerdings benötigt man schon zur semantischen Beschreibung des klassischen λ-Kalküls geordnete Mengen, speziell induktive Ordnungen. Die Kompaktheit der Elemente und die Algebraizität eines solchen semantischen Bereiches sind dabei Voraussetzung für die Bildung des Funktionsbereichs (siehe [Gunter 85]).

Die Kombination beider Ansätze wirft Verträglichkeitsfragen auf. Wie müssen Ordnung und Kongruenz beschaffen sein, damit der Quotientenbereich wieder eine induktive Ordnung bildet? Welche Restklassen sind kompakt? Existiert der Funktionsbereich?

Frühere Arbeiten (siehe z.B. [Möller 85, Jiři et al. 91, Jouannoud Okada 91]) führten dazu eine Ordnung erst auf der dividierten Termalgebra ein und erhielten mittels Idealvervollständigung ein Modell. Wir wollen im Gegensatz dazu Modelle durch direkte Kongruenzbildung auf einer Term-Ordnung konstruieren. Ferner lassen wir ein Sondersymbol $\perp$ für „undefiniert“ zu, das unbeschränkt zur Term- und Formelbildung zur Verfügung steht. Weiter sollen die Funktionssymbole „lazy“ und damit nicht notwendigerweise strikt interpretiert werden. Mit Hilfe der folgenden Forderungen erhalten wir die gewünschte Ordnung auf den Termen:

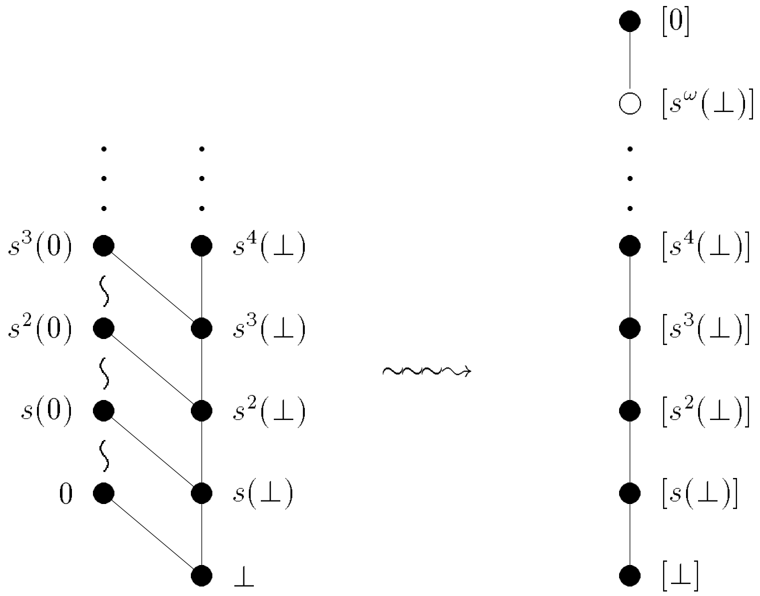
1. Der Term $\perp$ ist das kleinste Element der Algebra.
2. Die Funktionssymbole sind stetige Abbildungen auf der vervollständigten Termalgebra.

Durch die erste Forderung wird $\perp$ als Symbol für „undefiniert“ wie üblich das kleinste Element der Ordnung. Im initialen Modell gilt offensichtlich $f(\perp) \neq \perp$. Erst durch Hinzunahme entsprechender Gesetze wird f in der dividierten Termalgebra zu einer strikten Abbildung. Die durch diese Axiome induzierte Ordnung auf den Termen drückt den Grad der Definiertheit eines Elements in der Algebra aus. Die früheren Ansätze führen unter diesen Voraussetzungen zu einem ungewollten Effekt. Betrachten wir folgende algebraische Spezifikation:

```
type Natquot;
  cons     0 : Natquot;
  func     s : Natquot -> Natquot;
  axioms   s(0) = 0;
endoftype;
```

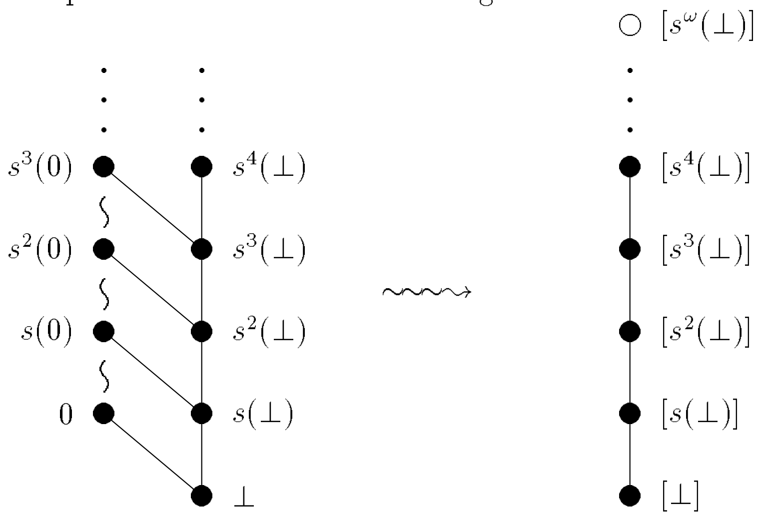
Für diese Spezifikation erhält man die linke Ordnung der folgenden Grafik (die „lazy“-natürlichen Zahlen) als geordnete Termalgebra, wobei die durch die Gesetze induzierte Äquivalenzrelation auf den Termen durch $\sim$ gekennzeichnet ist. Diese Ordnung ist nicht induktiv, da die Kette $\perp, s(\perp), s^2(\perp), s^3(\perp), \ldots$ durch keinen Term nach oben beschränkt wird und damit kein Supremum besitzt. Wir diskutieren nun Möglichkeiten, diese Ordnung induktiv zu machen.

1. Versuch: Ein solches Supremum gewinnt man durch Vervollständigung der Ordnung. Dieses Supremum bezeichnen wir mit $s^\omega(\perp)$ in Anlehnung an den nichtendlichen „Term“ bestehend aus einer ω-fachen Anwendung von s auf $\perp$. Geht man in unserem Beispiel zunächst zur geordneten Menge von Restklassen über und vervollständigt diese, so erhält man die rechte induktive Ordnung.



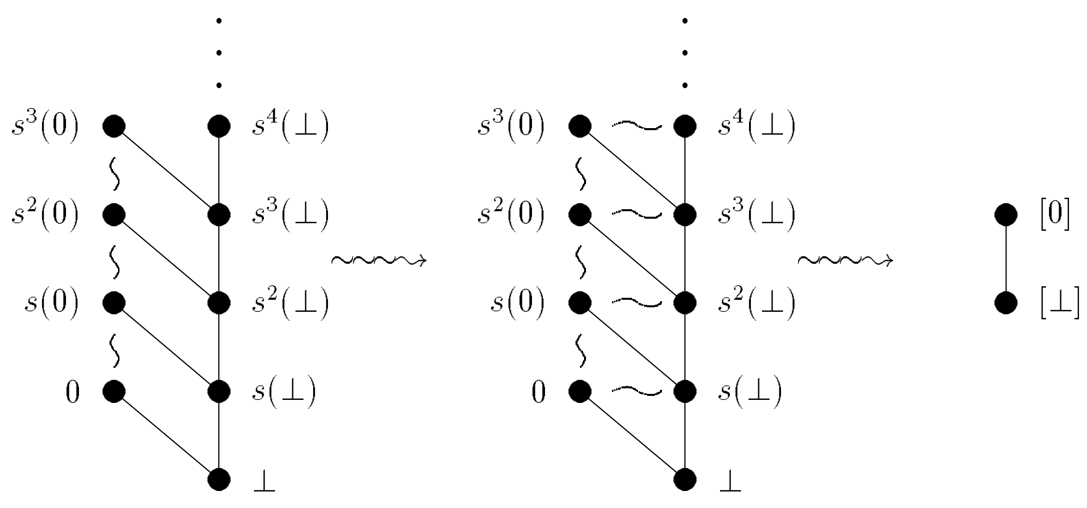
Die Restklasse des Elements 0 liegt nach diesem Verfahren über dem nichtkompakten Element $[s^\omega(\bot)]$. Dies erscheint schon deshalb nicht sinnvoll, da die „choice"-Funktion, die jeder kompakten Restklasse einen Vertreter zuordnet, keine monotone Funktion ist. Also ist der dividierte Bereich kein Retrakt des Ursprünglichen. Damit ist dieser Ansatz auch nicht modular, d.h. eine nachträgliche Erweiterung der Äquivalenz führt zu einem anderen Modell als eine vor der Modellbildung vergrößerte Gesetzesmenge.

2. Versuch: Eine zweite mögliche Vorgehensweise ist es, zunächst zu dividieren und anschließend nur die kompakten Elemente der Ordnung zu vervollständigen. In unserem Beispiel liefert dieses Verfahren folgendes:



In diesem Fall ist die Restklasse der 0 gar nicht mehr vorhanden, da sie in der dividierten Ordnung kein kompaktes Element ist und somit vor der Vervollständigung aus der Ordnung entfernt wurde. Eine Interpretationsfunktion kann daher nicht mehr eine einfache Klassenbildung sein. Selbst eine Identifizierung der Klasse der 0 mit der Restklasse $[s^\omega(\perp)]$ scheint nicht sinvoll, da alle zur 0 äquivalenten Terme ursprünglich nur endlich oft echt approximiert werden konnten, also kompakt waren. Im dividierten Bereich ist eine unendliche Approximation dieser Restklasse möglich, da sie ein nichtkompaktes Element der Ordnung ist. Tatsächlich kann man aber in endlicher Zeit zu entscheiden, ob ein Element in der Restklasse der 0 liegt. Analog kann ein Programm auch jedes Element aus dieser Restklasse in endlicher Zeit erzeugen. Hier zeigt es sich, daß sich die Position einer Restklasse in der dividierten Ordnungsstruktur nicht durch die Menge aller Elemente dieser Restklasse „additiv" ergibt, sondern, daß sie durch eine Art „Durchschnittsbildung" über alle Elemente bestimmt wird.

3. Versuch: Die durch die Gesetze induzierte Äquivalenz auf unserem Bereich ist im obigen Beispiel zu klein, d.h. sie identifiziert nicht genügend viele Elemente. Deshalb werden wir später die Herleitungslogik der Spezifikation erweitern, so daß die Äquivalenz von 0 und $s(\perp)$ im obigen Beispiel herleitbar ist. Dies spiegelt auch die Forderung wieder, daß alle Funktionssymbole „lazy" interpretiert werden sollen. Aus $s(0) = 0$ folgt $s(t) = 0$ für alle Terme $t \in \{0, s(0), s^2(0), \ldots\}$. Somit liefert die Applikation von s auf jeden echten Wert — einen Term ohne $\perp$ — die Konstante 0, d.h. die Auswertung von $s(t)$ kann ohne Kenntnis der Gestalt von t geschehen, was in einem „lazy"-Kontext auch $s(\perp) = 0$ zur Folge haben sollte. Damit erhalten wir nun folgenden Übergang von einer geordneten Termalgebra zu einem ordnungstheoretischen Modell:



Dazu benötigen wir eine Klasse semantischer Bereiche, die unter Quotientenbildung abgeschlossen ist. Weiter sollten diese Bereiche konstruktiv über endlichen Teilbereichen, den sogenannten Keimen, aufgebaut sein. Die Klasse der Bereiche mit Keimen und Kongruenzen wurde erstmals 1982 und 1984 im Abschnitt über Bereichskonstruktionen in einer Vorlesung über Semantik von Programmiersprachen von G. Schmidt betrachtet. Der Fall „Kongruenz = Identität" wurde ausführlich in [Gunter 85, Schmidt et al. 86, Schmidt et al. 89] behandelt. Wir zeigen in dieser Arbeit, daß die Klasse der Bereiche mit Keimen und vollständigen und approximationserhaltenden Kongruenzen die oben geforderten Eigenschaft hat. Dieses Ergebnis geht auf M. Abadi und G. Plotkin zurück (siehe [Abadi Plotkin 90]).

Mit Hilfe dieser Klasse von semantischen Bereichen konstruieren wir zu einer gegebenen algebraischen Spezifikation ein geordnetes initiales Modell, das unsere Anforderungen erfüllt.

Dieser Artikel ist folgendermaßen gegliedert:

In Kapitel 2 geben wir die grundlegenden ordnungstheoretischen Begriffe und die Definition eines Keimes an.

Mit Hilfe der vollständigen und approximationserhaltenden Kongruenzen definieren wir in Kapitel 3 Bereiche mit Keimen und Kongruenzen (kurz Bereiche) und beweisen, daß der Quotientenbereich stets wieder ein Bereich ist.

Anschließend beschäftigen wir uns in Kapitel 4 mit Bereichskonstruktionen wie Summen-, Produkt- und Funktionsbereich. Wir zeigen, daß die Kategorie der Bereiche mit stetigen und kongruenzerhaltenden Abbildungen bikartesisch abgeschlossen ist.

Danach betrachten wir in Kapitel 5 Retraktionsfolgen von Bereichen in der Kategorie der Bereiche mit adjungierten Paaren. Es stellt sich heraus, daß diese Kategorie inverse Limiten hat.

Die Kongruenzerweiterung modelliert die Hinzunahme eines neuen Gesetzes in eine gegebene Spezifikation. Wir zeigen in Kapitel 6, daß eine Kongruenz auf bestimmte Art und Weise erweitert werden kann, ohne daß die entscheidenden Eigenschaften verloren gehen.

Mit Hilfe dieser Theorie konstruieren wir in Kapitel 7 aus einer Spezifikation einen semantischen Bereich. Wir zeigen hier, daß dieser Bereich das initiale Modell in der Klasse der induktiv geordneten Modelle der Spezifikation ist.

2 Ordnungen und Keime

In diesem Artikel verwenden wir konkrete Relationen zwischen Mengen A und B, also Teilmengen vom kartesischen Produkt $A \times B$. Für die Beziehung $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x R y$. Die Komposition von zwei Relationen R und S notieren wir als RS. Wir verwenden die üblichen mengentheoretischen Operationen auf Relationen. Zusätzlich bezeichnet R^{T} die Transponierte von R. Die leere Relation, die Allrelation und die Identität notieren wir durch $0, L$ und I.

Zunächst führen wir einige ordnungstheoretische und relationenalgebraische Begriffe ein (siehe [Schmidt Ströhlein 89]).

Eine *Präordnung* auf einer Menge D ist eine Relation P (in Infixschreibweise $\preceq$), die $I \subseteq P$ und $PP \subseteq P$ erfüllt, also reflexiv und transitiv ist.

Eine *Ordnung* auf einer Menge D ist eine Präordnung E auf D (in Infixschreibweise $\sqsubseteq$), die zusätzlich $E \cap E^{\mathsf{T}} \subseteq I$ erfüllt, also antisymmetrisch ist.

Eine Teilmenge $X \subseteq D$ einer prägeordneten Menge (D, P) heißt *gerichtet*, wenn jede endliche Teilmenge von X eine obere Schranke in X besitzt. Eine geordnete Menge (D, E) heißt eine *induktive Ordnung*, falls jede gerichtete Teilmenge $X \subseteq D$ ein Supremum besitzt. Dieses Supremum bezeichnen wir mit $\mathtt{sup}\, X$.

Eine Relation R auf einer induktiven Ordnung (D, E) nennen wir *vollständig*, wenn für jede Teilmenge $X \subseteq R$, die bzgl. der Produktordnung $\pi E \pi^{\mathsf{T}} \cap \rho E \rho^{\mathsf{T}}$ gerichtet ist (π und ρ bezeichnen die erste bzw. zweite Projektion), auch $\mathtt{sup}\, X \subseteq R$ folgt. Eine vollständige Relation erlaubt es also, Relationenbeziehungen auf Suprema fortzusetzen

$$X \subseteq R \text{ gerichtet} \quad \Longrightarrow \quad \mathtt{sup}\, \pi(X)\, R\, \mathtt{sup}\, \rho(X).$$

Dabei sind $\pi(X), \rho(X)$ aufgrund der Definition der Produktordnung selbst gerichtete Mengen und damit $\mathtt{sup}\, \pi(X)$ und $\mathtt{sup}\, \rho(X)$ wohldefiniert.

Ein Element $a \in D$ einer induktiven Ordnung (D, E) heißt *kompakt*, wenn für jede gerichtete Teilmenge $X \subseteq D$ mit $a \sqsubseteq \mathtt{sup}\, X$ ein Element $x \in X$ existiert, so daß $a \sqsubseteq x$ gilt.

Eine Relation $F \subseteq M \times N$ die $F^{\mathsf{T}} F \subseteq I$ erfüllt, also eindeutig ist, heißt eine *(partielle) Funktion*. Erfüllt eine Funktion zusätzlich die Totalitätsbedingung $I \subseteq F F^{\mathsf{T}}$ so heißt F eine *Abbildung*. Wir bezeichnen mit dem zugehörigen kleinen Buchstaben die Funktionen oder Abbildungen in ihrer klassischen Schreibweise, also $f : M \longrightarrow N$ und $f(x) = y$ statt $F \subseteq M \times N$ und xFy und ggf. $f(x)$ undefiniert, falls $\forall y : \neg(xFy)$.

Sind (D_1, P_1) und (D_2, P_2) zwei Präordnungen, so heißt eine Abbildung $f : D_1 \to D_2$ *monoton*, wenn für alle Elemente $x, y \in D_1$ mit $x \preceq_1 y$ auch $f(x) \preceq_2 f(y)$ gilt. Relational lautet die Monotoniebedingung $P_1 F \subseteq F P_2$.

Sind (D_1, E_1) und (D_2, E_2) zwei induktive Ordnungen, so heißt eine Funktion $f : D_1 \longrightarrow D_2$ *stetig*, wenn für jede gerichtete Teilmenge $X \subseteq D_1$ auch $f(X) \subseteq D_2$ gerichtet ist und $\mathtt{sup}\, f(X) = f(\mathtt{sup}\, X)$ gilt. Ein Prädikat $\Phi \subseteq D$ heißt stetig, falls die von Φ induzierte Abbildung $\phi : D \longrightarrow \mathbb{B}$ stetig ist. Dabei ist $\mathbb{B} := \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$ die Menge der Wahrheitswerte mit trivialer Ordnung.

Ist $f : D \longrightarrow D$ eine stetige Abbildung auf einer induktiven Ordnung (D, E), und gibt es ein Element $b \in D$ mit $b \sqsubseteq f(b)$, so hat f einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein Element $a \in D$ mit $f(a) = a$. Dieser Fixpunkt läßt sich durch $a = \mathtt{sup}_{i \geq 0} f^i(b)$ berechnen.

Ist (D, E) eine induktive Ordnung, $f : D \longrightarrow D$ eine stetige Funktion, Φ ein stetiges Prädikat mit der induzierten Abbildung $\phi : D \longrightarrow \mathbb{B}$ und $a = \mathtt{sup}_{i \geq 0} f^i(b)$ ein Fixpunkt von f, dann gilt das Prinzip der Berechnungsinduktion, d.h. aus $\phi(b) = \mathtt{true}$ mit $b \sqsubseteq a$ (Induktionsanfang) und $\forall d \in D : \phi(d) = \mathtt{true} \longrightarrow \phi(f(d)) = \mathtt{true}$ (Induktionsschluß) folgt $\phi(a) = \mathtt{true}$.

Die reflexiv-transitive Hülle A^* einer Relation A ist definiert als die kleinste Relation $A^* \supseteq A$, die reflexiv und transitiv ist. Weiter ist die Relation A^* ein Fixpunkt des

Funktionals $\tau_A(X) = I \cup AX$ und läßt sich berechnen durch $A^* = \bigcup_{i \geq 0} \tau_A^i(0)$.

Als Grundlage benötigen wir nun noch den Begriff des Keims einer geordneten Menge.

Definition 2.1 (Keim) *Sei (D, E) eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $K \subseteq D$ heißt ein Keim von D, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- *K ist endlich.*
- *Alle $a \in K$ sind kompakt.*
- *Für jedes Element $x \in D$ hat die Menge $\{a \in K \mid a \sqsubseteq x\}$ ein größtes Element. Dieses Element bezeichnen wir als die Approximation von x im Keim K*

$$\mathrm{app}_K(x) = \mathtt{sup}\,\{a \in K \mid a \sqsubseteq x\}. \qquad \square$$

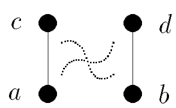
Die Approximationsabbildung app_K (in relationaler Schreibweise APP_K) ist nach [Schmidt et al. 86] für jeden Keim K stetig.

3 Kongruenzen

Wir definieren nun vollständige und approximationserhaltende Kongruenzen. Im Anschluß daran geben wir die Definition eines Bereiches mit Keimen und Kongruenz an und zeigen, daß der Quotientenbereich stets wieder ein Bereich ist.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge D ist eine Relation Ξ (in Infixschreibweise $\equiv$), die $I \subseteq \Xi$, $\Xi\Xi \subseteq \Xi$ und $\Xi^{\mathsf{T}} \subseteq \Xi$ erfüllt, also reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Mit $[x]$ bezeichnen wir die Restklasse bzgl. des Elementes $x \in D$ und mit $[D]$ die Menge aller Restklassen in D.

Eine Äquivalenzrelation Ξ auf einer geordneten Menge (D, E), die $(E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathsf{T}} \subseteq \Xi$ erfüllt, heiße eine *Kongruenz* auf (D, E). Für eine Kongruenz ist garantiert, daß die Restklassen von Ξ aufgrund der Ordnungsbeziehungen ihrer Elemente geordnet werden können. Betrachten wir folgendes Beispiel einer Ordnung E mit einer Äquivalenz Ξ:



Da $a \sqsubseteq c$ und $b \sqsubseteq d$ gilt, sind die Restklassen $\{a, d\}$ und $\{b, c\}$ als äquivalent anzusehen. In diesem Fall ist demnach die durch die Ordnung E und die Äquivalenz Ξ induzierte Relation auf der Menge der Restklassen nur eine Präordnung. Die kleinste Kongruenz, die Ξ enthält, ist in unserem Beispiel die Allrelation L.

Eine ansonsten beliebige symmetrische Relation Ξ werden wir nun durch die Konstruktion $\Xi^{\diamond E} := (E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathsf{T}}$ zu einer Kongruenz erweitern. (Im folgenden schreiben wir $\Xi^\diamond$ statt $\Xi^{\diamond E}$, falls die Ordnung aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.)

Lemma 3.1 *Sei (D,E) eine induktiv geordnete Menge und Ξ eine symmetrische Relation auf D. Dann ist $\Xi^\diamond$ die kleinste Kongruenz auf (D,E), die Ξ enthält. Weiter ist $.^\diamond$ ein Hüllenoperator auf den symmetrischen Relationen.*

Beweis: Offensichtlich ist $(E\Xi)^*$ eine Präordnung. Damit folgt, daß $\Xi^\diamond$ eine Äquivalenzrelation ist.

Weiter ist $\Xi^\diamond$ auch eine Kongruenz auf D. Mit

$$(E\Xi^\diamond)^* \subseteq (E(E\Xi)^*)^* \subseteq (E\Xi(E\Xi)^*)^* \subseteq (E\Xi)^*$$

folgt dies aus

$$(E\Xi^\diamond)^* \cap (E\Xi^\diamond)^{*\mathsf{T}} \subseteq (E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathsf{T}} = \Xi^\diamond.$$

Aus $\Xi \subseteq (E\Xi)^*$ und $\Xi \subseteq \Xi^\mathsf{T} \subseteq (E\Xi)^{*\mathsf{T}}$ erhalten wir $\Xi \subseteq \Xi^\diamond$.

Sei Ξ' eine weitere Kongruenz auf (D,E) mit $\Xi \subseteq \Xi'$. Dann haben wir

$$\Xi^\diamond = (E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathsf{T}} \subseteq (E\Xi')^* \cap (E\Xi')^{*\mathsf{T}} \subseteq \Xi'.$$

Somit ist $\Xi^\diamond$ die kleinste Kongruenz auf (D,E), die Ξ enthält.

Sei nun $\Xi \subseteq \Xi'$. Dann folgt die Monotonie des Operators $.^\diamond$ aus $(E\Xi)^* \subseteq (E\Xi')^*$.

Aus $\Xi^\diamond \subseteq (\Xi^\diamond)^\diamond$ und $(\Xi^\diamond)^\diamond = (E\Xi^\diamond)^* \cap (E\Xi^\diamond)^{*\mathsf{T}} \subseteq \Xi^\diamond$ erhalten wir schließlich die Idempotenz. □

Ist $f : D_1 \to D_2$ eine Abbildung von einer Trägermenge D_1 mit Kongruenz Ξ_1 in eine weitere Trägermenge D_2 mit Kongruenz Ξ_2, so heiße f *kongruenzerhaltend*, wenn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \equiv_1 y$ auch $f(x) \equiv_2 f(y)$ gilt. In relationaler Schreibweise lautet diese Bedingung $\Xi_1 F \subseteq F\Xi_2$. Die Menge aller stetigen und kongruenzerhaltenden Abbildungen von einer induktiven Ordnung (D_1, E_1) mit Kongruenz Ξ_1 in eine induktive Ordnung (D_2, E_2) mit Kongruenz Ξ_2 bezeichnen wir mit $D_1 {\mapsto} D_2$.

Ist R eine Relation auf einer Ordnung (D,E) mit einer Menge $\mathcal{K}$ von Keimen, so heiße R *approximationserhaltend*, wenn aus xRy auch $\mathrm{app}_K(x) R \; \mathrm{app}_K(y)$ für alle Keime $K \in \mathcal{K}$ folgt.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dash, "R"] \arrow[d, dash, "E"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & y \arrow[d, dash, "E"] \\
\mathrm{app}_K(x) \arrow[r, dash, "R"'] & \mathrm{app}_K(y)
\end{tikzcd}$$

Ist Ξ eine approximationserhaltende Kongruenz, so sind die Approximationen kongruenzerhaltende Abbildungen. Dementsprechend lautet hier die Bedingung in relationaler Schreibweise $\Xi \; \mathrm{APP}_K \subseteq \mathrm{APP}_K \Xi$ für alle Keime $K \in \mathcal{K}$.

Mit Hilfe eines Systems von Keimen und einer vollständigen und approximationserhaltenden Kongruenz können wir nun die Bereiche mit Keimen und Kongruenz (im folgenden kurz Bereich) definieren.

Definition 3.2 (Bereich mit Keimen und Kongruenz) *Ein Bereich mit Keimen und Kongruenz ist definiert als ein Quadrupel $(D, E, \mathcal{K}, \Xi)$, das folgende Bedingungen erfüllt:*

- (D, E) *ist eine induktiv geordnete Menge.*
- $\mathcal{K}$ *ist ein inklusionsgerichtetes System von Keimen, und für alle $x \in D$ gilt die Approximationsgleichung:*

$$x = \mathtt{sup}\{\mathtt{app}_K(x) \mid K \in \mathcal{K}\}.$$

- Ξ *ist eine vollständige und approximationserhaltende Kongruenz.* □

Vollständige und approximationserhaltende Relationen auf einem Bereich lassen sich mit der Aussage des nächsten Lemmas bereits durch ihr Verhalten auf den Keimen charakterisieren.

Lemma 3.3 *Für einen Bereich $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ und eine Relation R gilt:*

1. *R approximationserhaltend* $\Leftrightarrow$ $R \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}$.
2. *R vollständig* $\Rightarrow$ $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} \subseteq R$.
3. $RE \cap E^{\mathtt{T}} R \subseteq R$ *und* $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} = R$
   $\Rightarrow$ *R vollständig und approximationserhaltend.*
4. *Für eine Kongruenz Θ auf D gilt:*
   $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K \Theta\ \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} = \Theta \quad \Leftrightarrow \quad \Theta$ *vollständig und approximationserhaltend.*

Beweis:

1. Nach Definition ist R approximationserhaltend, falls

$$\forall x, y: \quad xRy \ \Rightarrow \ \forall K \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_K(x) R\ \mathrm{app}_K(y)$$

gilt. Die Umsetzung in relationale Form liefert für die rechte Seite

$$\begin{aligned}(*)\ \forall K \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_K(x) R\ \mathrm{app}_K(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathcal{K} : x(\mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}})y \\ &\Leftrightarrow \quad x(\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}})y.\end{aligned}$$

Mithin gilt für approximationserhaltendes R stets

$$\forall x, y: \quad xRy \ \Rightarrow \ x(\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}})y$$

d.h. $R \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}$.

2. Wir verwenden $(*)$, so daß $\{(\mathrm{app}_K(x), \mathrm{app}_K(y)) \mid K \in \mathcal{K}\} \subseteq R$ eine gerichtete Menge von Paaren ist. Da R vollständig ist, folgt

$$\mathtt{sup}\,\{\mathrm{app}_K(x) \mid K \in \mathcal{K}\} R\ \mathtt{sup}\,\{\mathrm{app}_K(y) \mid K \in \mathcal{K}\}$$

und somit xRy.

3. Aufgrund von Punkt 1 dieses Lemmas bleibt nur die Vollständigkeit von R zu zeigen. Sei dazu $\{(x_\lambda, y_\lambda) \mid \lambda \in J\} \subseteq R$ eine bzgl. der Produktordnung gerichtete Menge. Es gilt also $x_\lambda R\ y_\lambda$ für alle $\lambda \in J$, und die Mengen $\{x_\lambda \mid \lambda \in J\}$ und $\{y_\lambda \mid \lambda \in J\}$ sind gerichtet. Weiter ist sowohl $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda)$ als auch $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda y_\lambda)$ für jeden Keim $K \in \mathcal{K}$ kompakt. Damit gibt es ein x_{λ_1} und ein y_{λ_2} mit $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) \sqsubseteq x_{\lambda_1}$ und $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda y_\lambda) \sqsubseteq y_{\lambda_2}$. Weiter ist $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) \sqsubseteq \mathrm{app}_K(x_{\lambda_1})$, und für jedes weitere $a \in K$ mit $a \sqsubseteq \mathtt{sup}_\lambda x_\lambda$ gilt $a = \mathrm{app}_K(a) \sqsubseteq \mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda)$. Damit ist $\mathrm{app}_K(x_{\lambda_1})$ das größte Element in K kleiner als $\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda$, woraus $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) = \mathrm{app}_K(x_{\lambda_1})$ nach Definition der Approximationsabbildung folgt. Analog erhalten wir $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda y_\lambda) = \mathrm{app}_K(y_{\lambda_2})$. Da R approximationserhaltend ist und sowohl $x_{\lambda_1} R\ y_{\lambda_1}$ als auch $x_{\lambda_2} R\ y_{\lambda_2}$ gilt, folgt einerseits

$$\begin{aligned} &\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) = \mathrm{app}_K(x_{\lambda_1}) \ \text{ und } \ \mathrm{app}_K(x_{\lambda_1}) R\ \mathrm{app}_K(y_{\lambda_1}) \\ \text{und} \quad &\mathrm{app}_K(y_{\lambda_1}) \sqsubseteq \mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda y_\lambda) \end{aligned}$$

sowie andererseits

$$\begin{aligned} &\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) \sqsupseteq \mathrm{app}_K(x_{\lambda_2}) \ \text{ und } \ \mathrm{app}_K(x_{\lambda_2}) R\ \mathrm{app}_K(y_{\lambda_2}) \\ \text{und} \quad &\mathrm{app}_K(y_{\lambda_2}) = \mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda y_\lambda). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus $RE \cap E^{\mathsf{T}} R \subseteq R$

$$\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) R\ \mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_\lambda y_\lambda)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$, woraus mit $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} (\mathrm{APP}_K R\ \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}) = R$ die Behauptung folgt.

4. Aus der Reflexivität von E und Θ sowie der Symmetrie von Θ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Theta E &\subseteq E\Theta E\Theta \subseteq (E\Theta)^* \\ \text{und} \quad E^{\mathsf{T}}\Theta &= (\Theta E)^{\mathsf{T}} \subseteq (E\Theta)^{*\mathsf{T}}, \end{aligned}$$

woraus mit der Kongruenzeigenschaft von Θ und Punkt 3 dieses Lemmas die Behauptung folgt. □

Wir wollen nun nicht eine beliebige approximationserhaltende Relation Θ, sondern eine stärker zu $E\Xi$ in Beziehung stehende Relation studieren. Begonnen wird mit $(E\Xi)^*$.

Lemma 3.4 *Sei $(D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich und Θ eine approximationserhaltende Relation auf D. Dann ist die Präordnung $(E\Theta)^*$ approximationserhaltend.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch Berechnungsinduktion über das zur reflexiv-transitiven Hülle von $E\Theta$ gehörige Funktional $\tau_{E\Theta}(X) = I \cup E\Theta X$. Offensichtlich ist die Monotonieeigenschaft ein stetiges Prädikat.

Als Induktionsanfang gilt

$$\tau^0_{E\Theta}(0)\mathrm{APP}_K = 0\ \mathrm{APP}_K = 0 = \mathrm{APP}_K 0 = \mathrm{APP}_K\, \tau^0_{E\Theta}(0).$$

Mit der Monotonie der Abbildungen APP_K bzgl. der Ordnung E und der Approximationseigenschaft von Θ erhalten wir den Induktionsschluß aus

$$\begin{array}{rcll}
\tau^{i+1}_{E\Theta}(0)\mathrm{APP}_K & = & (I \cup E\Theta\ \tau^i_{E\Theta}(0))\mathrm{APP}_K & \\
& = & \mathrm{APP}_K \cup E\Theta\ \tau^i_{E\Theta}(0)\mathrm{APP}_K & \\
& \subseteq & \mathrm{APP}_K \cup E\Theta\ \mathrm{APP}_K \tau^i_{E\Theta}(0) & \text{Induktionsvoraussetzung} \\
& \subseteq & \mathrm{APP}_K \cup E\ \mathrm{APP}_K\Theta\ \tau^i_{E\Theta}(0) & \Theta \text{ approximationserhaltend} \\
& \subseteq & \mathrm{APP}_K \cup \mathrm{APP}_K E\Theta\ \tau^i_{E\Theta}(0) & \mathrm{APP}_K \text{ monoton} \\
& = & \mathrm{APP}_K(I \cup E\Theta\ \tau^i_{E\Theta}(0)) & \\
& = & \mathrm{APP}_K\ \tau^{i+1}_{E\Theta}(0). &
\end{array}$$

□

Als Konsequenz des letzten Lemmas und der Definition eines Bereiches erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 3.5 *Für einen Bereich $(D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ist die Präordnung $(E\Xi)^*$ approximationserhaltend.* □

Die Präordnung $(E\Xi)^*$ ist im allgemeinen nicht vollständig. Deshalb betrachten wir eine weitere Präordnung $P \supseteq (E\Xi)^*$, deren Vollständigkeit wir nachweisen. Daraus erhalten wir dann, daß die von dieser Präordnung induzierte Ordnung auf den Restklassen induktiv ist. Zunächst benötigen wir aber noch folgendes Lemma.

Lemma 3.6 *Sei R eine Präordnung auf einem Bereich $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$. Dann ist $\bigcap\limits_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}$ ebenfalls eine Präordnung.*

Beweis: Die Reflexivität erhalten wir mit der Totalität der Approximationsfunktionen und der Reflexivität von R aus

$$I \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}.$$

Die Transitivität folgt schließlich mit der Eindeutigkeit der Approximationsabbildungen aus

$$\begin{aligned}
&(\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}})(\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}) && \\
\subseteq\ & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \bigcap_{K' \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} \mathrm{APP}_{K'} R\, \mathrm{APP}_{K'}^{\mathtt{T}} && \\
\subseteq\ & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} && \\
\subseteq\ & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K RR\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} && \mathrm{APP}_K \text{ eindeutig} \\
\subseteq\ & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K R\, \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}. && R \text{ transitiv}
\end{aligned}$$

□

Damit definieren wir P wie folgt.

Definition 3.7 *Sei $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich. Dann bezeichne P die Relation*

$$P := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Xi)^* \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}.$$

□

In Komponentenschreibweise ist P also definiert durch

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_K(x)(E\Xi)^* \mathrm{app}_K(y).$$

Wir benötigen noch einige Aussagen über die Relation P bevor wir diese als vollständig nachweisen können.

Lemma 3.8 *Sei $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich. Dann ist P eine Präordnung auf D, und es gilt $(E\Xi)^* \subseteq P$.*

Beweis: Nach Lemma 3.6 ist P eine Präordnung. Wir zeigen nun, daß $(E\Xi)^* \subseteq P$ gilt. Da $(E\Xi)^*$ infolge von Korollar 3.5 approximationserhaltend ist, folgt nach Lemma 3.3 Punkt 1

$$(E\Xi)^* \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Xi)^* \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} = P.$$

□

Damit ist klar, daß sowohl $E \subseteq (E\Xi)^* \subseteq P$ als auch $\Xi \subseteq (E\Xi)^* \subseteq P$ oder in Komponentenschreibweise

$$x \sqsubseteq y \quad \Rightarrow \quad x \preceq y, \qquad\qquad x \equiv y \quad \Rightarrow \quad x \preceq y$$

gilt. Im nächsten Lemma werden wir weitere wichtige Eigenschaften der Präordnung P zusammenfassen.

Lemma 3.9 *Für einen Bereich $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ gelten folgende Aussagen:*

1. *Die Approximationsabbildungen sind bzgl. der Präordnung P monoton.*
2. *Für die durch die Präordnung P induzierte Äquivalenzrelation gilt $P \cap P^{\mathrm{T}} = \Xi$.*

Beweis:

1. Mit Lemma 3.8 folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} P\,\mathrm{APP}_{K_0} &= \Big(\bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Xi)^* \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}}\Big)\mathrm{APP}_{K_0} \\ &\subseteq \mathrm{APP}_{K_0}(E\Xi)^* \mathrm{APP}_{K_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{APP}_{K_0} \\ &\subseteq \mathrm{APP}_{K_0}(E\Xi)^* \\ &\subseteq \mathrm{APP}_{K_0} P. \end{aligned}$$

2. Zunächst gilt $(E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathrm{T}} = \Xi$, da Ξ eine Kongruenz ist und $\Xi \subseteq (E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathrm{T}}$ trivialerweise gilt. Mit Lemma 3.3 und der Eindeutigkeit der Approximationsabbildung erhalten wir die Behauptung aus

$$\begin{aligned} P \cap P^{\mathrm{T}} &= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Xi)^* \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}} \cap \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Xi)^{*\mathrm{T}} \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}} \\ &= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} (\mathrm{APP}_K (E\Xi)^* \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}} \cap \mathrm{APP}_K (E\Xi)^{*\mathrm{T}} \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}}) \\ &= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K ((E\Xi)^* \cap (E\Xi)^{*\mathrm{T}}) \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}} \\ &= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K \Xi\ \mathrm{APP}_K^{\mathrm{T}} \\ &= \Xi. \end{aligned}$$

□

Mit dem bisher gezeigten erhalten wir nun folgendes Lemma.

Lemma 3.10 *Für einen Bereich $(D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ist die Präordnung P vollständig.*

Beweis: Sei dazu $X \subseteq P$ eine bzgl. der Produktordnung zu P gerichtete und mithin nichtleere Menge. Da die Approximationsabbildungen nach Lemma 3.9 monoton bzgl. P und idempotent sind, folgt mit der Kompaktheit von $\mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\pi(x))$ die Behauptung aus

$$\begin{aligned} &\forall K \in \mathcal{K} \exists p \in X : \mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\pi(X)) \sqsubseteq \pi(p) \preceq \rho(p) \sqsubseteq \mathsf{sup}\,\rho(X) \\ &\quad\Rightarrow\ \forall K \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\pi(X)) \preceq \mathsf{sup}\,\rho(X) \\ &\quad\Rightarrow\ \forall K \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\pi(X)) \preceq \mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\rho(X)) \\ &\quad\Leftrightarrow\ \forall K, K' \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_{K'}(\mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\pi(X)))(E\Xi)^* \mathrm{app}_{K'}(\mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\rho(X))) \\ &\quad\Rightarrow\ \forall K \in \mathcal{K} : \mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\pi(X))(E\Xi)^* \mathrm{app}_K(\mathsf{sup}\,\rho(X)) \\ &\quad\Leftrightarrow\ \mathsf{sup}\,\pi(X) \preceq \mathsf{sup}\,\rho(X). \end{aligned}$$

□

Die Präordnung P induziert zunächst eine Relation $E_{\equiv} := \chi^{\mathsf{T}} P \chi$, (in Komponentenschreibweise $[x] \sqsubseteq_{|\equiv} [y] :\Leftrightarrow x \preceq y$) auf der Menge $[D]$ der Restklassen von D. Dabei sei $\chi : D \longrightarrow [D]$ die natürliche Projektion mit $\chi\chi^{\mathsf{T}} = \Xi$.

Lemma 3.11 *Ist $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich, dann ist $E_{\equiv} := \chi^{\mathsf{T}} P \chi$ eine Ordnung auf der Menge $[D]$ der Restklassen. Weiter ist χ monoton.*

Beweis: Aus der Surjektivität von χ und der Reflexivität von P erhalten wir

$$I \subseteq \chi^{\mathsf{T}} \chi \subseteq \chi^{\mathsf{T}} P \chi = E_{\equiv}.$$

Die Transitivität von $E_{\equiv}$ folgt aus

$$E_{\equiv} E_{\equiv} = \chi^{\mathsf{T}} P \chi \chi^{\mathsf{T}} P \chi \subseteq \chi^{\mathsf{T}} P \Xi P \chi \subseteq \chi^{\mathsf{T}} P P P \chi \subseteq \chi^{\mathsf{T}} P \chi = E_{\equiv}.$$

Im folgenden verwenden wir die Beziehung $S \cap RQ = (SQ^{\mathsf{T}} \cap R)Q$, mit eindeutigem Q und beliebigem R und S. Einen Beweis findet man z.B. in [Schmidt Ströhlein 89] Satz 4.2.2(iii). Mit Lemma 3.9 Punkt 4, obiger Aussage und der Eindeutigkeit von χ folgt die Antisymmetrie aus

$$\begin{array}{rcll}
E_{\equiv} \cap E_{\equiv}^{\mathsf{T}} & = & \chi^{\mathsf{T}} P \chi \cap \chi^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}} \chi & \\
& = & (\chi^{\mathsf{T}} P \chi \chi^{\mathsf{T}} \cap \chi^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}}) \chi & \chi \text{ eindeutig} \\
& = & \chi^{\mathsf{T}} (P \chi \chi^{\mathsf{T}} \cap \chi \chi^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}}) \chi & \chi \text{ eindeutig} \\
& = & \chi^{\mathsf{T}} (P \Xi \cap (\Xi^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}})) \chi & \Xi = \chi\chi^{\mathsf{T}} \\
& \subseteq & \chi^{\mathsf{T}} (P P \cap (P P)^{\mathsf{T}}) \chi & \Xi \subseteq P \\
& \subseteq & \chi^{\mathsf{T}} (P \cap P^{\mathsf{T}}) \chi & P \text{ transitiv} \\
& = & \chi^{\mathsf{T}} \Xi \chi & P \cap P^{\mathsf{T}} = \Xi \\
& = & \chi^{\mathsf{T}} \chi \chi^{\mathsf{T}} \chi & \Xi = \chi\chi^{\mathsf{T}} \\
& \subseteq & I. & \chi \text{ eindeutig}
\end{array}$$

Schließlich erhält man die Monotonie von χ wie folgt

$$E\chi \subseteq P\chi \subseteq \Xi P \chi = \chi\chi^{\mathsf{T}} P \chi = \chi E_{\equiv}. \qquad \square$$

Nach dieser Vorbereitung sind wir nun in der Lage zu beweisen, daß ein Übergang auf den Bereich der Restklassen stets möglich ist.

Satz 3.12 (Quotientenbereich) *Sei $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich. Dann ist der Quotientenbereich $[D] := ([D], E_{\equiv}, \mathcal{K}_{\equiv}, I)$ mit*

- $E_{\equiv} := \chi^{\mathsf{T}} P \chi$,
- $[K] := \{[a] \mid a \in K\}$,
- $\mathcal{K}_{\equiv} := \{[K] \mid K \in \mathcal{K}\}$,
- $\mathrm{app}_{[K]}([x]) := [\mathrm{app}_K(x)]$.

ein Bereich im Sinne von Definition 3.2. Weiter ist χ eine stetige und kongruenzerhaltende Abbildung.

Beweis: Wir zeigen, daß $E_{\equiv}$ induktiv ist. Dazu betrachten wir zuerst eine gerichtete Menge $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$ von Äquivalenzklassen, für die $\{x_\lambda \mid \lambda \in J\}$ bereits $\sqsubseteq$-gerichtet ist. Offensichtlich ist $[\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda]$ eine obere Schranke von $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$, da $x_\lambda \sqsubseteq \mathtt{sup}_\lambda x_\lambda$ für alle $\lambda \in J$ gilt. Sei nun $[z] \in [D]$ eine weitere obere Schranke von $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$. Dann folgt nach Lemma 3.10 mit $y_\lambda := z$, daß $\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda \preceq \mathtt{sup}_\lambda y_\lambda = z$ und somit $[\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda] \sqsubseteq_{|\equiv} [z]$ ist. Zusammen gilt also $\mathtt{sup}_\lambda [x_\lambda] = [\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda]$.

Sei nun $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$ eine gerichtete Menge von Äquivalenzklassen, bei der die x_λ nicht notwendigerweise eine bzgl. E gerichtete Menge bilden müssen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Im ersten Fall sei diese Menge endlich. Endliche gerichtete Mengen besitzen stets ein größtes Element, und dieses ist trivialerweise das Supremum der gerichteten Menge $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$.

Sei im zweiten Fall die Menge $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$ (und damit auch D und $\mathcal{K}$) nicht-endlich. Dann definieren wir Teilmengen $I_K \subseteq K$ zu jedem Keim K durch

$$I_K := \{a \in K \mid \forall x_\lambda \exists x_{\lambda'} \succeq x_\lambda : \mathrm{app}_K(x_{\lambda'}) = a\}.$$

Mit K ist auch jedes I_K endlich. Weiterhin sind alle I_K nichtleer. Denn angenommen I_K sei leer, so folgt die Existenz eines x_{λ_a} für jedes $a \in K$, so daß für alle $x_{\lambda'} \succeq x_{\lambda_a}$ stets $\mathrm{app}_K(x_{\lambda'}) \neq a$ gilt. Die endlich vielen x_{λ_a} besitzen eine obere Schranke $x_{\bar\lambda}$ in der Menge der x_λ. Damit folgt der Widerspruch $\mathrm{app}_K(x_\lambda) \notin K$ für alle $x_\lambda \succeq x_{\bar\lambda}$.

Außerdem ist für alle $a \in I_K$ die Menge $\{x_\lambda \mid \mathrm{app}_K(x_\lambda) = a\}$ unendlich, da ansonsten für alle $x_{\lambda''}$ mit $x_{\lambda''} \succeq x_{\lambda'}$ für eine obere Schranke $x_{\lambda'}$ von $\{x_\lambda \mid \mathrm{app}_K(x_\lambda) = a\}$ unmittelbar $\mathrm{app}_k(x_{\lambda''}) \neq a$ und damit ein Widerspruch zur Definition von I_K folgt.

Es zeigt sich, daß zu je zwei Keimen $K_1 \subseteq K_2$ und einem beliebigen Element $a_1 \in I_{K_1}$ stets ein Element $a_2 \in I_{K_2}$ mit $a_1 \sqsubseteq a_2$ existiert. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir die unendliche Menge

$$M := \{x_\lambda \mid \mathrm{app}_{K_1}(x_\lambda) = a_1\}.$$

Von den Bildpunkten $\mathrm{app}_{K_2}(M)$ liegt mindestens ein Element a_2 in I_{K_2}, da sonst aus der Endlichkeit von K auch die von M folgen würde. Damit gibt es also ein $x_{\lambda_0} \in M$ mit $\mathrm{app}_{K_2}(x_{\lambda_0}) = a_2$ und $\mathrm{app}_{K_1}(x_{\lambda_0}) = a_1$. Mit $K_1 \subseteq K_2$ gilt aber

$$\mathrm{app}_{K_1}(a_2) = \mathrm{app}_{K_1}(\mathrm{app}_{K_2}(x_{\lambda_0})) = \mathrm{app}_{K_1}(x_{\lambda_0}) = a_1$$

und damit $a_1 \sqsubseteq a_2$.

Sei nun mit Hilfe des Auswahlaxioms in der inklusionsgerichteten Menge $\mathcal{K}$ eine maximale Kette $C = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Keimen ausgewählt, d.h. für jedes $x \in D$ gilt

$$x = \mathtt{sup}_K \mathrm{app}_K(x) = \mathtt{sup}_i \mathrm{app}_{K_i}(x).$$

Weiter sei $b_1 \in I_{K_1}$. Aufgrund obiger Aussage läßt sich nun für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein Element $b_i \in I_{K_i}$ derart bestimmen, so daß $b_i \sqsubseteq b_{i+1}$ gilt; also die Menge $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

eine Kette ist. Wie schon weiter oben gezeigt, gilt $\mathtt{sup}_i[b_i] = [\mathtt{sup}_i b_i]$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $[\mathtt{sup}_i b_i] = \mathtt{sup}_\lambda[x_\lambda]$ unabhängig von der Wahl von C gilt.

Die Definition von I_{K_i} impliziert für jedes x_λ die Existenz eines $x_{\lambda'}$ mit $[x_\lambda] \sqsubseteq_{|\equiv} [x_{\lambda'}]$ und $\mathrm{app}_{K_i}(x_{\lambda'}) = b_i$. Damit erhalten wir mit der Monotonie der Approximationsabbildungen bzgl. der vollständigen Präordnung P

$$\begin{array}{lll}
& [x_\lambda] \sqsubseteq_{|\equiv} [x_{\lambda'}] & \\
\Leftrightarrow & x_\lambda \preceq x_{\lambda'} & \\
\Rightarrow & \mathrm{app}_{K_i}(x_\lambda) \preceq \mathrm{app}_{K_i}(x_{\lambda'}) = b_i & \mathrm{app}_{K_i} \text{ monoton bzgl. } \preceq \\
\Rightarrow & \mathtt{sup}_i \mathrm{app}_{K_i}(x_\lambda) \preceq \mathtt{sup}_i b_i & \{b_i \mid K_i \in C\} \text{ und } \{\mathrm{app}_{K_i}(x_\lambda) \mid K_i \in C\} \\
& & \text{sind bzgl. } E \text{ gerichtet} \\
\Leftrightarrow & x_\lambda \preceq \mathtt{sup}_i b_i & C \text{ ist maximale Kette in } \mathcal{K} \\
\Leftrightarrow & [x_\lambda] \sqsubseteq_{|\equiv} [\mathtt{sup}_i b_i], &
\end{array}$$

daß $[\mathtt{sup}_i b_i]$ eine obere Schranke von $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$ ist. Sei nun $[z]$ eine weitere obere Schranke von $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$, und sei für alle $K_i \in C$ ein $\lambda_i \in J$ so gewählt, daß $b_i = \mathrm{app}_{K_i}(x_{\lambda_i})$ gilt. Dann ergibt sich

$$\begin{array}{lll}
& \forall K_i \in C : [b_i] = [\mathrm{app}_{K_i}(x_{\lambda_i})] \sqsubseteq_{|\equiv} [x_{\lambda_i}] \sqsubseteq_{|\equiv} [z] & \\
\Rightarrow & \forall K_i \in C : b_i \preceq z & \\
\Rightarrow & \mathtt{sup}_i b_i \preceq z & \{b_i \mid K_i \in C\} \text{ ist bzgl. } E \text{ Kette} \\
\Leftrightarrow & [\mathtt{sup}_i b_i] \sqsubseteq_{|\equiv} [z]. &
\end{array}$$

Damit ist $\mathtt{sup}_\lambda[x_\lambda] = [\mathtt{sup}_i b_i]$ und somit $([D], E_\equiv)$ eine induktive Ordnung.

Wir zeigen nun, daß die Menge $[K] = \{[x] \mid x \in K\}$ ein Keim von $[D]$ ist. Offensichtlich ist $[K]$ endlich. Zum Beweis, daß alle $[a] \in [K]$ für ein kompaktes $a \in K$ kompakt sind, sei $[a] \sqsubseteq_{|\equiv} \mathtt{sup}_\lambda[x_\lambda]$ und $\{b_i \mid K_i \in C \subseteq \mathcal{K}\}$ wie oben eine zu $\{x_\lambda \mid \lambda \in J\}$ gehörige Kette von Repräsentanten. Wegen der Kompaktheit von $\mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_i b_i)$ folgt die Behauptung aus

$$\begin{array}{lll}
& [a] \sqsubseteq_{|\equiv} \mathtt{sup}_\lambda[x_\lambda] = [\mathtt{sup}_i b_i] & \\
\Leftrightarrow & a \preceq \mathtt{sup}_i b_i & \\
\Rightarrow & a = \mathrm{app}_K(a) \preceq \mathrm{app}_K(\mathtt{sup}_i b_i) & \\
\Rightarrow & a \preceq b_j & \text{für einen Keim } K_j \in C \\
\Rightarrow & a \preceq b_j = \mathrm{app}_{K_j}(x_{\lambda'}) \sqsubseteq x_{\lambda'} & \text{für ein } \lambda' \in J \\
\Rightarrow & a \preceq x_{\lambda'} & \\
\Leftrightarrow & [a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x_{\lambda'}]. &
\end{array}$$

Zur Existenz der Approximation eines Elementes $[x] \in [D]$ zeigen wir zunächst, daß die Menge $\{[a] \in [K] \mid [a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x]\}$ nicht leer ist. Da es in jedem Keim $K \in \mathcal{K}$ ein Element $a \in K$ gibt mit $a \sqsubseteq x$, ist offensichtlich $[a] \in [K]$ und $[a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x]$. Weiter zeigen wir, daß

$$[\mathrm{app}_K(x)] = \mathtt{sup}\,\{[a] \in [K] \mid [a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x]\}$$

und damit $\mathrm{app}_{[K]}([x]) = [\mathrm{app}_K(x)]$ gilt. Zunächst gilt natürlich $[\mathrm{app}_K(x)] \in [K]$. Sei

$[a] \in [K]$ ein weiteres Element mit $[a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x]$. Dann kann nach der Definition von $[K]$ der Repräsentant a stets so gewählt werden, daß $a \in K$ gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} [a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x] &\Leftrightarrow a \preceq x \\ &\Rightarrow a = \mathrm{app}_K(a) \preceq \mathrm{app}_K(x) \\ &\Leftrightarrow [a] \sqsubseteq_{|\equiv} [\mathrm{app}_K(x)]. \end{aligned}$$

Also ist $[\mathrm{app}_K(x)] = \mathtt{sup}\,\{[a] \in [K] \mid [a] \sqsubseteq_{|\equiv} [x]\} = \mathrm{app}_{[K]}([x])$.

Das Keimsystem $[\mathcal{K}]$ ist auch $\subseteq$-gerichtet, denn seien zwei Keime $[K_1], [K_2] \in [\mathcal{K}]$ gewählt, so gibt es eine obere Schranke $K \in \mathcal{K}$ von K_1 und K_2. Dann ist offensichtlich $[K]$ obere Schranke von $[K_1]$ und $[K_2]$ in $[\mathcal{K}]$.

Es bleibt noch die Approximationsgleichung zu zeigen. Da die Menge $\{\mathrm{app}_K(x) \mid K \in \mathcal{K}\}$ bzgl. E gerichtet ist, erhalten wir diese sofort aus

$$\mathtt{sup}_{[K]}\mathrm{app}_{[K]}([x]) = \mathtt{sup}_{[K]}[\mathrm{app}_K(x)] = [\mathtt{sup}_K \mathrm{app}_K(x)] = [x].$$

Also ist $[D] = ([D], E_{\equiv}, \mathcal{K}_{\equiv}, I)$ ein Bereich.

Die Monotonie von χ wurde bereits in Lemma 3.11 gezeigt. Sei nun $\{x_\lambda \mid \lambda \in J\}$ eine bzgl. E gerichtete Menge. Dann ist $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in J\}$ bzgl. $E_{\equiv}$ gerichtet, und es gilt $\mathtt{sup}_\lambda[x_\lambda] = [\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda]$. Damit erhalten wir die Stetigkeit von χ aus

$$\chi(\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda) = [\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda] = \mathtt{sup}_\lambda[x_\lambda] = \mathtt{sup}_\lambda \chi(x_\lambda).$$

Weiter folgt $\Xi\chi = \chi\chi^{\mathtt{T}}\chi \subseteq \chi I$; also ist χ kongruenzerhaltend. □

Als Abschluß dieses Kapitels zeigen wir noch, daß wir mit Hilfe des weiter oben definierten Hüllenoperators $.^{\diamond}$ eine beliebige symmetrische und approximationserhaltende Äquivalenzrelation zu einer Kongruenz erweitern können. Dies werden wir später zur Definition der Kongruenzerweiterung eines Bereiches nutzen.

Lemma 3.13 *Sei Θ eine symmetrische und approximationserhaltende Relation auf einem Bereich D. Dann ist $\Theta^{\square} := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K \Theta^{\diamond} \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}$ eine vollständige und approximationserhaltende Kongruenz auf D.*

Beweis: Zunächst ist $\Theta^{\diamond}$ eine Präordnung (sogar eine Äquivalenzrelation) und damit $\Theta^{\square}$ nach Lemma 3.6 ebenfalls eine Präordnung. Die Symmetrie folgt aus der von $\Theta^{\diamond}$, so daß $\Theta^{\square}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Wir zeigen nun, daß $\Theta^{\square}$ eine Kongruenz ist. Dazu benötigen wir die Aussage

$$(*) \quad (\mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}})^* \subseteq \mathrm{APP}_K \Omega^* \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}$$

für beliebige Relationen Ω. Wir zeigen dies durch Berechnungsinduktion über die beiden Funktionale $\tau_\Omega(X) = I \cup \Omega X$ und $\tau_{\mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}}}(X) = I \cup \mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_K^{\mathtt{T}} X$. Offensichtlich ist obige Bedingung ein stetiges Prädikat.

Sei $i = 0$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\tau^0_{\mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}}(0) = 0 \subseteq \mathrm{APP}_K \tau^0_\Omega(0) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}.$$

Der Induktionsschritt folgt mit den Abbildungseigenschaften der Approximationsabbildungen aus

$$\begin{array}{rcll}
\tau^{i+1}_{\mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}}(0) & = & I \cup \mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_\mathrm{K}{}^{\mathsf{T}} \tau^i_{\mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}}(0) & \\
& \subseteq & I \cup \mathrm{APP}_K \Omega \mathrm{APP}_\mathrm{K}{}^{\mathsf{T}} \mathrm{APP}_K \tau^i_\Omega(0) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} & \text{Ind. Vor.} \\
& \subseteq & I \cup \mathrm{APP}_K \Omega \tau^i_\Omega(0) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} & \mathrm{APP}_K \text{ eindeutig} \\
& \subseteq & \mathrm{APP}_K \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \cup \mathrm{APP}_K \Omega \tau^i_\Omega(0) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} & \mathrm{APP}_K \text{ total} \\
& = & \mathrm{APP}_K (I \cup \Omega \tau^i_\Omega(0)) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} & \mathrm{APP}_K \text{ eindeutig} \\
& = & \mathrm{APP}_K \tau^{i+1}_\Omega(0) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}}. &
\end{array}$$

Aus obiger Aussage erhalten wir

$$\begin{array}{rcll}
(E\Theta^\Box)^* & = & (E \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K \Theta^\diamond \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}})^* & \\
& \subseteq & (\bigcap_{K \in \mathcal{K}} E \mathrm{APP}_K \Theta^\diamond \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}})^* & \\
& \subseteq & (\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K E \Theta^\diamond \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}})^* & \mathrm{APP}_K \text{ monoton} \\
& \subseteq & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} (\mathrm{APP}_K E \Theta^\diamond \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}})^* & \\
& \subseteq & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E \Theta^\diamond)^* \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} & \text{nach } (*).
\end{array}$$

Damit folgt die Kongruenzeigenschaft aus

$$\begin{array}{rcl}
(E\Theta^\Box)^* \cap (E\Theta^\Box)^{*\mathsf{T}} & \subseteq & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Theta^\diamond)^* \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \cap \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K (E\Theta^\diamond)^{*\mathsf{T}} \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \\
& = & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K ((E\Theta^\diamond)^* \cap (E\Theta^\diamond)^{*\mathsf{T}}) \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \\
& \subseteq & \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{APP}_K \Theta^\diamond \mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \\
& = & \Theta^\Box.
\end{array}$$

Wir zeigen nun, daß für eine approximationserhaltende Relation Θ auch $\Theta^\diamond$ approximationserhaltend ist. Dazu benötigen wir die Aussage, daß eine monotone Abbildung F bzgl. einer Ordnung E auch monoton bzgl. E^{T} ist. Wir haben

$$E^{\mathsf{T}} \subseteq FF^{\mathsf{T}}E^{\mathsf{T}} = F(EF)^{\mathsf{T}} \subseteq F(FE)^{\mathsf{T}} = FE^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}},$$

woraus mit der Eindeutigkeit von F die Behauptung $E^{\mathsf{T}}F \subseteq FE^{\mathsf{T}}$ folgt.

Da die Relation $(E\Theta)^*$ nach Lemma 3.4 approximationserhaltend und APP_K eindeutig ist, folgt die Behauptung aus

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_K &= ((E\Theta)^* \cap (E\Theta)^{*\mathsf{T}})\mathrm{APP}_K \\
&\subseteq (E\Theta)^*\mathrm{APP}_K \cap (E\Theta)^{*\mathsf{T}}\mathrm{APP}_K \\
&\subseteq \mathrm{APP}_K(E\Theta)^* \cap \mathrm{APP}_K(E\Theta)^{*\mathsf{T}} \\
&= \mathrm{APP}_K((E\Theta)^* \cap (E\Theta)^{*\mathsf{T}}) \\
&= \mathrm{APP}_K\Theta^{\diamond}.
\end{aligned}
$$

Weil $\Theta^{\diamond}$ approximationserhaltend ist und damit nach Lemma 3.3 Punkt 1

$$
\Theta^{\diamond} \subseteq \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} = \Theta^{\square}
$$

gilt, folgt aus

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\square}\mathrm{APP}_{K_0} &= (\bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}})\mathrm{APP}_{K_0} \\
&\subseteq \mathrm{APP}_{K_0}\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_{K_0}^{\mathsf{T}}\mathrm{APP}_{K_0} \\
&\subseteq \mathrm{APP}_{K_0}\Theta^{\diamond} \\
&\subseteq \mathrm{APP}_{K_0}\Theta^{\square},
\end{aligned}
$$

daß auch $\Theta^{\square}$ approximationserhaltend ist.

Weiter erhalten wir aus der Eindeutigkeit und Idempotenz der APP_K

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\Theta^{\square}\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} &= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K(\bigcap_{K'\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_{K'}\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_{K'}^{\mathsf{T}})\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \\
&= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \bigcap_{K'\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\mathrm{APP}_{K'}\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_{K'}^{\mathsf{T}}\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \\
&\subseteq \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\mathrm{APP}_K\Theta^{\diamond}(\mathrm{APP}_K\mathrm{APP}_K)^{\mathsf{T}} \\
&= \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\Theta^{\diamond}\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} \\
&= \Theta^{\square}.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der weiter oben gezeigten Approximationseigenschaft von $\Theta^{\square}$ haben wir sogar die Gleichheit $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{APP}_K\Theta^{\square}\mathrm{APP}_K^{\mathsf{T}} = \Theta^{\square}$, woraus mit Lemma 3.3 Punkt 4 die Behauptung folgt. □

4 Die Kategorie der Bereiche

In diesem Kapitel betrachten wir die *Kategorie $\mathcal{D}$ der Bereiche mit stetigen und kongruenzerhaltenden Abbildungen.* Zunächst benötigen wir aber noch einige kategorientheoretische Begriffe (siehe [Asperti Longo 91]).

4.1 Kategorientheoretische Grundlagen

Wie üblich definiert man eine Kategorie wie folgt.

Definition 4.1 (Kategorie) *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus*

- *einer Klasse von Objekten* $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$,
- *einer Klasse von Morphismen* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$ *für alle Objekte* $a,b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ *mit* $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,a)$ *für alle* $a \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$,
- *einer Operation* $\circ$, *die zwei Morphismen* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$ *und* $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b,c)$ *einen Morphismus* $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,c)$ *zuordnet.*

Folgende Gleichungen gelten für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,b), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b,c)$ *und* $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c,d)$

$$\mathrm{id}_b \circ f = f, \qquad g \circ \mathrm{id}_b = g, \qquad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \qquad \square$$

Als erstes kategorielles Konstrukt definieren wir das Produkt.

Definition 4.2 (Kategorielles Produkt) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $a,b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$. Ein Objekt $a \times b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ zusammen mit zwei Morphismen $\pi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a \times b, a)$ und $\rho \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a \times b, b)$ heißt das kategorielle Produkt von a und b, falls es zu jedem Paar von Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c,a)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c,b)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, a \times b)$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\rho"'] & b \end{tikzcd} \qquad \square$$

Als nächstes kategorielles Konstrukt betrachten wir das Coprodukt. Alternativ läßt sich das Coprodukt auch als das Produkt in der dualen Kategorie definieren.

Definition 4.3 (Kategorielles Coprodukt) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und seien $a,b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$. Ein Objekt $a + b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ zusammen mit zwei Morphismen $\iota \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a, a+b)$ und $\kappa \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b, a+b)$ heißt das kategorielle Coprodukt von a und b, falls es zu jedem Paar von Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,c)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b,c)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a+b, c)$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & a + b \arrow[u, "h"] & b \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\kappa"] \end{tikzcd} \qquad \square$$

Wir zeichnen zwei Objekte innerhalb einer Kategorie durch die eindeutige Existenz von Morphismen von bzw. zu diesem Objekt aus.

Definition 4.4 (Initiales und terminales Element) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $\mathbf{1} \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ heißt terminal, falls es von jedem Objekt $a \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus von a nach $\mathbf{1}$ gibt. Dual heißt ein Objekt $\mathbf{0} \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ initial, falls es zu jedem Objekt $a \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus von $\mathbf{0}$ nach a gibt.* □

Zur Interpretation von Programmiersprachen in einer Kategorie verwendet man kartesisch abgeschlossene Kategorien. Grundlegend dafür sind die kartesischen Kategorien.

Definition 4.5 (Kartesische Kategorie) *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt kartesisch, falls das terminale Objekt $\mathbf{1} \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ und zu jedem Paar $a, b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ von Objekten das Produkt $a \times b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ existiert.* □

Als letztes betrachten als die Rechtsadjungierte des Produktfunktors, den Exponentenfunktor.

Definition 4.6 (Exponent) *Sei $\mathcal{C}$ eine kartesische Kategorie und $a, b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$. Ein Objekt $b^a \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ zusammen mit einem Morphismus $\mathrm{eval} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b^a \times a, b)$ heißt der kategorielle Exponent von a und b, falls es zu jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c \times a, b)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $\mathrm{curry}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, b^a)$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\mathrm{curry}(f)"'] & c \times a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{curry}(f) \times \mathrm{id}"'] & b \\ b^a & b^a \times a \arrow[ur, "\mathrm{eval}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Besitzt eine Programmiersprache Summentypen, so verwendet man zur Semantikkonstruktion bikartesisch abgeschlossene Kategorien. Dieses sind spezielle kartesisch abgeschlossene Kategorien.

Definition 4.7 (Bikartesisch abgeschlossene Kategorie) *Eine kartesische Kategorie $\mathcal{C}$ heißt bikartesisch abgeschlossen, falls ein initiales Objekt $\mathbf{0} \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ und zu jedem Paar $a, b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ von Objekten das Coprodukt $a + b \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ und der Exponent $b^a \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ existiert.* □

4.2 Die Kategorie $\mathcal{D}$

Es stellt sich heraus, daß die Kategorie $\mathcal{D}$ bikartesisch abgeschlossen ist. In den Beweisen dieses Kapitels zeigen wir nur die Bedingungen, die zusätzlich an die Kongruenz des betrachteten Bereichs gestellt werden. Zum Beweis der anderen Eigenschaften verweisen wir auf [Schmidt et al. 86, Schmidt et al. 89].

Zunächst betrachten wir das Lifting eines Bereiches. Wir haben aus technischen Gründen darauf verzichtet, auch das Lifting kategoriell zu beschreiben. Eine solche Beschreibung benötigt den Begriff der partiellen Morphismen, deren Definition und nähere Betrachtung den hier gesetzten Rahmen übersteigen würden.

Satz 4.8 (Lifting) *Sei $(D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich. Dann ist auch das Lifting $D^\perp := (D^\perp, E^\perp, \mathcal{K}^\perp, \Xi^\perp)$ von D mit*

- *$D^\perp$ ist die disjunkte Vereinigung von D und $\{\perp\}$,*
- *$\mathcal{K}^\perp := \{K \cup \{\perp\} \mid K \in \mathcal{K}\} \cup \{\{\perp\}\}$,*
- *$E^\perp$ ist die um ein kleinstes Element erweiterte Ordnung E*

$$x \sqsubseteq^\perp y \;\; :\Leftrightarrow \;\; (x = \perp \vee x \sqsubseteq y),$$

- *$\Xi^\perp$ ist die um ein Element erweiterte Kongruenz Ξ*

$$x \equiv^\perp y \;\; :\Leftrightarrow \;\; (x \equiv y \vee x = y = \perp),$$

ein Bereich im Sinne der Definition 3.2.

Beweis: Trivialerweise ist $\Xi^\perp$ eine vollständige und approximationserhaltende Kongruenz auf $D^\perp$. □

Als nächste Konstruktion betrachten wir das Produkt von Bereichen.

Satz 4.9 (Produkt von Bereichen) *Seien $(D_i, E_i, \mathcal{K}_i, \Xi_i)_{i=1,2}$ Bereiche. Dann ist das Produkt $D_1 \times D_2 := (D_1 \times D_2, E_\times, \mathcal{K}_\times, \Xi_\times)$ von D_1 und D_2 mit*

- *$D_1 \times D_2$ ist die Menge aller Tupel mit Komponenten aus D_1 bzw. D_2,*
- *$\mathcal{K}_\times = \{K_1 \times K_2 \mid K_1 \in \mathcal{K}_1, K_2 \in \mathcal{K}_2\}$,*
- *$E_\times$ ist die komponentenweise definierte Ordnung auf $D_1 \times D_2$*

$$(x_1, x_2) \sqsubseteq_\times (y_1, y_2) \;\; :\Leftrightarrow \;\; x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \wedge x_2 \sqsubseteq_2 y_2,$$

- *$\Xi_\times$ ist die komponentenweise definierte Kongruenz auf $D_1 \times D_2$*

$$(x_1, x_2) \equiv_\times (y_1, y_2) \;\; :\Leftrightarrow \;\; x_1 \equiv_1 y_1 \wedge x_2 \equiv_2 y_2,$$

das kategorielle Produkt von D_1 und D_2 in $\mathcal{D}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $D_1 \times D_2$ ein Bereich ist. Dazu genügt es, $\Xi_\times$ als eine vollständige und approximationserhaltende Kongruenz nachzuweisen.

Offensichtlich ist $\Xi_\times$ eine Äquivalenzrelation.

Man überzeugt sich leicht durch komponentenweise Argumentation, daß mit Ξ_1 und Ξ_2 auch $\Xi_\times$ eine Kongruenz ist.

Zum Beweis der Vollständigkeit von $\Xi_\times$ sei $\{((x_{1,\lambda}, x_{2,\lambda}), (y_{1,\lambda}, y_{2,\lambda})) \mid \lambda \in J\} \subseteq \Xi_\times$ eine bzgl. der Produktordnung zu $E_\times$ gerichtete Menge. Aus der Definition von $\Xi_\times$ und $E_\times$ folgt, daß folgende Bedingungen für alle $\lambda \in J$ gelten

$$x_{1,\lambda} \equiv_1 y_{1,\lambda}, \qquad x_{2,\lambda} \equiv_2 y_{2,\lambda}.$$

Da Ξ_1 und Ξ_2 vollständig sind, erhalten wir die Gleichungen

$$\mathtt{sup}_\lambda x_{1,\lambda} \equiv_1 \mathtt{sup}_\lambda y_{1,\lambda}, \qquad \mathtt{sup}_\lambda x_{2,\lambda} \equiv_2 \mathtt{sup}_\lambda y_{2,\lambda}.$$

Aus der Definition von $\Xi_\times$ und $E_\times$ folgt schließlich die Behauptung.

Die Kongruenz erhält auch die Approximationen. Sei dazu $(x_1, x_2) \equiv_\times (y_1, y_2)$. Dann folgt aus der Definition von $\Xi_\times$, daß für $i = 1, 2$ auch $x_i \equiv_i y_i$ gilt. Da Ξ_i die Approximationen erhält, haben wir $\mathrm{app}_{K_i}(x_i) \equiv_i \mathrm{app}_{K_i}(y_i)$. Die Definition von $\Xi_\times$ und $(\mathrm{app}_{K_1}(x), \mathrm{app}_{K_2}(y)) = \mathrm{app}_{K_1 \times K_2}(x, y)$ impliziert schließlich

$$\mathrm{app}_{K_1 \times K_2}(x_1, x_2) \equiv_\times \mathrm{app}_{K_1 \times K_2}(y_1, y_2).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $D_1 \times D_2$ auch das kategorielle Produkt ist. Seien also $f : C \longrightarrow D_1$ und $g : C \longrightarrow D_2$ stetige und kongruenzerhaltende Abbildungen. Nach [Gunter 85] bleibt nur nachzuweisen, daß π, ρ und $h(x) := < f(x), g(x) >$ kongruenzerhaltend sind. Aufgrund der Definition von $\Xi_\times$ gilt diese Behauptung aber trivialerweise. $\square$

Auch das Coprodukt von Bereichen existiert.

Satz 4.10 (Summe von Bereichen) *Seien $(D_i, E_i, \mathcal{K}_i, \Xi_i)_{i=1,2}$ Bereiche. Dann ist die Summe $D_1 + D_2 := (D_1 + D_2, E_+, \mathcal{K}_+, \Xi_+)$ von D_1 und D_2 mit*

- *$D_1 + D_2$ ist die mengentheoretische disjunkte Vereinigung von D_1 und D_2,*
- *$\mathcal{K}_+ = \{K_1 + K_2 \mid K_1 \in \mathcal{K}_1, K_2 \in \mathcal{K}_2\}$,*
- *E_+ ist die direkte Summe von E_1 und E_2*

$$x \sqsubseteq_+ y \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \sqsubseteq_1 y & \textit{falls} \quad x, y \in D_1 \\ x \sqsubseteq_2 y & \textit{falls} \quad x, y \in D_2, \end{cases}$$

- *Ξ_+ ist direkte Summe von Ξ_1 und Ξ_2*

$$x \equiv_+ y \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \equiv_1 y & \textit{falls} \quad x, y \in D_1 \\ x \equiv_2 y & \textit{falls} \quad x, y \in D_2. \end{cases}$$

das kategorielle Coprodukt von D_1 und D_2 in $\mathcal{D}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $D_1 + D_2$ ein Bereich ist. Dazu genügt es, Ξ_+ als eine vollständige und approximationserhaltende Kongruenz nachzuweisen.

Offensichtlich ist Ξ_+ eine Äquivalenzrelation.

Wir zeigen zunächst, daß Ξ_+ auch eine Kongruenz auf $D_1 + D_2$ ist. Seien dazu zwei Elemente $a, b \in D_1 + D_2$ gewählt mit $a(E_+\Xi_+)^*b$ und $b(E_+\Xi_+)^*a$. Dann liegen diese zwei Elemente nach der Definition von E_+ und Ξ_+ entweder in D_1 oder in D_2. Ohne Einschränkung nehmen wir an, sie liegen in D_1. Dann gilt für diese Elemente auch $a(E_1\Xi_1)^*b$ und $b(E_1\Xi_1)^*a$. Da Ξ_1 eine Kongruenz auf D_1 ist folgt $a\Xi_1 b$. Mit der Definition von Ξ_+ erhalten wir die Behauptung.

Zum Beweis der Vollständigkeit von Ξ_+ sei $\{(x_\lambda, y_\lambda) \mid \lambda \in J\} \subseteq \Xi_+$ eine bzgl. der Produktordnung zu E_+ gerichtete Menge. Dann liegen wiederum alle x_λ, y_λ nach der Definition von Ξ_+ und E_+ entweder in D_1 oder in D_2. Ohne Einschränkung seien also alle $x_\lambda, y_\lambda \in D_1$. Dann gilt natürlich auch $x_\lambda \equiv_1 y_\lambda$ für alle $\lambda \in J$. Da Ξ_1 vollständig ist, folgt sofort $\mathtt{sup}_\lambda x_\lambda \equiv_1 \mathtt{sup}_\lambda y_\lambda$. Mit der Definition von Ξ_+ erhalten wir die Behauptung.

Die Kongruenz erhält auch die Approximationen. Sei dazu $x_1 \equiv_+ x_2$. Dann folgt wiederum direkt aus der Definition von Ξ_+, daß x_1 und x_2 entweder in D_1 oder D_2 liegen. Ohne Einschränkung sei wieder angenommen, beide liegen in D_1. Dann gilt natürlich auch $x_1 \equiv_1 x_2$. Da Ξ_1 die Approximationen erhält, gilt $\mathrm{app}_K(x_1) \equiv_1 \mathrm{app}_K(x_2)$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Aus der Definition von Ξ_+ und der Tatsache, daß $\mathrm{app}_{K_1}(x) = \mathrm{app}_{K_1+K_2}(x)$ für alle $x \in D_1$ und alle $K_1 \in \mathcal{K}_1$ und $K_2 \in \mathcal{K}_2$ nach [Schmidt et al. 86] ist, folgt schließlich $\mathrm{app}_{K_1+K_2}(x_1) = \mathrm{app}_{K_1+K_2}(x_2)$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $D_1 + D_2$ auch das kategorielle Coprodukt ist. Seien also $f : D_1 \longrightarrow C$ und $g : D_2 \longrightarrow C$ stetige und kongruenzerhaltende Abbildungen. Nach [Gunter 85] bleibt nur nachzuweisen, daß sowohl die mengentheoretischen Injektionen $\iota : D_1 \longrightarrow D_1 + D_2$ und $\kappa : D_2 \longrightarrow D_1 + D_2$ als auch die Abbildung

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \in D_1 \\ g(x) & \text{falls} \quad x \in D_2 \end{cases}$$

kongruenzerhaltend sind. Aufgrund der Definition von Ξ_+ gilt diese Behauptung aber trivialerweise. □

Als letztes betrachten wir den Funktionsbereich.

Satz 4.11 (Funktionsbereich) *Seien $(D_i, E_i, \mathcal{K}_i, \Xi_i)_{i=1,2}$ Bereiche. Dann ist der Funktionsbereich $(D_1 \mapsto D_2, E_\mapsto, \mathcal{K}_\mapsto, \Xi_\mapsto)$ von D_1 nach D_2 mit*

- *$D_1 \mapsto D_2$ ist die Menge der stetigen und kongruenzerhaltenden Abbildungen von D_1 nach D_2,*
- *$\mathcal{K}_\mapsto := \{K_1 \mapsto K_2 \mid K_1 \in \mathcal{K}_1, K_2 \in \mathcal{K}_2\}$, wobei*

  $K_1 \mapsto K_2 := \{f \circ \mathrm{app}_{K_1} \mid f : K_1 \to K_2$ *monoton und kongruenzerhaltend* $\}$,

- *$E_{\mapsto}$ ist die punktweise definierte Ordnung auf $D_1{\mapsto}D_2$*

$$f \sqsubseteq_{\mapsto} g \;:\Leftrightarrow\; \forall x \in D_1 : f(x) \sqsubseteq_2 g(x),$$

- *$\Xi_{\mapsto}$ ist die punktweise definierte Kongruenz auf $D_1{\mapsto}D_2$*

$$f \equiv_{\mapsto} g \;:\Leftrightarrow\; \forall x \in D_1 : f(x) \equiv_2 g(x),$$

der kategorielle Exponent von D_1 und D_2 in $\mathcal{D}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $D_1 \mapsto D_2$ ein Bereich ist. Da der Funktionsbereich in diesem Artikel per Definition weniger Funktionen enthält als der Funktionsbereich in [Schmidt et al. 86], ist der dortige Beweis nicht übertragbar.

Zunächst zeigen wir, daß $(D_1{\mapsto}D_2, E_{\mapsto})$ eine induktive Ordnung ist. Sei dazu $\{f_\lambda \mid \lambda \in J\}$ eine gerichtete Teilmenge von $D_1{\mapsto}D_2$. Dann ist die Funktion $\bar{f} : D_1 \to D_2$ mit $\bar{f}(x) := \mathtt{sup}_\lambda f_\lambda(x)$ stetig und das Supremum der gerichteten Menge $\{f_\lambda \mid \lambda \in J\}$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\bar{f}$ kongruenzerhaltend ist. Sei dazu $x_1 \equiv_1 x_2$. Da alle f_λ kongruenzerhaltend sind und Ξ_2 vollständig ist, folgt

$$\bar{f}(x_1) = \mathtt{sup}_\lambda f_\lambda(x_1) \equiv_2 \mathtt{sup}_\lambda f_\lambda(x_2) = \bar{f}(x_2).$$

Also ist $(D_1{\mapsto}D_2, E_{\mapsto})$ induktiv.

Zum Beweis, daß $K_{\mapsto} \in \mathcal{K}_{\mapsto}$ ein Keim von $D_1{\mapsto}D_2$ ist, genügt es, die Existenz der eindeutigen Approximation eines Elementes $f \in D_1{\mapsto}D_2$ im Keim $K_{\mapsto}$ zu zeigen. Die anderen Eigenschaften eines Keimes folgen aus der Tatsache, daß jeder Keim $K_{\mapsto}$ per Definition eine Teilmenge eines Keimes im Sinne der Definition von [Schmidt et al. 86] ist. Nach [Schmidt et al. 86] gibt es in der Menge der stetigen Funktionen

$$\{g : D_1 \to K_2 \mid \forall x \in D_1 : g(x) \sqsubseteq_2 f(x)\}$$

ein größtes Element $\bar{g} : D_1 \to K_2$ mit $\bar{g}(x) = \mathrm{app}_{K_2}(f(x))$. Zu zeigen bleibt noch, daß mit f auch $\bar{g}$ kongruenzerhaltend ist. Dazu sei $x_1 \equiv_1 x_2$. Da Ξ_2 die Approximationen erhält, folgt sofort $\bar{g}(x_1) = \mathrm{app}_{K_2}(f(x_1)) \equiv_2 \mathrm{app}_{K_2}(f(x_2)) = \bar{g}(x_2)$. Also sind alle $K_{\mapsto} \in \mathcal{K}_{\mapsto}$ Keime von $D_1{\mapsto}D_2$.

Das Keimsystem ist auch inklusionsgerichtet. Der Beweis hierzu verläuft analog zum Beweis in [Schmidt et al. 86].

Der Beweis der Approximationsgleichung verläuft ebenfalls analog zum Beweis in [Schmidt et al. 86].

Offensichtlich ist $\Xi_{\mapsto}$ eine Äquivalenzrelation.

Weiter ist $\Xi_{\mapsto}$ eine Kongruenz auf $D_{\mapsto}$. Seien $f, g \in D_1{\mapsto}D_2$ zwei Elemente mit $f(E_{\mapsto}\Xi_{\mapsto})^*g$ und $g(E_{\mapsto}\Xi_{\mapsto})^*f$. Nach der Definition von $\Xi_{\mapsto}$ und $E_{\mapsto}$ gilt dann

$$\forall x \in D_1 : f(x)(E_2\Xi_2)^*g(x) \wedge g(x)(E_2\Xi_2)^*f(x).$$

Da Ξ_2 eine Kongruenz auf D_2 ist, folgt $\forall x \in D_1 : f(x)\Xi_2 g(x)$. Die Definition von $\Xi_{\mapsto}$ liefert die Behauptung.

Zum Beweis der Vollständigkeit von $\Xi_{\mapsto}$ sei $\{(f_\lambda, g_\lambda) \mid \lambda \in J\} \subseteq \Xi_{\mapsto}$ eine bzgl. der Produktordnung zu $E_{\mapsto}$ gerichtete Menge. Damit gilt nach der Definition von $\Xi_{\mapsto}$

$$\forall \lambda \in J, x \in D_1 : f_\lambda(x) \equiv_2 g_\lambda(x).$$

Da die Mengen $\{f_\lambda(x) \mid \lambda \in J\}$ und $\{g_\lambda(x) \mid \lambda \in J\}$ bzgl. E_2 gerichtet sind und Ξ_2 vollständig ist, folgt $\mathtt{sup}_\lambda f_\lambda(x) \equiv_2 \mathtt{sup}_\lambda g_\lambda(x)$. Die Definitionen von $\Xi_{\mapsto}$ und $\mathtt{sup}_\lambda f_\lambda$ liefern die Behauptung.

Die Kongruenz erhält auch die Approximationen. Sei dazu $f_1 \equiv_{\mapsto} f_2$. Dann folgt aus der Definition von $\Xi_{\mapsto}$, daß für alle $x \in D_1$ auch $f_1(\mathrm{app}_{K_1}(x)) \equiv_2 f_2(\mathrm{app}_{K_1}(x))$ gilt. Da auch Ξ_2 die Approximationen erhält, haben wir

$$\mathrm{app}_{K_2}(f_1(\mathrm{app}_{K_1}(x))) \equiv_2 \mathrm{app}_{K_2}(f_2(\mathrm{app}_{K_1}(x)))$$

für alle $K_1 \in \mathcal{K}_1, K_2 \in \mathcal{K}_2$ und $x \in D_1$. Aus der Definition von $\Xi_{\mapsto}$ und analog zum Nachweis in [Schmidt et al. 86], daß $\mathrm{app}_{K_1 \mapsto K_2}(f)(x) = \mathrm{app}_{K_2}(f(\mathrm{app}_{K_1}(x)))$ ist, erhalten wir schließlich $\mathrm{app}_{K_1 \mapsto K_2}(f_1) \equiv_{\mapsto} \mathrm{app}_{K_1 \mapsto K_2}(f_2)$.

Damit ist auch der Funktionsbereich ein Bereich im Sinne von Definition 3.2.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $D_1 \mapsto D_2$ auch der kategorielle Exponent ist. Sei also $f : C \times D_1 \longrightarrow D_2$ eine stetige und kongruenzerhaltende Abbildung. Nach [Gunter 85] bleibt nur nachzuweisen, daß $\mathtt{curry}(f)(x) := h_x$ mit $h_x(y) := f(x, y)$ und $\mathtt{eval}(g, x) := g(x)$ kongruenzerhaltend sind.

Sei $a \equiv_C b$. Dann ist $< a, x > \equiv < b, y >$ für alle $x, y \in D_1$ mit $x \equiv_1 y$. Weil f kongruenzerhaltend ist, folgt $\mathtt{curry}(f)(a)(x) = h_a(x) = f(a, x) \equiv_2 f(b, y) = h_b(y) = \mathtt{curry}(f)(b)(y)$. Damit haben wir $\mathtt{curry}(f)(a) \equiv \mathtt{curry}(f)(b)$. Also ist $\mathtt{curry}(f)$ kongruenzerhaltend.

Sei $< f, a > \equiv_\times < g, b >$ mit $f, g : D_1 \longrightarrow C$ stetig und kongruenzerhaltend und $a, b \in D_1$. Dann ist $f \equiv_{\mapsto} g$ und $a \equiv_1 b$, woraus $\mathtt{eval}(f, a) = f(a) \equiv_2 g(a) \equiv_2 g(b) = \mathtt{eval}(g, b)$ folgt. Damit ist auch $\mathtt{eval}$ kongruenzerhaltend. □

Die vorherigen Sätze liefern uns folgende Aussage.

Satz 4.12 *Die Kategorie $\mathcal{D}$ ist bikartesisch abgeschlossen.*

Beweis: Es bleibt nach [Gunter 85] nur noch zu zeigen, daß die eindeutig existierenden Abbildungen $1_A : A \longrightarrow \mathbf{1}$ und $0_A : \mathbf{0} \longrightarrow A$ mit $\mathbf{1} := (\{\perp\}, I, \{\{\perp\}\}, I)$ und $\mathbf{0} := (\emptyset, 0, \emptyset, 0)$ kongruenzerhaltend sind. Das ist aber trivialerweise erfüllt. □

5 Rekursiv definierte Bereiche

In diesem Kapitel wollen wir Retraktionsfolgen und inverse Limiten in der Kategorie der Bereiche und adjungierten Paare betrachten. Dazu benötigen wir einige weitere kategorientheoretische Begriffe.

Definition 5.1 (Inverses System) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(d_i, (f_{i,j})_{j\leq i})_{i\in I}$ eine Menge von Objekten $d_i \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ und Morphismen $f_{i,j} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(d_i, d_j)$ mit I gerichtet, so daß $f_{i,j} = f_{k,j} \circ f_{i,k}$ für alle $j \leq k \leq i$ gilt. Dann heißt $(d_i, (f_{i,j})_{j\leq i})_{i\in I}$ ein inverses System in $\mathcal{C}$.* □

Zu einem gegebenen inversen System lassen sich „obere Schranken" bilden, die sogenannten Kegel.

Definition 5.2 (Kegel) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $D := (d_i, (f_{i,j})_{j\leq i})_{i\in I}$ ein inverses System. Ein Objekt $c \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ zusammen mit einer Familie $(f_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, d_i))_{i\in I}$ heißt ein Kegel von D, falls folgendes Diagramm für alle $i, j, k \in I$ kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots & d_i & d_j \arrow[l, "f_{j,i}"'] & d_k \arrow[l, "f_{k,j}"'] & \cdots \\
 & & c \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, "f_j"] \arrow[ur, "f_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

Zu einem inversen System D bilden die Kegel von D eine Kategorie $\mathtt{Keg}_D$. Die Morphismen dieser Kategorie sind diejenigen Morphismen $g : c \longrightarrow c'$ von einem Kegel $(c, (f_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, d_i))_{i\in I})$ nach $(c', (f'_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c', d_i))_{i\in I})$, so daß für alle $i \in I$ gilt $f'_i \circ g = f_i$.

Definition 5.3 (Inverser Limes) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Das terminale Objekt in der Kategorie $\mathtt{Keg}_D$ des inversen Systems D bezeichnen wir als den inversen Limes von D. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ hat inverse Limiten, wenn für alle Kegel der inverse Limes in $\mathcal{C}$ existiert.* □

Zur Lösung rekursiver Bereichsgleichungen definieren wir ein adjungiertes Paar wie üblich mit der zusätzlichen Forderung, daß beide Abbildungen kongruenzerhaltend sein müssen. Diese Definition unterscheidet sich allerdings von der Definition in [Schmidt et al. 86]. Wir fordern die sogenannte „sprout-faithful"-Eigenschaft der Projektion nicht, welche zu jedem Keim K die Existens eines Keims L mit $\varphi(K) \subseteq L$ verlangt. Wir zeigen hier, daß diese Forderung auch nicht benötigt wird. Dadurch ist der hier definierte inverse Limes eines inversen Systems in der Kategorie der

Bereiche mit adjungierten Paaren im Gegensatz zu [Schmidt et al. 86] ein kategorielles Konstrukt. Dort wird die Klasse der betrachteten Kegel beim Übergang zum inversen Limes auf die sogenannten „sprout-bounded cones“ eingeschränkt, da der inverse Limes nicht allgemein existiert.

Definition 5.4 (Adjungiertes Paar) *Seien* $(D_i, E_i, \mathcal{K}_i, \Xi_i)_i = 1, 2$ *zwei Bereiche. Zwei stetige und kongruenzerhaltende Abbildungen* $\varphi \in D_1 \mapsto D_2$ *und* $\psi \in D_2 \mapsto D_1$ *heißen ein adjungiertes Paar (von* D_1 *nach* D_2*), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

$$\varphi \circ \psi = \mathtt{id}_{D_2}, \qquad \psi \circ \varphi \sqsubseteq \mathtt{id}_{D_1}. \qquad \square$$

Im Rest dieses Kapitels betrachten wir die Kategorie der Bereiche mit adjungierten Paaren. Diese ist wie üblich nicht bikartesisch abgeschlossen und wird nur zur Lösung rekursiver Bereichsgleichungen verwendet. Inverse Systeme in dieser Kategorie bezeichnen wir als Retraktionsfolgen (oder Retraktionssysteme). Den inversen Limes eines solchen Retraktionssystems konstruieren wir wie üblich.

Satz 5.5 (Inverser Limes) *Sei* $(D_i, (\varphi^i_j, \psi^i_j)_{j \leq i})_{i \in I}$ *ein gerichtetes Retraktionssystem. Dann ist* $D_\infty := \mathtt{lim}\ D_i = (D_\infty, E_\infty, \mathcal{K}_\infty, \Xi_\infty)$ *mit*

- D_∞ *ist die Menge von unendlichen Tupeln* $<x_i>_{i \in I}$ *mit* $x_i \in D_i$ *für alle* $i \in I$, *so daß für alle* $j \leq k$ *gilt:* $\varphi^k_j(x_k) = x_j$,
- E_∞ *ist die komponentenweise definierte Ordnung auf* D_∞

$$<x_i>_{i \in I} \sqsubseteq_\infty <y_i>_{i \in I} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall i \in I : x_i \sqsubseteq_i y_i,$$

- $\mathcal{K}_\infty$ *ist die Verschmelzung aller Keime der Elemente der Retraktionsfolge*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\infty &:= \{K_{i,K} \mid i \in I, K \in \mathcal{K}_i\} \\ \textit{mit } K_{i,K} &:= \{<x_j>_{j \in I} \in D_\infty \mid x_i \in K, k \geq i \textit{ impliziert } x_k = \psi^k_i(x_i)\}, \end{aligned}$$

- Ξ_∞ *ist die komponentenweise definierte Kongruenz auf* D_∞

$$<x_i>_{i \in I} \equiv_\infty <y_i>_{i \in I} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall i \in I : x_i \equiv_i y_i,$$

der inverse Limes der Retraktionsfolge $(D_i, (\varphi^i_j, \psi^i_j)_{j \leq i})_{i \in I}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß D_∞ ein Bereich ist. In [Schmidt et al. 86] wird die „sprout-faithful“-Eigenschaft nur einmal verwendet. Wir haben daher hier nur zu zeigen, daß die Gleichung

$$x_j = (\mathtt{sup}\ \{\mathrm{app}_{K_{i,K}}(x) \mid K_{i,K} \in \mathcal{K}_\infty\})_j$$

gilt. Da $\mathrm{app}_K(x_i) = (\mathrm{app}_{K_{i,K}}(x))_i$ ist, haben wir aufgrund der Struktur der Elemente aus D_∞ auch

$$(\mathrm{app}_{K_{i,K}}(x))_j = (\varphi_j^k \circ \psi_i^k)(\mathrm{app}_K(x_i))$$

für eine obere Schranke k von i und j. Damit können wir nun obige Gleichung zeigen. Da φ_j^k und ψ_i^k stetig sind, erhalten wir die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{sup}\,\{\mathrm{app}_{K_{i,K}}(x) \mid K_{i,K} \in \mathcal{K}_\infty\})_j \\
&\quad= \mathsf{sup}\,\{(\mathrm{app}_{K_{i,K}}(x))_j \mid K_{i,K} \in \mathcal{K}_\infty\} \\
&\quad= \mathsf{sup}\,\{(\varphi_j^k \circ \psi_i^k)(\mathrm{app}_K(x_i)) \mid K \in \mathcal{K}_i \wedge i \in I\} \\
&\quad= \mathsf{sup}\,\{(\varphi_j^k \circ \psi_i^k)(\mathsf{sup}\,\{\mathrm{app}_K(x_i) \mid K \in \mathcal{K}_i\}) \mid i \in I\} \\
&\quad= \mathsf{sup}\,\{(\varphi_j^k \circ \psi_i^k)(x_i) \mid i \in I\} \\
&\quad= \mathsf{sup}\,\{x_j \mid i \in I\} \\
&\quad= x_j.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist Ξ_∞ eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation Ξ_∞ ist eine Kongruenz auf D_∞. Seien dazu zwei Elemente $<a_i>_{i\in I}, <b_i>_{i\in I} \in D_\infty$ mit

$$\begin{aligned}
&<a_i>_{i\in I}\ (E_\infty \Xi_\infty)^*<b_i>_{i\in I} \\
\text{und}\quad &<b_i>_{i\in I}\ (E_\infty \Xi_\infty)^*<a_i>_{i\in I}
\end{aligned}$$

gewählt. Nach der Definition von E_∞ und Ξ_∞ folgt, daß

$$\forall i \in I : a_i(E_i\Xi_i)^* b_i \wedge b_i(E_i\Xi_i)^* a_i$$

gilt. Da alle Ξ_i Kongruenzen auf D_i sind, erhalten wir $\forall i \in I : a_i \Xi_i b_i$. Die Definition von Ξ_∞ liefert die Behauptung.

Zum Beweis der Vollständigkeit sei $\{((<x_i>_{i\in I})_\lambda, (<y_i>_{i\in I})_\lambda) \mid \lambda \in J\} \subseteq \Xi_\infty$. Dann folgt aus der Definition von Ξ_∞, daß $\forall i \in I : (x_i)_\lambda \equiv_i (y_i)_\lambda$ gilt. Da alle Ξ_i vollständig sind, haben wir für alle $i \in I$ auch $\mathsf{sup}_\lambda(x_i)_\lambda \equiv_i \mathsf{sup}_\lambda(y_i)_\lambda$. Aus der Definition von Ξ_∞ erhalten wir schließlich die Behauptung.

Die Kongruenz erhält auch die Approximationen. Sei dazu $<x_i>_{i\in I} \equiv_\infty <y_i>_{i\in I}$. Dann folgt aus der Definition von Ξ_∞, daß für alle $i \in I$ auch $x_i \equiv_i y_i$ gilt. Da alle Ξ_i die Approximationen erhalten, haben wir $\mathrm{app}_K(x_i) \equiv_i \mathrm{app}_K(y_i)$ für alle $K \in \mathcal{K}_i$ und $i \in I$. Aus der Definition von Ξ_∞ und der Tatsache, daß nach [Schmidt et al. 86] die i-te Komponente von $\mathrm{app}_{K_{i,K}}(<x_i>_{i\in I})$ gleich $\mathrm{app}_K(x_i)$ für alle $i \in I$ und $K \in \mathcal{K}_i$ ist, erhalten wir schließlich

$$\mathrm{app}_{K_{i,K}}(<x_i>_{i\in I}) \equiv_\infty \mathrm{app}_{K_{i,K}}(<y_i>_{i\in I}).$$

Damit ist der inverse Limes einer Retraktionsfolge ein Bereich im Sinne von Definition 3.2.

Es bleibt noch zu zeigen, daß D_∞ auch der inverse Limes der Retraktionsfolge ist. Nach [Gunter 85] genügt es nachzuweisen, daß die Abbildungen

$$\varphi_i^\infty : D_\infty \to D_i \quad \text{mit} \quad \varphi_i^\infty(x) := x_i$$

$$\begin{array}{rll} \psi_i^\infty : D_i \longrightarrow D_\infty & \text{mit} & (\psi_i^\infty(x))_j := \left\{ \begin{array}{lll} \varphi_j^i(x) & \text{falls} & j \leq i \\ \psi_i^j(x) & \text{falls} & j > i \end{array} \right. \\ \Phi : D_\infty \longrightarrow B & \text{mit} & \Phi := \mathsf{sup}\,\{q_i \circ \varphi_i^\infty \mid i \in I\} \\ \Psi : B \longrightarrow D_\infty & \text{mit} & \Psi := \mathsf{sup}\,\{\psi_i^\infty \circ p_i \mid i \in I\} \end{array}$$

mit $p_i : B \longrightarrow D_i$ und $q_i : D_i \longrightarrow B$ die adjungierten Paare von einem weiteren Kegel B von $(D_i)_{i\in I}$ nach D_i kongruenzerhaltend sind.

Da die i-te Projektion aufgrund der Definition von Ξ_∞ trivialerweise kongruenzerhaltend ist, folgt die Behauptung sofort für φ_i^∞.

Die Abbildungen φ_j^i und ψ_i^j sind kongruenzerhaltend, da die Komposition von kongruenzerhaltenden Abbildungen kongruenzerhaltend ist. Damit erhalten wir für alle $x, y \in D_i$ mit $x \equiv_i y$

$$(\psi_i^\infty(x))_j = \left\{ \begin{array}{lll} \varphi_j^i(x) & \text{falls} & j \leq i \\ \psi_i^j(x) & \text{falls} & j > i \end{array} \right\} \equiv_j \left\{ \begin{array}{lll} \varphi_j^i(y) & \text{falls} & j \leq i \\ \psi_i^j(y) & \text{falls} & j > i \end{array} \right\} = (\psi_i^\infty(y))_j.$$

Aufgrund der Definition von Ξ_∞ folgt die Behauptung.

Sei $x \equiv_\infty y$. Dann haben wir für alle $i \in I$

$$(q_i \circ \varphi_i^\infty)(x) \equiv_B (q_i \circ \varphi_i^\infty)(y).$$

Da Ξ_B vollständig ist, gilt

$$\mathsf{sup}\,\{(q_i \circ \varphi_i^\infty)(x) \mid i \in I\} \equiv_B \mathsf{sup}\,\{(q_i \circ \varphi_i^\infty)(y) \mid i \in I\}$$

und somit die Behauptung $\Phi(x) \equiv_B \Phi(y)$.

Analog folgt die Behauptung für Ψ. □

Wir haben damit gezeigt, daß der inverse Limes für alle Kegel in der Kategorie der Bereiche mit adjungierten Paaren existiert. Diese Aussage formulieren wir als Korollar.

Korollar 5.6 *Die Kategorie der Bereiche mit adjungierten Paaren hat inverse Limiten.* □

Zum Schluß dieses Kapitels sei noch bemerkt, daß die zu den kategoriellen Konstrukten Lifting, Produkt und Exponent gehörigen Funktoren in dieser Kategorie stetig sind und damit die terminalen Fixpunkte dieser Funktoren existieren. Auf einen Beweis soll an dieser Stelle verzichtet werden.

6 Kongruenzerweiterung

Interpretiert man algebraische Spezifikationen durch geordnete Algebren, so wünscht man sich die Möglichkeit, auch die Hinzunahme eines neuen Gesetzes durch einen Übergang von der alten zu einer neuen Interpretation zu modellieren. Man muß also die Möglichkeit haben, die Kongruenz eines Bereiches so zu erweitern, daß wieder ein Bereich ensteht. Dies erreichen wir mit Hilfe des Hüllenoperators $.^{\square}$ aus Lemma 3.13.

Satz 6.1 (Kongruenzerweiterung) *Sei $D = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich und Θ eine symmetrische Relation auf D. Falls $\Xi \cup \Theta$ approximationserhaltend ist, ist die Kongruenzerweiterung $D^{\Theta} := (D, E, \mathcal{K}, (\Xi \cup \Theta)^{\square})$ von D durch Θ ein Bereich im Sinne von Definition 3.2.*

Beweis: Unter Anwendung des Lemmas 3.13 ist zu zeigen, daß $\Xi \cup \Theta$ reflexiv und symmetrisch ist. Diese Eigenschaften folgen aber trivialerweise aus denen von Ξ bzw. Θ. $\square$

Ist schon Θ approximationserhaltend, so auch $\Xi \cup \Theta$, was aus

$$(\Xi \cup \Theta)\mathrm{APP}_K = \Xi\mathrm{APP}_K \cup \Theta\mathrm{APP}_K \subseteq \mathrm{APP}_K\Xi \cup \mathrm{APP}_K\Theta = \mathrm{APP}_K(\Xi \cup \Theta)$$

folgt.

7 Algebraische Spezifikationen

In diesem Kapitel wollen wir aus einer gegebenen Spezifikation direkt ein geordnetes Modell konstruieren. Dabei werden Partialitäten der spezifizierten Funktionen mit Hilfe einer Sonderkonstanten $\perp$ notiert. Durch die Interpretation dieser Konstanten als das kleinste Element generieren wir eine induktive Ordnung. Es zeigt sich, daß dieses Modell in der Klasse aller geordneten Modelle der gegebenen algebraischen Spezifikation initial ist.

Zunächst definieren wir, was zum syntaktischen Material einer algebraischen Spezifikation gehört.

Definition 7.1 (Signatur) *Sei C eine endliche Menge von Konstantenbezeichnern, $s \in \mathbb{N}$, $F = \bigcup_{1 \leq n \leq s} F_n$ die disjunkte endliche Vereinigung endlicher Mengen F_n von Funktionsbezeichnern der Stelligkeit n und X eine Menge von Variablen. Sind alle drei Mengen paarweise disjunkt und gilt $\perp \notin (C \cup F \cup X)$, so heiße das Tripel $\Sigma = (C, F, X)$ eine Signatur.* $\square$

Aus diesem syntaktischen Material lassen sich nun Terme bilden.

Definition 7.2 (Terme) *Die Menge $\mathcal{T}_\Sigma^Y$ der Terme mit freien Variablen $Y \subseteq X$ einer Signatur $\Sigma = (C, F, X)$ ist induktiv wie folgt definiert:*

- $\perp \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$.
- *Falls $c \in C$, dann ist $c \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$.*
- *Falls $x \in X$, dann ist $x \in \mathcal{T}_\Sigma^{\{x\}}$.*
- *Mit $t_i \in \mathcal{T}_\Sigma^{Y_i}$ für $1 \leq i \leq n$, $Z = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i$ und $f \in F_n$ ist $f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_\Sigma^Z$.*

Ein Term $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ heißt geschlossen. Mit $\mathcal{T}_\Sigma := \bigcup\limits_{Y \subseteq X} \mathcal{T}_\Sigma^Y$ bezeichnen wir die Menge aller Terme. □

Später benötigen wir zur Definition einer Herleitung den Begriff der Substitution eines Terms für eine Variable.

Definition 7.3 (Substitution) *Sei $\Sigma = (C, F, X)$ eine Signatur, und seien $s, t \in \mathcal{T}_\Sigma$ Terme. Dann ist die Substitution $s[x/t] \in \mathcal{T}_\Sigma$ des Terms t für die Variable x im Term s induktiv über den Aufbau von s wie folgt definiert*

- $\perp[x/t] = \perp$,
- $c[x/t] = c$,
- $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{falls} \quad x = y \\ y & \text{falls} \quad x \neq y, \end{cases}$
- $f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$. □

Eine Signatur läßt sich interpretieren, indem man jedem Symbol ein geeignetes Element über einer Trägermenge zuweist.

Definition 7.4 (Σ-Algebra) *Sei Σ eine Signatur. Dann heißt das Paar (A, ϕ) bestehend aus einer Menge A und einer Abbildung ϕ, die jedem Element $c \in C \cup \{\perp\}$ ein Element $\phi(c) \in A$ und jeder Funktionsbezeichnung $f \in F_n$ eine Abbildung $\phi(f) : A^n \longrightarrow A$ zuordnet, eine Σ-Algebra.* □

Mit Hilfe der Abbildung ϕ einer Σ-Algebra läßt sich nun jedem Term induktiv ein Wert zuordnen.

Definition 7.5 (Wert) *Sei (C, F, X) eine Signatur und (A, ϕ) eine Σ-Algebra. Zu einer Belegung $v : X \longrightarrow A$ ist der Wert $\mathcal{V}_A(t)[v]$ eines Terms $t \in \mathcal{T}_\Sigma$ induktiv wie folgt definiert*

- $\mathcal{V}_A(\perp)[v] = \phi(\perp)$,
- $\mathcal{V}_A(c)[v] = \phi(c)$,
- $\mathcal{V}_A(x)[v] = v(x)$,
- $\mathcal{V}_A(f(t_1, \ldots, t_n))[v] = \phi(f)(\mathcal{V}_A(t_1)[v], \ldots, \mathcal{V}_A(t_n)[v])$. □

Da sich unsere Definition des Wertes eines Terms nicht von der üblichen Definition unterscheidet, gelten auch hier das Substitutions- und das Koinzidenzlemma. Wir formulieren diese deshalb als ein Korollar.

Korollar 7.6 *Sei (C, F, X) eine Signatur und (A, ϕ) eine Σ-Algebra. Dann gilt:*

1. *Ist $t \in \mathcal{T}_\Sigma^Y$ und stimmen zwei Belegungen v_1 und v_2 auf allen Variablen aus Y überein, so gilt $\mathcal{V}_A(t)[v_1] = \mathcal{V}_A(t)[v_2]$.*
2. *Für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\Sigma$ gilt $\mathcal{V}_A(t[x/t'])[v] = \mathcal{V}_A(t)[v\{x \leftarrow \mathcal{V}_A(t')[v]\}]$ mit*

$$v\{x \leftarrow a\}(y) := \begin{cases} v(x) & \textit{falls} \quad x \neq y \\ a & \textit{falls} \quad x = y. \end{cases}$$ □

Der Wert eines geschlossenen Terms $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ hängt damit nicht von der Belegung v ab. Deshalb schreiben wir in diesem Fall auch $\mathcal{V}_A(t)$ für den Wert des Terms t.

Aufgrund unserer Argumentation in der Einleitung benötigen wir einen Approximationsbegriff auf Termen.

Definition 7.7 (Termapproximation) *Sei $\Sigma = (C, F, X)$ eine Signatur. Dann definieren wir ein System von Abbildungen $V_i : \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset \longrightarrow \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$ induktiv über den Aufbau von $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ wie folgt:*

- $V_0(t) := \perp$,
- $V_{i+1}(t) := \begin{cases} t & \textit{falls} \quad t \in C \cup \{\perp\} \\ f(V_i(t_1), \ldots, V_i(t_n)) & \textit{falls} \quad t = f(t_1, \ldots, t_n). \end{cases}$

$V_i(t)$ bezeichnen wir auch als die Approximation des Terms t durch Beschränkung auf Schachtelungstiefe i. □

Die Termapproximation verhält sich — in gewisser Weise analog zu den Approximationsfunktionen eines Bereiches — idempotent.

Lemma 7.8 *Es gilt $V_i \circ V_j = V_{\mathtt{min}(i,j)}$.*

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ist $i = 0$ oder $j = 0$, so folgt

$$V_0(V_j(t)) = \bot = V_0(t) \quad \text{bzw.} \quad V_i(V_0(t)) = V_i(\bot) = \bot = V_0(t).$$

Sei nun $i \geq 1$ und $j \geq 1$. Im Fall $t \in C \cup \{\bot\}$ erhalten wir die Behauptung aus $V_i(t) = V_j(t) = t$. Der Fall $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ folgt aus

$$\begin{aligned} V_i(V_j(f(t_1,\ldots,t_n))) &= V_i(f(V_{j-1}(t_1),\ldots,V_{j-1}(t_n))) \\ &= f(V_{i-1}(V_{j-1}(t_1)),\ldots,V_{i-1}(V_{j-1}(t_n))) \\ &= f(V_{\mathtt{min}(i-1,j-1)}(t_1),\ldots,V_{\mathtt{min}(i-1,j-1)}(t_n)) \quad \text{Ind. Vor.} \\ &= V_{\mathtt{min}(i,j)}(f(t_1,\ldots,t_n)). \end{aligned}$$

□

Durch die Termapproximation können wir eine Ordnung auf den Termen definieren.

Lemma 7.9 *Seien $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ geschlossene Terme einer Signatur $\Sigma = (C, F, X)$. Dann ist die Relation*

$$t_1 \leq t_2 \;:\Leftrightarrow\; \exists i : t_1 = V_i(t_2)$$

eine Ordnung.

Beweis: Da jedes $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ von endlicher Schachtelungstiefe ist, gibt es offensichtlich ein $i \in \mathbb{N}$, so daß $V_i(t) = t$ und somit $\leq$ reflexiv ist.

Sei nun $t_1 \leq t_2$ und $t_2 \leq t_3$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit $t_1 = V_i(t_2)$ und $t_2 = V_j(t_3)$. Die Transitivität erhalten wir somit aus $t_1 = V_i(V_j(t_3)) = V_{\mathtt{min}(i,j)}(t_3)$.

Sei $t_1 \leq t_2$ und $t_2 \leq t_1$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit $t_1 = V_i(t_2)$ und $t_2 = V_j(t_1)$. Damit erhalten wir aus Lemma 7.8

$$t_1 = V_i(t_2) = V_i(V_j(t_1)) = V_{\mathtt{min}(i,j)}(t_1).$$

Dies liefert $t_2 = V_j(t_1) = V_j(V_{\mathtt{min}(i,j)}(t_1)) = V_{\mathtt{min}(i,j)}(t_1) = t_1$. □

Die Ordnung $\leq$ auf Termen sagt etwas über deren Gestalt aus. Zwei Terme stehen in Ordnungsbeziehung, wenn der kleinere Term durch Substitution von $\bot$ für gewisse Teilterme aus dem größeren Term hervorgeht.

Lemma 7.10 *Ist $t \leq t'$, so gilt einer der drei folgenden Fälle:*

1. *$t = \bot$,*
2. *$t = t' = c$ für ein $c \in C$,*
3. *$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ und $t' = f(t'_1, \ldots, t'_n)$ für Terme $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ mit $t_1 \leq t'_1, \ldots, t_n \leq t'_n$.*

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle aufgrund des Aufbaus von t.

1. Ist $t = \perp$, so ist die Behauptung trivial.
2. Ist $t = c$ für ein $c \in C$ und $t = V_i(t')$, so folgt $i > 0$ und $t' = c$.
3. Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ und $t = V_i(t')$, so folgt wieder $i > 0$. Angenommen, es ist $t' \in C \cup \{\perp\}$. Dann folgt $V_i(t') = t' \neq t$. Daher muß t' die Gestalt $g(t'_1, \ldots, t'_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in F_m$ haben. Angenommen, es gilt $g \neq f$. Dann folgt der Widerspruch
$$t = V_i(t') = V_i(g(t'_1, \ldots, t'_m)) = g(V_{i-1}(t'_1), \ldots, V_{i-1}(t'_m)) \neq f(t_1, \ldots, t_n) = t.$$
Damit ist also $t' = f(t'_1, \ldots, t'_n)$ für Terme $t'_1, \ldots, t'_n \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$. Gilt nun $t_j \not\leq t'_j$ für ein $1 \leq j \leq n$ (also $t_j \neq V_k(t'_j)$ für alle $k \in \mathbb{N}$), so erhalten wir wieder
$$t = V_i(t') = V_i(f(t'_1, \ldots, t'_n)) = f(V_{i-1}(t'_1), \ldots, V_{i-1}(t'_n)) \neq f(t_1, \ldots, t_n) = t. \square$$

Aus obigem Lemma erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 7.11 $f(t_1, \ldots, t_n) \leq f(t'_1, \ldots, t'_n) \quad \Leftrightarrow \quad t_i \leq t'_i$ *für alle* $1 \leq i \leq n$. $\square$

Als Gesetze einer Spezifikation wollen wir allquantifizierte Gleichungen zulassen, deren Quantoren wir nicht notieren. Aus diesen Gesetzen werden mit Hilfe eines Herleitungssystems neue Gleichungen hergeleitet. Dabei gehen die Ergebnisse der Diskussion in der Einleitung durch die spezielle Approximationsregel in den Kalkül ein.

Definition 7.12 (Herleitbarkeit) *Sei* Σ *eine Signatur und* L *eine Menge von Gleichungen. Dann heißt eine Gleichung* $t = t'$ *in* (Σ, L) *herleitbar,* $(\Sigma, L) \vdash t = t'$, *falls es eine Herleitung im Kalkül mit folgenden Axiomen und Schlußregeln gibt:*

Axiom: $\quad t_1 = t_1$

Schlußregeln:
$$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1} \qquad \frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$$
$$\frac{t_1 = t_2 \quad t_3 = t_4}{t_1[x/t_3] = t_2[x/t_4]} \qquad \frac{u_1 = u_2}{V_i(u_1) = V_i(u_2)}$$

mit $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathcal{T}_\Sigma$, $u_1, u_2 \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ *und* $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Eine Menge von Gesetzen kann ein Symbol zu einer puren Abkürzung eines längeren Terms degradieren. So wird zum Beispiel das Symbol 1 durch das Gesetz $1 = s(0)$ zu einer Abkürzung für den Term $s(0)$. Da die Termapproximation durch Beschränkung auf Schachtelungstiefe i aber wesentlich von der Anzahl der Applikationen abhängt, erhalten wir hier ungewollte Effekte. In unserem Kalkül läßt sich sofort folgende Herleitung angeben (dabei ist $V_1(s(0)) = s(V_0(0)) = s(\perp)$ und $V_1(1) = 1$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 = s(0)}{s(0) = 1}}{s(\perp) = 1} \quad 1 = s(0)}{s(\perp) = s(0)}$$

Modelle, die diesen Gesetzen genügen, würden deswegen im wesentlichen kollabieren. Legen wir allerdings eine Signatur ohne das Symbol 1 (und damit ohne das Gesetz $1 = s(0)$) zugrunde, so läßt sich diese Formel nicht herleiten. Solche abkürzenden Symbole wollen wir daher in einer algebraischen Spezifikation nicht zulassen, so lange es um die Konstruktion der Trägermenge geht.

Definition 7.13 (Algebraische Spezifikation) *Sei Σ eine Signatur und L eine Menge von Gleichungen. Ein Symbol $s \in C \cup F$ heißt unnötig, falls zu jedem Term t, in dem s vorkommt, ein Term t', in dem s nicht vorkommt, existiert mit $(\Sigma, L) \vdash t = t'$. Das Paar (Σ, L) heißt eine algebraische Spezifikation, falls es keine unnötigen Symbole gibt.* □

Wir wollen nun Modelle algebraischer Spezifikationen im obigen Sinn betrachten. Dabei sind für uns nur solche Strukturen interessant, die Bereiche mit Kongruenzen bilden.

Definition 7.14 (Modelle) *Sei (Σ, L) eine algebraische Spezifikation und $\mathcal{D} = (D, E, \mathcal{K}, \Xi)$ ein Bereich.*

1. *Ein Tupel $(\mathcal{D}, \phi)$ heißt ein Modell von (Σ, L), falls gilt*
   - (a) *(D, ϕ) ist eine Σ-Algebra,*
   - (b) *$\phi(\perp)$ ist das kleinste Element von D,*
   - (c) *$\phi(f) \in D^n \mapsto D$ für alle Funktionssymbole $f \in F_n$, d.h. $\phi(f)$ ist stetig und kongruenzerhaltend,*
   - (d) *Sind $t, t' \in \mathcal{T}_\Sigma$ und gilt $(\Sigma, L) \vdash t = t'$, so folgt für alle Belegungen v $\mathcal{V}_D(t)[v] \equiv \mathcal{V}_D(t')[v]$.*
2. *Ein Modell $(\mathcal{D}, \phi)$ von (Σ, L) heißt termerzeugt, falls es für alle kompakten Elemente $x \in D$ einen Term $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ gibt mit $\mathcal{V}_D(t) = x$.* □

Eine wesentliche Eigenschaft aller Modelle liefert uns folgendes Lemma.

Lemma 7.15 *Sei (Σ, L) eine algebraische Spezifikation und $(\mathcal{D}, \phi)$ ein Modell von (Σ, L). Dann gilt für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$*

$$t \leq t' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_D(t) \sqsubseteq \mathcal{V}_D(t').$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion über den Aufbau von t. Dabei verwenden wir mehrfach Lemma 7.10.

1. Ist $t = \perp$, so folgt $\mathcal{V}_D(t) = \mathcal{V}_D(\perp) = \phi(\perp) = \perp \sqsubseteq \mathcal{V}_D(t')$.
2. Ist $t = c \in C$, so folgt $t' = c$ und damit $\mathcal{V}_D(t) = \mathcal{V}_D(c) = \mathcal{V}_D(t')$.
3. Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, so folgt $t' = f(t'_1, \ldots, t'_n)$ mit $t_1 \leq t'_1, \ldots, t_n \leq t'_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathcal{V}_D(t_1) \sqsubseteq \mathcal{V}_D(t'_1), \ldots, \mathcal{V}_D(t_n) \sqsubseteq \mathcal{V}_D(t'_n)$, woraus schließlich folgt
$$\begin{array}{rcll} \mathcal{V}_D(t) & = & \mathcal{V}_D(f(t_1, \ldots, t_n)) & \\ & = & \phi(f)(\mathcal{V}_D(t_1), \ldots, \mathcal{V}_D(t_n)) & \\ & \sqsubseteq & \phi(f)(\mathcal{V}_D(t'_1), \ldots, \mathcal{V}_D(t'_n)) & \phi(f) \text{ monoton} \\ & = & \mathcal{V}_D(f(t'_1, \ldots, t'_n)) & \\ & = & \mathcal{V}_D(t'). & \end{array}$$
□

Zu einer gegebenen algebraischen Spezifikation können wir ein ganzes System von Modellen angeben.

Definition 7.16 *Sei (Σ, L) eine algebraische Spezifikation. Dann definieren wir ein System von Bereichen und Abbildungen $(D_i, \phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{V}_{D_i}^{-1} : D_i \longrightarrow \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ wie folgt*

- $D_0 := (\{\perp\}, I, \{\{\perp\}\}, I)$,
- $\phi_0(t) := \perp$, *falls* $t \in C \cup \{\perp\}$,
- $\phi_0(f)(x_1, \ldots, x_n) := \perp$,
- $\mathcal{V}_{D_0}^{-1}(\perp) := \perp$,

sowie rekursiv

- $D_{i+1} := ((C + F_1 \times D_i + \cdots + F_s \times D_i^s)^\perp)^{\Xi_{i+1}}$ — *der um die Kongruenz* Ξ_{i+1} *erweiterte geliftete Bereich der Terme mit Schachtelungstiefe* $i+1$ — *gegeben durch*
  1. $C := (C, I, \{C\}, I)$,
  2. $F_i := (F_i, I, \{F_i\}, I)$ *für alle* $1 \leq i \leq s$,
  3. $\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) := \begin{cases} \perp & \textit{falls} \;\; x = \perp \\ c & \textit{falls} \;\; x = \iota_0(c) \\ f(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_n)) & \textit{falls} \;\; x = \iota_n(<f, x_1, \ldots, x_n>), \end{cases}$
  wobei $\iota_0 : C \longrightarrow D_{i+1}$ *und* $\iota_n : F_n \times D_i^n \longrightarrow D_{i+1}$ *die entsprechenden Injektionen bezeichnen,*
  4. $x \equiv_{i+1} y \;\; :\Leftrightarrow \;\; (\Sigma, L) \vdash \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) = \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(y)$,
- $\phi_{i+1}(\perp) := \perp$,

- $\phi_{i+1}(c) := \iota_0(c)$, *für* $c \in C$,
- $\phi_{i+1}(f)(x_1, \ldots, x_n) := \iota_n(<f, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1})(x_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1})(x_n)>)$. □

Bevor wir nun beweisen, daß alle Elemente des obigen Systems ein Modell der Spezifikation sind, benötigen wir noch einige Hilfsaussagen, die im folgenden Lemma zusammengefaßt sind.

Lemma 7.17 *Sei* (Σ, L) *eine algebraische Spezifikation und* $(D_i, \phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *das System aus Definition 7.16. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. $x \sqsubseteq y \Rightarrow \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x) \leq \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y)$
2. $(\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t) = \mathcal{V}_{D_i}(t)$ *für alle* $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ *für alle* $j \geq i$.
3. $V_i(t) = (\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_i})(t)$ *für alle* $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$.
4. $\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} = \mathrm{app}_{D_i}$ *für alle* $j \geq i$.
5. $\mathcal{V}_{D_j}^{-1}(x) = \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x)$, *für alle* $j \geq i$ *und* $x \in D_i$.

Beweis:

1. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach i. Der Fall $i = 0$ ist trivial. Im Fall $i + 1$ unterscheiden wir drei Fälle.
   (a) Ist $x = \perp$, so folgt $\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) = \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(\perp) = \perp = V_0(\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(y))$, woraus $\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) \leq \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(y)$ folgt.
   (b) Ist $x = \iota_0(c)$, so folgt aufgrund der Definition der Ordnung E_{i+1} in D_{i+1}, daß $x = y$ gilt und somit die Behauptung trivial ist.
   (c) Ist $x = \iota_n(< f, x_1, \ldots, x_n >)$, so folgt $y = \iota_n(< f, y_1, \ldots, y_n >)$ mit $x_1 \sqsubseteq y_1, \ldots, x_n \sqsubseteq y_n$ nach Definition von E_{i+1}. Nach der Induktionsvoraussetzung haben wir $\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1) \leq \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_n) \leq \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_n)$, woraus $\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1) = V_{k_1}(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_1)), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_n) = V_{k_n}(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_n))$ für $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ und somit $\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1) = V_k(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_1)), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_n) = V_k(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_n))$ für $k = \mathtt{max}\{k_1, \ldots, k_n\}$ nach Lemma 7.8 folgt. Somit erhalten wir die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) &= f(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_n)) \\
&= f(V_k(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_1)), \ldots, V_k(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_n))) \\
&= V_{k+1}(f(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y_n))) \\
&= V_{k+1}(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach i. Im Fall $i = 0$ folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}(\mathcal{V}_{D_0} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t) &= \mathcal{V}_{D_0}((\mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t)) \\ &= \perp \\ &= \mathcal{V}_{D_0}(t).\end{aligned}$$

Im Fall $i+1$ ist also $i+1 \leq j$. Wir unterscheiden drei Fälle.

(a) Ist $t = \perp$, so folgt

$$(\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(\perp) = (\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(\perp) = \mathcal{V}_{D_{i+1}}(\perp).$$

(b) Ist $t = c$, so folgt

$$\begin{aligned}(\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(c) &= (\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(\iota_0(c)) \quad \text{da } 0 < i+1 \leq j \\ &= \mathcal{V}_{D_{i+1}}(c).\end{aligned}$$

(c) Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, so folgt die Behauptung mit zweifacher Anwendung der Induktionshypothese aus

$$\begin{aligned}&(\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(f(t_1, \ldots, t_n)) \\ &= (\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(\phi_j(f)(\mathcal{V}_{D_j}(t_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_j}(t_n))) \\ &= (\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(\iota_n(< f, (\mathcal{V}_{D_{j-1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_1), \ldots, \\ &\qquad\qquad (\mathcal{V}_{D_{j-1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_n) >)) \\ &= \mathcal{V}_{D_i}(f((\mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_1)), \ldots, \\ &\qquad\qquad (\mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_n))) \\ &= \phi_i(f)((\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_1), \ldots, \\ &\qquad\qquad (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_n)) \\ &= \phi_i(f)((\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j})(t_n)) \\ &= \phi_i(f)(\mathcal{V}_{D_i}(t_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}(t_n)) \\ &= \mathcal{V}_{D_i}(f(t_1, \ldots, t_n)).\end{aligned}$$

3. Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion nach i. Sei $i = 0$. Dann folgt die Behauptung aus

$$(\mathcal{V}_{D_0}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_0})(t) = \mathcal{V}_{D_0}^{-1}(\perp) = \perp = V_0(t).$$

Im Fall $i+1$ unterscheiden wir drei Fälle.

(a) Ist $t = \perp$, so folgt

$$(\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}})(\perp) = \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(\perp) = \perp = V_{i+1}(\perp).$$

(b) Ist $t = c \in C$, so folgt wegen $i > 0$

$$(\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}})(c) = \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(c) = c = V_{i+1}(c).$$

(c) Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, so folgt mit Punkt 2 dieses Lemmas

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}})(f(t_1, \ldots, t_n)) \\
&= \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(\phi_{i+1}(f)(\mathcal{V}_{D_{i+1}}(t_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_{i+1}}(t_n)) \\
&= \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(\iota_n(< f, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}})(t_1), \ldots, \\
&\qquad (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}})(t_n) >)) \\
&= \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(\iota_n(< f, \mathcal{V}_{D_i}(t_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}(t_1) >)) \\
&= f((\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_i})(t_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_i})(t_n)) \\
&= f(V_i(t_1), \ldots, V_i(t_n)) \\
&= V_{i+1}(f(t_1, \ldots, t_n)).
\end{aligned}$$

4. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach i. Sei $i = 0$. D_0 enthält nur das Element $\perp$, woraus

$$(\mathcal{V}_{D_0} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(x) = \perp = \mathrm{app}_{D_0}(x)$$

folgt. Im Fall $i + 1$ unterscheiden wir drei Fälle.

(a) Ist $x = \perp$, so folgt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(\perp) &= \mathcal{V}_{D_{i+1}}(\perp) \\
&= \perp \\
&= \mathrm{app}_{D_{i+1}}(\perp),
\end{aligned}$$

da $\perp \in D_{i+1}$ gilt.

(b) Ist $x = \iota_0(c)$, so folgt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(\iota_0(c)) &= \mathcal{V}_{D_{i+1}}(c) && \text{da } j > i + 1 \\
&= \iota_0(c) \\
&= \mathrm{app}_{D_{i+1}}(\iota_0(c)),
\end{aligned}$$

da $\iota_0(c) \in D_{i+1}$ gilt.

(c) Ist $x = \iota_n(< f, x_1, \ldots, x_n >)$, so folgt mit der Definition von F_n, der Approximationsabbildungen im Produkt und Punkt 2 dieses Lemmas die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_j}^{-1})(x) \\
&= \mathcal{V}_{D_{i+1}}(f(\mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1}(x_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1}(x_n))) \\
&= \phi_{i+1}(f)((\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1})(x_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1})(x_n))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iota_n(<f, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1})(x_1), \ldots, \\
&\qquad\qquad (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1})(x_n)>) \\
&= \iota_n(<f, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1})(x_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1})(x_n)>) \\
&= \iota_n(<f, \mathrm{app}_{D_i}(x_1), \ldots, \mathrm{app}_{D_i}(x_n)>) \\
&= \iota_n(\mathrm{app}_{F_n \times D_i^n}(<f, x_1, \ldots, x_n>)) \\
&= \mathrm{app}_{D_{i+1}}(\iota_n(<f, x_1, \ldots, x_n>)).
\end{aligned}
$$

5. Wieder beweisen wir die Aussage durch vollständige Induktion nach i. Im Fall $i = 0$ enthält D_0 nur das Element $\perp$, woraus

$$\mathcal{V}_{D_0}^{-1}(x) = \perp = \mathcal{V}_{D_j}^{-1}(x)$$

folgt. Im Fall $i+1$ unterscheiden wir drei Fälle.

(a) Ist $x = \perp$, so folgt wieder $\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) = \perp = \mathcal{V}_{D_j}^{-1}(x)$.

(b) Ist $x = \iota_0(c)$, so folgt wegen $i > 0$

$$\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) = c = \mathcal{V}_{D_j}^{-1}(x).$$

(c) Ist $x = \iota_n(<f, x_1, \ldots, x_n>)$, so folgt wegen $x_1, \ldots, x_n \in D_i$ sofort

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1}(x) &= f(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x_1)) \\
&= f(\mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1}(x_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_{j-1}}^{-1}(x_1)) \quad \text{Ind. Vor.} \\
&= \mathcal{V}_{D_j}^{-1}(x).
\end{aligned}
$$

□

Nach dieser Vorbereitung erhalten wir folgenden Satz.

Satz 7.18 *Sei* (Σ, L) *eine algebraische Spezifikation und* $(D_i, \phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *das System aus Definition 7.16. Dann ist* $(D_i, \phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *ein gerichtetes System von termerzeugten Modellen von* (Σ, L).

Beweis: Alle D_i sind endlich. Daher wird D_i aufgrund der Definition 6.1 einer Kongruenzerweiterung zu einem Bereich, falls Ξ_i eine approximationserhaltende und symmetrische Relation auf D_i ist.

Die Symmetrie erhalten wir aus

$$
\begin{aligned}
x \equiv_i y &\Leftrightarrow (\Sigma, L) \vdash \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x) = \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y) \\
&\Leftrightarrow (\Sigma, L) \vdash \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y) = \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x) \\
&\Leftrightarrow y \equiv_i x.
\end{aligned}
$$

Die Relation $\equiv_i$ ist auch approximationserhaltend. Für $j \leq i$ erhält man nämlich aus 7.17 Punkt 3-5 wegen $\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x) \in \mathcal{CT}_\Sigma^\emptyset$

$$\begin{aligned}
x \equiv_i y \quad &\Leftrightarrow \quad (\Sigma, L) \vdash \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x) = \mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y) \\
&\Rightarrow \quad (\Sigma, L) \vdash V_j(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(x)) = V_j(\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(y)) \\
&\Leftrightarrow \quad (\Sigma, L) \vdash (\mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(x) = (\mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathcal{V}_{D_j} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(y) \\
&\Leftrightarrow \quad (\Sigma, L) \vdash (\mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathrm{app}_{D_j})(x) = (\mathcal{V}_{D_j}^{-1} \circ \mathrm{app}_{D_j})(y) \\
&\Rightarrow \quad (\Sigma, L) \vdash (\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \mathrm{app}_{D_j})(x) = (\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \mathrm{app}_{D_j})(y) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{app}_{D_j}(x) \equiv_i \mathrm{app}_{D_j}(y).
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Monotonie unterscheiden wir wieder zwei Fälle. Der Fall $i = 0$ ist trivial. Im Fall $i + 1$ sei $x_1 \sqsubseteq y_1, \ldots x_n \sqsubseteq y_n$. Dann folgt die Behauptung mit der Monotonie der Approximationsabbildungen und Injektion ι_n, der Definition der Produktordnung und Lemma 7.17 Punkt 4 aus

$$\begin{aligned}
\phi_{i+1}(f)(x_1, \ldots, x_n) &= \iota_n(<f, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1})(x_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1})(x_n)>) \\
&= \iota_n(<f, \mathrm{app}_{D_i}(x_1), \ldots, \mathrm{app}_{D_i}(x_n)>) \\
&\sqsubseteq \iota_n(<f, \mathrm{app}_{D_i}(y_1), \ldots, \mathrm{app}_{D_i}(y_n)> \\
&= \iota_n(<f, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1})(y_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_{i+1}}^{-1})(y_n)> \\
&= \phi_{i+1}(f)(y_1, \ldots, y_n).
\end{aligned}$$

Da alle D_i endlich sind, sind somit die $\phi_i(f)$ auch stetig.

Sei nun $(\Sigma, L) \vdash t = t'$, wobei höchstens die Variablen $x_1, \ldots, x_m$ in t und t' vorkommen, und $v : X \longrightarrow D_i$ eine Belegung. Da $\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} = \mathtt{id}_{D_i}$ nach Lemma 7.17 Punkt 4 gilt, folgt mit dem Substitutionslemma

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{D_i}(t)[v] &= \mathcal{V}_{D_i}(t)[v\{x_1 \leftarrow (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(v(x_1))\}, \ldots, \{x_m \leftarrow (\mathcal{V}_{D_i} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(v(x_m))\}] \\
&= \mathcal{V}_{D_i}(t[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))]).
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\mathcal{V}_{D_i}(t')[v] = \mathcal{V}_{D_i}(t'[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))])$. Da nun aber

$$t[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))] = t'[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))]$$

und damit auch

$$\begin{aligned}
&V_i(t[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))]) \\
&\qquad = V_i(t'[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))])
\end{aligned}$$

in (Σ, L) herleitbar ist, folgt mit Lemma 7.17 Punkt 3 und der Definition von $\equiv_i$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_{D_i}(t[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))]) \\
&\qquad \equiv_i \mathcal{V}_{D_i}(t'[x_1/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_1)), \ldots, x_m/\mathcal{V}_{D_i}^{-1}(v(x_m))]).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit $\mathcal{V}_{D_i}(t)[v] \equiv_i \mathcal{V}_{D_i}(t')[v]$.

Da $\mathcal{V}_{D_i}^{-1}$ total ist, ist D_i ein termerzeugtes Modell.

Als letztes bleibt uns noch zu zeigen, daß jeweils ein adjungiertes Paar zwischen D_i und D_{i+1} existiert. Wir zeigen hier wieder nur, daß diese Abbildungen kongruenzerhaltend sind. Die Projektion von D_{i+1} nach D_i ist die i-te Approximation, und die Einbettung von D_i nach D_{i+1} ist die Identität auf D_i. Da beide Abbildungen kongruenzerhaltend sind, folgt die Behauptung. □

Im folgenden wollen wir die Klasse der Modelle einer Spezifikation näher betrachten. Zur semantischen Beschreibung einer Programmiersprache, die auf algebraischen Spezifikationen aufbaut, sind wir insbesondere am initialen Modell der Spezifikation interessiert. Mit Hilfe solcher Modelle kommen wir einer sogenannten „fully abstract“ Semantik nahe, da die Trägermenge nicht zu „viele“ kompakte Elemente beinhaltet. Modelle mit „kleinerer“ Trägermenge können zur abstrakten Interpretation einer solchen Sprache verwendet werden.

Wir benötigen zunächst den Begriff eines Homomorphismus in unserer Klasse von Modellen.

Definition 7.19 (Σ-Homomorphismus) *Sei (Σ, L) eine algebraische Spezifikation , und seien $(A, \phi_A), (B, \phi_B)$ Modelle von (Σ, L). Eine stetige und kongruenzerhaltende Abbildung $G : A \longrightarrow B$ heißt ein Σ-Homomorphismus, falls $G \circ \mathcal{V}_A = \mathcal{V}_B$ für alle $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ gilt.* □

Damit wird die Klasse der Modelle mit Σ-Homomorphismen zu einer Kategorie. Das initiale Objekt dieser Kategorie ist in den termerzeugten Modellen zu suchen, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 7.20 *Sei (Σ, L) eine algebraische Spezifikation, (A, ϕ_A) ein termerzeugtes, (B, ϕ_B) ein beliebiges Modell von (Σ, L), und seien $G, H : A \longrightarrow B$ zwei Σ-Homomorphismen von A nach B. Dann gilt $G = H$.*

Beweis: Sei $x \in A$. Dann ist $x = \mathsf{sup}\,\{\mathrm{app}_K(x) \mid K \in \mathcal{K}\}$. Da $\mathrm{app}_K(x)$ kompakt ist und A termerzeugt, gibt es zu jedem K einen Term t_K mit $\mathcal{V}_A(t_K) = \mathrm{app}_K(x)$. Mit der Stetigkeit von G und H folgt die Behauptung aus

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & G(\mathsf{sup}\,\{\mathrm{app}_K(x) \mid K \in \mathcal{K}\}) \\
& = & G(\mathsf{sup}\,\{\mathcal{V}_A(t_K) \mid K \in \mathcal{K}\}) \\
& = & \mathsf{sup}\,\{(G \circ \mathcal{V}_A)(t_K) \mid K \in \mathcal{K}\} \\
& = & \mathsf{sup}\,\{\mathcal{V}_B(t_K) \mid K \in \mathcal{K}\} \\
& = & \mathsf{sup}\,\{(H \circ \mathcal{V}_A)(t_K) \mid K \in \mathcal{K}\} \\
& = & H(\mathsf{sup}\,\{\mathcal{V}_A(t_K) \mid K \in \mathcal{K}\}) \\
& = & H(\mathsf{sup}\,\{\mathrm{app}_K(x) \mid K \in \mathcal{K}\}) \\
& = & H(x).
\end{array}$$

□

Damit sind wir in der Lage, das initiale Modell wie üblich auszuzeichnen. Wie oben schon angedeutet ist dieses Modell ein initiales Objekt in der Kategorie der Modelle und damit bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Definition 7.21 (Initiales Modell) *Ein termerzeugtes Modell I heißt initial, falls es von I zu jedem Modell A (genau) einen Σ-Homomorphismus gibt.* □

Wir gehen nun zum inversen Limes der Retraktionsfolge aus Definition 7.16 über.

Satz 7.22 *Sei (Σ, L) eine algebraische Spezifikation und $(D_i, \phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ das System aus Definition 7.16. Dann ist $D_\infty := (\mathtt{lim}\ (D_i, \varphi_i^j, \psi_i^j), \phi_\infty)$ mit*

- $\varphi_i^j := \mathrm{app}_{D_i}$,
- $\psi_i^j := \mathtt{id}$,
- $\phi_\infty(c) := <\phi_0(c), \phi_1(c), \ldots>$,
- $\phi_\infty(f)(x_1, \ldots, x_n) :=$
  $<\phi_0(f)(\varphi_0^\infty(x_1), \ldots, \varphi_0^\infty(x_n)), \phi_1(f)(\varphi_1^\infty(x_1), \ldots, \varphi_1^\infty(x_n)), \ldots>$,

das initiale Modell von (Σ, L).

Beweis: Wir zeigen hier nur, daß D_∞ initial ist. Alle anderen Eigenschaften folgen aus der Definition von D_∞.

Sei dazu (A, ϕ_A) ein weiteres Modell von (Σ, L). Dann definieren wir einen Σ-Homomorphismus von D_∞ nach A durch

$$G(x) := \mathtt{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Offensichtlich ist G stetig, da G per Definition eine stetige Fortsetzung von monotonen Funktionen auf endlichen Teilordnungen der induktiven Ordnung A ist.

Sei nun $x \equiv y$. Dann folgt, daß G kongruenzerhaltend ist mit den Modelleigenschaften von A aus

$$\begin{aligned}
x \equiv_\infty y \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} : \varphi_i^\infty(x) \equiv_i \varphi_i^\infty(y) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} : \Sigma \vdash (\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(x) = (\mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(y) \\
&\Rightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} : (\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(x) \equiv (\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(y) \\
&\Rightarrow \quad \mathtt{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(x) \mid i \in \mathbb{N}\} \equiv \mathtt{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(y) \mid i \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow \quad G(x) \equiv G(y).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $G \circ \mathcal{V}_{D_\infty} = \mathcal{V}_A$ für alle $t \in \mathcal{T}_\Sigma^\emptyset$ ist. Dies beweisen wir durch Induktion über den Termaufbau. Im Fall $t \in C \cup \{\perp\}$ folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
(G \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t) &= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(<\perp, t, t, \ldots>) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(\perp), (\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(t)\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{\perp, \mathcal{V}_A(t)\}\\
&= \mathcal{V}_A(t).
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $\phi_A(f)$ und

$$\begin{aligned}
&(G \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(f(t_1, \ldots, t_n))\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(f(t_1, \ldots, t_n)) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty)(\phi_\infty(f)(\mathcal{V}_{D_\infty}(t_1), \ldots, \mathcal{V}_{D_\infty}(t_n))) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(\phi_i(f)((\varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots, (\varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n))) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(\iota_n(<f, (\mathcal{V}_{D_{i-1}} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots,\\
&\qquad (\mathcal{V}_{D_{i-1}} \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1} \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n)>)) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(\iota_n(<f, (\mathrm{app}_{D_{i-1}} \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots,\\
&\qquad (\mathrm{app}_{D_{i-1}} \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n)>)) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(\iota_n(<f, (\varphi_{i-1}^i \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots,\\
&\qquad (\varphi_{i-1}^i \circ \varphi_i^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n)>)) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_i}^{-1})(\iota_n(<f, (\varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots, (\varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n)>)) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{\mathcal{V}_A(f((\mathcal{V}_{D_{i-1}}^{-1} \circ \varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots, (\mathcal{V}_{D_{i-1}}^{-1} \circ \varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n))) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \mathsf{sup}\,\{\phi_A(f)((\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_{i-1}}^{-1} \circ \varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots,\\
&\qquad (\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_{i-1}}^{-1} \circ \varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n)) \mid i \in \mathbb{N}\}\\
&= \phi_A(f)(\mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_{i-1}}^{-1} \circ \varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1) \mid i \in \mathbb{N}\}, \ldots,\\
&\qquad \mathsf{sup}\,\{(\mathcal{V}_A \circ \mathcal{V}_{D_{i-1}}^{-1} \circ \varphi_{i-1}^\infty \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n) \mid i \in \mathbb{N}\})\\
&= \phi_A(f)((G \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_1), \ldots, (G \circ \mathcal{V}_{D_\infty})(t_n))\\
&= \phi_A(f)(\mathcal{V}_A(t_1), \ldots, \mathcal{V}_A(t_n))\\
&= \mathcal{V}_A(f(t_1, \ldots, t_n))
\end{aligned}$$

erhalten wir den Induktionsschritt. □

In diesem Kapitel haben wir uns aus technischen Gründen auf einsortige Spezifikationen beschränkt. Beim Übergang zur Mehrsortigkeit erhält man ein verschränkt rekursives System von Bereichen. Die Konstruktion des inversen Limes eines solchen Systems ist aufgrund der Funktoreigenschaft der Bereichskonstruktoren stets möglich. Somit lassen sich die Ergebnisse dieses Kapitels auf allgemeine Spezifikationen übertragen.

8 Zusammenfassung

In diesem Artikel haben wir gezeigt, daß die Bereiche mit Keimen um bestimmte Kongruenzen erweitert werden können. Dadurch waren wir in der Lage, semantische Bereiche direkt aus einer algebraischen Spezifikation zu gewinnen, ohne die in der Einleitung erwähnten Nachteile zu erhalten. Dieser Ansatz kann zur Beschreibung von Programmiersprachen mit Spezifikationsansätzen verwendet werden. Eine solche Anwendung könnte im HOPS-System (**H**igher **O**bject **P**rogramming **S**ystem) liegen, das an der Universität der Bundeswehr entwickelt wird. Mit Hilfe der Approximationsabbildung ist es möglich, bei einer gegebenen Semantik zu einer abstrakten Interpretation der Sprache überzugehen. Diese Möglichkeit bietet ein weites Feld zur Anwendung dieser Theorie. Bisher können nur Spezifikationen erster Ordnung behandelt werden. Daher wird sich eine weitere Arbeit mit der Konstruktion semantischer Bereiche aus Spezifikationen höherer Ordnung beschäftigen.

Literatur

[Abadi Plotkin 90] Abadi M., Plotkin G. D.: A Per Model of Polymorphism and Recursive Types. IEEE 5th Ann. Symp. on Logic in Comput. Sci., 355-365 (1990)

[Asperti Longo 91] Asperti A., Longo G.: Categories, Types and Structures. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England (1991)

[Jiři et al. 91] Jiři J., Nelson E., Reiterman J.: Tree constructions of free continuous algebras. J. Comput. Syst. Sci. 24, 128-149 (1982)

[Jouannoud Okada 91] Jouannoud J. P., Okada M.: Executable higher-order algebraic specification languages. Proc. STACS '91, LNCS 480, Springer, 16-25 (1991)

[Gunter 85] Gunter C.: Profinite solutions for recursive domain equations. Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania (1985)

[Möller 85] Möller B.: On the algebraic spezification of infinite objects — Ordered and continuous models of algebraic types. Acta Informat. 22, 537-578 (1985)

[Schmidt et al. 86] Schmidt G., Berghammer R., Zierer H.: Beschreibung semantischer Bereiche mit Keimen. In: Berichte aus Informatik-Instituten / 9. Jahrestagung der österreichischen Gesellschaft für Informatik, Radermacher F.J., Wirsing M., eds.: Techn. Report MIP 8604 der Fakultät für Mathematik und Informatik der Univ. Passau, 199-216 (1986)

[Schmidt et al. 89] Schmidt G., Berghammer R., Zierer H.: Describing semantic domains with sprouts. Acta Informat. 27, 217-245 (1989)

[Schmidt Ströhlein 89] Schmidt G., Ströhlein T.: Relationen und Graphen. Springer (1989); English version: Relations and Graphs. Discrete Mathematics for Computer Scientists, EATCS Monographs on Theoret. Comput. Sci., Springer (1993)